В.І. Оспіщев, Д.О. Пруненко,
Д.Л. Бурко, О.М. Єрмак, Я.В. Санько

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ХАРКІВ – ХНАМГ – 2008

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

В.І. Оспіщев, Д.Л. Бурко, Д.О. Пруненко, О.М. Єрмак, Я.В. Санько

Навчальний посібник

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

(для студентів напрямку підготовки 0306 – «Менеджмент і адміністрування» спеціальності «Менеджмент»)

ХАРКІВ – ХНАМГ – 2008

УДК 519.8(075)
ББК 65я73
В.І. Оспіщев, Д.О. Пруненко, Д.Л. Бурко, О.М. Єрмак, Я.В. Санько Дослідження операцій: Навчальний посібник (для студентів напрямку підготовки 0306 – «Менеджмент і адміністрування»). /За ред. В.І. Оспіщева – Харків: ХНАМГ, 2008. – 136 с.

У посібнику викладено теоретичні основи дослідження операцій. Для закріплення знань з кожної теми пропонуються приклади вирішення задач, тести. Навчальний посібник потрібний для студентів усіх форм навчання, а також може бути корисний для викладачів, аспірантів, які працюють в навчальних закладах.

Друкується як навчальний посібник за рішенням Вченої ради ХНАМГ, протокол № від 2008 р.

Рецензенти: В.І. Торкатюк, д.т.н. професор, академік Академії будівництва України;
Г.В. Ковалевський, д.е.н., професор кафедри маркетингу і менеджменту в міському господарстві ХНАМГ.

© Оспіщев В.І., Пруненко Д.О., Єрмак О.М., Санько Я.В., ХНАМГ, 2007

ЗМІСТ

Стор.

Вступ..... 4

Тема 1. Предмет та задачі дисципліни..... 6

Тема 2 Методи економіко-математичного моделювання..... 12

Тема 3 Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів..... 31

Тема 4. Оптимізаційні задачі управління запасами..... 51

Тема 5. Завдання масового обслуговування..... 70

Тема 6. Задачі впорядкування і координації. Мережне планування..... 80

Тема 7. Задачі та моделі заміни..... 103

Тема 8. Теорія гри..... 110

Тема 9. Багатокритеріальні задачі в менеджменті..... 117

Тести з дисципліни «Дослідження операцій»..... 125

Ключі вірних відповідей на тести з дисципліни ”Дослідження операцій”…….. 135

Список літератури..... 136

ВСТУП

Дослідження операцій – комплексна наукова дисципліна, яка має важливе методологічне значення в системі підготовки сучасного економіста. В ній чітко реалізується ідея вивчення курсу вищої математики на факультеті менеджменту – ідея математичного моделювання економічних процесів.

Дисципліна дослідження операцій – займається розробкою та практичним застосуванням методів найбільш ефективного управління різними організаційними системами.

Об’єктом теорій дослідження операцій є організаційно-управлінські системи. До них відносяться: підприємства, об’єднання, установи матеріально-технічного постачання і торгівлі, НДІ та ВНЗи, міністерства, відомства, системи

розподілу матеріальних, фінансових і трудових ресурсів, нинішнього і перспективного планування і таке інше.

Управління будь-якою системою реалізується як процес, підпорядкований визначеним закономірностям. Їх значення допомагає визначити умови, необхідні і достатні для здійснення даного процесу. Для цього всі параметри, що характеризують процес і зовнішні умови, повинні бути кількісно визначені, виміряні. Тобто, мета дослідження операцій – кількісне обгрунтування рішень, які приймаються з організації управління.

При вирішенні конкретної задачі управління, застосування методів дослідження операцій припускає:

- побудову економічних і математичних моделей для задач прийняття рішення у важких ситуаціях або в умовах невизначеності;
- вивчення взаємозв’язків, що визначають внаслідок прийняття рішень та встановлення критеріїв ефективності, дозволяючи оцінити перевагу того чи іншого варіанта дії.

Предметом вивчення дисципліни “Дослідження операцій” є моделі та методи системного аналізу, способи дослідження і оптимізація операцій.

Міждисциплінарні зв’язки: “Дослідження операцій” викладається після вивчення студентами дисципліни “Вища математика”, сприяє вивченню курсу “Економетрія”, “Операційний менеджмент”.

Основною метою викладання є формування в майбутніх менеджерів теоретичних знань і практичних навиків формалізації задач управління з використанням спеціальних оптимізаційних методів.

Основними задачами вивчення дисципліни є: надання студентам знань відносно суті етапів операцій; основних принципів і прийомів математичного моделювання операцій; принципів підбору математичного і програмного забезпечення практичної реалізації задач;а також формування в студентів вміння:

- постановка і рішення організаційних задач з використанням математичного апарату;
- вирішення задачі оптимального розподілу ресурсів;
- вирішення оптимізаційної задачі управління ресурсами масового обслуговування, упорядкування й координації;
- будувати й оптимізувати сітчаті моделі;
- вирішувати задачі з умовами невизначеності й конфлікту;
- використовувати методики багатокритеріальної оптимізації управлінських рішень;
- використовувати прикладні програми при проведенні обчислень на ПЕВМ і зрівняння можливих альтернатив;
- проводити післяоптимізаційний аналіз і розробку практичних рекомендацій для прийняття рішень.

ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ ТА ЗАДАЧІ ДИСЦИПЛІНИ

1. Основні поняття дисципліни “Дослідження операцій”

Для розкриття цього питання треба засвоїти основні поняття і визначення дослідження операцій.

Операція - це будь-який керований захід, спрямований на досягнення мети. Результат операції залежить від способу її проведення, організації, тобто від вибору деяких параметрів. У широкому сенсі операція – це сукупність дій (заходів) для досягнення мети.

Всякий визначений вибір параметрів називається рішенням. Оптимальними вважають ті рішення, які по тим чи іншим міркуванням віддають перевагу іншим. Тому, основною задачею дослідження операцій є передчасне кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

Система – це цілісна численність об’єктів (елементів), пов’язаних взаємними відношеннями. Таким чином, система – це складна єдність, в якій можуть бути виділені складові частини – елементи, зв’язки або відношення між елементами і середовищем. Системи, до складу яких входять люди, називаються організаційними.

Системи діляться на статистичні (з одним становищем) та динамічні (безліч становищ). Вважається, що численність елементів системи може бути надійною структурою. Структура – це мережа зв’язків або відношень між складовими частинами системи.

Спрямоване вимірювання структури в співвідношенні до цілей, випливаючи з інтересів, називається організацією системи. Структура характеризує систему в стані спокою статики, а організація – в динаміці. Знімок організації системи для кожного даного моменту часу є її структура.

Поняття “Мета” в “дослідженні операцій” – центральне. Звичним у відношенні до “Мети” вважається сукупність суспільних та особистих потреб членів суспільства. Потреба є несумісністю між бажаним і дійсним станом

системи, станом напруження або нерівноваги в оточенні і в самій системі. Напруження породжує прагнення до дії, спрямовані на відновлення рівноваги, тобто, на задоволення потреб. Потреби породжують інтереси.

Інтереси безліч можливих станів, серед яких знаходяться рівноважні. Мета визначає бажаний стан системи або бажаний результат її поведінки.

Наряду з поняттям мети ми будемо користуватися поняттям критерій або целева функція (функціональні цілі). Критерій – це правило, за яким обираються засоби досягнення мети. Якщо мета вказує на бажаний стан системи, направлення дій в області інтересів, то критерій – це ефективний спосіб її досягнення. Критерій дозволяє обирати засоби досягнення мети та відповідає на питання: якою ціною вона може бути досягнена?

Поряд з "метою" і "задачею" ми будемо користуватися поняттям "проблема" – потенціальна мета, для якої не знайдені альтернативні способи її досягнення. Проблем в будь-якій області діяльності більше, аніж може бути поставлено цілей і задач. Якщо "мета" – бажаний стан системи, то "проблема" є несумісність між бажаним і дійсним. Виявлення проблеми – важливий етап процесу прийняття рішень.

Будь-яка діяльність людей переслідує визначену мету. Саму діяльність назвемо операцією. При її виповненні можуть брати участь різні ресурси: предмети і засоби праці, виробництва, матеріали, енергія, транспорт, грошові засоби, час, і самі учасники – люди. Якщо в операції беруть участь колективи, то для впорядкування їх дій необхідний якийсь орган керівництва. Представлення керівницького органу у ході операції до її початку є задум. Деталізований задум, конкретизованими критеріями і розподільними ресурсами, представляють собою план операції. Мета операції – бажаний стан об'єкту після перетворення його сукупністю дій або бажаний результат діяльності. Досягнення мети пов'язане з затратами.

Мірою ефективності досягнення мети служить критерій ефективності. Для реалізації мети найбільш ефективним шляхом треба управляти сукупністю дій. Керівна дія , або управління – поняття багатозначне. Під управлінням будемо

розуміти будь-який вплив на об’єкт з метою збереження його стійкості(організації) або переводу системи з одного стану в інший у відповідності з метою управління, виробленою в самій системі або заданій ззовні.

Поняття “управління” будемо розуміти в широкому та вузькому сенсі слова. Управління в широкому сенсі передбачає прогнозування та планування економічних процесів; у вузькому – сукупність впливів, спрямованих на реалізацію системи бізнес-плану.

Системний підхід – наукова основа обґрунтування і прийняття рішень в економіці. Системний підхід має на увазі облік факторів, які впливають на рішення задачі, взаємодію системи з навколишнім середовищем.

Системний підхід, як основний метод аналізу і синтезу оптимальних рішень в економіці, реалізується за допомогою математичного моделювання. Моделі аналізу і синтезу служать відображеними прообразами реальних систем, процесів, явищ, і т.д. Вони мають форму функцій, рівнянь, нерівностей, упорядкованого набору чисел і ін. Системний підхід представляє собою сукупність методологічних принципів та теоритичних положень, які дозволяють розглядати кожен елемент системи в його зв’язку і взаємодії з іншими.

Таким чином, ми розкрили перше питання “Основні поняття дисципліни “Дослідження операцій”.

2. Економіко-математичні моделі та методи

Одним з основних понять прийняття рішень є поняття моделі системи, процесу або операції. Модель – деяке відображення оригіналу. Коли архітектор замість справжнього будинку будує його макет – це вже модель. Модель будинку може бути представлена у вигляді макету, кресленнях або колонах цифр і формул, за якими можна судити про особливості будинку. Менш звичне уявлення про те, що фотознімок пейзажу, географічна карта – це модель

місцевості. І, мабуть, новим для багатьох є те, що знайома зі шкільних літ формула шляху $S=V \cdot t$ – математична модель. Під моделлю будемо розуміти умовний образ будь-якого об’єкту, який приблизно відтворює цей об’єкт за допомогою деякої мови. В економіко-математичних моделях таким об’єктом є економічний процес (наприклад, використання ресурсів, розподіл виробів між різними типами устаткування і т.ін.), а мовою – класичні і спеціально розроблені математичні методи.

Ступінь відповідності кількості елементів моделі кількості елементів оригіналу, зв’язків і відношень може бути різною. Можна говорити про те, що одна модель більше відповідає оригіналу, чим інша, тобто про адекватність моделі оригіналу.

Процес побудови моделі в тому чи іншому ступені, який відповідає оригіналу, називають моделюванням.

Економіко-математична модель – математичний опис економічного об’єкту, чи процесу. Ця модель виражає закономірності економічного процесу в абстрактному виді за допомогою математичних відношень. Використання математичного моделювання в економіці дозволяє поглибити кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації, ідентифікувати економічні обчислення.

Для застосування кількісних методів дослідження треба побудувати математичну модель операції. При побудові моделі операції, як правило, спрощується, схематизується і схема операції описується за допомогою того чи іншого математичного апарату. Модель операції – це достатньо точний опис операції за допомогою математичного апарату(різного роду функцій, рівнянь, систем рівнянь і нерівностей і ін. Складання моделі операцій вимагає розуміння сутності явища, яке описує та знання математичного апарату.

Ефективність операції – ступінь її пристосування до виконання задачі – кількісно виражається у вигляді критерію ефективності – цільової функції. Наприклад, у задачі про використання ресурсів-критеріїв ефективності, прибуток від реалізації виробленої продукції, яку треба максимізувати, у

транспортній задачі – сумарні витрати на перевозку вантажів від поставщиків до споживачів які треба мінімізувати. Вибір критерію ефективності визначає практичну цінність дослідження. Неправильно вибраний критерій може принести шкоду. Достатньо згадати „вал”, який приводив до невиправданих затрат.

Існують наступні типові моделі дослідження операцій:

1) розподілу;

2) управління запасами;

3) масового обслуговування;

4) упорядкування;

5) вибору маршруту;

6) заміни;

7) пошуку;

8) конфліктних ситуацій;

9) змішаного типу та ін.

Всі ці задачі докладно будемо розглядати в наступних темах і на практичних заняттях.

Успіх та ефективність дослідження операцій забезпечуються лише в тому випадку, якщо усвідомлена структура дослідження, коли вона реалізується практично, постійно становиться краще в методологічному і математичному відношеннях. Тому виникає необхідність складати визначену схему, яка установлює найбільш доцільну послідовність дій, спрямованих на досягнення мети, тобто виникає задача виробу типового технологічного процесу, дослідження операцій.

Таким чином, ми розглянули й друге питання „Економіко-математичні моделі та методи”.

І на закінчення слід відмітити, що тут ми висловили основні поняття дисципліни „Дослідження операцій”, розкрили сутність економіко-математичної моделі та моделювання.

Уся дисципліна „Дослідження операцій” складається: з 17 годин лекцій, 34 годин практичних занять, 57 годин самостійної роботи студентів. Крім цього, для кращого засвоєння сутності дисципліни передбачається числено-графічна робота, що складає 12 годин. Вивчення курсу закінчується заліком.

Зміст предмету дисципліни „Дослідження операцій” складається з 9 тем, одну з яких ми вже розглянули. Інші 8 мають такі назви: „Методи економіко-математичного моделювання”; „Задачі й моделі оптимального розподілу ресурсів”; „Оптимізаційні задачі управління запасами”; „Задачі масового обслуговування, задачі упорядкування і координацій”; „Мережне планування”; „Задачі й моделі заміни”; „Задачі та умови невизначеності і конфлікту”; „Багатокритеріальні задачі в менеджменті”.

Запитання для самоконтролю

1. Розкрити поняття „Дослідження операцій”.
2. Об’єкти теорії „дослідження операцій”. Мета „Дослідження операцій”.
3. Основні задачі вивчення дисципліни „Дослідження операцій”.
4. Від чого залежить результат операцій?
5. Які рішення вважають оптимальними?
6. Розкрити поняття „системний підхід”, що він собою представляє?
7. Навести приклади моделі. Економіко-математична модель.
8. Які існують типові моделі дослідження операцій?
9. Які етапи повинен вміщати типовий процес?

ТЕМА 2. МЕТОДИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Економіко-математичні методи – узагальнююча назва комплексу економічних та математичних наукових дисциплін, уведена академіком В.С.Немчиновим на початку 60-х років XX століття. Загальноприйнята класифікація цих дисциплін, які є сплавом економіки, математики та кібернетики, поки що не вироблена. З відомою часткою умовностей її можна уявити у вигляді наступної схеми :

1. Принципи економіко-математичних методів:

- Теорія економіко-математичного моделювання, включаючи економіко - статистичний;
- Теорія оптимізації економічних процесів.

2. Математична статистика (її економічні додатки):

- дисперсійний аналіз;
- кореляційний аналіз;
- регресивний аналіз;
- факторний аналіз;
- теорія індексів.

3. Математична економія та економетрія:

- теорія економічного росту;
- теорія виробничих функцій;
- міжгалузеві баланси;
- національні рахунки, інтегрування;
- математично-фінансові баланси;
- аналіз попиту та споживання;
- регіональний та просторовий аналіз;
- глобальне моделювання.

4. Методи прийняття оптимальних рішень, включаючи дослідження операцій.

5. Економіко-математичні методи, специфічні для економіки держави в цілому.

6. Економічна кібернетика;

7. Методи експериментального вивчення економічних явищ.

Економіко-математичне моделювання:

1) опис економічних процесів та явищ у вигляді економіко-математичних моделей;

2) реалізація економіко-математичної моделі на ПЕОМ, тобто “ штучний експеримент ”, або “ машина імітація ”;

3) машинне вирішення економіко-математичної задачі.

Як і всяке моделювання, економіко-математичне моделювання базується на принципі аналогії, тобто можливості вивчення об’єкта небезпосередньо, а крізь розгляд другого, подібного йому та більш доступного об’єкта, наприклад, його моделі. В даному випадку таким більш доступним об’єктом є економіко-математична модель. Як вже відмічалося, модель – деяке відображення оригіналу.

Практичними задачами моделювання є:

- по-перше, аналіз економічних об’єктів;
- по-друге, економічне прогнозування, передбачення розвитку господарюючих процесів;
- по-третє, вироблення управлінських рішень на всіх рівнях господарюючої ієрархії.

Останнє наполягає на поясненнях. Далеко не у всіх випадках дані, отримані із ЕММ (економіко-математичних моделей), можуть користуватися безпосередньо як готові керівницькі рішення. Значно більше вони використовуються в якості „консультуючих ” засобів, прийняття ж самих керівницьких рішень залишається за людиною. Це пояснюється надзвичайною складністю економічних та соціально-економічних процесів. Економіко-математичне моделювання, таким чином, є лише компонентом, хоча і дуже

важливим, у людино-машинних системах планування та правління національної економіки.

Ще одна важлива особистість ЕМ моделювання. Ускладнюючи модель, щоб зробити її більш точнішою та докладною, необхідно знати: чи компенсує отримана точність результатів обчислюванні труднощі? Та навпаки, вирішуючи виключити будь-який елемент з моделі, щоб зробити її більш простою, необхідно оцінити втрати в її достовірності, тобто чи не обійдуться вони дорожче, ніж виграш від спрощення розрахунків?

У дослідженні операцій існують детерміновані та недетерміновані задачі. Детерміновані задачі – це задачі, при яких вважається, що кожна стратегія, котра обирається керівником, призводить до єдиного заздалегідь відомого результату. У таких задачах критерієм для вибору стратегії є корисність (інакше кажучи, обирається та стратегія, котра гарантує найкращий результат).

Імовірна модель – це модель, яка на відміну від детермінованої моделі містить випадкові елементи. Їх друга назва – стохастичні моделі, або недетерміновані моделі. Таким чином, при завданні на вході моделі деякої сукупності значень, на її виході можуть бути отримані результати, що відрізняються між собою в залежності від дії випадкового фактора. Імовірні ЕМ-моделі краще , ніж детерміновані відображають дійсні властивості економічних процесів та явищ, інакше кажучи, вони адекватні ймовірній економічній системі, тому їх застосування в дослідженнях та на практиці планування повинно розширюватися.

1. Економіко-математичні моделі та їх класифікація

Економіко-математична модель – математичний опис досліджуваного економічного процесу чи об’єкту. В самій загальній формі модель – це умовний образ об’єкта дослідження, сконструйований для спрощення цього дослідження. За властивостями моделі ми можемо судити не про всі

властивості об’єкта, а лише про ті, які аналогічні і в моделі, і в об’єкті. Такі властивості називаються істотними.

З теоретичної точки зору, модель - гоморфне відображення об’єкта дійсності, який моделюється.

Деякі автори, намагаючись глибше проникнути в процес творення моделі, стверджують, що вона ізоморфна по відношенню до деякого абстрактного образу, представленню про об’єкт, який у свою чергу є його гоморфним відображенням.

Моделі можуть бути більш чи менш точні, більш чи менш прості або складні, матеріальні(речові) та знакові(наприклад, графічні та математичні).

Матеріальні моделі знаходять широке призначення у техніці. У принципі вони можливі і в економіці.

Найважливішим засобом дослідження економіки стала економіко-математична модель. Модель може відображати внутрішню структуру об’єкта, а якщо вона не відома - то лише його поведінку.

Головною вимогою до моделі є її адекватність оригіналу.

Поняття адекватності пов’язане з такими загально-кібернетичними поняттями, як „ чорний ящик ”, ізоморфізм та гомоморфізм.

Сутність „чорного ящика” полягає в наступному. „Чорний ящик ” – це система, в якій доступні зовнішньому спостеріганню лише вхідні та вихідні величини, а внутрішній устрій не відомо. Ця образна назва будь-якого об’єкта, яке підлягає вивченню. Є припущення, що ящик відкривати заборонено. Якщо ж його буде відкрито, то мережа зв’язків елементів виявиться пошкодженою. Ось чому для виявлення внутрішньої структури об’єкта доводиться, вивчаючи властивості „ чорного ящика ” за реакціями виходу на вхід, створити гіпотезу про його внутрішню структуру. Спостерігаючи достатньо довго за поведінкою „чорного ящика”, можна передбачити зміни його вихідних координат при будь-якому заданому вимірюванні на входах. Однак може виявитися, що одним і тим же вхідним сигналам відповідають однакові системи. Системи, що

характеризуються однаковими наборами вхідних та вихідних величин й однаково реагуючі на зовнішні впливи, називаються ізоморфними.

Звідси випливає, що пояснення системи методом „чорного ящика” не може привести до однозначного виводу про її внутрішню структуру, оскільки ця система нічим не відрізняється від усіх ізоморфних. Між будь-якими ізоморфними існує відношення “оригінал-модель”, тобто будь-яку сукупність ізоморфних систем можна розглядати як оригінал або як модель .

Система, отримана з вихідної шляхом її спрощення, називається її гоморфною моделлю. Математична модель майже завжди знаходиться в гоморфному відношенні до реального об’єкта, так як досягнення повного ізоморфізму економіко-математичних моделей за сутністю неможливо.

Математичні моделі складають інструмент аналізу та вдосконалення конкретних процесів у національній економіці. Вони можуть відображати положення, в якому знаходиться піддослідна система, або зміни в часі, що виникають в економічній системі, тобто можуть описувати розвиток системи в часі. Моделі першого типу є статистичними, другого – динамічними. Якщо стан системи описується за кожний проміжок часу, то моделі називають статистичними. Модель є динамічною, якщо як мінімум одна її перемінна відноситься до періоду часу, відмінного від часу, до якого віднесені інші перемінні. Існують два принципово різних підходи побудови таких моделей. Перший підхід – конструктивний , або оптимізаційний, вихідний з признання принципової можливості управління економічним процесом. Він складається з вибору з числа можливих траєкторій (шляхів) економічного розвитку оптимальної траєкторії. Оптимальна – найкраща по відношенню до якого-небудь обраного критерію (наприклад, до того, що забезпечує найбільший об’єм фонду споживання в сумі за відповідний період).

Другий підхід – описуючий, дескриптивний. Його суть заключається в дослідженні рівноваги в економічній системі.

Таким чином, ми розглянули перше питання, де розкрили сутність економіко-математичної моделі та її класифікацію.

2. Принципи та методи побудови моделей

Під принципом (від латинського prinsipium – основа, начало) слід розуміти керівну ідею, основне правило діяльності або основу устрою ,дії якого-небудь механізму або моделі.

Дослідження операцій у різноманітних сферах економіки показує , що сам процес дослідження має багато спільного. Тому виникає необхідність скласти певну схему, яка встановлює найбільш доцільну послідовність дій, спрямованих на досягнення цілі, тобто виникає задача вироблення типового технологічного процесу дослідження операцій, виділення основних етапів прийняття рішень.

В економіці, як відмічалось раніше, типовий процес містить наступні етапи:

I. Постановка проблеми :

1. Виявлення проблеми.
2. Формування цілей та критеріїв.
3. Аналіз проблеми та її повне якісне формулювання.
4. Побудова математичної моделі.

II. Пошук оптимальних рішень:

5. Рішення математичних моделей за різноманітними цільовими функціями.
6. Синтез оптимального рішення .

III. Прийняття й реалізація рішень:

7. Прийняття рішення.
8. Впровадження (реалізація) прийнятого рішення.
9. Оцінка прийнятого результату.
10. Коректування моделі.

Охарактеризуємо коротко ці етапи.

1. Виявлення проблеми. Діагностичний аналіз процесу та оточуючого його середовище, що дозволяє виявити проблему, ставити нові задачі. Під

проблемою розуміється співвідношення між бажаним та дійсним. Так як у ході виробничої діяльності людина з одного - задовольняє свої потреби, з іншої – створює одночасно нові, то прагнення їх задовольнити породжує цілі. Між стремлінням до задоволення поставленої цілі та можливістю її здійснення можуть виникати протиріччя. Усвідомлену людиною ситуацію існування протиріч між постановленою ціллю та можливістю її здійснення назвемо проблемною ситуацією. Дослідження операцій – це науковий інструмент виявлення , аналізу та рішення проблем у складних людино - машинних системах. Очевидно, дослідження операцій повинно починатися не з формулювання проблеми, а з усвідомлення проблемної ситуації. Вона виникає при активному та усвідомленому зіткненню людини з навколишньою середою. Усвідомлення невідповідності між бажаним та дійсним дозволяє виявити проблему. Однак її можна зрозуміти та дати формалізований опис тільки за засобами аналізу та синтезу даних, відносних до проблеми. Після того, як сформульована та деталізована проблема, можна уточнити цілі, дати формалізоване вираження критерію оптимальності як засобу її досягнення.

2. Формування цілі та критеріїв оптимальності

Вибір цілі та формування системи критеріїв, дозволяючи порівнювати затрати з отриманими результатами, складає основу другого етапу. Тут важливо вибрати правильну ціль. Вона визначається в першу чергу потребами, які є вираженням невідповідності (нерівновага) між бажаним та дійсним. Так як будь-яка організаційна система призначена для найбільш повного задоволення яких-небудь потреб. Тою ціллю повинен бути рівень якості обслуговування споживачів. Наприклад, виявлення потреб логічно входить до організації торгівлі, матеріально-технічного забезпечення і ін. Крім головної цілі, в них є ряд внутрішніх цілей. До них відносять: прибуток, витрати функціонування і ін. Якщо поряд з потребами в матеріальних, фінансових та трудових ресурсах (потреби першого виду) розглядають потреби в „послугах” щодо задоволення

потреб першого виду, то можна сказати, що ціллю системи матеріально-технічного забезпечення служить установлення динамічної рівноваги в системі національної економіки. Вимірювачем ступеня цього задоволення може бути прибуток або приведенні сукупні затрати, пов'язані з функціонуванням системи. Причому, в сукупні затрати ми включаємо: капітальні - на розвиток системи, поточні експлуатаційні витрати та найголовніше - можливі втрати від несвоєчасного або неповного задоволення виявлених або невиявлених потреб.

3. Аналіз проблеми

Третій етап включає аналіз проблеми, її повне якісне формулювання. Оцінку можливості отримання необхідних даних зі статистичної звітності або шляхом їх прогнозування. Аналіз проблеми служить двом цілям:

1) реєстрації та поясненню результатів функціонування системи в минулому;

2) забезпеченню об'єктивною інформацією для управління процесом(об'єктом) у майбутньому.

Вже на стадії аналізу необхідна побудова економіко-математичних моделей (частіше – без управління). Моделі відображають процеси двох видів: тих, показники яких визначаються системою з багатьох сутньо пов'язаних факторів. Тут достатньо ефективні методи кореляційного та регресивного аналізу. Якщо піддослідний показник залежить від системи сутньо взаємозв'язаних первинних факторів, то його рівень залежить від впливу не первинних , а деяких узагальнених факторів. Це по-друге. Для аналізу таких процесів потрібні узагальненні фактори.

Найбільш ефективнішими методами виявлення кола первинних факторів та оцінки наявності узагальнюючих факторів вважаються методи факторного аналізу. Для формування узагальнюючих факторів, не залежних один від одного, кількість яких набагато менша кількості вихідних, застосовується метод головних компонентів. За його допомогою установлюється мінімальна кількість факторів та показників, досить повно відображаючи результати

функціонування об’єкта. Вирішити цю важливу проблему теорії прийняття рішення можна методами канонічного аналізу.

4. Математична модель

Четвертий етап складає формалізований опис проблеми, побудову її математичної моделі. Наявність математичного опису того чи іншого об’єкту або явища – важливий науковий результат незалежно від того, використовується воно на практиці чи ні. Математична модель відображає зв’язок між вхідними та вихідними перемінними, на базі якої може бути вироблене таке управління об’єктом (процесом), яке задовольняє заданій системі обмежень та доставляє експериментальне значення вибраної функції цілі , тобто забезпечує досягнення заданої цілі функціонування об’єкта.

Вироблення правила (відповідності, перетворення), що переводе вхідні дії у вихідні, називають ідентифікацією об’єкта. При побудові моделі доводиться враховувати тільки основні фактори та відкинути другорядні. Математичний опис об’єкта може відображати тільки ті його закономірності , які необхідні для вирішення конкретної задачі. Модель повинна бути адекватна(подібна) реальному об’єкту . У випадку побудови моделі об’єкта методами ідентифікації говорять про ступінь ідентичності моделі та об’єкта. Кількісна міра ступеня ідентичності набуває значення від нуля до одиниці. Рівняння міри степені ідентичності нулю означає повне не співвідношення моделі реальному об’єкту, а рівняння міри ступеня ідентичності одиниці – повне співвідношення моделі реальному об’єкту, тобто між вхідними та вихідними подіями існує функціональний зв’язок.

5. Вирішення моделі

Пошук шляхів вишення моделі – основа п’ятого етапу коли повинна бути дана відповідь на запитання: чи можна вирішити розроблену модель відомими методами, чи треба її спрощувати, чи треба готувати нові? Ведучу роль на етапі відіграють спеціалісти в області методів оптимізації – математики або математики-економісти, що спеціалізуються на математичних методах в економічних дослідженнях. Вони можуть заявити одне з трьох:

1. задача відома та вже вирішена;
2. це – нова задача , але вони можуть її вирішити або звести до якої-небудь відомої;
3. це – одна з тих задач, яку математики намагалися рішити, але не домоглись результату.

Тому дослідникам операцій доведеться її вирішувати, наприклад, методами імітаційного моделювання.

Вважається, що метод вирішення моделі знайдено, якщо знайдена система правил дії (програма), вказуючи, як і в якій послідовності ці правила застосувати до вихідних даних моделі, щоб отримати її вирішення. Ці правила називаються алгоритмом.

6. Порівняння вирішень задач за різними крітеріями

На шостому етапі процесу прийняття рішень порівнюються варіанти рішень за різними критеріями, попередньо оцінюється їх ефективність та пов’язані з ними наслідки, відслідковуються компромісні рішення.

Реальні ситуації, як правило, настільки важкі, що для досягнення поставленої мети необхідно одночасно враховувати кілька загальноприйнятих критеріїв оптимальності, які повинні приймати екстремальні значення.

Потяг найкраще за декількома критеріями оптимальності отримав назву багатокритеріального підходу

Однак, з математичного боку пошук оптимізації можливий, якщо обраний єдиний критерій оптимальності. У заданій області економічних можливостей різні функції цілі досягають екстремального значення в різноманітних точках. У силу реалізації цієї проблеми багатокритеріального підходу поєднана з рядом труднощів. Перше заключається у визначенні самої області компромісів. Нею називається така численність допустимих планів, для яких рішення не можуть бути покращенні одночасно за усіма локальними критеріями, тобто покращення

рішення хоча б за одним з них веде до погіршення з іншими. У даному питанні можна виділити три підходи:

1) Подальший вибір слід проводити за інтуїцією та здоровим глуздом.
2) Оптимальні рішення в області компромісів може бути виділена будь-яким механізмом випадкового вибору.
3) Формування строго наукових процедур вибору.

З останнім підходом безпосередньо зв'язана друга проблема – скалярізація, тобто розробка схеми розумного компромісу, на базі якої знаходиться найкраще рішення . ЇЇ вирішують за двома напрямами:

1) по лінії визначення поняття „справедливий компроміс"(або „справедлива ціна уступки");
2) по лінії визначення поняття „ідеальна якість" та вибору схеми компромісу за найкращим приближенням до цієї якості;

По-третє, проблема іменується нормалізацією критеріїв та з'являються випадки різноманітних масштабів їх виміру;

Четверте пов'язане з урахуванням важливості критеріїв. При її вирішені використовується принцип ,,жорсткого" і ,,гнучкого" пріоритету. У випадку жорсткого пріоритету критерії розміщуються за їх важливістю. У випадку ,,гнучкого" встановлюються „ваги" важливості кожного критерію .

Перераховані етапи прийняття рішень іменують етапом обґрунтування управлінських рішень.

7. Прийняті рішення

Розглянуті етапи поєднують під назвою „підготовка рішення" або „вироблення альтернативних рішень". Вони закінчуються підготовкою деякого проекту або декількох можливих у випадку вирішення слабоструктуризованих або неструктиризованих проблем, для яких цілі однозначно не визначені. Підготовка закінчується видачею кількох альтернативних рішень або

компромісів, якщо дослідники не володіють достатньою інформацією для синтезу єдиного оптимального рішення.

Етап „прийняття рішення” в деякому сенсі вирішальний. Усі інші - направлені на практичне виконання прийнятого. Існує дві форми вирішального прийняття рішень – єдина та колегіальна . За єдиної - широке обговорення в кращому випадку замінюється консультаціями спеціалістів, рекомендаціями науково-технічних та інших порад. Велике значення мають їх компетентність та впевненість керівника в тому, що проект підготовлений самим ретельним чином.

За колегіальною формою додатково оцінюються запропоновані проектом рішення з позиції вимог різних функціональних сфер діяльності та на стадії технічного проектування намагаються створити умови для ефективної реалізації прийнятого курсу дій. В останньому випадку можна широко застосувати методи теорії групового вибору .

8. Реалізація прийнятого рішення

До того часу, доки рішення не впроваджене в дію, це не рішення, а всього лише добрі наміри. Реалізація прийнятого рішення – найбільш трудомістка стадія цього процесу. Одним із ефективніших шляхів його реалізації є розробка автоматизованої системи управління(АСУ),до якої входять:

1) технічне завдання на проектування;

2) технічний проект;

3) робочий проект;

4) впровадження.

9. Оцінка найкращого результату та коректування моделі

Основне призначення цих етапів – замкнути зворотній зв’язок від реалізації рішень до попередніх етапів.

Зі сказаного вище виходить ,що в цьому розділі посібника ми розглянули сутність економіко-математичних моделей та їх класифікацію , а також принципи та етапи розробки моделей.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАКРІПЛЕННЯ ЗНАНЬ ЗА ТЕМОЮ

ЗАДАЧА №1

Розв'язати графічну задачу лінійного програмування

$$3X1 + X2 \Rightarrow \max; \quad (1)$$

$$X1 + 2X_2 \leq 10; \quad (2.1)$$

$$X1 - X_2 \leq 2; \quad (2.2)$$

$$X_2 \leq 4; \quad (2.3)$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0; \quad (3)$$

Рішення:

1. Рисуємо пунктирними лініями прямі

l1: $X1 + 2X_2 = 10$, l2: $X1 - X_2 = 2$, l3: $X_2 = 4$, які є межами множин точок $(X1,X_2)$, які задовольняють умовам (2.1), (2.2), (2.3) відповідно.

2. На кожній з прямих I1, I_2,1_3, позначаємо напрям у бік області, точки якої задовольняють нерівностям (2.1), (2.2), (2.3).

Цю перевірку, як правило, роблять таким чином: якщо початок координат 0 (0;0) задовольняє відповідній нерівності, то півплощина, якій належить початок координат, задовольняє цій нерівності, і ми рисуємо стрілочку в її бік. У протилежний бік рисуємо стрілочку, якщо ця нерівність не задовольняється. Після цього графічний рисунок буде виглядати так, як зображено на рисунку 2.1.

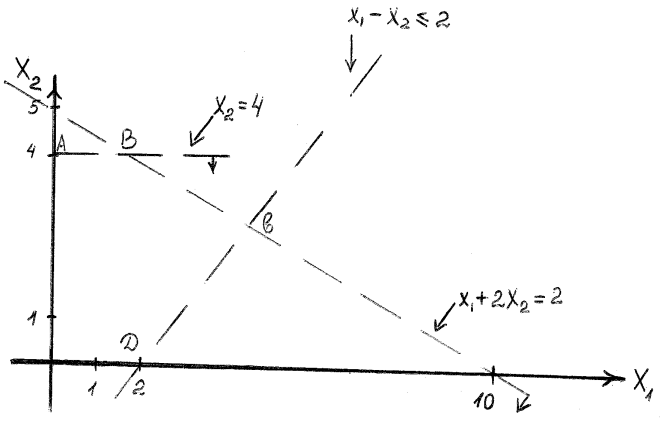

Рис. 2.1 - Графічний рисунок

3. Обводимо неперервною лінією область допустимих розв'язків, яка є перетином півплощин, точки яких задовольняють умовам (2.1) - (2.3) та першого координатного кута (те, що допустимі розв'язки лежать лише в першому координатному куті, є наслідком умов невід'ємності).

У результаті наших дій ми отримуємо деякий багатокутник, який ми замальовуємо похилими лініями та позначаємо його вершини латинськими літерами (рис. 2.2).

4. Знаходимо координати вершин багатокутника, розв'язуючи системи лінійних рівнянь. У нашому випадку маємо: OABCD - область допустимих розв'язків.

A: $\begin{Bmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 4 \end{Bmatrix}$ ⇨ A (0; 4);

B: $\begin{Bmatrix} X_1 + 2X_2 = 10 \\ X_2 = 4 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} X_1 + 8 = 10 \\ X_2 = 4 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} X_1 = 2 \\ X_2 = 4 \end{Bmatrix}$ ⇨ B (2; 4);

C: $\begin{Bmatrix} X_1 + X_2 = 10 \\ X_1 - X_2 = 2 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} 3X_2 = 8 \\ X_1 = 2 + X_2 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} X_2 = 8/3 \\ X_1 = 14/3 \end{Bmatrix}$ ⇨ C (14/3; 8/3);

D: $\begin{Bmatrix} X_1 - X_2 = 2 \\ X_2 = 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} X_1 = 2 \\ X_2 = 0 \end{Bmatrix}$ ⇨ D (2; 0);

5. Знаходимо вектор градієнту, який вказує напрям найбільшого зростання цільової функції. Його координати дорівнюють коефіцієнтам при змінних в цільовій функції. У нашому випадку grad L = { 3;1 }.

6. Наносимо пунктирною лінією промінь, вершина якого співпадає з початком координат, а його напрям співпадає з напрямом вектора градієнту.

На цьому промені лежать: точка O (0;0) та точка P, координати якої співпадають з координатами вектора градієнта F (3;1).

7. За допомогою косинця наносимо пунктирною лінією пряму p, яка відповідає наступним трьом умовам:

а) перпендикулярна до променя OF;

б) має хоча б одну спільну точку з областю допустимих розв'язків;

в) є найбільш віддаленою з усіх точок ОДР.

8. Знаходимо спільні точки прямої р та багатокутника OABCD. Зрозуміло, що в нашому випадку така точка одна, це точка С (рисунок 1.2). В ній цільова функція буде набувати найбільшого значення в порівняні з іншими точками ОДР.

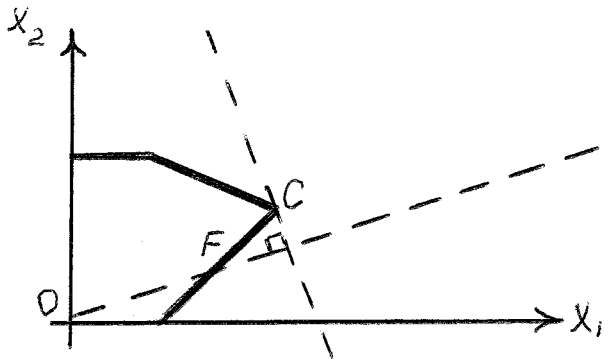

Рис. 2.2 - Спільна точка прямої Р

9. Знаходимо значення цільової функції (1) в точці С.

L (14/3; 8/3) = 3 · (14/3) + 8/3 = 14 + 8/3 = 50/3

10. Записуємо відповідь за формою:

Відповідь: оптимальне рішення задачі ЛП: X1 = 14/3; X_2 = 8/3, максимальне значення цільової функції при цьому дорівнює L max = 50/3.

ЗАДАЧА №2

Розв'язати графічно ЗЛП:

L = 8X1 + 6X_2 → max

$$4X1 + 3X_2 \le 12$$

$$X1 \le 2$$

$$X_2 \le 3$$

$$X1 \ge 0,\ X_2 \ge 0$$

Рішення:

ОДР задачі являє собою прямокутник OABCD (рисунок 2.3).

$$\begin{cases} 4X_1 + 3X_2 = 12 \\ X_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4X_1 = 3 \\ X_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 3/4 \\ X_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow B\ (3/4;\ 3)$$

$\begin{cases} 4X_1 + 3X_2 = 12 \\ X_2 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3X_2 = 4 \\ X_1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} X_2 = 4/3 \\ X_1 = 2 \end{cases}$ ⇨ C (2; 4/3)

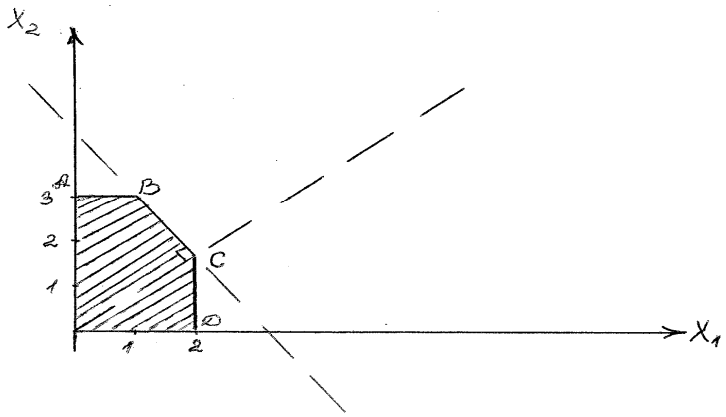

Рис. 2.3- Прямокутник OABCD

Направляючий вектор n прямої $4X1+3X_2=12$ колінеарний до вектора градієнта цільової функції:

n = {4; 3} L = {8; 6} 8/4 = 6/3 ⇨ L = 2n.

У цьому випадку, як видно з рис. 2.3, існує нескінченна множина рішень і точки, які відповідають цим рішенням, являють собою відрізок BC. Для того, щоб знайти найбільше значення цільової функції, достатньо підставити в цільову функцію координати однієї з точок відрізку BC, наприклад, точки B:

L (B) = 8·3/4 + 6·3 = 24.

Відповідь: оптимальне рішення X1 = 3/4; X_2 = 3, найбільше значення цільової функції L = 24.

ЗАДАЧА №3

Розв'язати графічно ЗЛП:

$X1 + X_2 \rightarrow \max$

$X1 - X_2 \leq 2$

$X1 + 2X_2 \geq 4$

$X_2 \leq 3$

$X1 \geq 0,$

$X_2 \geq 0$

Рішення: ОДР задачі зображена на рисунку 2.4 і являє собою необмежену область.

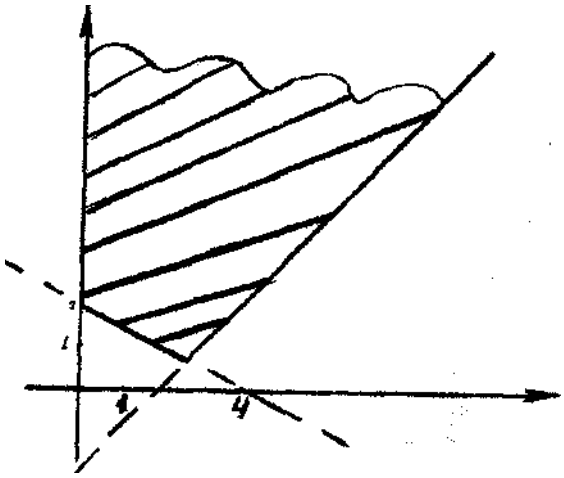

Рис. 2.4 – Необмежена область

Будь-яка пряма, направляючим вектором якої є вектор градієнту L= {1; 1}, буде мати точки перетину з ОДР. Це означає, що цільова функція не обмежена на ОДР задачі, і максимального рішення задачі не існує.

Відповідь: не існує максимального рішення задачі.

1.2. Розв'язання задач ЛП за допомогою симплекс-методу

Покажемо застосування цього методу на прикладі:

ЗАДАЧА №4

Розв'язати задачу ЛП за допомогою симплекс-методу

$$L = X1 + 2X_2 \Rightarrow \max \quad (1)$$

$$X1 + X_2 \leq 8 \quad (2.1)$$

$$X_1 \leq 6 \quad (2.2)$$

$$X_2 \leq 4 \quad (2.3)$$

$$X1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \quad (3)$$

У задачі обмеження задані у вигляді нерівностей. Зведемо їх за допомогою введення нових змінних X_3, X_4 , X_5 до обмежень у вигляді рівностей.

Ми бачимо, що кількість базисних змінних дорівнює 3 (кількість базисних змінних дорівнює кількості обмежень 2), а кількість небазисних змінних дорівнює 2 (кількість змінних мінус кількість базисних змінних).

$$X_1 + X_2 + X_3 = 8 \quad (4)$$

$$X_1 + X_4 = 6 \quad (5)$$

$$X_2 + X_5 = 4 \quad (6)$$

Виразимо базисні змінні через небазисні:

$$X_3 = 8 - X_1 - X_2 \quad (7)$$

$$X_4 = 6 - X_1 \quad (8)$$

$$X_5 = 4 - X_5 \quad (9)$$

Покладемо небазисні змінні рівними до нуля $X_1 = X_2 = 0$, тоді базисні змінні дорівнюють $X_3 = 8$; $X_4 = 6$; $X_5 = 4$. Це рішення не є оптимальним, тому що в цільовій функції (1), коефіцієнти при змінних додатні (оптимальний розв'язок був би оптимальним, якщо коефіцієнти при всіх змінних у цільовій функції були б від'ємними).

Далі ми включаємо до числа базисних ту зі змінних, в якої максимальний додатній коефіцієнт у цільовій функції. Коефіцієнт при змінній X_2 більше відповідного коефіцієнта при змінній X_1, тому в базис ми вводимо змінну X_2.

Нам потрібно вирішити, яка зі змінних вилучається з числа базисних. Вилучається з числа базисних та змінна i* в якої:

$$\frac{|b_{j*}|}{|a_{ij*}|} = \min_{a_{ij*}<0} \frac{|b_j|}{|a_{ij*}|} \quad (10)$$

де j* - змінна, яку ми вводимо до числа базисних;

$в_i$ - вільний член рівнянь (7, 8, 9), тобто числа 8,6,4,

a_{ij} * - коефіцієнти при змінній, яку ми вводимо до числа базисних (у нашому випадку це змінна X_2 і відповідні коефіцієнти дорівнюють -1; 0; -1).

Відношення (10) ми знаходимо лише для базисних змінних, в яких a_{ij} * < 0, тобто серед тих змінних, які мають у правій частині від'ємний коефіцієнт при небазисній змінній, яка вводиться до числа базисних.

У нашому випадку:

$$\begin{vmatrix} X_3 = 8/4 \\ X_4 - \\ X_5 = 4/1 \end{vmatrix}$$ де X_5 = 4/1 вилучається з базису

Вилучається з числа базисних та змінна, в якої це відношення є мінімальним.

В нашому випадку це змінна X_5 .

За допомогою алгебраїчних перетворень виразимо нові базисні змінні та цільову функцію через небазисні змінні:

$X_2 = 4 - X_5$;

Запитання для самоконтролю

1. Розповісти схему економіко-математичних методів. Поняття економіко-математичного методу.
2. Детерміновані та недетерміновані задачі. У чому їх відмінності ?
3. Етапи формування рішень. Охарактеризуйте їх.
4. Алгоритм методу вирішення моделі.
5. Підходи до рішення задачі.
6. Що таке автоматизована система управління?

ТЕМА 3. ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Ринкова система – де національна економіка розглядається в єдності всіх її частин, що розвиваються, динамічну, оптимізаційну, з урахуванням чинників дії з навколишнім середовищем. В основу теорії її оптимального функціонування встановлений принцип оптимальності. Вдосконалення управління є безперервним пошуком нового, більш високого рівня господарювання. Тенденція до оптимуму об'єктивно властива економічним процесам в ринковій економіці. Це значить, що об'єктивно існує критерій для оцінки оптимуму, тобто тенденція до оптимуму прокладається незалежно від розробки теорій оптимуму. Якщо тенденція до оптимуму об'єктивна, вона повинна прокладати собі шлях незалежно від того, навчилися люди формувати і вирішувати відповідні ЕМ задачі чи ні. Використання ЕММ (економіко-математичні моделі) дозволяє повніше, краще, швидше реалізувати цю тенденцію.

Проблема економічного оптимуму припускає:

1. Виробничі ресурси суспільства обмежені. Основний з них – робочий час. Обмежені й природні ресурси: земля, сировина, можливості навколишнього середовища і т.д.
2. Через обмеженість виробничих ресурсів на кожному фіксованому проміжку часу перед суспільством встає складна проблема розподілу матеріальних благ і організації їх відтворювання. Причому, існує безліч різних способів їх використовування. При розподілі матеріальних ресурсів, про організацію процесу відтворювання суспільство повинне встановити ступінь переваги задоволення першочергових потреб. Для цього потрібно порівняти матеріальні і духовні блага з погляду їх суспільної корисності, внеску в рівень добробуту людей.
3. Отже, повинна існувати об'єктивна мета суспільства. Її досягнення може бути формалізовано в деякій цільовій функції (або в їх наборі) – критерії

оптимальності. Побудова цільової функції в свою чергу вимагає невідкладного вирішення проблеми вимірювання споживацьких благ.

Ринкова економіка є складною ієрархічною системою, елементи якої перехрещені горизонтальними й вертикальними зв'язками. Ієрархічність диктується тим, що з єдиного центру неможливо стежити за станом і розвитком абсолютно всіх елементів системи. Виникає проблема поєднання централізованого планування з децентралізованим управлінням. Важливу роль в цьому грає узгодженість цілей: що вигідне національній економіці в цілому, повинно бути вигідне кожному осередку ринку. Власні (локальні) критерії оптимальності кожного осередку повинні бути побудовані так, щоб їх досягнення вели до досягнень глобального критерію.

Таким чином, при ухваленні рішень в ієрархічних системах необхідно розрізняти оптимум глобальний і локальний. Із змістовної сторони локальний повинен визначатися через глобальний, оскільки з'ясування питання про оптимальність окремого процесу вимагає народногосподарського підходу. Цю вимогу можна сформулювати як принцип примату глобального оптимуму над локальним.

Розгляд питання про оптимальність функціонування економіки навіть в перебігу окремого проміжку часу диктує необхідність динамічного підходу. Цю вимогу можна сформулювати як принцип примату динамічного оптимуму над статичним.

Принципові особливості динамічного оптимуму виражаються поняттям про майбутні наслідки економічного розвитку. Вони не можуть бути точно відомі. Це веде до необхідності побудови імовірнісних моделей економічних процесів, моделей ухвалення рішень в умовах невизначеності і ризику. Строго детерміністська постановка задач створює враження, що існує деякий єдиний оптимальний план. Проте цей план несе друк випадковості, оскільки є отриманий на основі початкових даних, випадково вибраних з безлічі можливих. Він не може встановлюватися однозначно, а повинен формулюватися як безліч варіантів, кожний з яких з деякою вірогідністю може

виявитися оптимальним. Цю вимогу можна сформулювати як принцип переваги імовірнісного підходу над детерміністським.

1. Сутність статичних і динамічних моделей задач

Слово статичний – відносять до статики; нерухомий, що розглядається в стані спокою й рівноваги. Відсіля з'явився вираз ,,статична економіка", ,,стабільна економіка", що характеризується постійною пропозицією ресурсів, технікою, технологією, смаками споживачів. При такому положенні майбутнє економіки достатньо передбачене. В статичних моделях досліджується стан економіки в якийсь певний момент (в статиці). Тому статична система – така система, змінні (координати) якої на відрізку часу, що вивчається, можуть розглядатися як постійні. В статичній економіко - математичній моделі значення всіх змінних відносяться до одного моменту часу. Наприклад, так вивчається галузева структура економіки, тобто взаємозв'язки, взаємостосунки тих її галузей, що стоять в процесі виробництва (інструментом такого дослідження служить статичний міжгалузевий баланс), розміщення виробництва і інших економічних об'єктів. Статичною по своєму значенню є і система національних рахунків, яка комплексно відображає певний «часовий зріз» руху як матеріальних, так і вартісних потоків, що відбувається в економіці.

Динамічні моделі економіки – моделі, що описують економіку в розвитку (на відміну від статичних, що характеризують її стан в певний момент). Вони необхідні для того, щоб на їх основі прогнозувати розвиток економіки, розраховувати плани і програми.

Модель є динамічною, якщо як мінімум одна її змінна відноситься до періоду часу, відмінного від часу, до якого віднесені інші змінні.

Існують два принципово різних підходи до побудови таких моделей. Перший підхід – конструктивний, або оптимізаційний, що витікає з визнання принципової можливості управління економічним процесом. Він полягає у

виборі з числа можливих траєкторій (шляхів) економічного розвитку оптимальної траєкторії. Оптимальна – значить, якнайкраща відносно якогось вибраного критерію.

Другий підхід – описовий, дескриптивний. Його значення полягає в дослідженні рівноваги в економічній системі.

В загальному математичному вигляді динамічні моделі зводяться до опису наступних економічних явищ: початкового стану економіки, технологічних способів виробництва (кожний «спосіб» говорить про те, що з набору продуктів -X можна в перебігу одиниці часу провести набір продуктів -Y), а також (при першому з названих підходів) критерію оптимальності.

З погляду теоретичного аналізу великого значення отримала динамічна модель фон Неймана і так звані теореми про магістралі.

Що ж до практичного застосування динамічних моделей, то вони знаходяться ще в початковій стадії: розрахунки відносно моделі, які хоча б скільки-небудь наближаються до реальності, надзвичайно складні. Економісти країн СНД розробили багатогалузеві динамічні моделі розвитку економіки, засновані на математичних закономірностях розвитку окремих галузей та їх взаємостосунків.

Для математичного опису динамічних моделей використовуються системи лінійних диференціальних рівнянь.

Таким чином, ми розглянули перше питання «Сутність статичних і динамічних моделей задач».

2. Загальна характеристика і зміст задач математичного програмування

Термін «математичне програмування» слід розуміти як відшукання якнайкращого варіанту використовування обмежених виробничих потужностей і ресурсів для досягнення поставлених цілей. Математичне програмування – область математики, що об'єднує різні математичні методи і дисципліни:

лінійне програмування, нелінійне програмування, динамічне програмування, опукле програмування і інше.

Загальна задача математичного програмування полягає в знаходженні оптимального (максимального або мінімального) значення цільової функції, причому, значення змінних повинні належати деякій області допустимих значень. В найзагальнішому вигляді ця задача записується так: U=f(x) > max; x э M, де x=(x1...xn); M – область допустимих значень змінних x1...xn ; f(x) – цільова функція.

Слід зазначити, що в умовах ринкової економіки слово «програмування» носить, як правило, не обов'язковий, директивний, а рекомендаційний, або як говорять, індикативний характер.

Оптимальним називається таке рішення задачі, яке забезпечує досягнення заданого результату при мінімальному витрачанні ресурсів або максимального ефекту від використання виробничого потенціалу при обмежених ресурсах. В останньому випадку критерій оцінки ухвалених рішень, або критерій їх оптимальності, може бути двояким: показник доводиться до максимуму (продуктивність устаткування і робітників, фондовіддача, прибуток та ін.) або до мінімуму (собівартість, витрата різних ресурсів).

Роль економіста в цих випадках полягає в тому, щоб правильно визначити критерій оптимізації рішення. При цьому необхідно мати на увазі, що вирішувати задачу одночасно не тільки з цільовими функціями, але і спробувати отримати оптимум одночасно за різними критеріями не удається можливим.

Рішення екстремальної економічної задачі складається з наступних етапів:

- побудова ЕММ, тобто обґрунтовування критерію оптимізації, виявлення і формалізації у вигляді управління або першості найістотніших з множини можливих обмежень рішення задачі;
- отримання необхідної інформації для чисельного виразу змінних з урахуванням можливості їх повної або часткової взаємозамінності, що допускає багатоваріантність ухвалених рішень;

- знаходження оптимального плану і аналізу отриманих результатів з позицій можливого їх практичного застосування, оскільки в економіко - математичній моделі вирішуваної задачі враховуються найістотніші зв'язки і залежність.

Оптимальним називається такий план виробництва, який є якнайкращим з позицій досягнення максимального або мінімального рівня конкретного техніко-економічного критерію оцінки використовування виробничого потенціалу і ресурсів, які існують.

Критерієм оптимальності називається показник, за яким оцінюється міра ефективності плану. Критерій оптимальності повинен кількісно однозначно вимірюватися і бути єдиним для конкретно вирішальної задачі. Необхідною умовою для отримання оптимального плану виробництва є дотримання обмежень на різні ресурси.

В загальному вигляді задача математичного програмування формується таким чином:

- знайти максимальне (мінімальне) значення цільової функції

$Z=\sum c_{ij} \cdot x_j \rightarrow \max(\min)$

при обмеженні у вигляді рівності:

$\sum a_{ij}\, x_{ij}=b_j$,

нерівностей

$\sum a_{ij}\, x_{ij} \geq b_j$ или $\sum a_{ij}\, x_{ij} \leq b_j$

і умови невід’ємності $x_{ij} \geq 0$.

Якщо знайдене в процесі рішення задачі значення змінних задовольняє обмеженням, тобто умові невід’ємності, тобто $x_{ij} \geq 0$, то таке рішення називається допустимим. Якщо при цьому значення змінних максимізують або мінімізують цільову функцію, то рішення - оптимальне.

Задачі математичного програмування і методи їх рішення класифікуються, головним чином, залежно від виду обмежень і цільової функції. Якщо обмежуючі умови і цільова функція лінійні, то говорять про лінійне

програмування. А якщо в системі обмежень хоча б одне з них нелінійне або функція цілі не лінійна, то говорять про опукле або нелінійне програмування.

Лінійне програмування – це один з розділів математичного програмування, найбільш глибоко розроблених і широко спрямованих на практиці.

Його головне досягнення полягає в тому, що було знайдено декілька груп алгоритмів рішення екстремальних задач, які значно спрощують і прискорюють обчислення в порівнянні з класичними методами і прийомами.

Алгоритмом називається точне розпорядження порядку виконання деякої системи обчислень для вирішення задач певного типу.

Алгоритми відрізняються один від одного наступними ознаками:

- способом складання початкової програми;
- аналізом її оптимальності;
- прийомами послідовного поліпшення.

Самим загальним алгоритмом лінійного програмування є симплекс – метод, за допомогою якого розв'язуються всі задачі. Розрахунки за допомогою симплекс – методу відрізняються складністю і трудомісткістю. Сутність його полягає в тому, що обчислювальна процедура, заснована на принципі послідовного поліпшення рішень – переходу від однієї базисної крапки до іншої, для якої значення цільової функції більше (ці операції фіксуються в симплексній таблиці).

Решта алгоритмів більш проста з техніки розрахунків, проте можуть бути використані для вирішення тільки певного кола задач:

- графічний метод, якщо кількість невідомих не перевищує двох;
- розподільний метод, метод потенціалів і т.ін., якщо початкові дані задачі виражаються в однакових одиницях вимірювання (транспортна задача);
- метод дозволяючих множників – для вирішення задачі з раціонального завантаження устаткування і ін.

Стохастичне програмування використовується для вирішення задач, в яких обмеження носять вірогідний, випадковий характер і необхідно ураховувати вплив яких-небудь непередбачених обставин. Як цільова функція, в такого роду

задачах служить математичне очікування критерію, вибраного як цільова функція.

До числа такого роду задач відносяться:

- комплектування ремонтних підприємств верстатним парком, коли відомий об'єм на ті або інші об'єкти;
- визначення спожитої кількості і продуктивності транспортних засобів за маршрутами, коли об'єм перевезень носить випадковий характер;
- визначення запасів деяких ресурсів.

Динамічні – це багатоетапні, або багатокрокові задачі, які вимагають оптимізації прийнятого рішення, не як одиничного акту, а з урахуванням розвитку явища, його зміни в часі.

Переваги динамічного програмування:

- можливість поетапного аналізу результатів вирішуваної задачі, визначення оптимальної стратегії з урахуванням чинника часу;
- поглиблення раніше розроблених методів кількісного і якісного дослідження природи економічних процесів;
- більш об'єктивне, повне і точне рішення планово-економічних і виробничих задач.

Таким чином, ми розглянули теорію рішення задач і моделей оптимального розподілу ресурсів. Рішення цих задач здійснюватимемо на практичних заняттях.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАКРІПЛЕННЯ ЗНАНЬ ЗА ТЕМОЮ

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА (ТЗ)

Задача формулюється так:

Існує 1.1 – пунктів відправлення продукції та **n** - пунктів призначення продукції. Відомі запаси a_i у кожному пункті відправлення продукції та потреби в них $в_j$ у кожному пункті призначення продукції. Крім того, відомі вартості C_{ij} перевезення одиниці продукції з пункту і до пункту j. Треба визначити план

перевезення $\left|X_{ij}\right|_{m\times n}$, при якому максимальні витрати на перевезення будуть найменші.

Умови ТЗ записують за допомогою транспортної таблиці. Приклад такої таблиці для трьох пунктів відправлення та чотирьох пунктів призначення поданий у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. - Приклад для трьох пунктів відправлення та чотирьох пунктів призначення

C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	C_{14} X_{14}	A_1
C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	C_{24} X_{24}	A_2
C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	C_{34} X_{34}	A_3
B_1	B_2	B_3	B_4	

Для розв'язання ТЗ спочатку знаходять початковий план перевезень методом найменшої вартості або методом північно-західного кута, а після цього знаходять оптимальне рішення методом потенціалів.

ЗНАХОДЖЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ОПОРНОГО ПЛАНУ МЕТОДОМ ПІВНІЧНО-ЗАХІДНОГО КУТА

ЗАДАЧА №1

Знайти початковий план методом північно-західного кута. Умови завдання наведені в таблиці 3.2

Таблиця 3.2. - Дані для знаходження початкового плану

10	0	20	11	15 25 5
12	7	9	20	
0	14	16	18	
5	15	15	10	

Рішення:

Початковий крок

Заповнюють таблицю, починаючи з елемента X_{11}, тобто з елемента, який знаходиться в північно-західному куті (звідси йде назва цього методу). Заповнення роблять за таким правилом: вибирають найменше з чисел a_1 та $в_1$,тобто min $\{a_1; в_1\}$.

Якщо a_1 = min $\{a_1; в_1\}$ (це означає, що можна цілком вивести вантаж з першого пункту відправлення у перший пункт призначення), то у клітині, яка відповідає елементу X_{11}, ми ставимо значення a_1. Так як ми все вивезли з першого пункту відправлення, то можемо закреслити перший рядок.

Одночасно з тим, що ми частково задовольнили попит у першому пункті призначення, то ми його корегуємо, закреслюючи $в_1$ і записуючи на відповідному місці попит $в_1 - a_1$.

Якщо ж $в_1$ = min $\{a_1; в_1\}$ (це означає, що повністю можна задовольнити попит у першому пункті відправлення), то в клітині, яка знаходиться в лівому верхньому куті, ставиться значення $в_1$. Так як попит у першому пункті призначення повністю задоволений, то ми викреслюємо перший стовпчик, а в першому рядку замість a_1 пишемо $a_1 - в_1$.

Загальний крок

На початку кожного нового кроку після викреслення парних рядків та стовпчиків ми маємо нову транспортну таблицю, але менших розмірів.

Знову будемо заповнювати її, починаючи з клітини, що знаходиться в північно-західному куті. Нехай ця клітина знаходиться в і-ому рядку та j-ому стопці. В цю клітину ми записуємо значення, які є мінімумом чисел a_i та $в_j$.

Якщо a_i = min $\{a_i; в_j\}$, то ми викреслюємо і-тий рядок, а значення $в_j$ зменшуємо на a_i.

Якщо $в_j$ = min $\{a_i; в_j\}$, то ми викреслюємо j-тий стовпчик, а значення a_i зменшуємо на $в_j$ одиниць.

Цей процес ми продовжуємо до тих пір, доки не буде заповнений останній елемент таблиці. При заповненні цього елементу, змінені під час обчислень значення a_m та $в_n$ повинні бути рівними ($a_m = в_n$). Треба також відзначити, що кількість клітинок, заповнених числами, повинна дорівнювати m+n-1, тобто кількості базисних змінних.

У деяких задачах трапляються ситуації, коли $a_i = в_j$, тобто коли за рахунок товару, який знаходиться в і-ому пункті відправлення, можна повністю задовольнити попит у j-ому пункті призначення.

У такому випадку викреслюється рядок або стовпчик. При цьому, при викреслені рядка і попит у пункті призначення j повинен дорівнювати нулю, а при викресленні j-ого стовпця кількість запасу в і-ому пункті відправлення дорівнює 15. Після виникнення такого випадку на наступному кроці з’явиться базисний елемент, який повинен дорівнювати нулю.

Перейдемо безпосередньо до розв'язання задачі, що наведена у таблиці 3.2.

Перший крок

X_{11} = 5= min {5; 15}, викреслюємо перший стовпчик, від 15 віднімаємо 5. Після цього таблиця має вигляд, як на таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Перша ітерація

5	10	0	20	11	15 10
	12	7	9	20	25
	0	14	16	18	5
5		15	15	10	

Другий крок

Заповнюємо елемент X_{12}; X_{12} =10 min = {10;15 } викреслюється перший рядок, в другому стовпці залишаються 5 одиниць (таблиця 3.4).

Таблиця 3.4 – Друга ітерація

	10	0			15…10
	5	**10**			25
					5
5		~~15~~ 5	15	10	

Третій крок

X_{22} = 5, другий стовпчик викреслюється, а в рядку 2 залишається 20 одиниць.

Четвертий крок

X_{23} =15, третій стовпчик викреслюється, а в другому рядку залишається 5 одиниць.

П'ятий крок

X_{24} =5, другий рядок викреслюється, а в стовпчику чотири залишається 5 одиниць (таблиця 3.5).

Таблиця 3.5. – Третя ітерація

			0				~~15~~ 10
5		**10**					25 ~~20~~ 5
		5		**15**		**5**	5
5		~~15~~ 5		15		~~10~~ 5	

Шостий крок

X_{34} = 5, викреслюється рядок три та стовпчик чотири. Процес обчислень закінчується. Підсумки наведені в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6 – Четверта ітерація

10 **5**	0 **10**	20	11
12	7 **5**	9 **15**	20 **5**
0	14	16	18 **5**

Сумарна вартість перевезення дорівнює:

5 ·10 +10 ·0 + 5 ·7 + 15 · 9 + 5 ·20 + 5 ·18 = 410 грошових одиниць.

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ МЕТОДОМ НАЙМЕНШОЇ ВАРТОСТІ

ЗАДАЧА №2

Знайти план перевезень для даних, наведених в таблиці 3.1 методом найменшої вартості.

Рішення:

Недоліком методу північно-західного кута є неврахування вартості відповідних перевезень. Частково цю проблему вирішує метод найменшої вартості, алгоритм якого передбачає заповнення на кожному кроці тієї клітини, в якій стоїть найменша вартість перевезень. Рядки та стовпці викреслюються так, як і в методі північно-західного кута, таким же чином корегуються значення a_i та $в_j$.

Перший крок

Заповнюється клітинка, якій відповідає найменша вартість перевезень. У нашому випадку таких клітинок дві (X_{31} та X_{12}), виберемо будь-яку із них,

наприклад, клітину $X_{31.}$ У цьому випадку $a_3 = в_1$ і ми можемо викреслити або рядок, або стовпчик; викреслимо третій рядок. Тоді $в_1 = 0$. Таблиця після цього кроку має вигляд, зображений на таблиці 3.7.

Таблиця 3.7 – Перша ітерація

10	0	20	11	15
12	4	9	20	25
0	14	16	18	
5				5
~~5~~ 0	15	15	10	

Другий крок

Заповнимо клітинку X_{21}. У цьому випадку обмеження виконуються і за рядком та за стовпцем. Викреслимо в цьому випадку другий стовпчик, значення a_1 буде дорівнювати 0 (таблиця 3.8).

Таблиця 3.8 - Друга ітерація

10		0	20	11	
		15			~~15~~ 0
12		4	9	20	25
0 **5**		14	16	18	5
~~5~~ 0		15	15	10	

Третій крок

З тих елементів, що залишилися, найменшу вартість перевезень має елемент $X_{23,}$

$X_{23} = \min \{25; 15\} = 15.$

Викреслюємо третій стовпчик, $a_2 = 25 - 15 = 10.$

Четвертий крок

$X_{11} = 0$, викреслюємо перший стовпчик $в_1 = 0.$

П'ятий крок

$X_{14} = 0$, викреслюємо перший рядок.

Шостий крок

$X_{15} = 10$

Підсумки наведені в таблиці 3.9.

Таблиця 3.9 - Третя ітерація

0	**15**		**0**
		15	**10**
5			

ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

У методі потенціалів рядка і стовпчика j транспортної таблиці встановлюються у відповідність числа U_i та V_j. Для кожної базисної змінної x_1 потенціали U_i та V_j повинні задовольняти рівнянню $U_i + V_j = C_{ij}$.

Одному з потенціалів можна надати довільне значення (як правило $U_i = 0$). Коли значення потенціалів отримані, оцінки для небазисних змінних K_u визначаються за формулою:

$$K_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

(ці величини не залежать від вибору значення U_i).

Після цього для включення в базис вибирається небазисна змінна, яка має найбільшу від'ємну оцінку.

Розглянемо виконання цих дій на прикладі.

ЗАДАЧА №3

Для даних, що наведені в транспортній таблиці 3.6, знайти оптимальний план перевезень:

x_{11} $U_1 + V_1 = C_{11} = 10$ $|x_{23}|$ $U_2 + V_3 = C_{23} = 9$

x_{12} $U_1 + V_2 = C_{12} = 0$ $|x_{24}|$ $U_2 + V_4 = C_{24} = 20$

x_{13} $U_2 + V_2 = C_{22} = 7$ $|x_{34}|$ $U_3 + V_4 = C_{34} = 18$

Послідовно визначаємо значення U_i та V_j :

$U_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 10, \quad V_2 = 0 \Rightarrow U_2 = 7 V_3 = 2, \quad V_4 = 13 \Rightarrow U_3 = 5.$

Оцінки для небазисних змінних визначаються таким чином:

x_{13} $K_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 20 - 0 - 2 = 18$

x_{14} $K_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 11 - 0 - 13 = -2$

x_{21} $K_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 12 - 7 - 10 = -5$

x_{31} $K_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 0 - 5 - 10 = -15$

x_{32} $K_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 14 - 5 - 0 = 9$

x_{33} $K_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 16 - 5 - 2 = 9$

Змінна X_{31} має максимально від'ємну величину K_{ij}, тому вона вводиться в базис. Як ми бачимо, рівняння мають дуже просту структуру, тому простіше відразу записати величини K_{ij} до транспортної таблиці. Значення K_{ij} для небазисних елементів записується в південно-західному куті (таблиця 3.10).

Таблиця 3.10. – Транспортна матриця.

	$V_1 = 10$	$V_2 = 0$	$V_3 = 2$	$V_4 = 13$
$U_1 = 0$	10 5	0 10	20 18	11 -2
$U_2 = 7$	12 -5	7 5	9 15	20 5
$U_3 = 5$	0 -15	14 9	16 9	18 5

Для знаходження змінної, що буде виводитися з базису, побудуємо цикл. Він починається та закінчується вибраною небазисною змінною та складається з горизонтальних та вертикальних відрізків, кінцями яких повинні бути базисні змінні (за винятком тих кінців, які відносяться до змінної, що вводиться в базис).

Для кожного базисного рішення і відповідної небазисної змінної можна побудувати лише один цикл. У циклі неважливо за годинниковою стрілкою чи проти неї виконуються в обхід циклу.

Продовжимо розв'язання задачі і побудуємо цикл для змінної X_{31}, що вводиться до базису. Припустимо, що ми збільшили значення X_{31} на одиницю (ставимо в клітині 31 знак «+» у правому нижньому куті). Щоб не порушити баланс у першому стовпчику, потрібно X_{11} зменшити на одиницю (ставимо знак «-»). Далі X_{12} зростає на одиницю, X_{22} спадає на одиницю, X_{24} зростає на одиницю, X_{34} спадає на одиницю (таблиця 3.11).

Таблиця 3.11 – Перша ітерація

10 **5** ⊖	0 **10** ⊕	20	11
12	7 **5** ⊖	9 **15**	20 ⊕ **5**
0 ⊕	14	16	18 ⊖ **5**

Якщо ми зробимо такий "одиничний перерозподіл" перевезень, то від цього сумарна вартість перевезень зменшиться на п'ятнадцять одиниць, тобто на величину $|K_{ij}|$

0 – 10 + 0 – 7 + 20 – 18 = -15

З базису виводиться та зі змінних x_{ij}, яка має позначку «-» і при цьому має найменше значення. Кожне з перевезень, яке має позначення «-» чи «+», зростає або спадає на величину цієї змінної. Якщо декілька змінних мають позначку «-» і однаково найменше значення, то з базису вилучається будь-яка зі змінних; інші змінні залишаються базисними і мають при цьому нульові значення.

В нашому прикладі три змінні X_{11}, X_{22}, X_{34}, мають позначку «-» і однакове значення (=5). У цьому випадку будь-яку з них можна вилучити з базису. Нехай це змінна X_{34} , тоді значення X_{31} стає рівним п'яти, а інші змінні корегуються в залежності від знаку «-» чи «+». Отримані дані подані в таблиці 3.12.

Відповідна вартість їх перевезень:

$0 \cdot 10+15 \cdot 0 + 0 \cdot 7+15 \cdot 9 +10 \cdot 20 + 5 \cdot 0 = 335$ грошових одиниць.

Отримана вартість перевезень відрізняється від вартості початкового рішення на 410–335=75 одиниць, тобто на величину змінної X_{31} (=5), помножену на K_{31}(=15). (5-15=75).

Для нової таблиці знаходяться нові потенціали та величини K_{ij}, якщо всі величини K_{ij} >0, то оптимальний план - знайдений. В протилежному випадку - виконують всі попередні дії для знаходження кращого плану. Таблиця після цього кроку матиме вигляд, зображений у таблиці 3.12.

Таблиця 3.12. – Транспортна матриця на I ітерації.

	$V_1 = 10$	$V_2 = 0$	$V_3 = 2$	$V_4 = 13$
$U_1 = 0$	10 ⊖ 0	0 ⊕ 20	11
	0	15	18	-2
$U_2 = 7$	12 ⊕ 7	9	20
	-5	0 ⊖	15	10
$U_3 = 10$	0	14	16	18
	5	24	24	

Небазисна змінна X_{21}, яка має найбільшу від'ємну оцінку, увійде до базисного розв'язку. Замкнений цикл, який відповідає змінній X_{22} , показує, що змінною, яка вилучається з базису, може бути як X_{11} так і X_{21}. Виберемо X_{11}. У таблиці 3.13 наведене нове базисне рішення.

Таблиця 3.13 - Транспортна матриця на II ітерації.

	$V_1 = 10$	$V_2 = 0$	$V_3 = 2$	$V_4 = 13$
$U_1 = 0$	10 5	0 15	20 18	11 -2
$U_2 = 7$	12 0	7 0	9 15	20 10
$U_3 = -5$	0 5	14 19	16 19	18 10

Значення U_i, V_j, K_{ij} обчислюється знову. Як видно з таблиці 3.13, змінна X_{14} вводиться в базис, а змінна X_{24} виводиться з базису. План перевезення змінюється на десять одиниць. Після обчислення потенціалів та коефіцієнтів K_{ij} отримуємо таблицю 3.14, де всі величини K_{ij} додатні. Тому отримане рішення оптимальне.

Таблиця 3.14 - Транспортна матриця на III ітерації

	$V_1 = 5$	$V_2 = 0$	$V_3 = 2$	$V_4 = 11$
$U_1 = 0$	10 5	0 5	20 18	11 10
$U_2 = 7$	12 0	7 10	9 15	20 5
$U_3 = 5$	0 5	14 19	16 19	18 12

Відповідь: перевезти 5 одиниць з A_1 в B_2

10 одиниць з A_1 в B_4

10 одиниць з A_2 в B_2

15 одиниць з A_2 в B_3

5 одиниць з A_3 в B_1

Сумарні транспортні витрати дорівнюють:

$5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 315$ грошових одиниць.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається статичною системою?
2. Що припускає проблема економічного оптимуму?
3. Які методи можуть бути використані для вирішення тільки певного кола задач?
4. Чим алгоритми відрізняються один від одного?
5. Що таке лінійне програмування?
6. Яке рішення задачі називається оптимальним?
7. Що таке динамічні моделі економіки?
8. Які достоїнства динамічного програмування?
9. Що називається алгоритмом?
10. Як формується в загальному вигляді задача математичного програмування?

ТЕМА 4. ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Запаси засобів виробництва становлять економічну категорію, притаманну товарному виробництву на всіх стадіях його розвитку. Вони покликані забезпечити неперервність і високі темпи розширеного відтворення.

Питаннями раціонального регулювання запасами люди займалися з давніх часів. Проте запаси як економічну категорію товарного виробництва вперше дослідив К. Маркс. Його положення про роль запасів, про причини і фактори їх виникнення, про тенденції, що визначають їх динаміку та структуру, є методологічною основою для дослідження запасів засобів виробництва та предметів споживання в умовах ринку.

К. Маркс дав визначення поняттю „запас" (що стало класичним): „Протягом того часу, доки продукт існує у вигляді товарного капіталу чи доки він перебуває на ринку, тобто протягом всього проміжку часу між процесом виробництва, з якого продукт виходить, та процесом споживання, в який він входить, продукт утворює товарний запас" (Маркс К., Енгельс Ф., Твори т. 24, с. 156). З цього випливає, що запаси – матеріальні цінності, виключені на деякий час з процесу безпосереднього виробничого чи особистого споживання незалежно від того, яку вони мають форму та в яких ланках товаропровідної мережі знаходяться. Запаси – це елемент процесу обігу, момент руху суспільного продукту від виробника до споживача.

К. Маркс довів, що основною причиною появи запасів є поділ, суспільної праці, що поглиблюється що породив спеціалізацію та концентрацію виробництва. Вони призводять до розчленування в просторі та часі процесу виробництва готового продукту. Чим глибше спеціалізація, тим більше продукції повинно знаходитися в сфері обігу і тим гостріше стає задача створення матеріальних запасів на всіх ділянках товаропровідної мережі.

Неможливість узгодження між собою моментів виробництва продукту та його споживання призводять до необхідності утворення запасів. К. Маркс відмічав, що безперервність процесу виробництва „потребує, щоб наявність

необхідних для нього умов не залежало ні від перерв при щоденних закупівлях, ні від того, що товарний продукт продається щоденно чи щотижня і тому тільки нерегулярно може перетворюватися назад в елементи його виробництва (Маркс К., Енгельс Ф., Твори т. 24, с. 160-161) а також: „щоб процес виробництва проходив безперервно – цілковито незалежно від того, поновлюється цей запас щоденно чи через певні терміни, - необхідно щоб на місці виробництва постійно був наявний великий запас сировини та ін., ніж його споживається, наприклад, щоденно чи щотижня" (Маркс К., Енгельс Ф., Твори т. 24, с. 160).

Важливими факторами, що характеризують розмір запасу, являються надійність, регулярність і швидкість постачання. К. Маркс пише: „...чим менша надійність, регулярність та швидкість доставки, тим значніша повинна бути у виробника прихована частина виробничого капіталу, тобто ще очікуваний свого оброблення запас сировини та ін. (Маркс К., Енгельс Ф. Твори т. 24 с. 161).

В умовах ринку роль запасів та особливо наукове управління ними зростають. Це пов'язане з тим, що без оптимальних запасів на підприємствах не можна говорити про підвищення рівня достатку.

Проблема раціональної організації запасів засобів виробництва в національній економіці досить багатогранна. Її розробка пов'язана з вирішенням задачі оптимального планування та управління на всіх рівнях і ділянках національної економіки. Оптимальне управління матеріальними запасами припускає їх поточне та перспективне планування. Перспективний підхід до сукупних запасів – це визначення їх розмірів і структури на основі оптимізаційного динамічного міжгалузевого балансу, в матрицю коефіцієнтів прямих витрат яких вводяться коефіцієнти запасоємності.

Для раціонального розміщення сукупних запасів перш за все треба оптимізувати виробничо–складську структуру системи. Інфраструктура, що склалася на даний момент, є відправним пунктом при розміщенні сукупних запасів. В той же час, вона виступає підсумком всіх попередніх рішень, може й має бути перетворена в потрібному напрямку. З проблемою раціонального

розміщення сукупних запасів безпосередньо пов’язані проблеми вибору форм постачання, планування довготривалих господарських зв’язків.

Науковий підхід до управління запасами потребує основуватися на пізнанні об’єктивних закономірностей функціонування всієї системи обігу, на прогнозах потреб в предметах та послугах виробничо–технічного та особистого призначення. В основу всієї економічної роботи в системі обігу повинні бути покладені оптимальні варіанти перспективних, поточних та оперативних взаємопов’язаних планів. Математичні методи та ЕОМ – найпотужніший інструмент виявлення та аналізу економічних закономірностей, тимчасових рядів та тенденцій, синтезу оптимальних рішень у всіх сферах обігу. Тому метод математичного моделювання – не засіб математичної інтерпретації економічних закономірностей у сфері обігу, а інструмент їх виявлення та теоретичного формування.

1. Сутність проблеми управління запасами

Запаси – це все те, на що є попит, але що в даний момент виключено з виробничого чи особистого споживання; це всі матеріальні, фінансові, трудові та інші ресурси, які в даний момент не використовуються.

Навіщо суспільству потрібні запаси? Які критерії (показники) оптимального управління ними? Запаси потрібні для забезпечення безперервності суспільного виробництва та особистого споживання.

На всьому шляху руху матеріальні ресурси утворюють сукупні запаси, що розділяються на товарні та виробничі. Товарні запаси – це готова продукція (збутова) у постачальників, на складах та базах (складська). Виробничі запаси – це матеріальні ресурси, що знаходяться вже в споживанні, але, що ще не ввійшли в процес виробничої переробки. Товарні та виробничі запаси в свою чергу поділяються на поточні та страхові. Поточні - призначені для забезпечення потреб виробництва при не збіганні термінів і розмірів надходження та споживання ресурсів. Страхові запаси повинні задовольняти

потреби виробництва у випадку непередбачених відхилень від плану, викликаних випадковістю попиту, затримками поставок та ін.

Отже, основна причина утворення запасів – гарантоване забезпечення споживачів. Порушення виробничого ритму завжди коштує дорожче затрат на утримання запасів. Важливим фактором утворення запасів є також періодичність виробництва, пов'язана з випуском продукції партії оптимального розміру. В системі МТС добре працює критерій мінімізації наведених затрат. Зниження

затрат, пов'язаних, наприклад, з обігом суспільного продукту, призводить до зросту прибутку. Критерій мінімізації витрат отримав широке застосування при оптимізації рівнів запасів, визначенні оптимальної партії поставки, оптимальному прикріпленні споживачів до постачальників, в задачах вибору форм постачання та ін.

Так, в задачах оптимізації поставок критерій ефективності подається у вигляді

$$\min: L = L_{розм.} + L_{утр.} + L_{деф.},$$

де L розм. – витрати, пов'язані з розміщенням замовлень (вважається, що ці витрати не залежать від величини замовленої партії, а визначаються самим фактом розміщення замовлення, затратами підготовчо – заключних операцій);

L утр. – витрати на утримання запасів, що включають в себе витрати зберігання та втрати іммобілізації засобів в запасах;

L деф. – втрати від дефіциту продукції у споживачів.

Збереження запасів пов'язане з витратами. Сюди відноситься амортизація власних складських приміщень, орендна плата за складські площі, утримання установок, що забезпечують нормальний режим збереження, природний збиток під час збереження, витрати за обліком та інвентаризацією, заробітна плата складського персоналу, відсотки за кредит коштів, вкладених в замовлення та ін.

Втрати від іммобілізації можуть бути розраховані у вигляді певного відсотка від суми засобів, відвернених протягом відомого періоду часу в запаси.

Згідно з точки зору академіка В.А. Трапезникова, втрати від іммобілізації треба розглядати як економію капітальних вкладів, необхідних для виробництва відповідної кількості промислової продукції.

Витрати, пов'язані з відсутністю запасів чи несвоєчасними поставками, називають інколи втратами через дефіцит. Для запобігання чи зменшення вірогідності виникнення дефіциту створюються страхові запаси: чим більша їх величина, тим менша вірогідність дефіциту та вище надійність функціонування системи. Разом з тим, зі збільшенням страхових запасів зростають витрати на їх утримання, скорочення ж цих запасів збільшує вірогідність дефіциту, а як наслідок, втрати від нього. Однак визначення втрат від дефіциту є поки складним і невирішеним завданням. Тому на даному етапі доцільно виходити не з критерію мінімальних витрат, а з вірогідності того, що ризик дефіциту не перевищить деякого заздалегідь заданого розміру.

Таким чином, управління запасами полягає в пошуку такої стратегії поповнення та витрат запасів, при якій функція витрат приймає мінімальне значення.

Якщо функції A(t), B(t) та R(t) виражають відповідно поповнення запасів, їх витрата та попит на продукт, що запасається, за проміжок часу [0, t]. В моделях управління запасами зазвичай використовуються похідні цих функцій в часі a (t), b (t), r (t), що відповідно називаються інтенсивностями поповнення, витрати та попиту.

Якщо функції a (t), b (t), r (t) – не випадкові величини, то модель управління запасами вважається детермінованою, якщо хоча б одна з них носить невипадковий характер – стохастичною. Якщо всі параметри моделі не змінюються в часі, вона називається статичною, в інших випадках – динамічною. Статичні моделі використовуються, коли приймається разове рішення про рівень запасів в певний період, а динамічні – у випадку прийняття послідовних рішень про рівні запасу чи корегуванні раніше прийнятих рішень з урахуванням змін, що відбуваються.

Рівень запасу в момент t визначається основним рівнянням запасу:

$$f(t) = f0 + A(t) - B(t), \quad (1)$$

де f0 – початковий запас в момент t = 0

Рівняння (1) частіше використовується в інтегральній формі:

$$f(t) = f0 = \int_0^t a(t)\,dt - \int_0^t b(t)\,dt$$

Таким чином, ми розглянули перше питання „Сутність управління запасами”.

2. Моделі управління запасами та методи їх регулювання

В наш час часто використовується статична детермінована модель без дефіциту, статична детермінована модель з дефіцитом, стохастична модель управління запасами, стохастична модель управління запасами з фіксованим часом затримки поставок. Останнє розглянемо на практичних заняттях.

Управління запасами – область дослідження операцій, комплекс моделей та методів призначених для оптимізації запасів, тобто ресурсів, що знаходяться на зберіганні та призначених для задоволення попиту на ці ресурси. Терміни „ресурси” та „запаси” тут розуміються широко. Роль виробництва зводиться тут до поповнення рівня запасів по мірі виникнення потреби в них. Іншим джерелом задоволення попиту на ресурси є склад, власне - запас.

В якості цільової функції в завданнях управління запасами виступають сумарні витрати на утримання запасів, на складські операції, втрати від псування при зберіганні та моральне старіння, втрати від дефіциту та штрафи і інше. Природно, що відшукується мінімум цієї функції. Управління змінними в таких завданнях є об’єм запасів, частота та терміни їх поповнення (шляхом виробництва, закупівлі та ін.), степінь готовності продукції, що зберігається у вигляді запасів та ін. Завдання бувають статичні (коли приймаються разові рішення про рівень запасу на певний період) та динамічні, чи багатокрокові,

коли приймаються послідовні рішення, чи корегується раніше прийняте рішення з урахуванням змін, що відбуваються.

Спрощеним прикладом завдань управління запасами може слугувати задача про оптимальну партію. Вирішується з використанням формули Вільсона

$$q = \sqrt{2ky/S},$$

де q – оптимальний розмір замовлення чи партії поставки;

k – витрати на підготовчо-заключні операції, не залежні від величини партії, що поставляється та пов’язані з кожною поставкою;

y – річна потреба в матеріалі;

S – витрати на зберігання одиниці товару на рік.

Витрати на підготовку одиниці продукту, що замовляється (k), включають наступні елементи:

- вартість транспортного замовлення;
- витрати на розробку поставок;
- вартість контролю виконання замовлення;
- витрати на випуск каталогів;
- вартість форм документів.

За формулою Вільсона, крім оптимальної партії, можна визначити оптимальний інтервал між поставками; середній рівень поточного запасу; оптимальну кількість поставок на рік; середньорічні витрати. Всі ці показники розрахуємо на практичних заняттях.

Завдання безпосереднього контролю за станом кожного конкретного сорторозміру матеріалу вирішується на підприємствах та постачально–збутових базах. Для цього необхідно систематично отримувати оперативні дані про рівень запасів усіх матеріальних ресурсів.

Найбільш успішно це завдання вирішується на ПЕОМ, які за спеціально розробленою програмою ведуть облік надходження, витрати та залишків кожного конкретного найменування матеріалу, а також можуть видавати

необхідні сигнали при зниженні запасів нижче встановленого рівня або збільшенні вище їхнього максимального розміру.

На тих підприємствах та складах, де такої техніки немає або встановлювати її недоцільно, нагляд за станом запасів здійснюється за так званою системою максимум – мінімум. Сутність її заключається в тому, що комірник при черговому запису в матеріальній картці порівнює фактичну наявність матеріалу з нормою запасів. Якщо ця наявність виходить за межі мінімальної та максимальної норми, він виписує сигнальну довідку, в якій вказує норми запасу та фактичну наявність. Довідка відсилається відповідним виконавцям для вжиття необхідних заходів щодо нормалізації запасів. Таку ж інформацію може видати ПЕОМ.

Крім системи максимум – мінімум існують системи:

- система управління запасами з фіксованим розміром замовлення;
- система управління запасами з фіксованим інтервалом часу між замовленнями.

В практиці дуже часто для оперативного контролю застосовується так звана система АВС, яка основана на класифікації матеріалів на три групи в залежності від їх ролі в виробничому процесі. В групу „А” включаються найбільш важливі матеріали, які займають 10-15 %. За станом цих запасів встановлюється, як правило, щоденний контроль. В групу „В” включаються матеріальні ресурси, що мають менше значення, ніж матеріали групи „А”, та ті, що займають в загальному споживанні матеріалів як за обсягом, так і по номенклатурі 20-30 %. Періодичність контролю стану запасів в цій групі матеріалів тут значно менша, як правило, один раз на десять днів. До групи „С” відносять матеріали, які не входять в перші дві групи. В номенклатурі вони займають найбільшу удільну вагу, хоча в загальному споживанні їх частка невелика. Стан запасів цих матеріалів контролюється рідше – приблизно один раз на місяць.

Таким чином, ми розглянули друге питання „Моделі управління запасами та методи їх регулювання”.

З розглянутого вище слідує, що основне призначення запасів полягає в підвищенні рівня якості обслуговування матеріальними ресурсами різного роду

споживачів, в підвищенні надійності роботи економічних систем різної натури. Запаси зменшують залежність споживача від капризів постачальників, виробничого процесу – від нерівномірності споживання, роблять систему більш стійкою, забезпечують необхідні умови для створення безперервності розширеного відтворення.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАКРІПЛЕННЯ ЗНАНЬ ЗА ТЕМОЮ

Однопродуктова N - етапна динамічна модель управління запасами

У цій моделі управління запасами передбачається, що попит, організаційні витрати, витрати на зберігання запасу можуть змінюватись від етапу до етапу. Рівень запасу контролюється періодично на початку етапу. Дефіцит в цій моделі не допускається.

Введемо величини:

X_i - величина запасу на кінець і-ого етапу;

U_i - кількість що замовляється продукції, на і-ому етапі;

Gi - попит на і-ому етапі;

h_i - витрати на зберігання одиниці запасу на і-ому етапі;

K_i - витрати на оформлення замовлення на і-ому етапі;

$C_i(U_i)$ - функція, значення якої дорівнюють сумарним витратам системи управління запасами, пов'язаних з придбанням товарів на і-ому етапі, ці витрати складаються з організаційних витрат і витрат на закупівлю товару.

Витрати на початку і-ого +1 етапу = (витратам на кінець і-ого етапу)	=	Витрати на початку j-ого етапу	+	Витрати на зберігання на і-ому етапі	+	Витрати на закупівлю на j-ому етапі

Очевидно, що в рамках нашої моделі ми будемо вважати, що витрати на зберігання товарів на і -ому етапі пропорційні до величини X_i та дорівнюють $h_i X_i$. Відзначимо, що величина X_i обчислюється за такою формулою:

$$X_i = X_{i-1} + U_i - G_i$$

Запас на кінець і-ого етапу дорівнює запасу на початку і-ого етапу партії плюс замовлення на і-ому, мінус попит, який задовольнили на і-ому етапі. Рекурентні рівняння Белмана в нашому випадку матимуть вигляд:

$$F_i(X_i) = \min_{Ui \in G} \{F_{i-1}(X_{i-1}) + h_i X_i + C_i(U_i)\},\ F_0 = 0.$$

Тут Gi - множина всіх допустимих значень U_i, які переводять систему зі стану U_{i-1} в стані $U_{i.}$ Значення U_1 являється цілим числом, яке задовольняє нерівності

$$\zeta_1 - X_0 \le U_1 \le \left[\sum_{k=1}^{n} \zeta_1 \right] - X_0 ,$$

тобто замовлення на першому етапі повинно задовольнити хоча б попит на першому етапі з урахуванням запасу Хо на початку господарчої діяльності і не може бути більшим сумарного попиту за всі етапи мінус запас на початку першого етапу. Значення $U_{i.}$ для етапів з другого по N - ий задовольняють нерівності

$$0 \le U_i \le \sum_{k=1}^{n} \zeta_i \qquad i = 2, 3, 4 \ldots N.$$

тобто замовлення на і-ому етапі може змінюватись від нульової величини $U_{i.}=0$, якщо запас на початку і-ого достатній для задоволення попиту, до величини сумарного попиту на всіх етапах від і-ого до N-ого (тоді на і-ому етапі ми розробимо замовлення для всіх етапів, які залишились). Розглянемо застосування методу ДП для рішення цієї задачі.

ЗАДАЧА №1

У відповідності з таблицями 4.1, 4.2, 4.3 знайти оптимальний план закупівлі товару у випадку трьохетапної моделі управління запасами:

Таблиця 4.1 – Загальний вигляд моделі

I	**Gi**	**Організаційні витрати K_i**	**Витрати на зберігання h_i**
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Вихідний запас Хо = 1. Передбачається, що витрати на закупівлю становлять 10 грошових одиниць для перших 3 - х одиниць придбаної продукції і 20

грошових одиниць для кожної додаткової одиниці. Якщо позначити витрати на придбання $S_i(U_i)$ то:

$$S_i(U_i) = \begin{cases} 10U_i; 0 \le U_i \le 3 \\ 30+20(U_i-3), U_i > 3. \end{cases}$$

Тоді загальні витрати на придбання будуть дорівнювати:

Перший етап:

$$\zeta_1 = 3, \zeta_1 - X_0 \le \zeta_k \Rightarrow 3-1 \le U_1 \le 3+2+4-1 \Rightarrow 2 \le U_1 \le 6 \Rightarrow 0 \le X_1 \le 2+4=6$$

$$X_1 = X_0 + U_1 - \zeta_1$$

Складемо наступну таблицю:

Таблиця 4.2 – Визначник I порядку

U_1	$Z_1(U_1)$	X_1	$n_1 X_1$	$F_1(X_1)$
2	3 +2·10=23	0	0	23
3	3+3·10=33	1	1	34
4	3+3·10+20·1=53	2	2	55
5	3+3·10+20·2=73	3	3	76
6	3+3·10+20·3=93	4	4	97
7	3+3·10+20·4=113	5	5	118
8	3+3·10+20·5=133	6	6	139

Другий етап.

Зрозуміло, що: $0 \le X_2 \le 4$; $O \le U_2 \le 6$. Побудуємо таблицю 4.3.

Основні клітинки таблиці 4.3 заповнені трьома числами, нижнє число дорівнює

$$X_1 + G_2 - U_2 = X_2$$

Почнемо заповнювати таблицю 4.3 з цих чисел: якщо отримані значення X_2 не належать множині G, то інші значення не обчислюємо, а клітину закреслюємо двічі. Як ми бачимо, такими є всі варіанти, які знаходяться під діагоналлю. Середнє число дорівнює h_2X_2, а верхнє $f_1(X_1) + h_2X_2 + C_2(U_2)$.

Виберемо для кожного значення X_2 оптимальний варіант.

Таблиця 4.3 – Визначник II порядку

U_2	F_1 (X_1) C_2 (U_2)	23 0	34 1	55 2	76 3	97 4	118 5	139 6
0	0			55 0 0	79 3 1	103 6 2	127 9 3	151 12 4
1	17		51 0 0	75 3 1	99 6 2	123 9 3	147 12 4	
2	27	50 0 0	64 3 1	88 6 2	112 9 3	138 12 4		
3	37	63 3 1	77 6 2	101 9 3	125 12 4			
4	57	86 6 2	100 9 3	124 12 4				
5	77	109 9 3	103 12 4					
6	97	132 12 4						

Третій етап

Зрозуміло, що існує єдине значення X_3=0 (на кінець господарчої діяльності не варто залишати запас). Величина U_3 змінюється від 0 до 4. Результати обчислень запишемо в таблицю 4.4.

Таблиця 4.4 – Визначник III порядку

U_3	$f_1(X_1)$ / C_2 (U_2)	50 0	63 1	77 2	100 3	123 4
0	0					123 0 0
1	16				116 0 0	
2	26			103 0 0		
3	36		99 0 0			
4	56	106 0 0				

Перед її заповненням відмітимо, що кожному значенню U_3, або кожному значенню X_2, відповідає лише один допустимий варіант. Це призводить до того, що необхідно обчислювати лише елементи головної діагоналі. З таблиці 4.4 бачимо, що мінімальні сумарні витрати системи управління запасами складають 99 одиниць і на третьому етапі треба замовляти три одиниці продукції (U_3 =3).

З таблиці 4.3 бачимо, що $U_2 = 3$, а з таблиці 5.2 – $U_1 = 2$.

Відповідь: мінімальні сумарні витрати системи управління запасами складають 99 грошових одиниць; на першому етапі треба записувати 2 одиниці продукції, на другому і третьому етапах замовляти по 3 одиниці продукції.

N-етапна динамічна модель управління запасами з увігнутою функцією витрат

Важливим випадком попередньої моделі є випадок, коли витрати на виробництво (або придбання) продукції і витрати на зберігання одиниці продукції являються постійними або спадаючими функціями величин U_i та U_{i+1}.

При цих умовах математично доведено наступне:

1. При вихідному рівні запасу Хо = 0, на будь-якому етапі N-етапної моделі, оптимальним способом дій є або замовлення певного розміру продукції U_i при нульовому вхідному запасові X_{i-1}, або задоволення попиту тільки за рахунок продукції X_{i-1}, яка була придбана на попередніх етапах (в цьому випадку $U_i = 0$). Таким чином, справедлива формула:

$$\begin{cases} X_{i-1}U_1 = 0 \\ X_{i-1}^2 + U_i^2 \neq 0 \end{cases}$$

2. Розмір замовлення U_i на будь-якому етапі є оптимальним тільки в тому випадку, коли він або дорівнює нулю, або в точності відповідає попиту одного або декількох послідовних етапів.

Ці властивості дозволяють значно зменшити кількість допустимих варіантів U_i та ; X_i і, таким чином, значно зменшують кількість необхідних обчислень.

ЗАДАЧА №12

Знайти оптимальний план замовлень для 4-х етапної моделі, вихідні дані якої задані в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5 – Загальний вигляд моделі

Етап	G_i	K_i
1	76	98
2	26	114
3	90	185
4	67	70

Витрати на зберігання одиниці продукції на протязі одного етапу постійні і складають одну грошову одиницю за етап. Витрати на закупівлю одиниці продукції складають дві грошові одиниці на всіх етапах. Вихідний запас X_0= 15 одиниць.

Рішення:

Перший етап.

Значення U_i повинні бути такими, щоб задовольнити попит декількох наступних послідовних етапів з урахуванням величини X_0. Таким чином, буде лише чотири можливі значення U_i:

61 = 76 - 15;

87 = 76 + 26 - 15:

177 = 76 + 26 + 90 - 15:

244 = 76 + 26 + 90 + 67- 15.

Другий етап.

Таблиця 4.6 – Визначник I порядку

U_i	X_1	$h_1 X_1$	$C_1 (U_1)$	$f_1 (X_1)$
61	0	0	220	220
87	26	26	272	298
177	116	116	452	568
244	183	183	586	769

Складемо таблицю 4.7

Таблиця 4.7 – Визначник II порядку

U_2	0 0	220 0	298 26	568 116	769 183
0	0		298 0	658 90 90	926 157 157
26	166	386 0 0			
116	346	656 90 90			
183	480	857 157 157			

Як бачимо, допустимі значення заповнюють лише третій стовпчик (це випадок, коли $X_i = 0$ і на початку етапу в нас буде нульовий запас) та другий рядок (це випадок, коли $U_i = 0$, і на другому етапі нічого не залишаємо).

Недопустимим є також варіант, який стоїть на перетині другого рядка та третього стовпчика (при нульовому запасі X, на початку другого етапу і нульовому замовленні на цьому етапі не можна задовольнити попит).

Третій етап

На цьому етапі: $G_3 = 90$, $U_3 = 0,90,157$.

Обчислення для цього етапу наведені в таблиці 4.8.

Таблиця 4.8 – Визначник III порядку

U_3	$F_2(X_2)$ / X_2 / $C_3(U_3)$	298 0	656 90	857 157
0	0		656 0 0	924 67 67
90	365	663 0 0		
157	499	884 67 67		

Четвертий етап

Результати для цього етапу надані в таблиці 4.9.

Таблиця 4.9 – Визначник IV порядку

U_3	F_3 (X_3) / X_3 / C_4 (U_4)	656 0	864 67
0	0		864 0 0
67	204	860 0 0	

З таблиць 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, отримуємо $U_4 = 67$; $U_3 = 0$; $U_2 = 116$; $U_1 = 61$;

Відповідь: мінімальні сумарні витрати системи управління запасами становлять 860 одиниць; необхідно замовляти на першому етапі 61 одиницю продукції, на другому етапі 116 одиниць продукції, на третьому етапі не робити замовлення, на четвертому етапі замовити 67 одиниць продукції.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке запаси?
2. Яке визначення поняттю „запас” дав К. Маркс?
3. Що є причиною появи запасів?
4. З чим пов’язана проблема раціональної організації запасів засобів виробництва?
5. Які існують види запасів?
6. В задачах оптимізації поставок в якому вигляді подається критерій ефективності?
7. Які є моделі управління запасами?
8. Що таке управління запасами?
9. За якою формулою вирішується задача про оптимальну партію?
10. Які елементи включають витрати на підготовку одиниці продукту?
11. Як класифікуються матеріали в системі АВС?
12. Яка основна роль запасів?

ТЕМА 5. ЗАВДАННЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Теорія масового обслуговування (ТМО) – це розділ дослідження операцій, який розглядає різноманітні процеси в економіці, а також у телефонному зв’язку, охороні здоров'я та інших галузях, як процеси обслуговування, тобто задоволення різних замовлень (наприклад, обслуговування кораблів у порту, їх розвантаження та завантаження, обслуговування клієнта в пральній і т. інше). При всій різноманітності ці процеси мають спільні риси: вимоги на обслуговування не постійно (випадково) поступають на „канал обслуговування” (місце біля причалу, вікно в роздавальному приміщенні) і , в залежності від його зайнятості, тривалості обслуговування та інших факторів, утворюють чергу вимог. ТМО вивчає статистичні закономірності надходження вимог і на цій основі розробляє рішення, тобто такі характеристики системи обслуговування, при яких витрати часу на очікування в черзі, з одного боку, і на застій – з іншого, були б найменшими. Систему виробництва і споживання товарів можна трактувати як систему масового обслуговування, де зустрічаються люди (клієнти) і товари. Деякі вчені роблять із цього досить широкі висновки. Вони схильні розглядати суму витрат часу на очікування в чергах і на застій каналів обслуговування (зберігання товарів на складах) як міру ефективності економічної системи, яку вивчаємо: чим менші витрати, тим вища ефективність.

Треба сказати і про терміни „ТМО” та „теорія черг”. У багатьох роботах вони трактуються як рівноправні, в інших – теорію черг розглядають тільки як розділ ТМО, оскільки вивчаються системи не тільки з чергами, а й з відмовами (наприклад, коли телефонна лінія зайнята, черга абонентів не звертається), а також деякі інші.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, які пов'язують задані умови праці систем масового обслуговування (СМО) із показниками ефективності СМО, які описують їх здатність справлятись з потоком заяв.

В якості показника обслуговування СМО використовуються: середня кількість заяв, які обслуговуються в одиницю часу; середня кількість заяв у черзі; середній час очікування обслуговування; імовірність відмови в обслуговуванні без очікування; можливість того, що кількість заяв у черзі перевищить певне значення і т.д.

Середні величини в СМО розуміються як математичні очікування відповідних випадкових величин.

Під вимогою на обслуговування часто розуміють потребу в обслуговуванні, яка надходить від об'єкта (клієнта), а також сам об'єкт, незалежно від його природи. Обслуговування – це процес виконання роботи із задоволення вимог, що надійшли. Технічні пристрої, персонал або засоби будь-якого іншого походження, які виконують функції обслуговування, називаються каналами обслуговування.

1. Поняття про системи масового обслуговування та загальна характеристика завдань, які вирішуються

Необхідність підвищення ефективності суспільного виробництва зумовлює постановку та вирішення все більш важливих та складних завдань. У кінцевому результаті це потребує поглиблення раніше розроблених методів дослідження й створення нових технічних, технологічних, економічних та математичних теорій. Нові методи кількісного аналізу перевіряються практикою, тим, що має місце в дійсності.

Теорія масового обслуговування (ТМО) представляє собою частину нового наукового напрямку теорії ймовірностей, що виділилась й оформилась у самостійну наукову дисципліну завдяки специфіці вживаного математичного апарату та важливості практичних завдань, які вирішуються.

Початок розробки практичних завдань масового обслуговування поклав фахівець копенгагенської телефонної компанії датський математик А.К.Ерланг (1878-1929рр.) в період між 1908 та 1922 роками. У 1909р. з’явилась його робота „Теорія імовірностей і телефонні переговори” та інші публікації, в яких

були сформульовані перші прикладні задачі телефонії. Ці задачі були пов’язані із необхідністю впорядкувати роботу телефонної мережі та розробити методи оцінювання якості обслуговування споживачів в залежності від кількості пристроїв, що використовуються.

Узагальнення методів вирішення різноманітних завдань та розробка спільної ТМО пов’язані із ім’ям радянського математика А.Я.Хинчина. В його книзі „Математичні методи теорії масового обслуговування” вперше були сформульовані спільні ідеї та методи теорії. Подальший розвиток ТМО пов’язаний з ім’ям іншого радянського математика Б.В.Гнеденко та його учнів А.М.Колмогорова, Н.Б.Бусленка та ін., із закордонних авторів відомі: Д.Кендалл, Ф.Паллачек, Л.Токач та ін.

Спільною особливістю завдань із застосуванням ТМО є випадковий характер процесів, що використовуються. Однією із типових життєвих ситуацій слід вважати утворення черг при задоволенні яких-небудь потреб, що приводить до втрат робочого часу й невиробничій витраті різних ресурсів. У всіх галузях діяльності людини мають місце процеси, які носять характер масового обслуговування:

- побутове обслуговування – це надання послуг покупцям у крамницях, ремонт різних побутових предметів у майстернях, телефонні переговори , надання медичної допомоги за всіма видами, пожежне обслуговування і т. інше;
- у військовій справі – обстріл літаків, катерів та інших видів бойової техніки противника;
- у виробництві - транспортне та ремонтне обслуговування, організація постачання.

Типовим прикладом задачі МО в житлово-комунальному господарстві є експлуатація одним робітником (сантехніком, електриком) групи об’єктів (будинків, під’їздів, квартир). Якщо за робітником закріплено недостатньо об’єктів, то в моменти їх справності - простоює, якщо багато – він не зможе їх

своєчасно обслужити. Аналогічна ситуація виникає, якщо декілька об'єктів (N) обслуговуються декількома робітниками (R).

Теорія масового обслуговування вивчає закономірності протікання процесів, пов'язаних з масовим обслуговуванням, розробкою кількісних методів пошуку таких об'єктивних характеристик, які забезпечують своєчасне задоволення потреб, що надходять за рахунок раціональної організації робіт.

У вітчизняній та зарубіжній літературі ТМО називають по-різному: теорією лінії очікування, чергою утворення груп та ін. Ця наукова дисципліна займається описом, аналізом та дослідженням різних за своїм змістом явищ з метою виявлення і створення необхідних передумов для їх якісного функціонування. При цьому під якістю обслуговування розуміється не те, як добре виконана робота (ремонт, своєчасність обслуговування та ін.), а на скільки вона своєчасно виконана, чи не утворюються вимоги, які ще не обслужені. У загальному вигляді черга на обслуговування може виникати, якщо на процес, що досліджується, покладені слідуючі обмеження:

- обмежена кількість чи недостатня продуктивність обслуговуючих апаратів;
- нерегулярне надходження вимог;
- зміна (варіювання) тривалості обслуговування.

Завдяки різній організації виробництва й праці, коли вимоги на обслуговування надходять рівномірно, протягом рівних проміжків часу й вони також обслуговуються, ніяких завдань масового обслуговування (ЗМО) не виникає.

2. Прийнята термінологія та класифікація систем масового обслуговування

Складовими елементами систем масового обслуговування (СМО) є:

- вхідний потік вимог та заяв, які представляють собою запити на задоволення будь-якої потреби (під потоком розуміється послідовність подій);

- вихідний потік вимог (обслужені чи ні), які покидають обслуговуючу систему (для іншої системи може бути вхідний);
- обслуговуючі апарати, які об’єднуються в анологічну систему (технічні засоби, люди та різноманітні пристрої, люди та різноманітні засоби, за допомогою яких задовольняються різні запити). Обслуговуючі апарати можуть бути однорідними (тобто задовольняти будь-які вимоги) чи неоднорідні;
- черга на обслуговування складається з вимог, які потребують обслуговування. Вона може бути присутня, а може бути відсутня, може складатись з реальних або інших (потенціальних) вимог.

Під обслуговуванням розуміється задоволення якої-небудь потреби.

Як зазначалось вище, спільною метою вивчення процесів масового обслуговування слід враховувати оцінювання якості функціонування системи, що обслуговується, виявлення умов забезпечення її успішної роботи при своєчасному задоволенні заяв (вимог), що надходять.

Існує декілька різновидів СМО, які відрізняються особливостями поведінки вимог, що надходять, у випадку, коли вони застають обслуговуючі апарати зайнятими, й організацією робіт обслуговуючих апаратів.

Ще Ерланг звернув увагу на те, що є два типи систем у телефонії – з очікуванням і втратами. Тепер з’ясувалось, що на практиці зустрічається й інші системи. Цьому є підтвердження (рис 5.1 - „Системи масового обслуговування”).

В упорядкованих системах обслуговуючі апарати не рівномірні. Тому вимога, що надійшла, обслуговується жорстко визначеним з усіх вільних апаратів, а точніше – з найменшим номером, якщо вони пронумеровані.

У неупорядкованих системах усі апарати рівноправні, й вимоги, що тільки-но надійшли, обслуговуються без переваги будь-яким з вільних апаратів.

Рис. 5.1 - „Системи масового обслуговування”

Системи, що обслуговують обмежену кількість об’єктів, які через деякий час повертаються в систему за новим обслуговуванням, називають замкнутими.

Якщо кількість поступаючих вимог значна і вони надходять безперервно, а обслуговувані вимоги до системи не повертаються, то ці системи називають розімкнутими.

Системи з відмовою: якщо вимога, що надійшла, застає всі обслуговуючі апарати зайнятими, то вона покидає систему, залишаючись не обслуженою.

Система з очікуванням: якщо вимога, що надійшла, застає всі обслуговуючі апарати зайнятими, то вона стає в чергу і чекає обслуговування.

У системах без обмежень на очікування вимозі обслуговування ніяких обмежень не встановлюється.

У змішаних системах обмеженнями можуть бути: час очікування, кількість вимог у черзі на обслуговування, час очікування і обслуговування і ін.

У системах з очікуванням може бути декілька форм обслуговування:

– апарати приймають на обслуговування вимоги у випадковому порядку;

– у порядку черги;
– вимога, яка в найкоротший час має покинути систему;
– вимога, яка надійшла раніше за всіх.

Якість функціонування СМО оцінюється двояко: збоку інтересів вимог, що надходять, та збоку системи, яка їх обслуговує. Потрібно розмежувати критерії якості обслуговування в залежності від типу системи.

У системах з відмовою такими критеріями є:

- середній відсоток заяв, які отримали відмову;
- імовірність відмови черговій вимозі;
- імовірність того, що обслуговуванням займеться декілька апаратів, або вони всі зайняті і т. ін.

У системах з очікуванням наступні критерії:

- середня довжина черги та імовірність її виникнення;
- середній час очікування початку обслуговування;
- імовірність того, що обслуговуючі апарати зайняті або вільні та ін.

Окрім перерахованих критеріїв при оцінюванні функціонування СМО можуть бути використані вартісні показники: вартість обслуговування кожної вимоги в системі; вартість витрат, пов’язаних з простоєм вимог за одиницю часу; вартість збитків, пов’язаних з виходом вимог із системи; вартість експлуатації кожного пристрою системи за одиницю часу; вартість одиниці часу простою пристрою системи і т. інше.

У СМО створюються основні числові характеристики вхідного і вихідного потоку вимог, а також характер їх обслуговування. Тому для вирішення завдань раціональної організації обслуговуючої системи потрібно спочатку провести дослідження та математично описати потік вимог і час обслуговування. Для цього використовуються фотографії робочого часу, диспетчерського та оперативного обліку.

Задачі для закріплення знань за темою

ЗАДАЧА 1

Відомості про режим функціонування станції для миття автомобілів вказують на те, що автомобілі надходять на станцію згідно з пуассонівським розподілом, а середня інтенсивність прибуття на станцію автомобілів дорівнює 5 автомобілям за годину ($\lambda = 5$ кл./год). Тривалість виконання робіт, що пов'язана з миттям автомобілів, задовольняє експотенціальному закону із середнім значенням 10 хв. на автомобіль ($\nu = 60 / 10 = 6$ кл./год).

Скільки в середньому простоює станція для миття автомобілів? Який середній час перебування клієнта в системі (тобто, в черзі та на обслуговуванні)?

Розв'язання:

Згідно з умовами задачі ми бачимо, що для її розв'язання можна застосувати модель системи (M/M/1): (GD/∞/∞).

$\lambda = 5$ кл./год, $\nu = 6$ кл./год => $\rho = 5 / 6 < 1$.

Тому що $\rho < 1$, ця система може функціонувати в стаціонарному режимі.

В середньому в черзі знаходяться

$L_q = \rho^2 /(1-\rho) = (5/6)^2 /(1-(5/6)) = 4{,}17 \approx 4$ автомобіля.

Однак це лише математичне сподівання кількості автомобілів, які знаходяться в черзі, а на практиці час очікування деяких автомобілів може бути більш тривалим.

Станція для миття автомобілів у середньому простоює

$P_0 = 1\text{-}5/6 = 0{,}17$ (17% часу).

Час перебування клієнта в системі дорівнює:

$$W_S = \frac{1}{\nu \cdot (1-\rho)} = \frac{1}{6(1-\frac{5}{6})} = 1 \text{ год.}$$

Висновок: час очікування дуже великий.

ЗАДАЧА 2

Нехай станція, параметри якої наведені в попередній задачі, має п'ять площадок для автомобілів. Якщо всі площадки зайняті, то автомобілі повинні шукати іншу станцію.

Фірму цікавить, яка кількість клієнтів втрачається через обмеження на кількість місць паркування та інші характеристики СМО.

Розв'язання.

Виходячи із заданих умов можна застосувати модель системи (M/M/1): (GD/N/∞), де N = 5 + 1 = 6.

Через обмеження на кількість місць паркування в одинцю часу фірма втрачає $\lambda - \lambda_{еф} = \lambda \cdot P_n$ клієнтів.

У нашому прикладі ρ = 5/6 (ця система може функціонувати в стаціонарному режимі при будь-якому значенні ρ). Ймовірність того, що на станції знаходиться 6 машин, яка дорівнює ймовірності того, що клієнту буде відмовлено в доступі до системи, обчислюється наступним чином:

$$P_N = P_0 = \left[\frac{1-(5/6)}{1-(5/6)^7}\right]\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}0774\,.$$

Звідси ймовірність виникнення ситуації, коли клієнт, який прибув на станцію для миття автомобілів, не має можливості приєднатися до черги, дорівнює $P_n \cdot \lambda = 0{,}387$ автомобіля за годину, це становить приблизно 3 автомобіля при восьмигодинному робочому дні.

Ймовірність того, що клієнт буде допущений до системи, дорівнює відносній перепускній здатності СМО:

$$Q = 1 - P_{відм} = 1 - P_6 = 1 - 0{,}0774 = 0{,}9226\,.$$

Ймовірність того, що на станції немає машин, дорівнює

$$P_0 = \left[\frac{1-(5/6)}{1-(5/6)^2}\right] = 0{,}2311866$$

(ця величина дорівнює ймовірності того, що клієнт одразу ж потрапить на обслуговування).

Обчислимо середню кількість клієнтів у системі:

$$L_S = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)\left[1-7\left(\frac{5}{6}\right)^6+6\left(\frac{5}{6}\right)^7\right]}{\left(1-\frac{5}{6}\right)\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^7\right]} = 2{,}29 \text{ автомобіля}$$

Вирахуємо $\lambda_{еф}$ - ефективну інтенсивність надходжень клієнтів у систему, яка дорівнює А - абсолютній перепускній здатності СМО:

$$\lambda_{еф} = \lambda(1 - P_6) = 5(1 - 0{,}0774) = 4{,}613 \text{ кл./год.}$$

Середній час перебування автомобілів на станції для миття автомобілів дорівнює:

$$W_S = L_S / \lambda_{еф} = 2{,}29 / 4{,}613 = 0{,}496 \text{ год.}$$

Тепер обчислимо середній час перебування автомобілів у черзі:

$$W_q = W_S - 1/\nu = 0{,}496 - 1/6 = 0{,}3293 \text{ год.}$$

У середньому буде зайнято

$$W_q \cdot \lambda_{ei} \approx 0{,}3297 \cdot 4{,}613 \approx 1{,}52 \text{ стоянки.}$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке теорія масового обслуговування?
2. Хто поклав початок розробці завдань масового обслуговування?
3. Перерахуйте умови виникнення черги.
4. Назвіть складові елементи систем масового обслуговування.
5. Назвіть типи систем масового обслуговування.

ТЕМА 6. ЗАДАЧІ ВПОРЯДКУВАННЯ І КООРДИНАЦІЇ. МЕРЕЖНЕ ПЛАНУВАННЯ

Пошуки більш ефективних способів планування складних процесів призвели до створення принципово нових методів мережного планування та управління (МПУ).

Система методів МПУ— це система методів планування та управління розробкою великих народногосподарських комплексів, науковими дослідженнями, конструкторською і технологічною підготовкою виробництва, нових видів виробів, будівництвом і реконструкцією, капітальним ремонтом основних фондів шляхом застосування сіткових графіків.

Перші системи, які використовували сіткові графіки, були застосовані в США в кінці 50-х років XX ст. та одержали назву CPM (англійська абревіатура, яка означає метод критичного шляху) і PERT (метод оцінювання та огляду програми). Система CPM була вперше застосована при керуванні будівельними роботами, система PERT— при розробці систем “Поларіс”.

В Росії роботи з сіткового планування почались у 60-х роках XX ст. Тоді методи МПУ знайшли застосування в будівництві та наукових розробках. У подальшому сіткові методи стали широко застосовуватися також у інших сферах національної економіки.

МПУ заснований на моделюванні процесу за допомогою сіткового графіка і представляє собою сукупність розрахункових методів, організаційних та контрольних заходів з планування та керування комплексом робіт.

Система МПУ дозволяє:

- формувати календарний план реалізації деякого комплексу робіт;
- виявляти і мобілізувати резерви часу, трудові, матеріальні та грошові ресурси;
- здійснювати керування комплексом робіт згідно з принципом “провідної ланки” з прогнозуванням і попередженням можливих зривів у розвитку робіт;

- підвищувати ефективність керування в цілому при чіткому розподілі відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт.

Діапазон застосування МПУ дуже широкий: від задач, які торкаються діяльності окремих осіб, до проектів, в яких беруть участь сотні організацій та десятки тисяч людей (наприклад, розробка і створення великого територіально-промислового комплексу).

Під комплексом робіт (комплексом операцій, або проектів) ми розуміємо будь-яку задачу, для виконання якої необхідно виконати достатньо велику кількість різноманітних робіт. Це може бути й будівництво деяких будівель, корабля, літака або будь-якого іншого складного об’єкта, і розробка проекту цієї споруди, і навіть процес будування планів реалізації проекту.

Для того, щоб скласти план робіт щодо здійснення великих і складних проектів, які складаються з тисячі окремих досліджень і операцій, необхідно описати його за допомогою деякої математичної моделі. Таким засобом опису проектів (комплексів) є сіткова модель.

1. Мережна модель та її основні елементи

Мережна модель представляє собою план виконання деякого комплексу взаємозв’язаних робіт (операцій), заданого в специфічній формі-сітці, графічне зображення якої називається сітковим графіком. Відмінною особливістю сіткової моделі є чітке визначення всіх тимчасових взаємозв’язків майбутніх робіт.

Головними елементами мережної моделі є події та роботи.

Термін “робота” використовується в МПУ в широкому розумінні. По-перше, це дійсна робота— протяжний у часі процес, який потребує затрат ресурсів (наприклад, збирання виробу, випробування приладу і т.п.). Кожна дійсна робота повинна бути конкретною, чітко описаною та мати відповідального виконавця.

По-друге, це чекання— протяжний у часі процес, який не потребує затрат праці (наприклад, процес висихання після фарбування, старіння металу, затвердіння бетону і т.п.).

По-третє, це залежність, або фіктивна робота— логічний зв’язок між двома або декількома роботами(подіями), які не потребують затрат праці, матеріальних ресурсів або часу. Вона вказує, що можливість однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої. Природно, що тривалість фіктивної роботи приймається за нуль.

Подія— це момент завершення якогось процесу, що відображає окремий етап виконання проекту. Подія може бути приватним результатом окремої роботи або сумарним результатом декількох робіт. Подія може здійснитися тільки тоді, коли закінчаться усі роботи, попередні їй. Наступні роботи можуть розпочатися тільки тоді, коли подія здійсниться. Звідси двобічний характер події: для усіх безпосередньо попередніх їй робіт вона є кінцевою, а для усіх безпосередньо наступних за нею— початковою. При цьому припускається, що подія не має тривалості та здійснюється нібито миттєво. Тому кожна подія, яка включається до сіткової моделі, повинна бути повно, точно та всебічно визначена, її формулювання повинне включати в себе результат усіх безпосередньо попередніх їй робіт.

Поміж подій сіткової моделі виділяють початкові й завершальні події. Початкова подія не має попередніх робіт і подій, які відносяться до поданого в моделі комплексу робіт. Завершальна подія не має наступних робіт і подій.

Події на сітковому графіку (або, як ще кажуть, на “графі”) зображаються кружками (вершинами графи), а робота— стрілками, які показують зв’язок між роботами. Приклад фрагменту мережного графіку наведений на рис.6.1.

Рис. 6.1 – Фрагмент мережного графіку

На рис. 6.2 зображений мережний графік задачі моделювання і побудови оптимального плану деякого економічного об’єкта. Щоб вирішити цю задачу, необхідно здійснити наступні роботи: А- сформулювати проблему дослідження; Б- побудувати математичну модель об’єкта, який вивчаємо; В- зібрати інформацію; Г- обрати метод вирішення задачі; Д- побудувати і налагодити програму для ЕОМ; Е- розробити оптимальний план; Ж- передати результати розрахунку замовнику. Цифрами на графіку позначені номера подій, до яких призводить виконання відповідних робіт.

На рис. 6.2 зображений мережний графік задачі

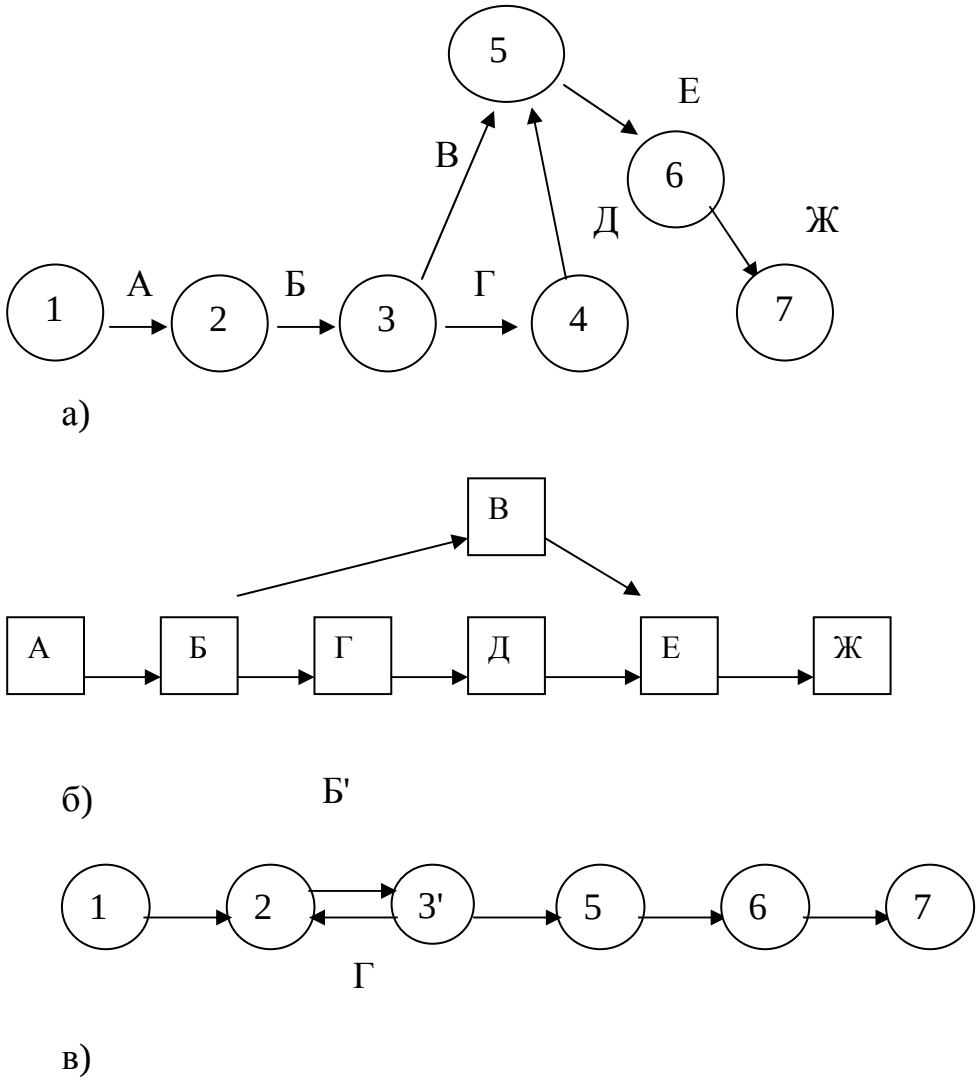

Рис. 6.2 – Мережний графік задачі моделювання і побудови оптимального плану деякого економічного об’єкту

З графіка, наприклад, випливає, що роботи В і Г можна почати виконувати незалежно одна від одної тільки після здійснення події 3, тобто, коли будуть

виконані роботи А і Б; роботу Д- після здійснення події 4, коли будуть виконані роботи А, Б і Г; а роботу Е можна здійснити після настання події 5, тобто при здійсненні усіх попередніх їй робіт А, Б, В, Г і Д.

У мережній моделі, яка представлена на рис. 6.2, а, немає числових оцінювань. Така мережа називається структурною. Однак, на практиці частіше використовуються сітки, в яких задані оцінювання тривалості робіт (вказані в годинах, тижнях, декадах, місяцях і т.п. над відповідними стрілками), а також оцінювання інших параметрів, наприклад, трудомісткості, вартості і т.п. Саме такі сітки ми будемо розглядати в подальшому.

Однак, може бути й інший принцип побудови мереж— без подій. В такій мережі вершини графіка (наприклад, зображені прямокутниками) означає певні роботи, а стрілки залежності між цими роботами, визначають порядок їх виконання. В якості прикладу мережний графік “події-робота” задачі модулювання і побудови оптимального плану деякого економічного об’єкта, який знаходиться на рис. 6.2, а, представлений у вигляді сітки “роботи-зв’язки” на рис. 6.2, б. А мережний графік “події-робота” має ту ж саму задачу, але з невдало складеним переліком робіт, представлений на рис. 6.2, в. У мережі не повинно бути замкнених контурів і петель, тобто шляхів, які з’єднують деякі події з самими ними.

Слід відзначити, що мережний графік “роботи-зв’язки” на відміну від графіка “події-роботи” володіє відомими перевагами: не містить фіктивних робіт, має більш просту техніку побудови та перебудови, включає тільки добре знайомі виконавцям уявлення роботи без менш звичного уявлення події. Разом з тим, сітки без подій є значно більш громіздкими, так як подій звичайно значно менше, ніж робіт (показник складності сітки, дорівнює відношенню числа робот до числа подій, як правило, суттєво більше одиниці). Тому ці сітки менш ефективні з точки зору керування комплексом. Цим і пояснюється той факт, що (при відсутності в цілому принципіальних відмінностей між двома формулами уявлення сітки) у нинішній час найбільше поширення отримали сіткові графіки “події-роботи”. Таким чином, ми розглянули перше питання “Мережна модель та її основні елементи”.

2. Порядок і правила побудови мережних графіків

Мережні графіки складаються на початковому етапі планування. На початку планувальний процес поділяється на окремі роботи, складається перелік робіт і подій, продумуються їх логічні зв'язки і послідовність виконання, роботи закріплюються за відповідними виконавцями. З їх допомогою оцінюється тривалість кожної роботи. Потім складається (зшивається) сітковий графік. Після упорядкування сіткового графіка розраховуються параметри подій і робіт, визначаються резерви часу та критичний шлях. Нарешті, проводиться аналіз і оптимізація сіткового графіка, який при необхідності малюється новий з переліченням параметрів подій і робіт.

При побудові мережного графіка необхідно дотримуватися ряда правил.

1.У мережній моделі не повинно бути "глугих кутів" подій, тобто подій, з яких не виходить не одна робота, за винятком завершальної події (рис.6.3 а). Тут або робота (2, 3) не потрібна або її необхідно анулювати, або не помічена необхідність певної роботи, наступної за подією 3 для здійснення якої-небудь наступної події. У таких випадках необхідне ретельне вивчення взаємозв'язків подій і робіт для виправлення непорозуміння.

2.У мережному графіку не повинно бути "хвостових" подій (крім початкових), яким не передує хоча б одна робота (подія 3— на рис.6.3 б). Тут роботи, передуючі події 3, не передбачені. Тому подія 3 не може здійснитися, а отже, не може бути виконана і наступна за нею робота (3, 5) . Виявивши у сітці такі події необхідно визначити виконавців передуючих їм робіт та включити ці роботи в сітку.

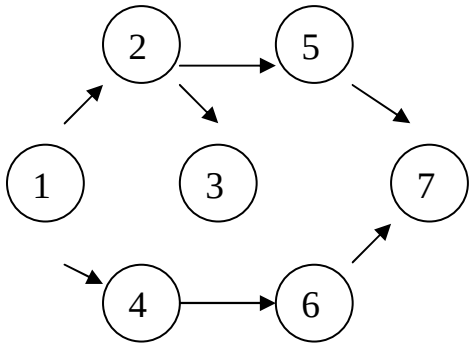

Рис. 6.3, а – Мережний графік

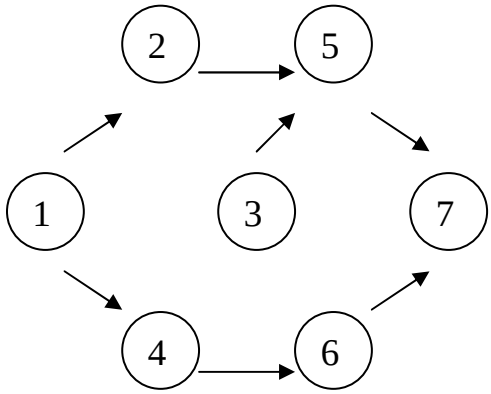

Рис. 6.3 б – Мережний графік

3. В мережі не повинно бути замкнених контурів і петель, тобто шляхів, які з’єднують деякі події з ними ж самими (рис. 6.3 в, г).

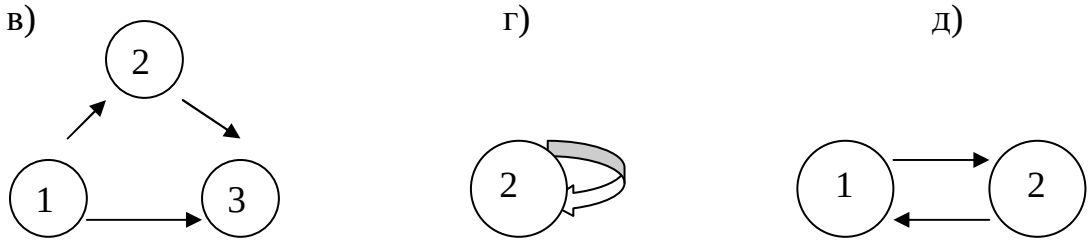

Рис. 6.3 в, г, д – Мережний графік

Уявімо, що на мережному графіку, який зображений на рис. 6.3, а, роботи Б (побудова математичної моделі) і Д (побудова і налагодження програми для ЕОМ) при формуванні первісного списка робіт ми об’єднали б у єдину роботу Б. Тоді отримали б мережний графік, зображений на рис.6.2 в. Подія 2’ означає, що дозволено переходити до роботи Б', яку не можна виконати до вибору метода розрахунку (робота Г), а вибір метода розрахунку не можна починати до закінчення побудови моделі (3’). Іншими словами, у мережі утворився найпростіший контур (2’ 3’ 2’).

При виникненні контура (а в складних сітках, тобто в сітках з високим показником складності, це зустрічається досить часто і виявляється лише за допомогою ЕОМ) необхідно повернутися до початкових даних і шляхом

перегляду складу робіт добитися його центрування. Так, у нашому прикладі знадобився б розподіл роботи Б' на Б і Д.

4. Будь-які дві події повинні бути безпосередньо пов’язані не більш, ніж однією роботою-стрілкою.

Порушення цієї умови відбувається при зображенні паралельно виконаних робіт (рис. 6.3, д). Якщо ці роботи так і залишити, то станеться плутанина із-за того, що дві різні роботи будуть мати однакові позначки (1, 2); як правило, під (i, j) розуміють роботу, яка зв’язує i-у подію з j-ю подією. Однак зміст цих робіт, склад залучених виконавців і якість витрачених на роботи ресурсів можуть істотно відрізнятися.

У цьому випадку рекомендується ввести фіктивну подію (подія 2’ на рис. 6.3, є) і фіктивну роботу (робота 2’,2), при цьому одна з паралельних робіт (1, 2’) замикається на цю фіктивну подію. Фіктивні роботи зображені на рисунку пунктирними лініями.

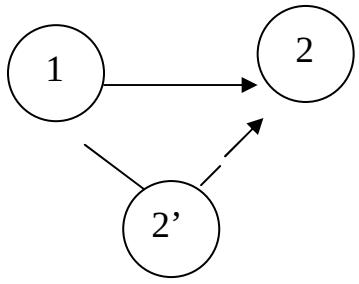

Рис. 6.3, є – Мережний графік

5.У мережі рекомендується мати одну початкову і одну завершальну подію. Якщо в складаній сітці це не так (рис. 6.3, ж), то добитися бажаного можна шляхом введення фіктивних подій і робот, як зображено на рис. 6.3, з.

Фіктивну роботу і події необхідно вводити і поряд з іншими випадками. Один з них – відображення залежності подій, не зв’язаних з реальними роботами. Наприклад, роботи А і Б (рис. 6.3., і) можуть виконуватися незалежно одне від одного, але за умов виробництва: робота Б не може починатися раніше, ніж закінчиться робота А. Ця обставина потребує введення фіктивної роботи С.

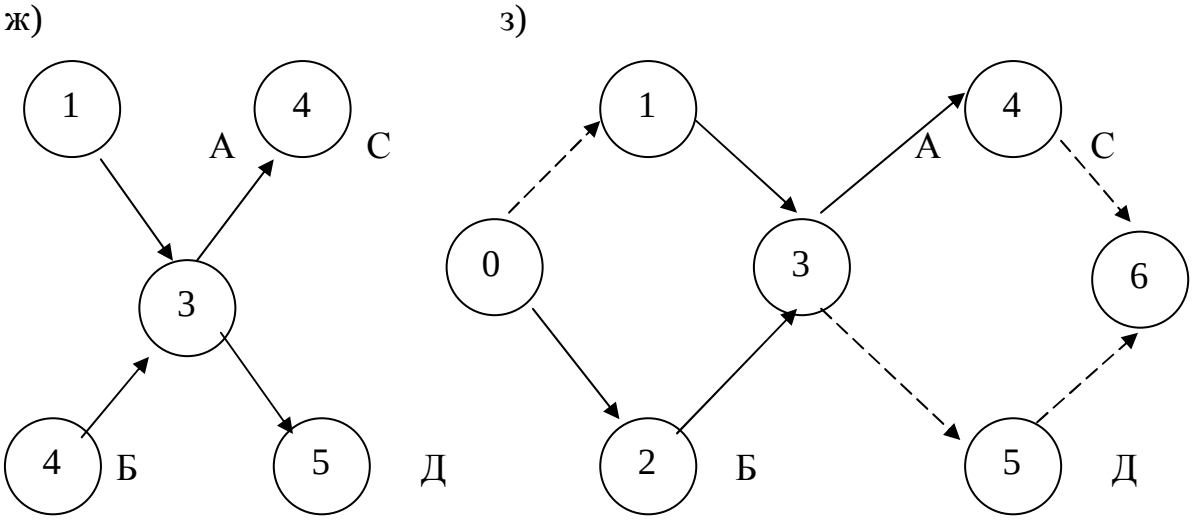

Рис. 6.3 ж, з– Мережний графік

Інший випадок— неповна залежність робіт. Наприклад, робота С потребує для свого початку завершення робіт А і Б, але робота Д зв’язана тільки з роботою Б, а від роботи А не залежить. Тоді стає за необхідне введення фіктивної роботи Ф і фіктивної події 3’, як зображено на рис. 6.3, к.

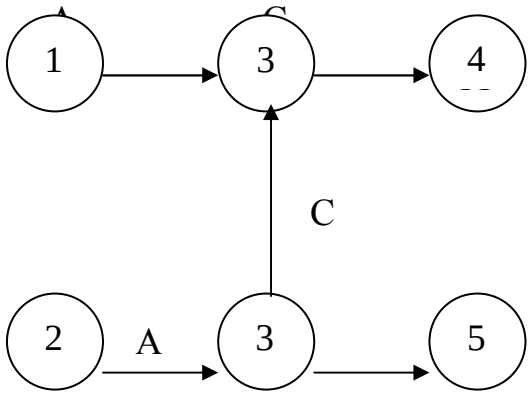

Рис. 6.3, к – Мережний графік

Крім того, фіктивні роботи можуть вводитися для відображення реальних відстрочок і очікування. На відміну від попередніх випадків тут фіктивна робота характеризується подовженням у часі.

Таким чином, ми розглянули друге питання “Порядок і правила побудови мережних графіків”.

Мережне планування і керування (МПУ) – система, яка застосовується у будівництві в керуванні великими науково-технічними розробками ті іншими комплексами робіт; заснована на використанні ЕОМ і мережних графіків. Такий графік представляє мету робіт (операцій) і подій, відображаючи їх технологічну послідовність і зв’язок у процесі досягнення цілі.

На його основі ЕОМ може виготовити аналіз стану процесу в кожний заданий момент часу, визначити послідовність робіт, які можуть затримати виконання плану до зазначеного терміну (критичний шлях), і, таким чином, “порадити” керівництву оперативно вжити необхідних заходів. Така система МПУ орієнтована на критерій часу.

Приклад мережного графіка наведений на рис.6.4. В кружечках тут вказані номера подій, стрілки означають роботи, а цифри над ними називаються тимчасовими оцінками; вони вказують орієнтовну тривалість робіт.

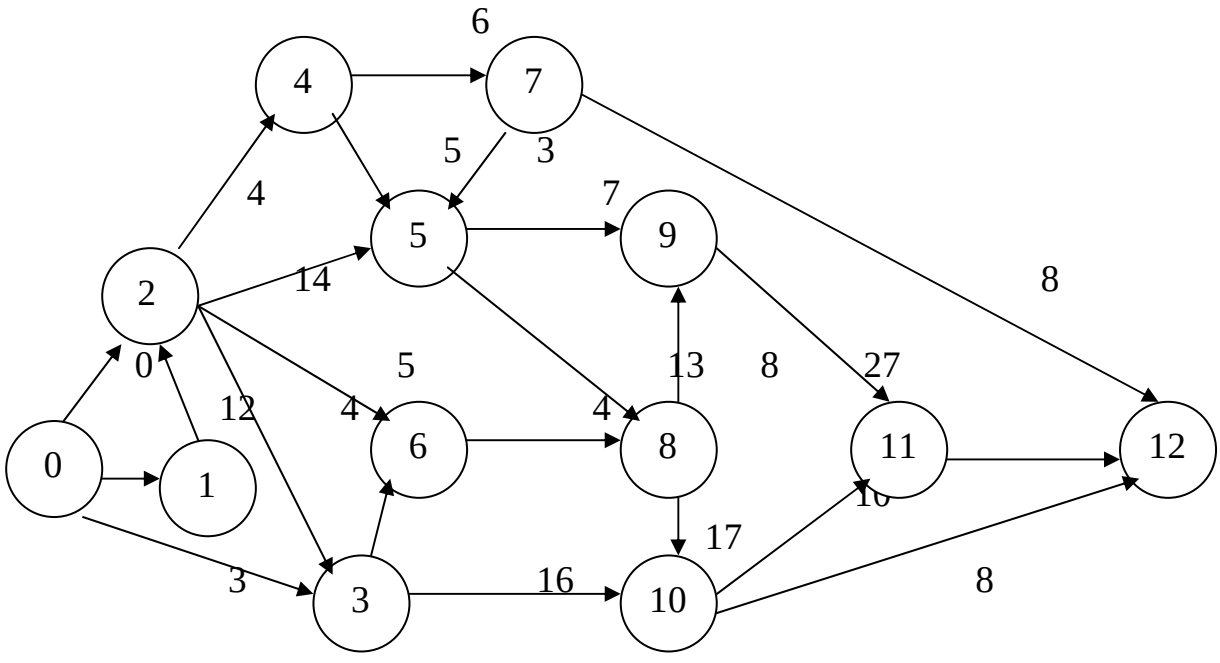

Рис. 6.4 – Визначення критичного шляху мережного графіку

Є й такі мережні графіки, які орієнтовані не на критерій часу, а, наприклад, на скорочення вартості робіт.

Розрахунки за такою мережею (наприклад, знаходження критичного шляху) можна легко зробити власноручно. Реальні ж мережні графіки містять сотні і навіть тисячі робіт і подій. Їх аналіз можливий тільки за допомогою ПЕОМ.

Задачі для закріплення знань за темою.

Задача №1

На прикладі сіткового графіка, поданого на рис 6.5, розглянемо методи обчислення основних параметрів сіткового графіка. Кожну з вершин розбиваємо на чотири частини:

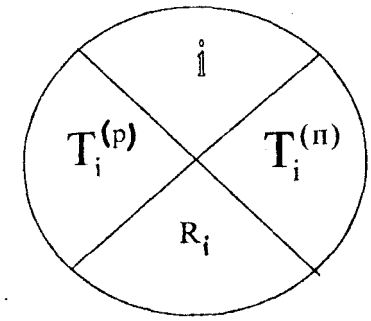

Рис 6.5 – Сітковий графік

У північній частині записується номер події, в інших частинах вершини будуть записані параметри, які ми введемо нижче. Цифри над дугами означають тривалість операцій.

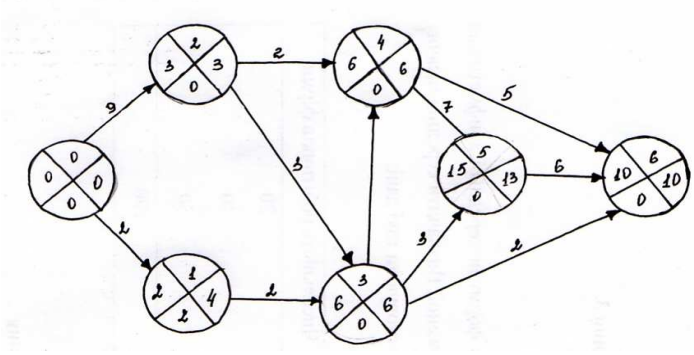

Рис. 6.6 – Розрахунок критичного та інших параметрів сіткового графіку

Розрахунок критичного та інших параметрів сіткового графіка включає два етапи:

1) Перший етап: прямий хід

Під час прямого ходу обчислюються ранні строки стану подій, які ми будемо позначати $T_j^{(p)}$. Ми будемо вважати, що ранній строк стану вихідної події дорівнює нулю $T^{(p)}_0 = 0$.

Обчислення ранніх строків стану подій починаються з вихідної події і проводиться в порядку зростання номерів вершин до тих пір, доки не буде досягнута заключна подія.

Позначимо t_{ij} - тривалість роботи (i, j). Обчислення ранніх строків відбуття подій виконується за формулою:

$$T_j^{(p)} = \max_{(i,j)\in V_j^+} \left\{ T_i^{(p)} + t_{ij} \right\} \qquad j = 1,...\overline{n} .$$

де V_j^+ - множина всіх операцій, які закінчуються подією **j**.

Ранні строки стану подій записуються в західному куті круга, який відповідає цій операції.

Подією 1 закінчується лише одна операція (0,1) тривалістю t_{01}=2, тому:

$T^{(p)}_1 = T^p_0 + t_{01} = 0+2 = 2.$

Зразу ж розглядати подію 3 не можна тому, що T^p_2 ще невідоме.

$T^{(p)}_2 = T^p_0 + t_{02} = 0 + 3 = 3.$

Запишемо значення T^p_2 у відповідну клітину.

Тепер знайдемо:

$T^p_3 = \max\{T^p_1 + t_{13}, T^p_2 + t_{23}\} = \max\{2+2, 3 + 3\} = 6$

Далі обчислення значень проводяться за аналогією, доки не будуть обчислені усі значення T^p_i, для всіх i= 0,...,N.

$T^p_4 = \max \{T_2 + t_{24}, T_3 + t_{34}\} = \max \{3 + 2, 6 + 0\} = 6$

$T^p_5 = \max \{T_4 + t_{45}, T_3 + t_{35}\} = \max \{6 + 7, 6 + 3\} = 13$

$T^p_6 = \max \{T_4 + t_{46}, T_5 + t_{5,6}, T_3 + t_{3,6}\} = \max\{6 + 5, 13 + 6, 6 +2\} = 19$

Після надання примітки кінцевій вершині обчислення прямого ходу завершуються.

Критичний час дорівнює ранньому строку завершення кінцевої події. Таким чином комплекс робіт можна виконати за 19 одиниць часу.

2) Другий етап: зворотний хід

На цьому етапі обчислюються пізні строки відбуття подій, які ми будемо позначати $T_i^{(п)}$. Починаються обчислення з кінцевої події комплексу робіт, при цьому вважають, що $T_N^л \equiv T_N^р$,де N - номер заключної події. Значення $T_i^{(п)}$ обчислюються за формулою:

$$T_i^П = \min_{(i,j)\in V_i^-} \left\{ T_j^П - t_{ij} \right\},$$

де V_j^+ - множина всіх операцій, які закінчуються подією **j**.

Їх записують в східному куті.

$T_6^п = T_6^р = 19$;

$T_5^п = 19 - 6 = 13$;

$T_4^п = \min\{19 - 5, 13 - 7\} = 6$; $T_3^п = \min\{6 - 0, 13 - 3, 19 - 2\} = 64$

$T_2^п = \min\{6 - 3, 6 - 2\} = 3$; $T_1^п = 6 - 2 = 4$;

$T_0^п = \min\{4 - 2, 3 - 3\} = 0$.

Обчислення на зворотному шляху закінчені.

Після знаходження ранніх та пізніх строків відбуття подій знаходять резерви часу подій R_k, тобто час, на який можна відкласти момент початку події, не перевищуючи загальний час виконання комплексу робіт.

Чисельне значення резерву часу події знаходиться за формулою:

$R_k = T^{(п)}_k - T^{(р)}_k$,

його записують у нижньому кутку вершини.

Після закінчення обчислення чотирьох основних параметрів подій починають обчислення параметрів робіт (операцій).

В першу чергу з'ясовують належить робота критичному шляху чи ні. Операція (i,j) належить критичному шляху, якщо вона задовольняє наступним трьом умовам:

1) $T^п_i = T^р_i$

2) $T^п_j = T^р_j$

3) $T^{p}_{j} - T^{p}_{i} = T^{п}_{j} - T^{п}_{i} = t_{ij}$.

Ці умови означають, що між ранніми та пізніми строками початку

(завершення) операції запас часу відсутній.

У критичних операцях (i,j) числа, які проставлені в східному й західному кутах подій (i та j), однакові. Таким чином, резерв події, яка записана у південному куті події, дорівнює нулю. У критичних операцях різниця чисел, які записані у правому куті події j та лівому куті події i, дорівнює t_{ij}.

У нашому прикладі критичний шлях включає операції (0,2), (2,3), (3,4), (4,5) та (5,6). Відмітимо, що операції (2,4), (3,5), (3,6), (4,6) задовольняють умовам (1)- (2), але не умовам (3), тому не являються критичним.

Для робіт обчислюються наступні параметри :

1) $t_{ij}^{(рп)}$ – ранній початок робіт - $t_{ij}^{(рп)} = T^{(р)}_{i}$;

2) $t_{ij}^{(РЗ)}$ – раннє закінчення роботи - $t_{ij}^{(РО)} = T^{(р)}_{i} + t_{ij}$;

3) $t_{ij}^{(п з)}$ – пізнє закінчення роботи - $t_{ij}^{(п з)} = T^{(п)}_{j}$;

4) $t_{ij}^{(пп)} = T^{(п)}_{j} - t_{ij}$ – пізній початок;

5) $t_{ij}^{(п)}$ – повний резерв часу роботи: він обчислюється за формулою:

$r_{ij}^{(п)} = T^{(п)}_{j} - T^{(р)}_{i} - t_{ij} = T^{(п)}_{j} - t_{ij}^{РЗ}$

Повний резерв показує, на яку величину по відношенню до $T^{(р)}_{i}$ можна змістити початок роботи так щоб не збільшити час виконання всього проекту.

6) $r_{ij}^{(в)}$ – вільний резерв часу роботи: він обчислюється за формулою:

$r_{ij}^{(в)} = T^{(р)}_{j} - T^{(р)}_{i} - t_{ij}$

Вільний резерв показує, в якому інтервалі можна пересувати час виконання роботи за умови того, що ранні строки наступних подій не змінюються.

Результати обчислень для прикладу, який розглядається, можна звести в зручну для користування таблицю:

Ця таблиця містить усю інформацію, яка необхідна для побудови календарного графіка.

ЗАДАЧА №2 Оптимізація сіткового графіка за вартістю

Час виконання операції кожної програми робіт залежить від кількості ресурсів, які виділені для виконання цієї роботи: чим більше виділяється ресурсів, тим швидше може бути виконана робота. Коли виникає необхідність скорочення часу виконання плану робіт за рахунок інтенсифікації деяких робіт, тоді виникає задача знаходження такого плану робіт, який би виконувався за потрібний час і серед планів робіт, який виконується за потрібний час, був би найдешевшим.

Таблиця 6.1 – Результати обчислень

Опе-рація	Трива-лість t_{ij}	Раннє		Пізнє		Повний резерв	Вільний резерв
		Початок $T^{(p)}_i$	Закінчення $t_{ij}^{(рз)}$	Початок $t_{ij}^{(пп)}$	Закінчення $T^{(п)}_j$		
(0,1)	2	0	2	2	4	2	0
(0,2)	3	0	3	0	3	0	0
(1,3)	2	2	4	4	6	2	2
(2,3)	3	3	6	3	6	0	1
(2,4)	2	3	5	4	6	1	0
(3,4)	0	6	6	6	6	0	1
(3,5)	3	6	9	10	13	4	4
(3,6)	2	6	8	17	19	11	11
(4,5)	7	6	13	6	13	0	0
(4,6)	5	6	11	14	19	8	8
(5,6)	6	13	19	13	19	0	0

Вартісний аспект вводиться в схему календарного планування шляхом визначення залежності витрат від тривалості для кожної операції програми. При цьому розглядаються тільки елементи так званих прямих витрат, а непрямі витрати (типу адміністративно-управлінських) не приймаються до розгляду, їх вплив враховується при виборі остаточного календарного плану програми. На рис 6.7 показана типова лінійна залежність вартості операції від тривалості.

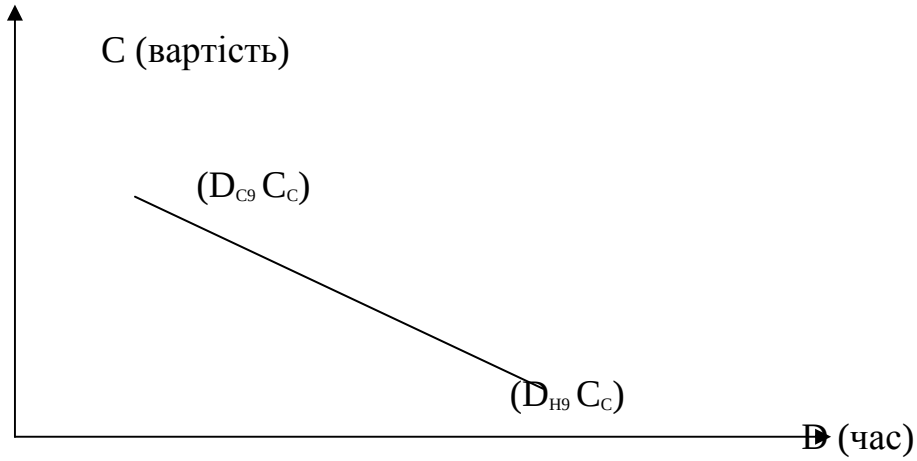

Рис 6.7 – Лінійна залежність вартості операції від тривалості

Точка (D_n, C_n) – відповідає так званому нормальному режиму виконання операції. Нормальний режим виконання операції - це такий режим виконання операції, коли при подальшому зростанні її тривалості ніякої економії затрат уже не досягається.

Тривалість операції можна скоротити за рахунок підвищення вартості операції, однак тривалість операції можна скоротити лише до певної межі, яка називається мінімальною тривалістю операції. Цьому режиму відповідає точка строкового режиму (D_c, C_c).

Лінійна залежність – витрати-тривалість приймається лише з міркування зручності. Використання нелінійної залежності суттєво ускладнює обчислення. Нелінійну залежність можна апроксимувати кусочно-лінійною. У такому випадку операцію розбивають на частини, кожна з яких відповідає лінійному відрізку.

Визначивши залежність "витрати – тривалість", для часу виконання всіх операцій програми приймають нормальну тривалість. Далі використовується повний розрахунок сітки та фіксується сума прямих затрат на програму при цій тривалості операцій. На наступному кроці розглядається можливість скорочення тривалості програми. Зрозуміло, що скорочення тривалості часу некритичних операцій не призводить до скорочення часу плану виконання робіт, тому скорочувати потрібно лише критичні роботи і саме вони й аналізуються. Уведемо поняття коефіцієнта додаткових витрат:

$$K_{дв}=(C_c - C_н)/(D_н - D_c).$$

Коефіцієнт додаткових витрат дорівнює вартості скорочення операції на одиницю часу. Зрозуміло, що з двох критичних операцій, краще скорочувати ту, в якої $К_{да}$ менший, бо за її скорочення на певний час, треба платити менше ніж за скорочення операції з більшим $К_{да}$ на ту ж величину часу.

Щоб досягти скорочення тривалості виконання програми при мінімально можливих витратах, необхідно в максимально допустимий ступінь зменшити ту критичну операцію, в якої $К_{дв}$ найменший.

Відрізок часу, на який можна скоротити тривалість операції, обмежений точкою максимально інтенсивного режиму, однак зменшення тривалості операції до максимально інтенсивного режиму не завжди приводить до скорочення тривалості програми на ту ж саму величину. Це пояснюється тим, що при стисканні тривалості критичної операції може виникнути новий критичний шлях.

Наприклад, розглянемо фрагмент сіткового графіка зображений на рис.6.8.

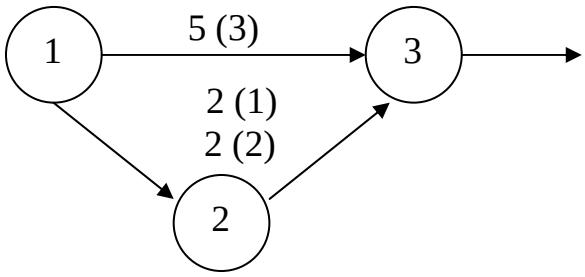

Рис. 6.8 – Фрагмент сіткового графіка

На цьому графіку перший параметр, який стоїть над дугою, відповідає нормальному режиму виконання робіт, а другий, який стоїть у дужках, відповідає строковому режиму. Критичний шлях проходить через роботу (1,3), для якої найменший час виконання роботи дорівнює трьом. Якщо скоротити час виконання роботи (1,3) на дві одиниці, то загальний час виконання роботи скоротиться не на дві, а на одну одиницю. Це пояснюється тим, що критичний шлях тоді буде проходити через роботи (1,2) та (2,3). загальна тривалість яких дорівнює 4. Таким чином, критичну роботу (1,3) варто скорочувати на 1 одиницю, тобто на величину повного резерву робіт (1,2), (2,3). При цьому виникають нові критичні роботи (1,2), (2,3), які виконуються одночасно з критичною роботою (1,3).

Як ми побачили критичну роботу можна скорочувати або до вичерпання повного резерву однієї з некритичних робіт, або до максимального інтенсивного

режиму. Таким чином, величина скорочення дорівнює або повному резерву однієї з некритичних операцій, або різниці між тривалістю операції та тривалістю її строкового режиму, а саме – мінімуму цих двох величин.

Алгоритм оптимізації сіткового графіка за вартістю

Початковий крок.

Будуємо сітку для варіанта, що характеризується нормальним режимом виконання робіт $C_н$, $D_н$.

Загальний крок.

1. Знаходимо для даного варіанта критичний шлях, його довжину, повні резерви всіх робіт та затрати на реалізацію проекту.

2. На критичному шляху шукаємо роботу, яка характеризується найменшим коефіцієнтом додаткових витрат.

3. Скорочуємо тривалість цієї роботи на максимально можливу величину (доки одна з робіт не вичерпає свій повний резерв або доки робота, яка скорочується, не досягне своєї мінімальної тривалості).

4. Якщо всі роботи, які лежать на критичному шляху, будуть виконуватись у строковому варіанті, то процес завершується (тоді подальше скорочення критичних операцій неможливе, а скорочення тривалості некритичних операцій буде підвищувати вартість проекту, не впливаючи на строк його завершення).

5.Якщо умови пункту 4 не виконані, то переходимо до пункту 1.

Приклад.

Таблиця 6.2 – Вихідні дані

(i,j)	Тривалість		Прямі витрати		$К_д$
	D	D_c	$C_н$	C_c	
	6	3	300	345	15
(1,3)	4	2	160	180	10
(1,4)	2	1	70	90	20
(2,4)	2	2	110	110	∞
(2,6)	6	4	270	320	25
(3,5)	5	4	260	90	30
(4,5)	4	3	150	160	10
(5,6)	3	2	130	150	20

Початковий крок.

1. Будуємо сітковий графік, який відповідає нормальній тривалості робіт. Надаємо початковому кроку умовний номер 0, а у відповідні колонки заносимо дані про резерви робіт Rn(i,j) та їх тривалості t_{ij} (Рис. 6.9).

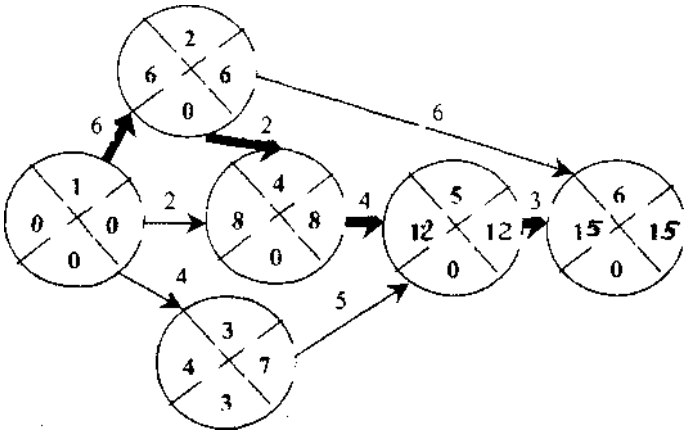

Рис. 6.9 – Резерви робіт та їх тривалість

Усі обчислення, які ми будемо проводити, занесемо до таблиці 6.3

Таблиця 6.3 – Визначення параметрів сіткового графіку

(i.j)	$D_н$	D_c	$K_{дв}$	Резерви Rn(i,j) крок оптимізації					t_{ij} крок оптимізації					Скоро-чення часу Δt	Приріст витрат Δc
				0	1	2	3	4	0	1	2	3	4		
(1,2)	6	3	15	0	0	0	0	0	6	6	4	4	3	3	45
(1,3)	4	2	10	3	2	0	0	0	4	4	4	4	3	1	10
(1,4)	2	1	20	6	6	4	4	3	2	2	2	2	2	-	-
(2,4)	2	2	∞	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	-	-
(3,5)	5	4	30	3	2	0	0	0	5	5	5	5	5	-	-
(4,5)	4	3	10	0	0	0	0	0	4	3	3	3	3	1	10
(2,6)	6	4	25	3	2	2	1	1	6	6	6	6	6	-	-
(5,6)	3	2	20	0	0	0	0	0	3	3	3	2	2	1	20
				5	14	12	11	10							

Перший крок.

1) Знаходимо, що при початковому варіанті за нормальної тривалості робіт, критичний шлях проходить через роботи (1,2)- (2,4)- (4,5)- (5,6); $t_{кр}$=15.

2) Аналізуємо $К_{дв}$ для критичних робіт. Найменше значення $К_{дв}$=10 пов'язане з роботою (4,5), тривалість якої може бути зменшена з 4 до 3.

3)Скорочуємо час виконання роботи (4,5) на одиницю.

4)Записуємо нові резерви Rn(i,j) та нові t_{ij} до таблиці, а справа від попередньої тривалості записуємо нову (таблиця 6.3).

Другий крок.

1) Довжина критичного шляху зменшилась на одиницю $t_{кр}$= 14. Роботи, тривалість яких досягла D_c і не може бути далі зменшена, позначаємо зірочкою*

2)Розглядаємо $К_{дв}$ для критичних робіт, які не відмічені зірочкою, і вибираємо для скорочення роботу (1,2) із найменшим $К_{дв}$ =15.

3)Робота (1,2) може бути скорочена на три одиниці. В той же час у критичних операцій (1,3) та (3,5) повний резерв дорівнює всього двом одиницям і якщо він буде вичерпаний, можливе виникнення нового критичного шляху. Тому скорочуємо роботу (1,2) на дві одиниці.

Третій крок.

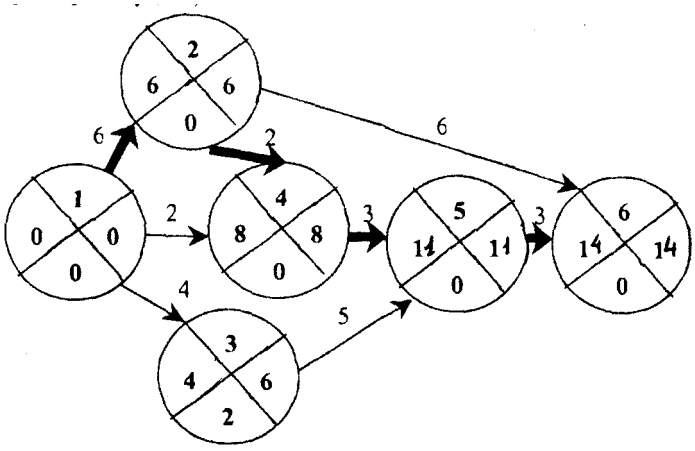

Рис. 6.10 – Сітковий графік

4) Записуємо нові резерви часу та нові у відповідні колонки кроку 2.

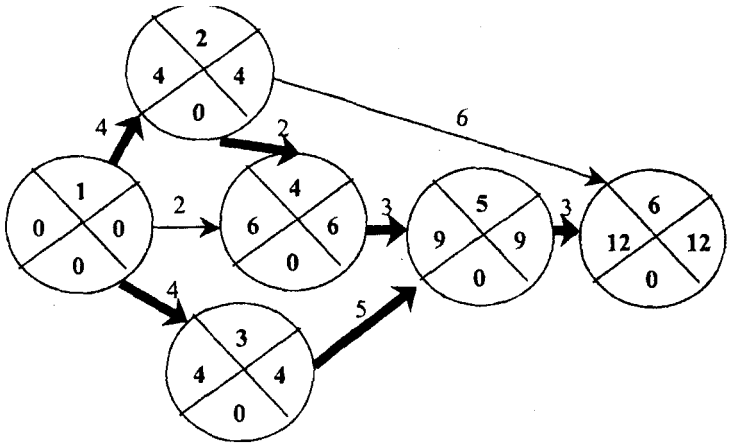

Рис. 6.11 – Сітковий графік

З'явились дві нові критичні роботи (1,3) і (3,5) та в мережі (Рис. 6.10), поряд із критичним шляхом (1,2), (2,4), (4,5), (5,6), виник другий критичний шлях (1,3), (3,5), (5,6). Довжина критичного шляху після цього кроку $t_{кр}$=12 (Рис. 6.11).

При наявності двох і більше критичних шляхів час виконання проекту може бути скорочено лише при їх одночасному скороченні.

Оскільки роботи (2,4) та (4,5) виконуються при своїй найменшій тривалості, зменшити час можна трьома шляхами:

1.За рахунок скорочення тривалості роботи (5,6), яка належить обом шляхам;

2.Скоротити роботу (1,2) першого шляху одночасно із прискоренням роботи (1,3) другого шляху;

3.Скоротити роботи (1,2) та (3,5).

Додаткові витрати на одиницю скорочення часу будуть дорівнювати відповідно 20, 15+10=25, та 15+30=45. Зрозуміло, що слід скоротити роботу (5,6) із DH=3 до DC=2, тому ми виконуємо саме це скорочення. Нові значення величин Rn(i,j) та t_{ij} записуємо у колонку кроку 3. Довжина критичного шляху скорочується до 11(Рис. 6.12).

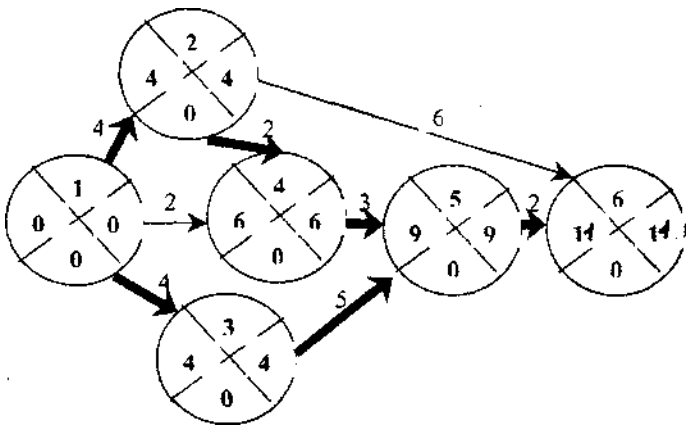

Рис. 6.12 – Сітковий графік

Четвертий крок.

1) Тепер строк розробки може бути зменшений лише при одночасному скороченні тривалості робіт (1,2) та (1,3) або (1,2) та (3,5), оскільки всі інші роботи критичних шляхів виконуються при своїй найменшій тривалості.

2) Прискоренню належать роботи (1,2) та (1,3), які характеризуються меншими сумарними додатковими витратами (25 проти 45). Хоча робота (1,3) може бути скорочена на дві одиниці, робота (1,2) допускає скорочення тривалості лише на одиницю часу.

3) Проводячи скорочення тривалості робіт (1,2) та (1,3) на одиницю часу, зменшуємо довжину критичного шляху до $t_{кр}$ =10 (Рис. 6.13).

4) Відповідні значення Rn(i,j), та її, заносимо в таблицю (крок 4).

Тепер усі роботи, які лежать на критичному шляху (1,2)-(1,4)-(4,5)-(5,6), відмічені зірочками. Вони виконуються в строковому режимі. Тому даний план робіт досяг своєї мінімальної тривалості.

У двох останніх колонках таблиці 6.3 показана підсумкова величина скорочення тривалості кожної з робіт Δt та розмір додаткових витрат Де, пов'язаних із цим. Як бачимо, загальні додаткові затрати складають 85 одиниць.

Якщо ж із самого початку йти неоптимальним шляхом, тобто скоротити час виконання всі робіт до мінімально можливого, то як видно з таблиці 6.3 приріст витрат склав би величину 1645-1450=195 грошових одиниць при тривалості виконання проекту у 10 днів. Такий ефект отримано за рахунок того, що прискорення було надано лише тим роботам, які реально впливають на строки виконання проекту.

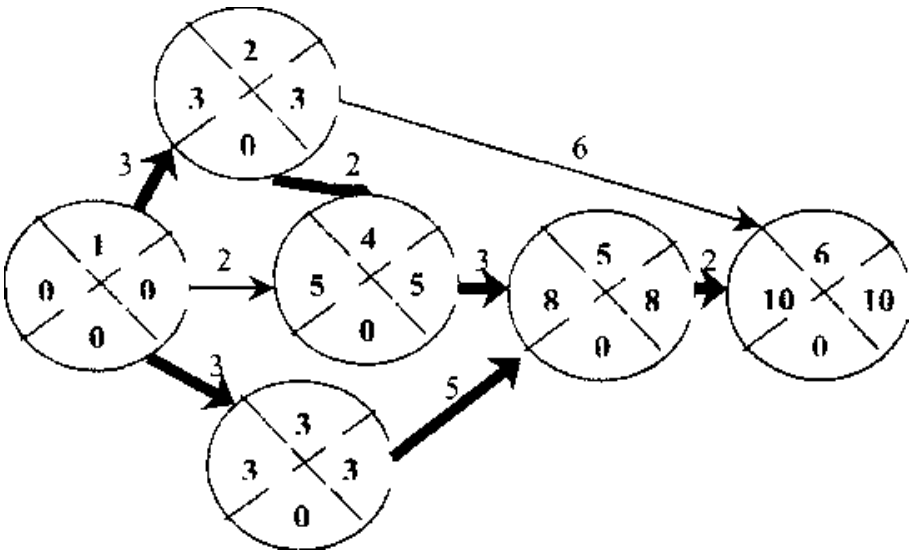

Рис. 6.13 – Сітковий графік

Під час використання алгоритму ми скоротили план виконання робіт на максимально можливий час, вибрали при цьому найдешевший план робіт. Але алгоритм, який ми раніше уже застосовували, може бути також реалізованний для розв'язання такої задачі.

Вона формулюється так: на скорочення плану виконання робіт виділена певна сума, але менша ніж та, яка потрібна на повне скорочення програми робіт. Які саме роботи треба скоротити і на скільки, щоб досягти максимального скорочення тривалості робіт при фіксованих обмеженнях на кількість коштів.

Для розв'язання цієї задачі, під колонками часу $t_{i,j}$ напишемо на скільки подорожчає проект на цьому кроці. Після цього дивимось, які саме скорочення можна зробити, якщо не виходити за ліміт коштів.

Так, при виділенні 50 грошових одиниць, треба скоротити операцію (4,5) на одну одиницю, операцію (1,2) - на дві одиниці, при цьому витрачається 40 одиниць коштів. У випадку, якщо виділено 30 одиниць коштів, треба скоротити операції (4,5) та (1,2) на 1 одиницю, при цьому буде витрачено 25 одиниць коштів. При виділенні 30 одиниць коштів варіант скорочення тільки операції (1,2) на 2 одиниці хоч і являється допустимим (витрачається 30 одиниць коштів і план робіт скорочується на 2 одиниці), але гірший, ніж попередній (він дорожче на 5 одиниць).

Запитання для самоконтролю

1. Що таке мережна модель і мережний графік?
2. Поняття фіктивної роботи. Чому вона дорівнює?
3. Що таке подія та який вона має характер?
4. Наведіть приклад мережного графіка.
5. Яких правил треба дотримуватися при побудові мережного графіка?
6. Яка сітка називається структурною?

ТЕМА 7. ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ЗАМІНИ

Задача заміни – це прогнозування витрат, пов'язаних з відновленням устаткування, і виробленням найбільш економічної стратегії проведення цієї роботи. В дослідженні операцій виробляється ряд методів, котрі дозволяють вирішувати задачі заміни двох типів:

а) коли продуктивність устаткування падає в процесі експлуатації (внаслідок зносу) і воно застаріває морально в результаті появи нових, більш досконалих машин;

б) коли устаткування не застаріває, але в якийсь момент виходить з ладу (наприклад, електролампочки).

У першому випадку порівнюються затрати та придбання нового устаткування з витратами експлуатації діючого і знаходиться оптимальний момент заміни. Для вирішення деяких з цих задач використовуються методи динамічного програмування.

У другому випадку визначають, які саме одиниці потрібно заміняти та як часто проводити заміну, щоб мінімізувати загальні затрати, пов'язані як з покупкою нового устаткування , так і зі збитком, котрий наносить несправне устаткування до його заміни. В цих задачах широко використовуються фізико-статистичні методи оскільки вихід із ладу устаткування завжди має нерегулярний, вірогідний характер.

1. Задача про заміну устаткування

В інженерно-економічній практиці задача про заміну устаткування має першорядне значення. Це одна з основних проблем індустріального розвитку в умовах науково-технічного прогресу. Ми розглянемо її в спрощеній постановці. Відомо, що устаткування з часом зношується, старіє фізично і „морально". Як правило, в процесі експлуатації його продуктивність падає і зростають експлуатаційні видатки на поточний ремонт. З часом виникає потреба заміни

устаткування, так як його подальша експлуатація виходить дорожче, ніж ремонт та заміна.

Задача про заміну може якісно бути сформульована так. В процесі роботи устаткування щорічно дає прибуток, потребує експлуатаційних затрат і має деяку залишкову вартість. Перераховані характеристики залежать від його віку.

У любому році устаткування можна зберегти чи продати за залишковою ціною, купити нове. У випадку збереження устаткування зростають його експлуатаційні видатки і знижується продуктивність. При заміні потрібні значні додаткові капітальні вкладення. Задача полягає у визначенні оптимальної стратегії замін в плановому періоді в тому, щоб сумарний прибуток за плановий період був максимальним. Критерієм оптимальності, як правило, є прибуток від експлуатації устаткування (задача максимізації), або сумарні затрати на експлуатацію в перебігу планованого періоду (задача мінімізації).

При побудові моделі задачі прийнято вважати, що рішення про заміну виноситься на початок кожного проміжку експлуатації (наприклад, на початок року) і що в принципі устаткування можна використовувати необмежено довго.

Основна характеристика устаткування – параметри стану – його вік t.

При складанні динамічної моделі заміни процес заміни розглядають як n-кроковий, розвиваючи весь період експлуатації на n кроків. Можливе управління на кожному кроці характеризується кількісними ознаками, наприклад: x^c (зберегти устаткування), x^3 (замінити) та x^p (зробити ремонт).

Таким чином, в першому питанні ми розглядали теорію задачі про заміну устаткування. Для підкріплення теорії практикою в другому питанні розглянемо конкретний приклад.

2. Практичне рішення задачі про заміну устаткування

Устаткування експлуатується на протязі 5 років, після цього продається. На початку кожного року можна прийняти рішення зберегти устаткування або замінити його на нове. Вартість нового устаткування p_0=4000 грн. Після t років експлуатації ($1 \le t \le 5$) устаткування можна продати за $q(t)=p_0 2^{-t}$ грн. (ліквідна

вартість). Витрати на утримання на протязі року залежать від віку t устаткування і дорівнює r(t)=600(t-1). Визначити оптимальну стратегію експлуатації устаткування , щоб сумарні затрати з урахуванням початкової покупки і завершальної продажі були мінімальними.

Рішення. Спосіб розподілу управління на кроки природний, по роках, $n=5$. Параметр стану — вік машини – $s_{k-1}=t, s_0=0$ – машина нова на початку першого року експлуатації. Управління на кожному кроці залежить від двох змінних X^c і X^3.

Рівняння станів залежать від управління:

$$\begin{cases} s_k = & t+1, \ якщо\ X_k = X^c, \\ & 1, \ якщо\ X_k = X^з, к=1,2,3,4 \end{cases} \qquad (7.1)$$

Справді, якщо до *k-му* кроку $s_{k-1}=t$, то при збереженні машини *($X_к$=X^c)* через рік вік машини збільшиться на 1. Якщо машина заміняється новою *($X_к$= X^3)*, то це означає, що до початку *k -го* кроку її вік *t*=0, а після року експлуатації *t*=1, тобто $s_k=1$.

Показник ефективності *k -го* кроку:

$$f_k=(X_k,t)=\begin{cases} 600(t+1), якщо\ X_k = X^c \\ 4600-4000\cdot 2^{-t}, якщо\ X_k = X^3 \end{cases} k=1,2,3,4. \qquad (7.2)$$

(При X^c витрати тільки на експлуатацію машини віку *t*, при X^3 машина продається (- 4000-2^{-t}), купується нова (4000) і експлуатується протягом першого року (600), загальні витрати дорівнюють ($-4000\cdot 2^{-t}+4000+600$))

Нехай $Z_k^*(t)$ – умовні оптимальні витрати на експлуатацію машини, починаючи з *k -го* кроку до кінця, за умови, що до початку *k -го* кроку машина має вік *t* років. Запишемо для функцій $Z_K^*(t)$ рівняння Беллмана, замінивши задачу максимізації на задачу мінімізації:

$$Z_5^* = \begin{cases} 600(t+1) - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, & якщо \quad X_5 = X^c \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, & якщо\ X_5 = X^3 \end{cases} \qquad (7.3)$$

Величина $4000 \cdot 2^{-(t+1)}$ — вартість машини віку *t* років (за умовою машина після 5 років експлуатації продається).

$$Z_k^* = \begin{cases} 600(t+1) - Z_{k+1}^*(t+1), & якщо \quad X_k = X^c \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} + Z_{k+1}^*(1), & якщо\ X_k = X^3 \end{cases} \quad k = 4,3,2,1 \qquad (7.4)$$

З визначення функцій $Z_k^*(t)$ випливає

$$Z_{\min} = Z_1^*(0).$$

Дамо геометричне рішення цієї задачі. На осі абсцис будемо відкладати номер кроку *k*, на осі ординат — вік *t* машини. Точка *(к—1, t)* на площині відповідає початку *k -го* року експлуатації машини віку *t* років. Переміщення на графіку залежно від прийнятого управління на *k -м* кроці показане на рис. 7.1.

Стан початку експлуатації машини відповідає точці $s_0^*(0;0)$, кінець – точкам $\hat{s}(6;t)$. Будь-яка траєкторія, що переводить точку $s(k-1;1)$ з s_0^* в $\hat{s}$, складається з відрізків – кроків, що відповідають рокам експлуатації. Треба вибрати таку траєкторію, при якій витрати на експлуатацію машини опиняться мінімальними.

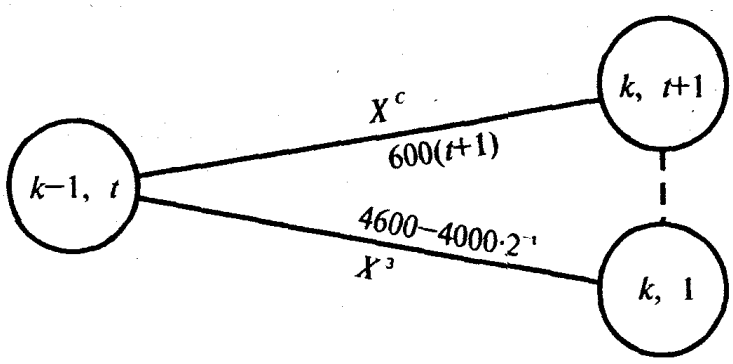

Рис. 7.1 – Геометричне рішення задачі

Над кожним відрізком, що з'єднує точки *(k-1; t)* і *(k; t*+1), запишемо відповідному управлінню X^c витрати, знайдені з (12.23): 600(*t* +1), а над відрізком,

що з'єднує точки *(k-1; t)* і *(k; t*), запишемо витрати, що відповідають управлінню X^3, тобто $4600 - 4000 \cdot 2^{-t}$. У такий спосіб ми розмітимо всі відрізки, що з'єднують точки на графіку, які відповідають переходам з будь-якого стану s_{k-1} в стан s_k (рис. 7.2). Наприклад, над відрізками, що з'єднують крапки *(k;* 2) і *(k +1;* 3), стоїть число 1800[1], яке відповідає витратам на експлуатацію протягом кожного року машини віком *t=2* років, а над відрізками, що з'єднують *(k; 2)* і (*k +1;* 1), стоїть число 3600 — це сума витрат на покупку машини й експлуатацію нової машини протягом року без "витрат" (виручки) за продану машину віку *t* років. Варто врахувати, що $0 \le t \le k$.

Проведемо на розміченому графі станів *(див.* рис. 7.2) умовну оптимізацію.

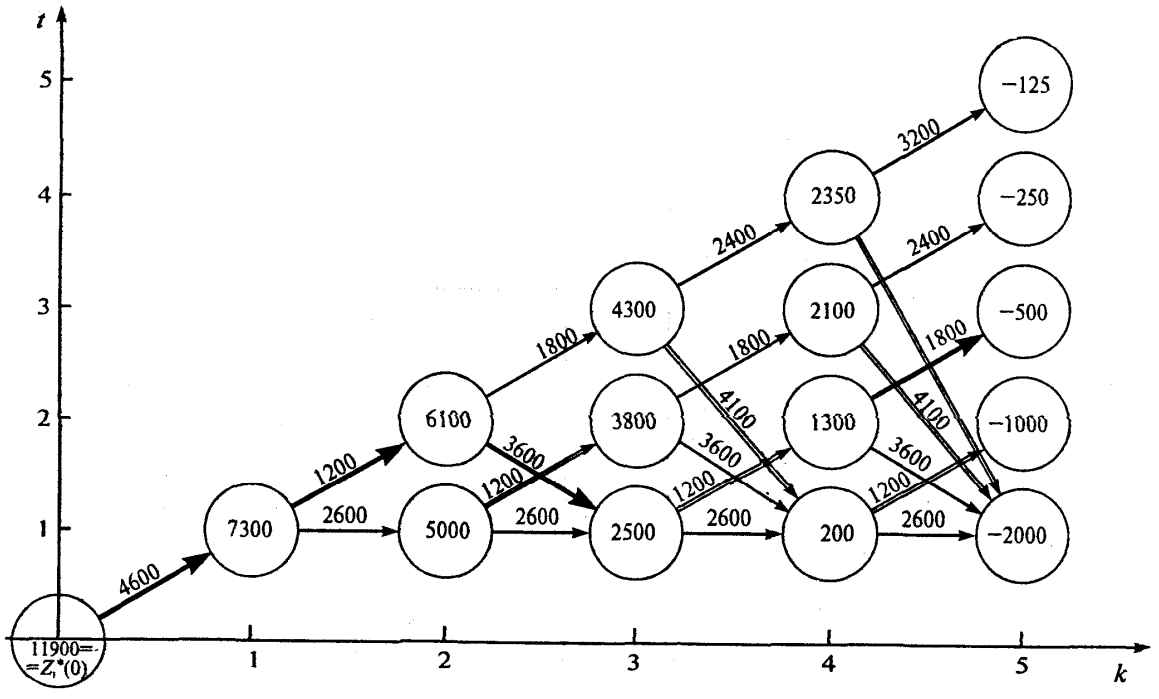

Рис. 7.2 – Граф станів

V крок. Початкові стани – точки (4; *t*), кінцеві (5; *t*).У станах (5; *t)* машина продається, умовний оптимальний дохід від продажу дорівнює $4000 \cdot 2^{-t}$, але оскільки цільова функція пов'язана з витратами, то в кружках крапок (5; *t*) поставимо величину доходу зі знаком мінус. Аналізуємо, як можна потрапити з кожного початкового стану в кінцевий на V кроці.

Стан (4; 1). З нього можна потрапити в стан (5; 2), затративши на експлуатацію машини 1200 і виручивши потім від продажу 1000, тобто сумарні витрати дорівнюють 200, і в стан (5; 1) з витратами 2600-2000=600. Виходить, якщо до останнього кроку система перебувала в точці (4; 1), то варто йти в точку (5; 2) (укажемо цей напрямок подвійною стрілкою), а неминучі мінімальні витрати, що відповідають цьому переходу, рівні 200 (помістимо цю величину $Z_5^*(1) = 200$ в кружку точки (4; 1).

Стан (4; 2). З нього можна потрапити в точку (5; 3) з витратами 1800-500=1300 і в точку (5; 1) з витратами 3600-2000=1600. Вибираємо перше управління, відзначаємо його подвійною стрілкою, а $Z_5^*(2) = 1300$ проставляємо в кружку точки (4; 2).

Міркуючи в такий же спосіб для кожної точки передостаннього кроку, ми знайдемо для будь-якого результату IV кроку оптимальне управління на V кроці, відзначимо його на рис. 7.2 подвійною стрілкою. Далі плануємо IV крок, аналізуючи кожний стан, у якому може виявитися система наприкінці III кроку з урахуванням оптимального продовження до кінця процесу, тобто вирішуємо для всіх $0 \le t \le 4$ при $k = 4$ рівняння (12.22). Наприклад, якщо початок IV кроку відповідає стану (3; 1), те при управлінні X^c система переходить у точку (4; 2), витрати на цьому кроці 1200, а сумарні витрати за два останніх кроки рівні 1200+1300=2500. При управлінні X^3 витрати за два кроки рівні 2600+200=2800. Вибираємо мінімальні витрати 2500, ставимо їх у кружок точки (3; 1), а відповідне управління на цьому кроці позначаємо подвійною стрілкою, що веде зі стану (3; 1), у стан (4; 2). Так надходимо для кожного стану (3; *t*) *(див.* рис. 7.2).

Продовжуючи умовну оптимізацію III, II і I кроків, ми одержимо на рис. 7.2 наступну ситуацію: з кожної точки (стану) виходить стрілка, що вказує, куди варто переміщатися в даному кроці, якщо система виявилася в цій точці, а в кружках записані мінімальні витрати на перехід із цієї точки в кінцевий стан. На кожному кроці графічно вирішувалися рівняння (7.1).

Після проведення умовної оптимізації одержимо в точці (0; 0) мінімальні витрати на експлуатацію машини протягом 5 років з наступною продажею: $Z_{\min}$ = 11900. Далі будуємо оптимальну траєкторію, переміщаючись із точки $s_0^*(0;0)$ по подвійних стрілках в $\hat{s}$, Одержуємо набір точок:

{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 1), (4; 2), (5; 3)},

який відповідає оптимальному управлінню X^* (X^c , X^c , X^3 , X^c , X^c). Оптимальний режим експлуатації полягає в тому, щоб замінити машину новою на початку 3-го року.

Таким чином, розмічений графік (мережа) дозволяє наочно інтерпретувати розрахункову схему й вирішити задачу методом ДП.

Запитання для самоконтролю:

1. У чому заключається задача заміни устаткування?
2. Сформулювати задачі максимілізації та мінімалізації
3. Основна характеристика устаткування.
4. Що можна зробити із застарілим устаткуванням?

ТЕМА 8. ТЕОРІЯ ГРИ

Теорія гри – розділ сучасної математики, що вивчає математичні моделі так названих конфліктних ситуацій (тобто ситуацій, при яких інтереси учасників або протилежні і тоді ці моделі називаються « антагоністичними іграми», або не збігаються, хоча і не протилежні, і тоді мова йде про « ігри з протилежними інтересами»). Основоположники теорії Дж.фон Нейман і О.Моргенштерн намагались математично описати характерні для капіталістичної економіки явища конкуренції як деяку « гру». В найбільш простому випадку мова йде про протиборство двох противників, наприклад, двох конкурентів, які ведуть боротьбу за ринок збуту. В більш складних ситуаціях в грі беруть участь багато людей, до того ж вони можуть вступати між собою в постійні або тимчасові коаліції, спілки. Гра двох людей називається парною; коли в ній приймають участь n. гравців – це «гра n осіб», у випадку утворення коаліції гра називається «коаліційною». Мета гри в тому, що кожний з учасників приймає такі рішення (тобто вибирає стратегію дій), як він розуміє, забезпечує йому найбільший виграш або найменший програш, до того ж цьому учаснику гри ясно, що результат залежить не тільки від нього, але й від дій партнера (або партнерів), іншими словами, він приймає рішення в умовах невизначеності. Ці рішення відбиваються в таблиці, яка називається платіжною матрицею. Дуже часто спостерігається така точка («сідлова»), в якій досягається рівновага, прийнятно для партнерів.

Чисто математична і тому дуже абстрактна теорія гри, зрозуміло, далеко не повністю відбиває складні процеси, (що бувають навіть в капіталістичній економіці), для дослідження яких вона була початково призначена, не кажучи вже про адміністративно-командну економіку. Однак, теоретичне і практичне її значення набагато ширше.

Принциповим достоїнством теорії гри вважають те, що вона розширяє загальноприйняте поняття оптимальності, включаючи в нього такі головні елементи, як, наприклад, компромісне рішення, що влаштовує різні сторони в

подібному спорі (грі). На практиці ж ігрові підходи використовуються економістами при розробці моделей, в яких враховуються інтереси в різних ланках (наприклад, галузей та економічних районів). Крім того, математичні прийоми теорії гри можуть використовуватися для вирішення багаточисельних практичних економічних завдань на промислових підприємствах. Наприклад, для вибору оптимальних рішень в області підвищення якості продукції або визначення запасів. «Протиборство» тут відбувається в першому випадку між прагненням виготовити більше продукції (витратити на неї менше праці) та зробити її краще, тобто витратити більше праці, в іншому випадку – між бажанням запасти більше ресурсів, щоб бути застрахованим від випадковостей, та запасти менше, щоб не заморожувати засоби.

Варто відмітити, що подібні задачі вирішуються й іншими економіко-математичними засобами. І це не випадково. Більшість задач теорії гри можуть бути зведені, наприклад, до задач лінійного програмування, і навпаки.

1. Поняття про ігрові моделі

На практиці часто доводиться зустрічатися із завданнями, в яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, тобто виникають ситуації в яких дві (або більше) сторін переслідують різні ланки, а результати будь-якої дії кожної з сторін залежать від партнера. Такі ситуації, ще виникають підчас гри в шахи, доміно і т.ін., відносяться до конфліктних: результат кожного ходу гравця залежить від відповідального ходу противника, мета гри – виграш одного з партнерів. В економіці конфліктні ситуації зустрічаються дуже часто і мають багатообразний характер. До них відносяться, наприклад, взаємовідносини між поставщиком та споживачем, покупцем та продавцем, банком та клієнтом. У всіх цих прикладах конфліктна ситуація породжується відмінністю інтересів партнерів та прагнення кожного з них приймати оптимальні рішення, які реалізують поставлені цілі в найбільшому ступені. При цьому, кожному доводиться рахуватись не тільки зі своїми цілями, але й з

цілями партнера, і враховувати невідомі раніше рішення , які ці партнери будуть приймати.

Для грамотного рішення задач з конфліктними ситуаціями необхідні науково обґрунтовані методи. Такі методи розроблені математичною теорією конфліктних ситуацій, яка носить назву теорії гри.

Ознайомимося з основними поняттями теорії гри. Математична модель конфліктної ситуації називається грою; сторони, які беруть участь в конфлікті - гравцями, а кінець конфлікту – виграшем. Для кожної формалізованої гри вводяться правила, тобто система умов, що визначає:

а) варіанти дій гравців;

б) об'єм інформації кожного гравця про поведінку партнерів;

в) виграш, до якого приводить кожна сукупність дій.

Як правило, виграш (або програш) може бути заданий кількісно. Наприклад, можна оцінити програш-нулем, виграш-одиницею, а нічию – ½.

Гра називається парною, якщо в ній беруть участь два гравця, та багаточисельною, якщо кількість гравців більше двох. Ми будемо роздивлятися тільки парні ігри. В них беруть участь два гравці: А та В, зацікавленість яких є протилежною, а під грою будемо розуміти ряд дій зі сторони А і В.

Гра називається грою з нульовою сумою, або антогонічною, якщо виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого, тобто для повного завдання гри достатньо вказати величину одного з них. Якщо позначити а – виграш одного з гравців, в – виграш іншого, то для гри з нульовою сумою в=-а, тому достатньо роздивитися приклад а.

Вибір та здійснення одного з передбачених правилами дій називається ходом гравця. Ходи можуть буди власними та раптовими. Власний хід – це здійснений вибір гравцем одного з можливих дій (наприклад, хід в шаховій грі). Раптовий хід – це раптово обрана дія (наприклад, вибір карти з перемішаної колоди).В майбутньому ми будемо роздивлятися тільки власні ходи гравців .

Стратегією гравця називається сукупність правил, що визначає вибір його дій при кожному власному ході в залежності від ситуації, яка відбулася.

Звичайно в процесі гри при кожному приватному ході гравець робить вибір в залежності від конкретної ситуації. Однак, в принципі можливо, що всі рішення, прийняті гравцем раніше (у відповідь на будь-яку створену ситуацію). Це означає, що гравець обрав визначену стратегію, яка може бути задана у вигляді списку правил або програм (так можливо здійснити гру за допомогою ЕОМ). Гра називається кінцевою, якщо в кожного гравця є кінцева кількість стратегій, та безкінцевою – в протилежній ситуації.

Для того, щоб вирішити гру, або знайти рішення гри, треба для кожного гравця обрати стратегію, яка задовольняє умови оптимальності, тобто один із гравців повинен отримати максимальний виграш, коли інший підтримується своєї стратегії. В той же час другий гравець повинен мати мінімальний програш, якщо перший гравець дотримується своєї стратегії. Такі стратегії називаються оптимальними. Оптимальні стратегії повинні також задовольняти умовам стійкості, тобто будь-якому з гравців повинно бути не вигідно відмовлятися від своєї стратегії в цій грі.

Якщо гра повторюється достатньо багато разів, то гравців може цікавити не виграш та програш в кожній конкурентній партії, а середній виграш (програш) в усіх партіях.

Метою теорії гри є визначення оптимальної стратегії для кожного гравця. При виборі оптимальної стратегії природно передбачувати, що два гравця ведуть себе розумно, з точки зору своїх інтересів. Важливим обмеженням теорії гри – єдність виграшу, як показника ефективності, в той час, як в більшості реальних економічних задач маємо більше одного показника ефективності. Крім того, в економіці, як правило виникають задачі, в яких інтереси партнерів не обов’язково антогонічні. Розвиток апарату теорії гри для рішення задач з багатьма учасниками, що мають не протимовні інтереси, виходить за рамки дійсної лекції.

2. Платіжна матриця .Нижня і верхня ціна гри

Стратегії, які ми позначимо A1,A2…,Am. Нехай гравець B має n власних стратегій, позначимо їх B1,B2,…Bn. Кажуть, що гра має розмірність m×n. У результаті вибору гравцями будь-якої пари стратегій буде

$$Ai \text{ і } Bj(i=1,2\ldots m;j=1,2,\ldots,n)$$

Безумовно, визначається вихід гри, тобто виграш a_{ij} гравця А (Позитивний і негативний)і програш ($-a_{ij}$) гравця В. Передбачимо, що значення a_{ij} відомі для будь-якої пари стратегій (Ai,Bj).

Матриця p=(aij),i=1,2,…,m;j=1,2,…,n, елементами якої є виграші, відповідно до стратегій Ai і Bj, називаються платіжною матрицею або матрицею гри. Загальний вигляд такої матриці наданий таблицею 8.1. Рядки цієї таблиці відповідають стратегіям гравця А, а стовпчики-стратегіям гравця В.

Таблиця 8.1-Вигляд матриці. Гра „Пошук”

Aj \ Bi	B1	B2	…	Bn
A1	a 11	a 12	…	a 1 n
A2	a 21	a 22	…	a 2 n
…	…	…	…	…
Am	a m2	a m2	…	a m n

Гравець А може сховатися в одному із двох притулків(1 і 2);гравець В шукає гравця А, і якщо знайде, то отримає штраф 1грошової одиниці. Необхідно побудувати платіжну матрицю гри.

Рішення. Для складання платіжної матриці треба проаналізувати поведінку кожного із гравців. Гравець А може сховатися в схованку 1-позначимо, цю стратегію черезА1 або в схованці 2-стратегія А2.

Гравець В може шукати першого гравця в схованці 1-(стратегія В1),або в схованці 2-(стратегія В2).Якщо гравець А знаходиться в схованці 1 і там його знаходить гравець В, тобто здійснить пару стратегій(А1,В1),то гравець А виплачує штраф, тобто а11=-1. Аналогічно отримуємо а22=-1 (А2,В2). Відомо, що стратегії (А1,В2)і (А2,В1)дають гравцю А виграш 1,тому а12=а21=1.Таким чином, для гри „Пошук” розміру 2×2 отримуємо платіжну матрицю P=(-1 1)

Задача 2.

Визначити нижню і верхню ціну гри, заданої платіжної матриці.

$$P = \begin{matrix} 0,5 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,7 & 0,6 & 0,6 \end{matrix}$$

Таблиця 8.2 - Чи має гра сідлову точку?

Aj\Bj	B1	B2	B3	ai
A1	0,5	0,6	0,8	0,5
A2	0,9	0,7	0,8	0,7
A3	0,7	0,6	0,6	0,6
βj	0,9	0,7	0,8	A=β=0,7

Рішення: Всі підрахунки зручно проводити в таблиці, до якої, крім матриці P, введені стовпчик d і u рядок βj(табл. 8.2).Аналізуючи рядки матриці (стратегії рядках1,2,3.Аналогічноβ1=0,9.β2=0,7.β=0,8-максимальні числа в стовпчиках 1,2,3відповідно.Нижня ціна гри α=max (0,5;0,7;0,6)=0,7(найбільше число в стовпці αi)і верхня ціна гри β=min, βj=min(0,9.0,7.0,8)=0,7(найменше число в рядку βj)j=1,2,3.Ці значення рівні, тобто α=β,і досягаються на одній і тієї ж парі стратегій(A2,B2).Відповідно, гра має сідлову точку(A2 B2)і ціна гри v= 0,7.

Таким чином, ми розглянули і друге питання „Платіжна матриця. Нижня і верхня ціна гри.“

І на закінчення слід сказати, що в управлінні виробництвом дуже часто зустрічаються ситуації, які носять конфліктний характер. В таких ситуаціях ,як правило, є сторони, інтереси яких частково або повністю протилежні ,і перед кожною із цих сторін виникає задача вибору найкращого способу дій для досягнення своєї мети в умовах дій „розумного суперника”.

Розділ теорії дослідження операцій ,який вивчає моделі конфліктних ситуацій, називається „теорією гри”, а модель конфліктної ситуації називається „грою”. Сторони. які беруть участь у грі, називають гравцями, а для досягнення своєї мети кожен із гравців має який-небудь набір можливих дій. Ці дії називають стратегіями.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення теорії гри.
2. Що називається платіжною матрицею?
3. При яких умовах гри ця гра називається парною?
4. Яка гра називається грою з нулевою сумою?
5. Яка мета теорії гри?
6. Що називається раптовим ходом?
7. Як називається розділ теорії дослідження операції, який вивчає моделі конфліктних ситуацій?
8. Які дії називаються стратегіями?

ТЕМА 9. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ В МЕНЕДЖМЕНТІ

В другій половині XX століття при рішенні різних господарських, економічних, технічних, а також наукових задач сталі широко застосовуватися методи експертних оцінок.

Термін експерт походить від латинського expertus — досвідчений.

Професія експерта стародавня. Разом з тим наукові методи обробки думок фахівців і учених, виступаючих як експерти при підготовці різних технічних і економічних рішень, отримали свій глибокий розвиток тільки в останні 30—40 років.

Експертними методами називається комплекс логічних і математичних процедур, мета здійснення яких полягає в наступному:

1. Отримання від висококваліфікованих фахівців (експертів) інформації з питання, що цікавить.
2. Обробка отриманої інформації за допомогою методів математичної статистики.
3. Вибір раціональних рішень в тій або іншій області людської діяльності.

Іншими словами, експертні методи є науковими методами аналізу аргументованих думок висококваліфікованих фахівців.

Експертні методи, як правило, застосовуються тоді, коли більш точні методи застосувати неможливо або коли використовування останніх економічно не виправдано. Крім того, методи експертних оцінок також застосовуються в поєднанні з більш точними методами. Сферою додатку експертних методів є, в першу чергу, прогнозування і довгострокове планування науки, техніки, економіки, оцінка якості різних видів продукції, товарів, якості фахівців, якості тих або інших процесів (якості праці, якості обслуговування в підприємствах торгівлі або громадського харчування) і. т.д.

Слід зазначити, що в умовах сучасної науково-технічної революції круг задач, вирішуваних із залученням експертних методів, постійно розширяється.

Оцінки експертів відображають існуючу або прогнозовану ситуацію. Наприклад, оцінка різних видів продукції, у тому числі нових, оцінка часу звершення деякої події, доцільності вибору того або іншого шляху розвитку галузі, перспективності розвитку певного напряму досліджень і т.д.

Накопичений досвід здійснення експертних оцінок свідчить про правомірність їх застосування. Зокрема, позитивний досвід застосування експертних методів в товарознавстві зумовив той факт, що висновки експерта-товарознавця в багатьох країнах мають юридичне значення.

Слід зазначити, що при грамотному застосуванні експертних методів погрішності оцінок можуть бути такими, як і погрішності технічних розрахунків.

1. Підготовка і проведення експертизи

Застосуванню тих або інших методів експертних оцінок передує попереднє формулювання задач експертизи. Успіх проведення експертизи багато в чому визначається розробкою її програми, що деталізується, головною ланкою якої є питання, адресовані експертам.

Процедура проведення експертизи включає наступні основні етапи:

1. Формулювання мети експертизи;
2. Розробка анкет опитування експертів;
3. Формування групи фахівців-аналітиків з досліджуваних питань;
4. Формування групи експертів;
5. Опитування експертів;
6. Аналіз і обробка результатів опитування.
7. .Вироблення рекомендацій.

Група фахівців-аналітиків визначає найдоцільніший (виходячи з мети експертизи), метод опитування; здійснює відбір експертів, проводить їх опитування, а потім аналізує і обробляє інформацію, отриману від експертів.

Збір інформації від експертів з питання, що цікавить, здійснюється, як правило, за допомогою анкет. Анкета — це набір конкретних питань, а іноді (у

разі застосування закритих методів експертних оцінок) і набір варіантів можливих відповідей. Питання анкети сформульовані виходячи з поставленої мети експертизи.

Відомо, що якість оцінок, отриманих експертними методами, визначається якістю і кількістю експертів. Тому дуже важливо правильно сформувати групу експертів. Доцільно, щоб до вказаної групи входили фахівці, що займаються різними питаннями, причому бажано, щоб вони були з різних організацій.

Для визначення якості окремого експерта застосовуються різні оцінки. Зокрема, евристичні (оцінки, що призначаються людиною), статистичні (оцінки, одержувані в результаті обробки думок експертів з певних питань), тестові (оцінки, отримані в результаті випробувань експертів по спеціальних тестах), та ін.

До евристичних відносяться методи самооцінки і взаємооцінки. В першому випадку кожний експерт заповнює спеціальну анкету самооцінки і тим самим оцінює сам себе; в другому — кожний експерт (знову-таки по спеціальній анкеті) оцінює всіх відомих йому експертів. В результаті обробки анкет другого типу одержують усереднену (групову) оцінку кожного експерта.

При статистичному методі перевірки якості експертів за істинне значення оцінюваної експертами величини приймається середня групова оцінка. Про якість експерта судять по величині відхилення його індивідуальної оцінки від середньої. Чим менше вказане відхилення, тим вище якість експерта.

За допомогою спеціально розроблених тестів оцінюють різні властивості експерта, що характеризують його якість, зокрема, об'єктивність, професійну компетентність і т.д.

З питання вибору оптимальної кількості експертів в даний час у фахівців немає єдиної думки. Є декілька точок зору.

Проте чим менше число експертів, тим нижче точність оцінки, оскільки при малому числі експертів на групову оцінку великий вплив надає помилка кожного з експертів. Разом з тим при дуже великому числі експертів

зменшується вплив на групову оцінку правильних думок, якщо останні належать малому числу експертів.

Визначити оптимальну кількість експертів надзвичайно важко. Один з підходів, що дозволяють приблизно вирішити питання вибору необхідного числа експертів, базується на використовуванні кривих, що характеризують залежність між середньою груповою помилкою і кількістю експертів. В цьому випадку, задаючись деякою величиною середньої групової помилки, можна визначити мінімально допустиму кількість експертів.

2. Опитування експертів

Відомі різні методи опитування експертів:

- індивідуальні і групові;
- очні (фахівець-аналітик здійснює особистий контакт з експертом при заповненні останнім анкети опитування) і заочні (анкети пересилаються експертам поштою);
- відкриті (якщо відповідь на питання анкети дається експертом в будь-якій формі), закриті (якщо в анкеті на кожне питання дається перелік варіантів можливих відповідей) і ін.

Вибір методу опитування обумовлюється різними причинами: кількістю експертів, лімітом часу і т.д.

2. Метод Дельфи

Цей метод є одним з самих відомих методів формування групової думки експертів по проблемах, що цікавлять.

Метод Дельфи характеризується анонімністю і регульованим зворотним зв'язком. Опитування експертів здійснюється в чотири тури в наступній послідовності.

Фахівці-аналітики наперед розробляють анкети, з вказівкою питань, що задаються експертам індивідуально. Кожний експерт повинен виразити свою точку зору з цих питань у вигляді деяких чисел на вибраній шкалі оцінок. Колективні обговорення експертів виключені. Завдяки цьому зменшується

вплив на точку зору експерта таких чинників, як небажання відмовлятися від думки, виказаної у присутності інших експертів, проходження за думкою найавторитетніших фахівців або за думкою більшості і т.д.

Після першого туру опиту відповіді експертів обробляються, а потім їх повідомляються значення медіани відповідей з кожного питання і розмахи між крайніми квартилями (зворотний зв'язок).

Під час другого туру експертів, оцінки яких потрапили в крайні квартилі, просять обґрунтувати свою точку зору, потім аргументи (без вказівки авторів) повідомляються всі експерти.

Після другого туру процедура знов повторюється, тобто результати обробляються і знов повідомляються експерти і т.д.

Як оцінка, найближча до групової думки, застосовується медіана відповідей експертів на четвертому турі опитування. Якщо ж прийнятна збіжність виказаних думок досягається раніше, то обмежуються меншим числом турів.

Слід зазначити, що наявність зворотного зв'язку, здійснення декількох ітерацій, а також анонімність процедури сприяють тому, що менш компетентні експерти мають нагоду під коректувати свої оцінки за рахунок інформації, одержуваної від більш кваліфікованих фахівців. Все це обумовлює отримання більш надійних групових оцінок.

Метод Дельфи в даний час застосовується як при довгостроковому прогнозуванні, так і для вивчення багатьох економічних і соціальних проблем.

Задачі для закріплення знань за темою

За умовами завдання необхідно обрати постачальника, використовуючи критерії оцінки та результати контролю для ухвалення рішення про продовження договору з постачальником.

Вибір постачальника — одна з найважливіших задач фірми. На вибір постачальника істотний вплив надають результати роботи за вже укладеними договорами, на підставі виконання яких здійснюється розрахунок рейтингу

постачальника. Отже, система контролю виконання договорів поставки повинна дозволяти накопичувати інформацію, необхідну для такого розрахунку. Перед розрахунком рейтингу слід визначити, на підставі яких критеріїв ухвалюватиметься рішення про перевагу того або іншого постачальника. Як правило, як такі критерії використовуються ціна, якість товарів, що поставляються, і надійність поставки. Проте цей перелік може бути і більше, зокрема, в нашому прикладі використовується 6 критеріїв (табл. 9.1).

Таблиця 9.1 – Критерії вибору постачальника

Критерій вибору постачальника	Вага критерію	Оцінка критерію по десятибальній шкалі			Твір вага критерію на оцінку		
		Постачальник №1	Постачальник №2	Постачальник №3	Постачальник №1	Постачальник №2	Постачальник №3
Надійність поставки	0,30						
Ціна	0,25						
Якість товару	0,15						
Умови платежу	0,15						
Можливість позапланових поставок	0,10						
Фінансове стан постачальника	0.05						
РАЗОМ	1,00	XX	XX	XX			

Наступним етапом рішення задачі вибору постачальника є оцінка постачальників по намічених критеріях. При цьому вага того або іншого критерію в загальній їх сукупності визначається експертним шляхом.

Наведемо приклад розрахунку рейтингу умовних постачальників (табл. 9.2). Припустимо, що протягом певного періоду фірма одержувала від трьох

постачальників один і той же товар. Допустимий також, що ухвалено рішення в майбутньому обмежитися послугами одного постачальника. Якому з трьох слід віддати перевагу? Відповідь на це питання можна отримати таким чином.

Спочатку необхідно оцінити кожного з постачальників по кожному з вибраних критеріїв, а потім помножити вагу критерію на оцінку. Вага критерію і оцінка в даному випадку визначаються експертним шляхом.

Таблиця 9.2 - Розрахунок рейтингу постачальника

Критерій вибору постачальника	Вага критерію	Оцінка критерію по десятибальній шкалі			Твір вага критерію на оцінку		
		Постачальник №1	Постачальник №2	Постачальник №3	Постачальник №1	Постачальник №2	Постачальник №3
Надійність поставки	0,30	7	5	9	2,1	1,5	2,7
Ціна	0,25	6	2	3	1,5	0,5	0,75
Якість товару	0,15	8	6	8	1,2	0,9	1,2
Умови платежу	0,15	4	7	2	0,6	1,05	0,3
Можливість позапланових поставок	0,10	7	7	2	0,7	0,7	0,2
Фінансове стан постачальника	0.05	4	3	7	0,2	0,15	0,35
РАЗОМ	1,00	XX	XX	XX	6,3	4,8	5,5

Рейтинг визначається підсумовуванням творів ваги критерію на його оцінку для даного постачальника. Розрахувавши рейтинг різних постачальників і порівнюючи отримані результати, визначають якнайкращого партнера. Розрахунок, проведений в табл. 9.2, показує, що таким партнером є постачальник № 1 і саме з ним слід пролонгувати (продовжити термін дії) договір.

В нашому прикладі більш високий рейтинг постачальника № 1 свідчив про його перевагу. Проте для розрахунку рейтингу може використовуватися і інша система оцінок, при якій більш високий рейтинг свідчить про більший рівень негативних якостей постачальника. В цьому випадку перевага слідує віддати тому постачальнику, який має якнайменший рейтинг.

Система оцінки критеріїв в пропонованому нижче завданні якраз і заснована на реєстрації темпів зростання негативних характеристик роботи постачальників.

Запитання для самоконтролю

1. Що означає термін експерт?
2. Мета здійснення комплексу експертних методів?
3. Процедура проведення експертизи?
4. Мета методу Дельфи?
5. Що називається квартилями?
6. Що називається розмахами?

ТЕСТИ З ДИСЦИПЛІНИ „ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”

(тести передбачають лише одну правильну відповідь).

1. Дослідження-це піддавати науковому:
   а)вивченню;
   б)аналізу;
   в)дослідженню причини чого-небудь;
   г)вірні відповіді: ”а”, ”б”, ”в”.

2. Операція-це: -
   а) будь-який управлінський захід, спрямований на досягнення цілі;
   б) управлінська діяльність на виконання чого-небудь;
   в) частка виробничої функції;
   г) для лікаря, котрий розрізає , видаляє який-не будь орган, щоб вилікувати людину.

3. Основною метою „Дослідження операцій” є:
   а)навчити застосовувати математику у виробничих операціях;
   б)кількісне обгрунтівання ухвалених рішень з питань організації управління;
   в) формування теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів;
   г)вірні відповіді: „б”, ”в”, ”г”.

4.В дисципліні „Дослідження операцій” реалізується:
   а) ідея вивчення курсу вищої математики;
   б) ідея математичного моделювання технологічних, транспортних та економічних процесів;
   в) ідея озброєння студента математичними знаннями.

5. Дослідження операцій це :
   а) наукова дисципліна, яка займається розробкою та практичним застосуванням методів найбільш ефективного управління різними організаційними системами;
   б)застосування математичних методів у виробничому, транспортному та економічному процесах;
   в)знайти оптимальну величину (розмір).

6. Застосування методів дослідження операцій передбачає:
   а) побудову економічних та математичних моделей для задач прийняття рішень в складних ситуаціях, або в умовах невизначеності;
   б) вивчення взаємозв'язків, які визначають потім ухвалення рішень, та установлення критеріїв ефективності, що дозволяють оцінювати перевагу того або іншого варіанту дії;
   в) вірні відповіді: „а" і "б".

7. Предметом дисципліни "Дослідження операцій" є :
   а) вивчення яких-не будь операцій в економіці;
   б) моделі та методи системного аналізу, способи дослідження і оптимізації операцій;
   в) аналіз операцій, які проводять менеджери підприємств.

8. Дослідження операцій викладається після вивчення:
   а) вищої математики, курсу "Економетрії", "Операційного менеджменту";
   б) загального курсу спец предметів;
   в) вищої математики та проходження ознайомчої практики на підприємстві.

9. Рішенням є:
   а) будь-який визначений вибір параметрів;
   б) отриманий результат;
   в) відповідь на поставлене завдання.

10. Оптимальними є рішення:
   а) які по тій, чи іншій думці переважають над іншими;
   б) які мають більший прибуток;
   в) які мають менші витрати.

11. Алгоритм це:
   а) математичний термін, котрий несе в собі загальні якості алгоритмів;
   б) система операцій(напр., вичислення), яка після послідовного їх виконання приводить до вирішення поставленої задачі;
   в) система правил застосовувати до вихідних моделі.

12. Критерій це:
   а) правило, за яким відбираються засоби досягнення цілі;
   б) ефективний спосіб і засоби досягнення цілі;
   в) цільова функція (функціонал цілі).

13. Потреба це:
   а) невідповідність між бажаним і дійсним станом системи, станом напруги або не рівноваги в середовищі і в самій системі;
   б) вираження потреби в грошах;
   в) прагнення до дії направленому на відновлення рівноваги, тобто на задоволення потреби.

14. Модель операцій це:
    а) досить точний опис операції за допомогою математичного апарата (різноманітного роду функцій, управління, систем управління і нерівенства і т.д.)
    б) умовний образ якого-небудь об’єкта, приблизно відображаючи цей об’єкт на папері;
    в) приблизне відображення об’єкта у вигляді макета.

15. Ефективність операцій це:
    а) ступінь її пристосованості до виконання завдання - кількісно передавать у вигляді критерія ефективності-цільової функції;
    б) прибуток від реалізації виробленої продукції, яку необхідно максимізувати;
    в) сумарні витрати на перевезення й прийняття рішень в економіці;
    б) облік всіх факторів, які впливають на рішення задач, взаємодія системи з навколишнім середовищем;
    в) правильні відповіді: ”а” і ”б”.

16. Система це:
    а) множина елементів, що знаходяться у відношеннях в зв’язку один з одним;
    б) ціле, яке складається з частин;
    в) вірні відповіді «а» і «б».

17. Основні етапи дослідження операцій це:
    а) постановка проблеми;
    б) пошук оптимальних рішень;
    в) прийняття і реалізація рішення;
    г) правильні відповіді: ”а” і ”в”.

18. Економіко-математичне моделювання-це:
    а) опис економічних процесів і явищ у вигляді економіко-математичних моделей;
    б) реалізація економіко-математичної моделі на ПЕОМ, тобто „штучний експеримент”, або „ машинна імітація”;
    в) правильні відповіді: ”а” і ”б”.

19. Стратегія - це:
    а) спосіб застосування засобів та ресурсів, спрямованих на досягнення мети операції;
    б) загальний, всебічний план досягнення цілі;
    в) вірні відповіді: ”а” і ”б”.

20. Прогнозування - це:
    а) система наукових досліджень якісного та кількісного характеру спрямованих на виявлення тенденцій розвитку національної економіки та пошук оптимальних шляхів досягнення цілей цього розвитку;
    б) передбачення розвитку господарських процесів;
    в) прийняття управлінських рішень на всіх рівнях господарської ієрархії.

21. Детерміновані задачі:
    а) при яких вважається, що кожна обрана керівником стратегія приводить до єдиного завчасно відомого результату;
    б) при яких обирається та стратегія, яка гарантує найкращий результат;
    в) вірні відповіді: ”а” і ”б”.

22. Імовірна модель-це:
    а) модель, яка на відміну від детермінованої моделі вміщає випадкові величини(елементи);
    б) модель, в якій параметри, умови функціонування і характеристика стану цього об’єкта представлені випадковими величинами;
    в) вірні відповіді: ”а” і ”б”.

23. Адаптація-це:
    а) пристосування системи до реальних умов;
    б) образна назва любого об’єкта, який підлягає вивченню;
    в) система, в котрій доступні зовнішньому спостереженню тільки вхідні й вихідні величини, а внутрішнє влаштування не відомо.

24. Динамічна система:
    а) будь-яка система, що змінюється в часі;
    б) заснована на принципі міжгалузевого балансу, в який додатково вводиться рівняння, характеризуючи зміни галузевих зв’язків в часі на основі окремих показників;
    в) правильні відповіді: ”а” і „б”.

25. Принцип-це:
    а) провідна ідея, основне правило діяльності або основа пристрою, дії якого-небудь механізму або моделі;
    б) основне вихідне положення якої-небудь теорії вчення і т. інше;
    в) внутрішнє переконання, погляд на речі, що визначають норму поведінки;
    г) правильні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

26. Скаляризація - це:
    а) розробка схеми розумного компромісу, на базі якої знаходиться найкраще рішення;
    б) рішення задачі, критерієм оптимальності якої є скалярна (чи числова) функція;
    в) правильні відповіді: ”а” і ”б”.

27. Критерій оптимальності-це:
    а) показник, що відображає граничну міру економічного ефекту прийнятого господарського рішення для порівнювальної оцінки можливих рішень(альтернатив і вибору найкращого з них);
    б) максимум прибутку підприємства;
    в) мінімум трудових затрат на виробництво товару, продукції;
    г) найменший час досягнення цілі.

28. Проблема економічного оптимуму передбачає:
    а) виробничі ресурси обмежені(робочий час, природні ресурси-земля, сировина, можливості оточуючого середовища і т.д.);
    б) що перед суспільством повстає важка проблема розподілу матеріальних благ та організації їх відтворення;
    в) що повинна існувати об'єктивна ціль суспільства. Її досягнення може бути формалізовано в деякій цільовій функції (або їх наборі) - критерії оптимальності;
    г) вірні відповіді "а"," б", "в".

29. Динамічні моделі економіки-це:
    а)моделі, які описують економіку в розвитку;
    б) моделі, які характеризують економіку у визначений момент;
    г) вірні відповіді "а" і „б".

30. Статистичні моделі економіки-це:
    а)моделі, які описують економіку в розвитку;
    б)вивчення стану економіки на даний момент (статики);
    в)вірні відповіді: "а" і „б".

31. Детермінірований підхід до вивчення економіки заключається в тім:
    а) що економічна система визначається неймовірною;
    б) що спрощується реальна дійсність, яка насправді носить ймовірний характер;
    в) вірні відповіді: "а" і „б".

32. Оптимальним називається такий план виробництва:
    а) який являється найліпшим з позицій досягнення максимального або мінімального рівня конкретного техніко-економічного критерію оцінки використання виробничого потенціалу та ресурсів, які є в наявності;
    б) за яким оцінюється міра ефективності плану;
    в) вірні відповіді: "а" і „б".

33. Лінійне програмування це:
    а) область математичного програмування, яка посвячується теорії та методам рішення екстремальних задач, які характеризуються лінійною залежністю між перемінними;
    б) коли задача обов'язково має екстремальний характер, тобто складається у відшукуванні екстріму (максимуму чи мінімуму) цільової функції;
    в) вірні відповіді: „а", "б", "в".

34. Економетрія – це:
    а) вивчення кількісного боку економічних явищ і процесів засобами математичного і статистичного аналізу;
    б) вимір;
    в) вірні „а" і "б" .

35. Модель управління запасами вважається детермінованою якщо:
    а) хоча б один з параметрів носить випадковий характер-стохастичний;
    б) модель не має випадкових величин;
    в) усі параметри моделі не змінюються в часі.

36. Управління запасами-це:
    а) область дослідження операцій;
    б) комплекс моделей та методів, які використовуються для оптимізації запасів;
    в) матеріальні ресурси, які находяться на зберіганні та потрібні для задоволення попиту на ці ресурси;
    г) вірні відповіді: „а", "б", "в".

37. В якості цільової функції в задачах управління запасами виступають:
    а) сумарні витрати на зміст запасів;
    б) на складські операції;
    в) збитки від порчі при зберіганні та моральне старіння;
    г) збитки від дефіциту та штрафу і ін.;
    д) вірні відповіді: „а", "б", "в", "г". Та відшукується мінімум цієї функції.

38. Керовані змінними показниками в задачах про запаси є:
    а) обсяг запасів;
    б) частота та строки їх поповнення (шляхом виробництва, закупівлі і т. ін.);
    в) ступінь готовності продукції, що зберігається у вигляді запасів та ін.;
    г) вірні відповіді: „а", "б", "в".

39. Совокупні запаси – це:
    а) збутові товарні, виробничі запаси, що вступили у процесі виробництва;
    б) запаси, які забезпечують надійність виробництва;
    в) вірні відповіді „а" і "б".

40. Товарні та виробничі запаси поділяються на:
    а) поточні, які забезпечують безперервність постачання виробничого процесу між двома поставками, а також організацією торгівлі та споживачів;
    б) підготовчі запаси відрізняються від виробничих запасів при необхідній додатковій підготовці перед використанням у виробництві (наприклад, сушка лісу);
    в)гарантійні або страхові запаси-ті запаси, які необхідні для безперервного постачання споживача у випадку непередбачуваних обставинах: вимикання у періодичності та величині партій поставок від запланованих, зміна інтенсивності використання, затримки поставок у путі;
    г) сезонні запаси, які повинні забезпечити нормальну роботу організації під час сезонної перерви на виробництві, споживання або транспортування продукції;
    д) перехідні запаси-це залишок матеріальних ресурсів на кінець звітного періоду;
    е) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”, ”г”, ”д”.

41. Запаси необхідні для:
    а) забезпечення безперервності загального виробництва в умовах невизначеності;
    б) ”замороження” оборотних коштів підприємства, якщо вони надто нормативні;
    в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

42. Основними системами управління запасами є:
    а) система управління запасами з фіксованим розміром запасу. Він строго зафіксований та не змінюється не при яких умовах роботи системи;
    б) система управління запасами з фіксованим інтервалом часу між заказами;
    в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

43. Теорія масового обслуговування розглядає:
    а) різноманітні процеси в економіці, у телефонному зв’язку, охороні здоров’я та других галузок як процеси обслуговування, тобто задоволення яких-небудь запитів , заказів (наприклад, обслуговування кораблів у порту –їх розвантаження та навантаження, обслуговування токарів в інструментальній коморі цеху – їх розвантаження та навантаження, обслуговування токарів в інструментальній комоді цеху-видача їм різців, обслуговування клієнтів у пральні;
    б) клас задач дослідження операцій , які заключаються в находженні оптимальних параметрів систем масового обслуговування;
    в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

44. Теорія масового обслуговування вивчає:
   а) статистичні закономірності потреб, які поступають, та на цій основі виробляє рішення;
   б) система обслуговування, при яких витрати часу на очікування у черзі, з однієї сторони, та простій каналів обслуговування-з іншої сторони, були б найменшими;
   в) суму витрат часу на очікування в черзі та на простій каналів обслуговування(зберігання товарів на складах) як міру ефективності вивчення економічної системи: чим менші витрати, тим вище ефективність;
   в) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

45. В якості показників ефективності системи масового обслуговування використовується:
   а) середнє число заявок, які обслуговуються в одиницях часу;
   б) середнє число заявок в черзі;
   в) середній час очікування обслуговування;
   г) ймовірність відмови в обслуговування;
   д) ймовірність того, що кількість заявок у черзі буде перевищувати у деякому значенні і т. ін.;
   е) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”, ”г”, ”д”.

46. Упорядоченням називається:
   а) вибір порядку обслуговування;
   б) клас задач дослідження операцій, в яких проводиться вибір порядку виконання вимог;
   в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

47. Сітьове планування та управління застосовується в:
   а) будівництві;
   б) управлінні великими науково-технічними розробками та іншими комплексами робіт, що засновані на використанні ПЕОМ та сітьових графіках;
   в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

48. Сітьовий графік відображає:
   а) цілі робіт (операцій) та подій, які відображають їх технологічну послідовність та зв’язок у процесі досягнення мети;
   б) план виконання деякого комплексу взаємопов’язаних робіт (операцій),заданого у специфічній формі сіті, графічне зображення, яке називається сітьовим графіком;
   в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

49. Критичний шлях-це:
а) центральне поняття методів сітьового планування та управління;
б) безперервна послідовність робіт та подій від початкової до кінцевої події, яка потребує найбільше часу (у деяких системах-найбільше витрат) для її виконання;
в) спосіб пізнання, який дозволяє зосередити на відповідних роботах додаткові сили та кошти і тим самим скоротити цей шлях, прискорити досягнення загальної цілі комплексу;
г) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

50. У сітьовому графіку вказані:
а) в ланцюгах номери подій;
б) стрілки означають роботи;
цифри над стрілками; їх називають часовими оцінками, оскільки показують орієнтовне продовження робіт;
г) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

51. Розрізняють системи сітьового планування та управління з:
а) детермінованими моделями;
б) імовірними моделями;
в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

52. Детермінована модель-це:
а) аналітична уява закономірності, операції та ін., при яких для даного з’єднання вхідних значень при виході з системи може бути отриманий єдиний результат;
б) моделі, які складаються з випадкових елементів та найкращих умов ринку, відображають дійсні можливості економічних процесів та явищ;
в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

53. Недерміновані (ймовірності, стохастичні) моделі-це:
а) моделі, які містять випадкові елементи та краще в умовах ринку відображають дійсні якості економічних процесів та явищ;
б) величина, яка приймається в залежності від випадку того чи іншого показника з визначення ймовірності;
в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

54. Задача зміни:
а) заключається в прогнозі витрат, пов’язаних з відновленням обладнання та у виробленні найбільш економічної стратегії проведення цієї роботи;
б) складається у визначенні оптимальної стратегії замін у плановому періоді з тим, щоб сумарний прибуток за плановий період був максимальний;
в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

55. Задача про заміну може бути сформульована так:
    а) у процесі роботи обладнання, в залежності від його віку, дає щорічний прибуток, потребує експлуатаційних витрат та має деяку залишкову вартість;
    б) у будь-якому разі обладнання можна зберігати або продати за залишковою вартістю придмати нове;
    в) у випадку зберігання обладнання збільшуються його експлуатаційні витрати та знижується продуктивність;
    г) при заміні потрібні значні додаткові капітальні вкладення;
    д) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”г”.

56. Для рішення задач заміни застосовуються:
    а) методи динамічного програмування-сукупність прийомів, які дозволяють знаходити оптимальне рішення, та засновані на вирахуванні наслідків кожного рішення та виробленні оптимальної стратегії для наступних рішень;
    б) математично-статистичні методи, так як вихід зі строю обладнання завжди має нерегулярний, ймовірностний характер;
    в) вірні відповіді: „а”, ”б”.

57. Стохастичне програмування-це:
    а) розділ математичного програмування;
    б) сукупність методів рішення оптимальних задач ймовірностного характеру;
    в) означає, що або параметри обмежень (умов) задач, або параметри цільових функцій, або ті та інші є випадковими;
    г) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

58. Теорія гри-це:
    а) розділ сучасної математики, яка вивчає математичні моделі так званих конфліктних ситуацій;
    б) ситуації, при яких інтереси учасників протилежні;
    в) ситуації, при яких інтереси учасників не співпадають, хоча і не протилежні;
    г) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

59. Суть гри заключається в тому, що:
    а) кожен з учасників приймає таке рішення (тобто вибирає стратегію дій), які, як він полягає, забезпечує йому найбільший виграш або найменший програш;
    б) гравцю ясно, що результати залежать не тільки від нього але і від дій партнера (чи партнерів);
    в) гравець приймає рішення в умовах невизначеності;
    г) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

60. Багатокритеріальні задачі-це:
    а) задачі, які складаються в пошуку кращого (оптимального) рішення, що задовольняє кільком незводимим один одному критеріям;
    б) порівняння однорідних критеріїв різних учасників;
    в) нерізні критерії, а наявність у цільовій функції не тільки глобального, але і локального екстремумів.

61. Експертні оцінки-це:
    а) кількісні чи порядкові оцінки процесів чи явищ, які не піддаються безпосередньому виміру;
    б) оцінки, які засновані на судженні спеціалістів;
    в) оцінки, які не можна враховувати повністю об’єктивними, оскільки на спеціаліста-експерта можуть діяти різноманітні побічні фактори;
    г) наукові методи, які дають в сукупності більш чи менш об’єктивні відповіді;
    д) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”, ”г”.

62. Коефіцієнт конкордації-це:
    а) показник, який характеризує середню ступінь погодженості думок спеціалістів; у ролі впливу на результативний признак окремих факторів , за якими дана експертна оцінка;
    б) показник непараметричного аналізу, точність по відношенню до параметричного складає приблизно 70%;
    в) показник, значення якого коливається від 0 до 1. При повному збігу думок спеціалістів, значення коефіцієнту конкордації=1, при повній непогодженості=0;
    г) вірні відповіді: „а”, ”б”, ”в”.

Ключі вірних відповідей на тести з дисципліни ”Дослідження операцій”

Номери запитання	Вірна відповідь	Номери запитання	Вірна відповідь
1	Г	32	А
2	А	33	А
3	Г	34	А
4	Б	35	А
5	А	36	Г
6	В	37	Д
7	Б	38	Г
8	А	39	А
9	В	40	Е
10	А	41	А
11	Б	42	В
12	А	43	В
13	А	44	А
14	А	45	Е
15	А	46	В
16	В	47	В
17	Г	48	В
18	Г	49	В
19	В	50	Г
20	А	51	В
21	А	52	А
22	В	53	А
23	А	54	А
24	А	55	Д
25	А	56	А
26	В	57	Г
27	А	58	Г
28	Г	59	Г
29	А	60	А
30	Б	61	Д
31	Б	62	Г

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Балашевич В.А. Математические методы управления производством. - Минск: Вышейш. шк., 1976.
2. Х. Таха. Введение в исследование операций. Т.І.- М.: Мир, 1985.
3. Х. Таха. Введение в исследование операций. Т.2.- М.: Мир, 1985.
4. А.В. Кузнецов и др. Математическое программирование - М.: Высшая школа, 1980.
5. А.В. Кузнецов и др. Математическое программирование.- М.: Высшая школа, 1994.
6. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. - М.: Высш. шк., 1974.
7. Симовский Ю.А. Сборник задач по математическому программированию. - Х.: ХВВУТ МВД СССР, 1986.
8. Справочник по математике для зкономистов / Под ред. В.И. Ермакова. - М.: Высш. шк., 1989.
9. Душкін В.Д. Навчально-методичні матеріали з дисципліни "Математичне моделювання". - Х.: Військ. ін-т ВВ МВС України, 2002.
10. Исследование операций в экономике. Учеб. пособие для вузов/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридмак; Под. ред.. проф. Н.Ш. Кремера – М.:ЮНИТИ, 2004 – 407с.

Навчальне видання

Навчальний посібник

Дослідження операцій:
(для студентів напрямку підготовки 0502 – «Менеджмент організацій»).

Автори: Вячеслав Іванович Оспіщев,
Дмитро Олександрович Прутинко,
Дмитро Леонідович Бурко,
Олена Михайлівна Єрмак,
Ярослав Володимирович Санько.

Відповідальний за випуск: О. М. Горяїнов

Редактор: М.З. Аляб’єв

План 2007, поз. 40-Н

Підп. до друку 30.08.07	Формат 60×84 1 /16	Папір офісний
Друк на ризографі.	Умовн.-друк. арк. 5,9	Обл.-вид. арк. 6,2
Тираж 100 прим.	Замовл. №_____	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12