Гомогенізація композиту з порожнистими волокнами

Проведемо дослідження поперечного вісесиметричного розтягу односпрямованого композиційного матеріалу з порожнистим волокном. Для цього, спочатку, отримаємо основні співвідношення, що описують напруження та переміщення транстропного композиту.

Напружено-деформований стан циліндричного тіла в цьому випадку буде характеризуватися наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r),\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r),\ \sigma_{zz} = \sigma_0,\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zr} = 0. \qquad (8.1)$$

Рівняння рівноваги, виконуються тотожно, окрім одного, яке набуде вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \qquad (8.2)$$

З урахуванням (8.1), де осьове напруження – стала величина, можемо припустити, що $\sigma_{zz} = 0$. Тоді з виду напружено-деформованого стану тіла випливає, що ε_{rr} та $\varepsilon_{\theta\theta}$ – функції радіальної координати r, тобто $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$, а $\varepsilon_{zz} = const.$

Скориставшись співвідношеннями Коші та зворотнім законом Гука для транстропного матеріалу, рівняння (8.2) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \qquad (8.3)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння відносно радіальних переміщень u_r (8.3) запишемо у вигляді:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \qquad (8.4)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з крайових умов.

Тоді співвідношення для деформацій, з урахуванням (8.4), запишуться у вигляді:

$$\varepsilon_{rr}(r) = C_1 - \frac{C_2}{r^2},$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \tag{8.5}$$

Запишемо вирази для радіальних та осьових напружень:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1+\nu_{23}) - \frac{C_2}{r^2}(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})\right)}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}},$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1+\nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})\right)}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \tag{8.6}$$

Співвідношення для ε_{zz} знайдемо, підставляючи значення $\sigma_{zz} = \sigma_0$ та (8.6) у вираз осьових деформацій. Отримаємо:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{1-\nu_{23}}\left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} - 2C_1\nu_{21}\right). \tag{8.7}$$

Використовуючи співвідношення Коші, проінтегруємо (8.7) за умови $\varepsilon_{zz} = const$ та отримаємо вираз для осьових переміщень:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz}dz = \frac{1}{1-\nu_{23}}\left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} - 2C_1\nu_{21}\right)z + C_3. \tag{8.8}$$

За умови $u_z(0)=0$, маємо $C_3=0$. Тоді зі співвідношення (8.8) отримаємо вираз для осьових переміщень:

$$u_z(z)=\frac{1}{1-\nu_{23}}\left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1}-2C_1\nu_{21}\right)z. \qquad (8.9)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (8.9), матимемо наступні вирази для радіальних та окружних напружень:

$$\sigma_{rr}(r)=E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})}+\frac{C_1}{1-\nu_{23}}-\frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta}(r)=E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})}+\frac{C_1}{1-\nu_{23}}+\frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right). \qquad (8.10)$$

Отримані співвідношення (8.4), (8.9) та (8.10) утворюють повний набір компонент для вісесиметричного напружено-деформованого стану, як функцій пружних характеристик транстропного матеріалу і сталих C_1 та C_2, які знаходяться з крайових умов.

Розглянемо сумісний вісесиметричний поперечний розтяг елементарної комірки композиту у вигляді комбінації двох порожнистих циліндрів з радіусами $(c\le r\le a)$, що моделює порожнисте волокно, і $(a\le r\le b)$, що моделює матрицю (рис. 8.1 а).

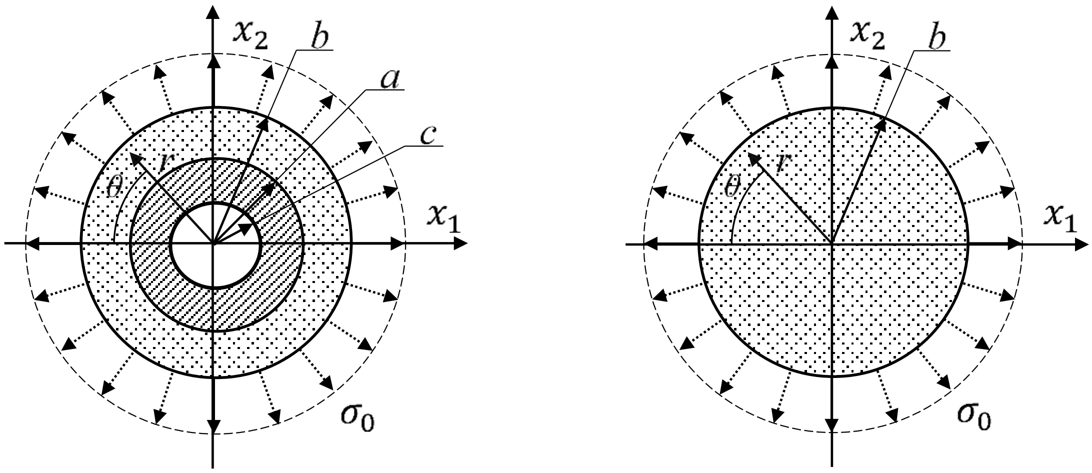
Перепозначимо в виразах (8.4), (8.9) та (8.10) C_1 на A, C_2 на B. Тоді напружено-деформований стан транстропної матриці буде описуватися наступними співвідношеннями:

$$u_r^*(r)=Ar+\frac{B}{r},$$
$$u_z^*(z)=\frac{1}{1-\nu_{23}^*}\left(\frac{\sigma_0^*(1-\nu_{23}^*-2\nu_{21}^*\nu_{12}^*)}{E_1^*}-2A\nu_{21}^*\right)z,$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2(1+\nu_{23}^*)}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2(1+\nu_{23}^*)}\right). \qquad (8.11)$$

Тут і далі символ ° позначає величини, що відносяться до волокна, а символ $*$ – величини, що відносяться до матриці.



а б

Рис. 8.1. Поперечний розтяг: а – сумісне деформування матриці та порожнистого волокна; б – деформування композита

Аналогічно запишуться співвідношення, які описують напружено-деформований стан порожнистого трансверсально-ізотропного волокна (перепозначимо C_1 на C, C_2 на D):

$$u_r^\circ(r) = Cr + \frac{D}{r},$$

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ}\left(\frac{\sigma_0^\circ\left(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ\right)z,$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = E_2^\circ\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ\left(1-\nu_{23}^\circ\right)} + \frac{C}{1-\nu_{23}^\circ} - \frac{D}{r^2\left(1+\nu_{23}^\circ\right)}\right),$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta}(r) = \overset{\circ}{E}_2\left(\frac{\overset{\circ}{\sigma}_0\overset{\circ}{\nu}_{12}}{\overset{\circ}{E}_1\left(1-\overset{\circ}{\nu}_{23}\right)} + \frac{C}{1-\overset{\circ}{\nu}_{23}} + \frac{D}{r^2\left(1+\overset{\circ}{\nu}_{23}\right)}\right). \tag{8.12}$$

При моделюванні сумісного поперечного вісесиметричного розтягу, умовами узгодження будуть виступати рівність радіальних та осьових переміщень, а також радіальних напружень на межі «матриця-порожнисте волокно»:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr}(a) = \sigma^*_{rr}(a), \overset{\circ}{u}_r(a) = u^*_r(a), \overset{\circ}{u}_z(h) = u^*_z(h). \tag{8.13}$$

Радіальні напруження на зовнішній поверхні матриці опишуться умовою:

$$\sigma^*_{rr}(b) = \sigma_0. \tag{8.14}$$

Крім того, відсутнє напруження по внутрішній стінці порожнистого волокна:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr}(c) = 0. \tag{8.15}$$

Невідомі сталі A, B, C, D зі співвідношень (8.11) та (8.12) знайдемо, виходячи з крайових умов (8.13)–(8.15).

З (8.14), з урахуванням $\nu^*_{12}/E^*_1 = \nu^*_{21}/E^*_2$, отримаємо:

$$A = \frac{1}{E^*_2}\left(\sigma_0(1-\nu^*_{23}) - \sigma^*_0\nu^*_{21}\right) + \frac{B(1-\nu^*_{23})}{b^2(1+\nu^*_{23})}. \tag{2.17}$$

З другої умови (2.14), використовуючи (2.17), з урахуванням (2.1), матимемо:

$$C = \frac{1}{E_2^*}(\sigma_0(1-\nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*) + B\,\frac{(f+g)(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)}{a^2(1+\nu_{23}^*)} - \frac{D}{a^2}. \quad (8.17)$$

Прийнявши такі позначення

$$h_1 = \frac{1+\nu_{23}^*}{2E_2^\circ}, h_2 = \frac{(f+g)(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)}{a^2(1+\nu_{23}^*)}, \quad (8.18)$$

з урахуванням (8.16) та (8.17), з першої рівності (8.13), маємо

$$D = -a^2\left(\sigma_0 h_1\left(1-\nu_{23}^\circ\right) - \sigma_0^\circ\nu_{21}^\circ h_1 - \frac{1+\nu_{23}^\circ}{2E_2^*}(\sigma_0(1-\nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*)\right) -$$

$$-Bh_1a^2\left(1-\nu_{23}^\circ\right)\left(\frac{E_2^*(f+g-1)}{a^2(1+\nu_{23}^*)} - \frac{E_2^\circ h_2}{1-\nu_{23}^\circ}\right). \quad (8.19)$$

Перепишемо (8.17). Врахувавши (8.19), отримаємо

$$C = Bh_2 + \sigma_0 h_1\left(1-\nu_{23}^\circ\right) - \sigma_0^\circ\nu_{21}^\circ h_1 + \frac{1+\nu_{23}^\circ}{2E_2^*}(\sigma_0(1-\nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*) +$$

$$+Bh_1\left(1-\nu_{23}^\circ\right)\left(\frac{E_2^*(f+g-1)}{a^2(1+\nu_{23}^*)} - \frac{E_2^\circ h_2}{1-\nu_{23}^\circ}\right). \quad (8.20)$$

Тоді з крайової умови (8.15), з урахуванням (8.19) та (8.20), знайдемо B:

$$B = \frac{a^2(1+\nu_{23}^*)}{E_2^*\left(2g + f\left(1-\nu_{23}^\circ\right)\right)(f+g-1) - a^2 f E_2^\circ h_2(1+\nu_{23}^*)} \times$$

$$\times\left(\frac{E_2^\circ}{E_2^*}(\sigma_0(1-\nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*)f - (f+g)\left(\sigma_0\left(1-\nu_{23}^\circ\right) - \sigma_0^\circ\nu_{21}^\circ\right) -\right.$$

$$\left.-g\left(\sigma_0\left(1+\nu_{23}^\circ\right) + \sigma_0^\circ\nu_{21}^\circ\right)\right). \quad (8.21)$$

Прийнявши наступні позначення

$$\eta = E_2^*\left(2g + f\left(1 - \nu_{23}^{\circ}\right)\right)(f + g - 1) - fE_2^{\circ}\left((f + g)(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)\right),$$

$$\eta_1 = \frac{E_2^{\circ}}{E_2^*}(\sigma_0(1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*)f - (f + g)\left(\sigma_0\left(1 - \nu_{23}^{\circ}\right) - \sigma_0^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right) -$$

$$-g\left(\sigma_0\left(1 + \nu_{23}^{\circ}\right) + \sigma_0^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right), \qquad (8.22)$$

перепишемо вирази (8.16), (8.19) та (8.20) з урахуванням (8.21) та (8.22).

Матимемо наступні співвідношення для всіх чотирьох невідомих сталих:

$$A = (f + g)(1 - \nu_{23}^*)\frac{\eta_1}{\eta} + \frac{1}{E_2^*}(\sigma_0(1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*),$$

$$B = a^2(1 + \nu_{23}^*)\frac{\eta_1}{\eta},$$

$$C = \frac{1 - \nu_{23}^{\circ}}{2E_2^{\circ}}\frac{\eta_1}{\eta}\left(E_2^*\left(1 + \nu_{23}^{\circ}\right)(f + g - 1) + E_2^{\circ}(f + g)(1 - \nu_{23}^*) +\right.$$

$$\left.+E_2^{\circ}(1 + \nu_{23}^*)\right) + \frac{1 + \nu_{23}^{\circ}}{2E_2^{\circ}}\left(\sigma_0\left(1 - \nu_{23}^{\circ}\right) - \sigma_0^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right) +$$

$$+\frac{1 - \nu_{23}^{\circ}}{2E_2^*}(\sigma_0(1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*),$$

$$D = -a^2\left(\frac{1 + \nu_{23}^{\circ}}{2E_2^{\circ}}\frac{\eta_1}{\eta}\left(E_2^*\left(1 - \nu_{23}^{\circ}\right)(f + g - 1) - E_2^{\circ}(f + g)(1 - \nu_{23}^*) -\right.\right.$$

$$\left.-E_2^{\circ}(1 + \nu_{23}^*)\right) + \frac{1 + \nu_{23}^{\circ}}{2E_2^{\circ}}\left(\sigma_0\left(1 - \nu_{23}^{\circ}\right) - \sigma_0^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right) +$$

$$\left.-\frac{1 + \nu_{23}^{\circ}}{2E_2^*}(\sigma_0(1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^*\nu_{21}^*)\right). \qquad (8.23)$$

Залежність між σ_0 та σ_0°, σ_0^* – осьовими напруженнями, які діють на транстропний матеріал порожнистого волокна та матриці, відповідно, знайдемо з третьої рівності (8.13). При цьому, виходячи з рівності осьових переміщень для довільної осьової координати, $\overset{\circ}{\sigma}_0$, σ_0^* – сталі величини.

Прийнявши наступні позначення

$$d^* = \frac{\nu_{21}^*}{E_2^*}\left(\overset{\circ}{\nu}_{21}\left(\frac{\tau}{\eta}f + 1\right) - \frac{2\nu_{21}^*}{1-\nu_{23}^*} - 2\nu_{21}^*\overset{\circ}{E}_2 f\frac{f+g}{\eta}\right) - \frac{1-\nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)},$$

$$\overset{\circ}{d} = \frac{\overset{\circ}{\nu}_{21}}{\overset{\circ}{E}_2}\left(\overset{\circ}{\nu}_{21}\left(\frac{\tau}{\eta}f + 1\right) - \frac{2\overset{\circ}{\nu}_{21}}{1-\overset{\circ}{\nu}_{23}} - 2\nu_{21}^*\overset{\circ}{E}_2 f\frac{f+g}{\eta}\right) - \frac{1-\overset{\circ}{\nu}_{23} - 2\overset{\circ}{\nu}_{21}\overset{\circ}{\nu}_{12}}{\overset{\circ}{E}_1\left(1-\overset{\circ}{\nu}_{23}\right)},$$

$$d_0 = \left(\frac{\overset{\circ}{\nu}_{21}}{\overset{\circ}{E}_2}\frac{\tau}{\eta} - 2\nu_{21}^*\frac{f+g}{\eta}\right)\left(\frac{\overset{\circ}{E}_2}{E_2^*}f(1-\nu_{23}^*) - f\left(1-\overset{\circ}{\nu}_{23}\right) - 2g\right) -$$

$$- \frac{2\nu_{21}^*}{E_2^*} + \frac{\overset{\circ}{\nu}_{21}}{\overset{\circ}{E}_2}\left(1+\overset{\circ}{\nu}_{23}\right) + \frac{\overset{\circ}{\nu}_{21}}{E_2^*}(1-\nu_{23}^*), \quad (8.24)$$

де $\tau = E_2^*\left(1+\overset{\circ}{\nu}_{23}\right)(f+g-1) + \overset{\circ}{E}_2\left((f+g)(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)\right)$, маємо

$$d^*\sigma_0^* - \overset{\circ}{d}\overset{\circ}{\sigma}_0 = d_0\sigma_0. \quad (8.25)$$

Ефективні пружні сталі композиту з порожнистими волокнами

Змоделюємо тепер поперечний розтяг для однорідного транстропного матеріалу, що моделює композит (рис. 8.1 б). У цьому випадку поле напружень буде визначатися наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zr} = 0. \quad (8.26)$$

Радіальні переміщення описуватимуться співвідношенням (8.4). Оскільки при $r = 0$ матимемо $u_r(0) = 0$, тоді $C_2 = 0$.

Тоді, радіальні та осьові переміщення в цьому випадку визначатимуться формулами:

$$u_r(r) = C_1 r,\ u_z(z) = -\frac{2C_1\nu_{21}}{1-\nu_{23}} z, \tag{8.27}$$

а зі співвідношень (8.10) отримаємо вирази для радіальних та окружних напружень у вигляді:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{C_1 E_2}{1-\nu_{23}}, \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{C_1 E_2}{1-\nu_{23}}. \tag{8.28}$$

Аналогічно до (8.14) матимемо крайову умову

$$\sigma_{rr}(b) = \sigma_0. \tag{8.29}$$

Враховуючи, що значення виразів (8.28) – сталі величини, можемо записати наступне:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0. \tag{8.30}$$

Рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу з урахуванням (8.26) та (8.30), матимуть вигляд:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2},\ \varepsilon_{zz} = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1}. \tag{8.31}$$

Переміщення отримаємо, використовуючи співвідношення Коші. Проінтегрувавши (8.31), отримаємо:

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2} r + C_1,$$

$$u_z(z) = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1} z + C_2. \tag{8.32}$$

За умови, що $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, сталі C_1 та C_2 дорівнюють нулю, тоді співвідношення (8.32) перепишуться наступним чином:

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2} r,\ u_z(z) = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}}{E_1} z. \quad (8.33)$$

Для того, щоб задачі про сумісний поперечний розтяг компонентів композиту та про розтяг однорідного транстропного матеріалу були еквівалентні необхідно, щоб для умов рівноваги у обох задачах виконувалася рівність:

$$\pi(a^2 - c^2)\sigma_0^{\circ} + \pi(b^2 - a^2)\sigma_0^{*} = 0. \quad (8.34)$$

Перейшовши в (8.34) до об'ємних часток складових композиту, отримуємо:

$$\sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^{*}(1 - f - g) = 0. \quad (8.35)$$

З останнього виразу, з урахуванням (8.25), отримуємо:

$$\sigma_0^{*} = \sigma_0 \frac{d_0 f}{d^{*} f + d^{\circ}(1 - f - g)},\ \sigma_0^{\circ} = \sigma_0 \frac{d_0(f + g - 1)}{d^{*} f + d^{\circ}(1 - f - g)}. \quad (8.36)$$

Умовами узгодження для сумісного розв'язування двох сформульованих задач, є рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні та рівність осьових переміщень для довільної осьової координати:

$$u_r(b) = u_r^{*}(b),\ u_z(h) = u_z^{\circ}(h) = u_z^{*}(h). \quad (8.37)$$

З першої умови (8.37), з урахуванням (8.36), маємо такий пружний коефіцієнт:

$$\frac{1-\nu_{23}}{E_2}=\frac{2f(f+g)\overset{\circ}{E}_2+\eta}{\eta E_2^*}\left((1-\nu_{23}^*)-\frac{d_0 f\nu_{21}^*}{d^* f+d^\circ(1-f-g)}\right)-$$
$$-2\frac{f+g}{\eta}\left(f\left(1-\overset{\circ}{\nu}_{23}\right)-\frac{\overset{\circ}{d}(f+g-1)(f+2g)\overset{\circ}{\nu}_{21}}{d^* f+\overset{\circ}{d}(1-f-g)}+2g\right). \quad (8.38)$$

Перепозначивши в останньому виразі

$$\gamma_1=(1-\nu_{23}^*)-\frac{d_0 f\nu_{21}^*}{d^* f+d^\circ(1-f-g)},$$
$$\gamma_2=\left(1-\overset{\circ}{\nu}_{23}\right)-\frac{\overset{\circ}{d}(f+g-1)\overset{\circ}{\nu}_{21}}{d^* f+d^\circ(1-f-g)}, \quad (8.39)$$

отримаємо

$$\frac{1-\nu_{23}}{E_2}=\frac{2f(f+g)\overset{\circ}{E}_2+\eta}{\eta E_2^*}\gamma_1-2\frac{(f+g)(f+2g)}{\eta}\gamma_2-\frac{4g(f+g)\overset{\circ}{\nu}_{23}}{\eta}. \quad (8.40)$$

Вираз (8.40) надалі використаємо для знаходження розрахункових формул поперечного модуля пружності E_2 та коефіцієнта Пуассона ν_{23}.