Гомогенізація волокнистого композиту із транстропними компонентами при зсувних деформаціях

Поздовжній зсув. Запишемо основні співвідношення, що характеризують чистий поздовжній зсув у циліндричній області (рис. 4.1).

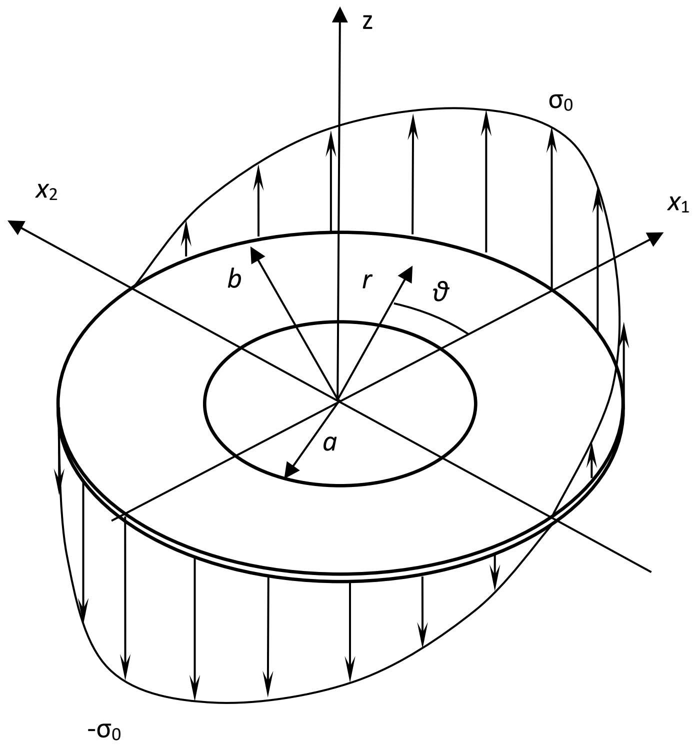

Рис. 4.1. Крайові умови (для напружень $\sigma_{zr}(b,\theta)$) при поздовжньому зсуві в кільці

У випадку поздовжнього зсуву напружено-деформований стан визначається такими співвідношеннями: $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{zr} = \sigma_{zr}(r,\theta)$, $\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(r,\theta)$; $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$, $\gamma_{zr} = \gamma_{zr}(r,\theta)$, $\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}(r,\theta)$.

Для того, щоб змоделювати напружено-деформований стан чистого поздовжнього зсуву в циліндричній області нескінченної довжини, необхідно до зовнішньої циліндричної поверхні області прикласти таке навантаження:

$$\sigma_{zr}(b,\theta) = \sigma_0 \cos\theta, \tag{4.1}$$

а напружено-деформований стан чистого зсуву характеризуватиметься такими співвідношеннями:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0.$$

Тоді з трьох рівнянь рівноваги залишається тільки одне, яке матиме вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0, \qquad (4.2)$$

або в переміщеннях:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0. \qquad (4.3)$$

Розв’язком цього рівняння буде функція:

$$u_z(r,\theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right), \qquad (4.4)$$

тоді, можемо отримати співвідношення для деформацій:

$$\gamma_{\theta z}(r,\theta) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial \theta} = -\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right) sin\,\theta\,;$$

$$\gamma_{zr}(r,\theta) = \frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right), \qquad (4.5)$$

а співвідношення для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_{zr}(r,\theta) = G_{12}\left(C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right);$$

$$\sigma_{z\theta}(r,\theta) = -G_{12}\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{4.6}$$

Розглянемо задачу про сумісний поздовжній зсув суцільного циліндра $(0 \le r \le a)$, що моделює волокно, та порожнистого циліндра $(a \le r \le b)$, що моделює матрицю.

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан матриці (нескінчений порожнистий циліндр), набудуть вигляду (перепозначимо в співвідношеннях (4.4)-(4.6) C_1 на A, а C_2 на B):

$$u_z^*(r,\theta) = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\cos\theta, \tag{4.7}$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r,\theta) = -\left(A + \frac{B}{r^2}\right)\sin\theta\,; \gamma_{zr}^*(r,\theta) = \left(A - \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$\sigma_{zr}^*(r,\theta) = G_{12}^*\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta\,; \sigma_{z\theta}^*(r,\theta) = -G_{12}^*\left(A + \frac{B}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{4.8}$$

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна (нескінчений суцільний циліндр), з урахуванням скінченності переміщень при $r = 0$ (в співвідношеннях (4.4)-(4.6) $C_2 = 0$), набудуть вигляду (перепозначимо C_1 на C):

$$u_z^\circ(r,\theta) = \mathrm{C}r\cos\theta, \tag{4.9}$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = -\mathrm{C}\sin\theta\,;\ \gamma_{zr}^\circ(\theta) = \mathrm{C}\cos\theta, \tag{4.10}$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = G_{12}^\circ\mathrm{C}\cos\theta\,;\ \sigma_{z\theta}^\circ(\theta) = -G_{12}^\circ\mathrm{C}\sin\theta. \tag{4.11}$$

Щоби знайти невідомі сталі в співвідношеннях (4.7)-(4.11) для задачі про сумісний поздовжній зсув матриці і волокна, скористаємося крайовою умовою (4.1) та умовами неперервності на межі розділу матеріалів:

$$\sigma_{zr}^{\circ}(\theta) = \sigma_{zr}^{*}(a,\theta), \tag{4.12}$$

$$u_z^{\circ}(a,\theta) = u_z^{*}(a,\theta). \tag{4.13}$$

Із (4.1) маємо:

$$A = \frac{\sigma_0}{G_{12}^{*}} + \frac{B}{b^2}. \tag{4.14}$$

Із (4.13), з урахуванням (4.14), отримуємо

$$\mathrm{C} = \frac{\sigma_0}{G_{12}^{*}} + B\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right). \tag{4.15}$$

И, насамкінець, із (4.12) з урахуванням (4.14), (4.15), маємо

$$B = \frac{\sigma_0 a^2 (G_{12}^{\circ} - G_{12}^{*})}{G_{12}^{*}\big(G_{12}^{*}(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)\big)}. \tag{4.16}$$

Тоді

$$\mathrm{C} = \frac{-2\sigma_0}{\big(G_{12}^{*}(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)\big)}, \tag{4.17}$$

$$A = \frac{-\sigma_0 (G_{12}^* + G_{12}^\circ)}{G_{12}^* \big(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\big)}. \tag{4.18}$$

Враховуючи (4.16), (4.18) запишемо основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан матриці при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^*(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*\big(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\big)} \Big(-(G_{12}^* + G_{12}^\circ) r +$$

$$+ \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r}\Big) \cos\theta, \tag{4.19}$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*\big(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\big)} \Big(G_{12}^* + G_{12}^\circ -$$

$$- \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2}\Big) \sin\theta,$$

$$\gamma_{zr}^*(r,\theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^*\big(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\big)} \Big(G_{12}^* + G_{12}^\circ +$$

$$+ \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2}\Big) \cos\theta, \tag{4.20}$$

$$\sigma_{zr}^*(r,\theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \Big(G_{12}^* + G_{12}^\circ +$$

$$+ \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2}\Big) \cos\theta;$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \Big(G_{12}^* + G_{12}^\circ -$$

$$- \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2}\Big) \sin\theta. \tag{4.21}$$

Враховуючи (4.17), запишемо основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^{\circ}(r,\theta)=\frac{-2\sigma_0 r\cos\theta}{G_{12}^{*}(f-1)-G_{12}^{\circ}(f+1)},\tag{4.22}$$

$$\gamma_{\theta z}^{\circ}(\theta)=\frac{2\sigma_0\sin\theta}{G_{12}^{*}(f-1)-G_{12}^{\circ}(f+1)};$$

$$\gamma_{zr}^{\circ}(\theta)=\frac{-2\sigma_0\cos\theta}{G_{12}^{*}(f-1)-G_{12}^{\circ}(f+1)},\tag{4.23}$$

$$\sigma_{zr}^{\circ}(\theta)=\frac{-2\sigma_0 G_{12}^{\circ}\cos\theta}{G_{12}^{*}(f-1)-G_{12}^{\circ}(f+1)};$$

$$\sigma_{z\theta}^{\circ}(\theta)=\frac{2\sigma_0 G_{12}^{\circ}\sin\theta}{G_{12}^{*}(f-1)-G_{12}^{\circ}(f+1)}.\tag{4.24}$$

Ефективні пружні сталі волокнистого композиту із транстропними компонентами при зсувних деформаціях

Розв’яжемо аналогічну задачу про чистий поздовжній зсув для транстропного однорідного матеріалу, що моделює композит. В цій задачі композиційний матеріал представиться у вигляді суцільного нескінченного циліндра радіусом b. Крайові умови набудуть вигляду (4.1). Напружено-деформований стан описуватиметься співвідношеннями, аналогічними співвідношенням для волокна, таким чином, для компонент переміщень, деформацій та напружень маємо:

$$u_z(r,\theta)=\tilde{A}r\cos\theta,\tag{4.25}$$

$$\gamma_{\theta z}(r,\theta)=-\tilde{A}\sin\theta;\ \gamma_{zr}(r,\theta)=\tilde{A}\cos\theta,\tag{4.26}$$

$$\sigma_{zr}(r,\theta)=\tilde{A}G_{12}\cos\theta;\ \sigma_{z\theta}(r,\theta)=-\tilde{A}G_{12}\sin\theta.\tag{4.27}$$

Із крайової умови (4.1) знайдемо сталу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \frac{\sigma_0}{G_{12}}. \qquad (4.28)$$

Тоді матимемо:

$$u_z(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos\theta, \qquad (4.29)$$

$$\gamma_{\theta z}(r,\theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin\theta\, ; \gamma_{zr}(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos\theta, \qquad (4.30)$$

$$\sigma_{zr}(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \cos\theta\, ;\ \sigma_{z\theta}(r,\theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \sin\theta. \qquad (4.31)$$

Таким чином, маємо розв'язок задачі на чистий поздовжній зсув для сумісного деформування нескінченних порожнистого та суцільного циліндрів, що моделюють, відповідно, матрицю і волокно, і для нескінченного суцільного циліндра, що моделює композиційний матеріал. Умову узгодження можна використати таку. Рівність осьових переміщень на зовнішній межі:

$$u_z(b,\theta) = u_z^*(b,\theta). \qquad (4.32)$$

Використовуючи рівність (4.19), маємо:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^*\left(G_{12}^*(1-f) + G_{12}^\circ(f+1)\right)}{G_{12}^\circ(1-f) + G_{12}^*(f+1)}. \qquad (4.33)$$