Деякі методи та прийоми розв'язання комбінаторних задач

1) *Метод решета*

Сутність цього методу полягає в тому, що ми спочатку знаходимо число всіх можливих комбінаторних конфігурацій, нехтуючи однією або кількома умовами задачі, а потім «відсіюємо» зайві конфігурації.

Задача. Скільки існує 4-значних чисел, в записі яких є хоча б одна цифра 7?

Розв'язання. Спочатку знайдемо число всіх можливих чотиризначних чисел, воно дорівнює $9 \cdot 10^3$, оскільки цифра 0 не може стояти на першому місці. Потім знайдемо серед них кількість чисел, при побудові яких цифра 7 не використовується, їх буде $8 \cdot 9^3$. Шукана кількість чисел дорівнює різниці $9 \cdot 10^3 - 8 \cdot 9^3$, в кожному з них цифра 7 зустрічається хоча б один раз.

Цей же метод можна застосувати до розв'язання таких задач:

Задача. Скільки існує 3-значних чисел, в записі яких є хоча б одна непарна цифра?

Задача. Скільки існує 5-значних чисел, в записі яких є хоча б дві парних цифри?

2) *Метод точок та перегородок.*

Задача. Скількома способами можна розкласти 7 однакових кульок в 3 різні ящики так, щоб жоден ящик не залишився порожнім?

Розв'язання. Розмістимо кульки в ряд, між ними утворилось 6 місць. Виберемо з цих 6 місць 2 місця і покладемо на них «перегородки» (наприклад, палички). Утворилось 3 множини кульок для розміщення в трьох ящиках. Загальна кількість способів вибору 2 місць з 6 дорівнює кількості комбінацій з 6 елементів по 2, тобто $C_6^2 = 15$.

Задача. Скільки натуральних коренів має рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$? При $k = 3, n = 2$ та $k = 2, n = 3$ виписати всі розв'язки.

Розв'язання. При *к=3* і *n=7* ми маємо таку саму задачу, що і попередня. Дійсно, якщо представляти значення *р* змінної як набір з *р* одиниць (*р* кульок), то нам треба розподілити *n* штук одиниць між *к* різними змінними (ящиками), щоб кожна змінна приймала значення, більше 1 (кожен ящик не був порожнім). Отже, маємо кількість різних розв'язків C_{n-1}^{k-1}.

Метод точок та перегородок може бути застосований і для наступних задач. Зовні вони схожі на попередні, але деякі відмінності в умові приводять до зовсім інших комбінаторних конфігурацій.

Задача. Скількома способами можна розкласти 7 однакових кульок в 3 різні ящики, допускаючи при цьому порожні ящики?

Розв'язання. Знову розмістимо 7 кульок в ряд, але тепер 2 перегородки можуть бути і поруч, що на комбінаторній мові означає перестановки з повтореннями з 3 по 7, тобто $\overline{C_3^7} = C_{3+7-1}^7 = C_9^2 = 36$.

Ось три варіанти розташування точок і перегородок

|****| ***||****   **|***|**

В першому варіанті в перший ящик попадуть 2 кульки, в другий – 5, в третій – 0. В другому варіанті порожнім залишиться другий ящик. В третьому варіанті порожніх ящиків не буде.

Задача. Скільки цілих невід'ємних коренів має рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$?.

Розв'язання. Ця задача знову таки є узагальненням попередньої і при *к=3* і *n=7* ми маємо просто інше формулювання попередньої задачі.

Відповідь. $\overline{C_k^n}$.

3) *Прийом зв'язування.*

Сутність прийому полягає в тому, що кілька елементів множини розглядаються як один елемент (вони нібито зв'язані). Частіше за все це корисно у випадках, коли вимагається розглядати такі перестановки елементів деякої множини, в яких виділена група елементів знаходиться поруч. Або коли треба вибрати підмножини, в яких виділена група елементів знаходиться поруч.

Задача. Скільки існує перестановок перших 10 натуральних чисел, в яких числа 1 та 2 стоять поруч?

Розв'язання. Будемо розглядати 1 та 2 як один елемент, який для зручності позначимо символом *a.* Приєднаємо його до решти восьми чисел і переставимо ці 9 елементів всіма можливими способами, їх 9! Оскільки елементи 1 і 2 в кожній з цих перестановок можна ще поміняти місцями, бо вони знову будуть стояти поруч, то відповідь до задачі - $2 \cdot 9!$.

Задача. Скільки існує перестановок перших 10 натуральних чисел, в яких числа 1 та 2 не стоять поруч?

Розв'язання. Тут треба одночасно розглянути прийоми зв'язування та решета. Відповідь - $10! - 2 \cdot 9!$

Задача. Скільки існує перестановок з n елементів, в яких задані два елементи не стоять поруч?

Відповідь - $n! - 2 \cdot (n-1)!$

Задача. Скільки існує перестановок з n елементів, в яких задані три елементи не стоять поруч?

Відповідь. $n! - 3!(n-2)!$

Задача. Скільки існує перестановок перших 10 натуральних чисел, в яких числа 1 2, 3 стоять поруч в порядку зростання?

Відповідь. 8!

Задача. Скількома способами можна вибрати 12 людей із 17, якщо вказані дві особи не повинні бути вибраними разом?

Відповідь. $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$.

Задача. Скільки цілих невід'ємних коренів має нерівність $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq n$?

Вказівка. Звести нерівність до сукупності рівнянь.

4) *Прийом встановлення бієкції.*

Задача. В скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n - кутника, якщо жодні три діагоналі не перетинаються в одній точці?

Розв'язання. При $n = 4$ така точка одна, при $n > 4$ кожні 4 вершини цього n - кутника утворюють опуклий чотирикутник, який дає одну точку перетину його діагоналей, які є і діагоналями n - кутника. Отже, між множиною шуканих точок і множиною опуклих чотирикутників, які можна виділити в данному n - кутнику існує бієктивне відображення. Кількість таких многокутників легко порахувати, вона дорівнює C_n^4, що і дає відповідь до задачі.

Задача. Довести рівність $C_n^k = C_n^{n-k}$ - властивість симетричності біноміальних коефіцієнтів.

Розв'язання. Ця властивість виражає рівність числа *к*-елементних і числа $(n-k)$-елементних підмножин n – елементної множини. Дійсно, кожній *к*-елементній підмножині можемо однозначно поставити у відповідність її доповнення, тобто $(n-k)$-елементну підмножину і навпаки. Це доводить еквівалентність множини *к*-елементних і множини $(n-k)$-елементних підмножин, тобто між ними існує бієктивна відповідність. Отже, їх потужності однакові.