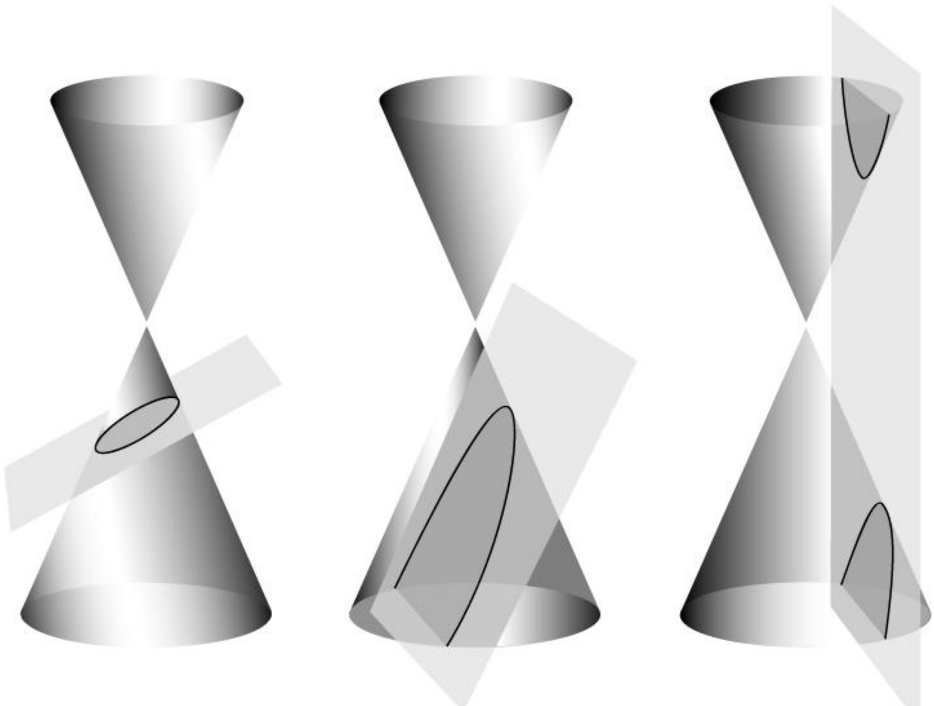
Житомирський державний університет
імені Івана Франка

Прус А.В., Чемерис О.А., Мосіюк О.О.

ПРАКТИКУМ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
Частина 3
Лінії та поверхні другого порядку

навчально-методичний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів



Житомир
2012

УДК 514.14
ББК 22.1515
П 85

Рекомендовано до друку Вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 3 від 28.10.2012)

Рецензенти:
- заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, академік Інженерної академії України, професор кафедри вищої математики та прикладної механіки Житомирського національного агроекологічного університету **Л.В. Лось;**
- завідувач кафедри прикладної математики та інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент **А.О. Погоруй;**
- кандидат педагогічних наук, доцент кафедри менеджменту освіти ЖОІППО **К.Р. Колос**

Прус А.В., Чемерис О.А., Мосіюк О.О.

Практикум з аналітичної геометрії. Частина 3. Лінії та поверхні другого порядку: Навчально-методичний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2012. – 58 с.

Практикум з аналітичної геометрії містить теоретичні відомості, розв’язання базових задач, систему вправ для самостійного розв’язування (зі вказівками щодо розв’язування) та добірку задач для практичних занять для таких тем: «Лінії другого порядку», «Поверхні другого порядку». У збірнику також містяться по 32 варіанти до кожної позааудиторної модульної контрольної роботи із вказаних тем.

Для студентів фізико-математичних факультетів очної та заочної форм навчання вищих навчальних закладів, для викладачів аналітичної геометрії.

ЗМІСТ

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 912с.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. 1. Учеб. пособие для студентов физ.– мат. фак. пед. ин–тов. – М.: Просвещение, 1986. – 336с.
3. Бакельман И.Я. Высшая геометрия. Учеб. пособие пед. ин–тов. – М.: Просвещение, 1967. – 368с.
4. Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. Аналітична геометрія. – К.: Рад. шк., 1957. – 382с.
5. Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Аналітична геометрія: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / За ред. О.М. Литвина. – Харків: Гімназія, 2008. – 340 с.
6. Лопшиц А.М. Аналитическая геометрия. – М.: Учпедгиз, 1948. – 576с.
7. Рудавський Ю.К., Костровій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. підручник. – Львів: вид-во «Бескид Біт», 2002. – 262с.
8. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія: Навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 296 с.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Лінією другого порядку називається лінія, яка в деякій системі координат задається рівнянням $f(x,y)=0$, де $f(x,y)$ – многочлен другого степеня. До ліній другого порядку належать еліпс, гіпербола, парабола.

Для вивчення геометричних властивостей ліній другого порядку користуються їх канонічними рівняннями. До канонічних рівнянь ліній входять параметри, які безпосередньо характеризують вид і форму лінії.

I. Еліпс

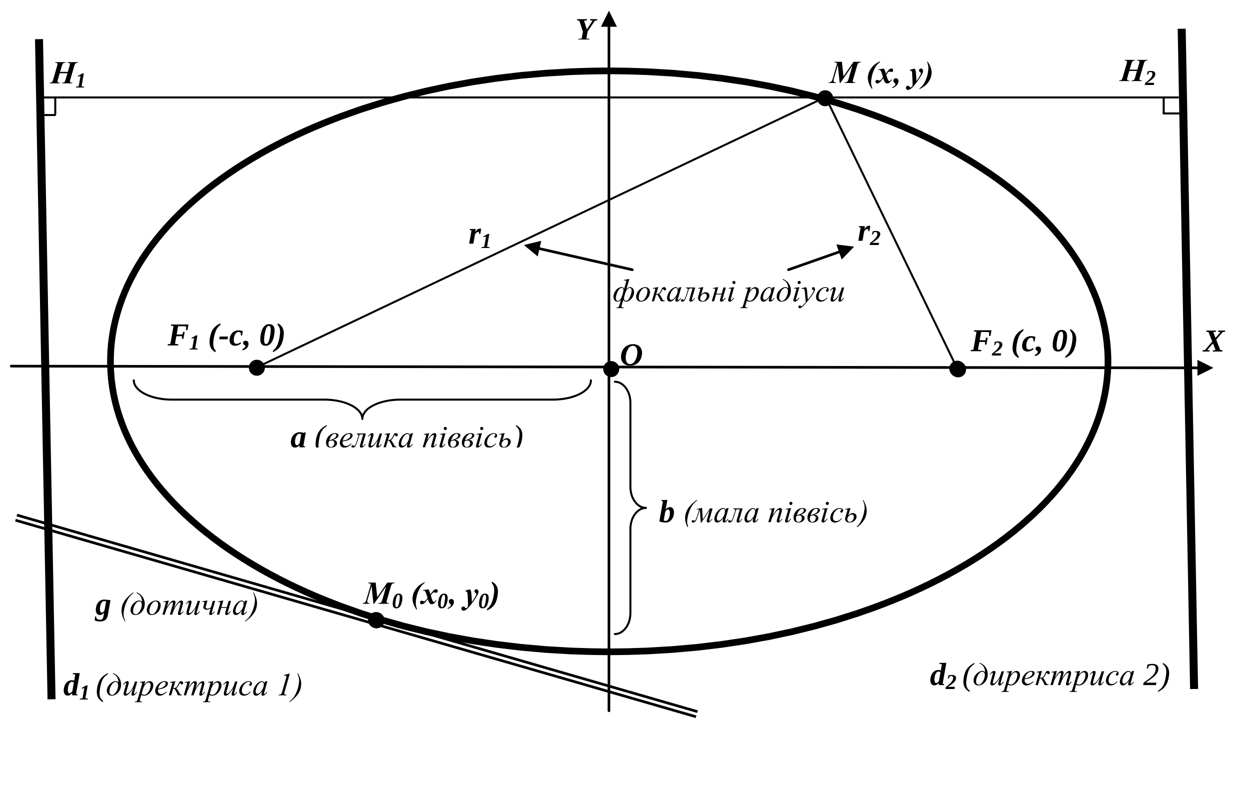


Рис. 1.1

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою: $r_1+r_2=2a$.

Канонічне рівняння еліпса (див. рис. 1.1): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, де $a \ge b$ (параметр a – велика піввісь еліпса, параметр b – мала піввісь).

Для поданого еліпса виконується співвідношення $a^2-b^2=c^2$, де $2c$ – фокусна відстань (відстань між фокусами). Координати фокусів: $F_1\left(-c,0\right)$ і $F_2\left(c,0\right)$.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$.

Рівняння директрис еліпса (розміщені зовні еліпса): $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Характеристична властивість еліпса. Відношення відстаней від будь-якої точки еліпса до його фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету еліпса:

$$\frac{F_1M}{H_1M} = \varepsilon = \frac{F_2M}{H_2M}.$$

Рівняння дотичної до еліпса в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка належить еліпсу:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

УВАГА! Якщо $a<b$, то маємо співвідношення $b^2 - a^2 = c^2$.

Координати фокусів: $F_1\,(0, -c)$ і $F_2\,(0, c)$.

Ексцентриситет такого еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{b} < 1$.

Рівняння директрис еліпса (розміщені зовні еліпса): $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ (див. рис. 1.2).

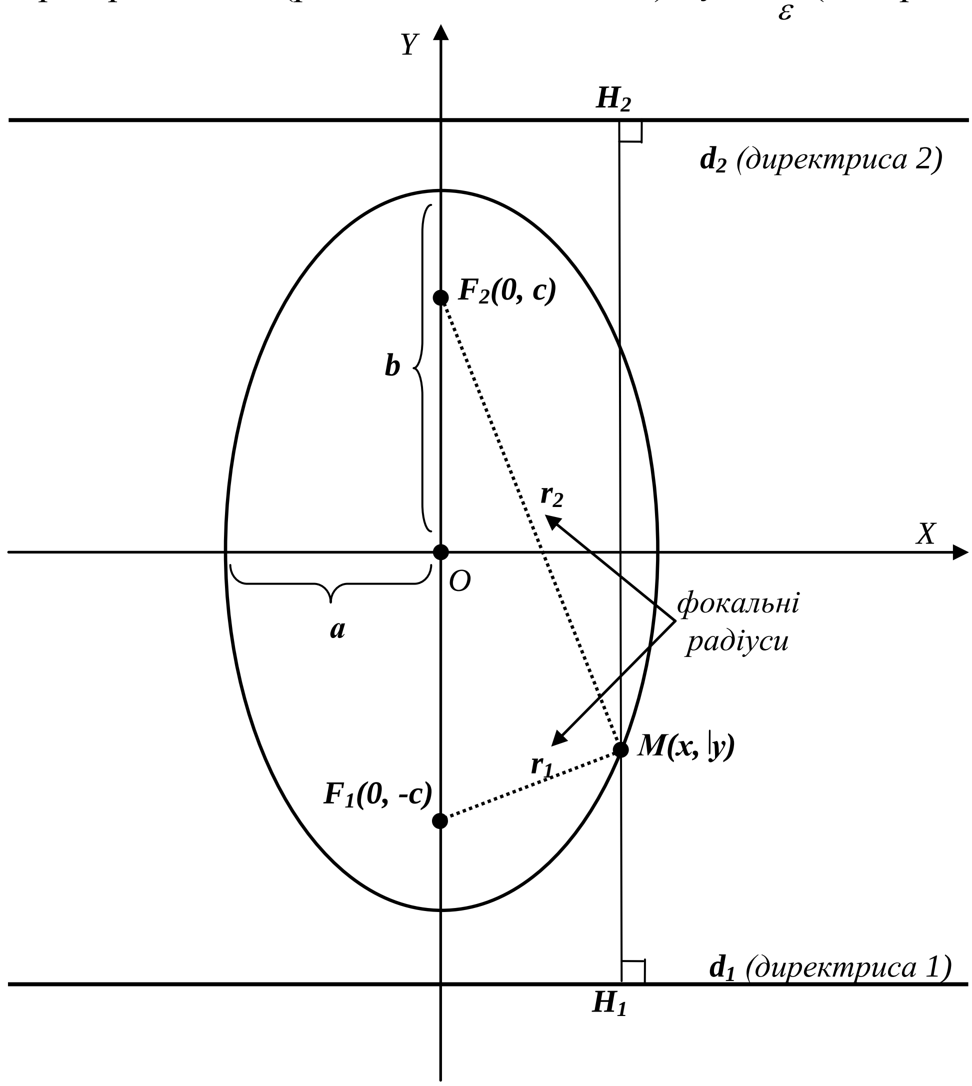


Рис. 1.2.

II. Гіпербола

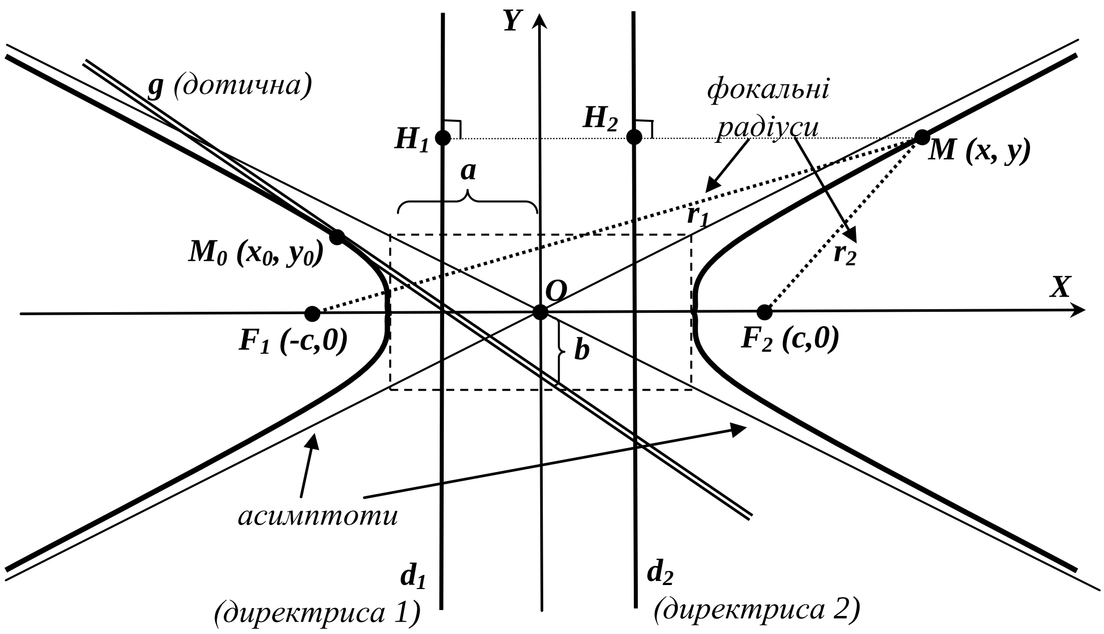


Рис. 1.3.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою: $r_1 - r_2 = 2a$.

Канонічне рівняння гіперболи (див. рис.1.3.): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (параметр a – дійсна піввісь, параметр b – уявна піввісь гіперболи).

Для даної гіперболи виконується $a^2 + b^2 = c^2$, де $2c$ – фокусна відстань (відстань між фокусами). Координати фокусів: $F_1\left(-c, 0\right)$ і $F_2\left(c, 0\right)$.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

Рівняння директрис даної гіперболи $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Характеристична властивість гіперболи. Відношення відстаней від будь-якої точки гіперболи до його фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{F_1M}{H_1M} = \varepsilon = \frac{F_2M}{H_2M}.$$

Рівняння дотичної до гіперболи в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка належить гіперболі:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

УВАГА! Гіпербола $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ називається ***спряженою*** з гіперболою $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (див. рис. 1.4).

Аналогічно маємо, що $a^2+b^2=c^2$.

Координати фокусів: $F_1\left(0,-c\right)$ і $F_2\left(0,\,c\right)$.

Ексцентриситет такої гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{b}>1$, а рівняння директрис: $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Рівняння асимптот гіперболи не міняються $y=\pm\frac{b}{a}x$.

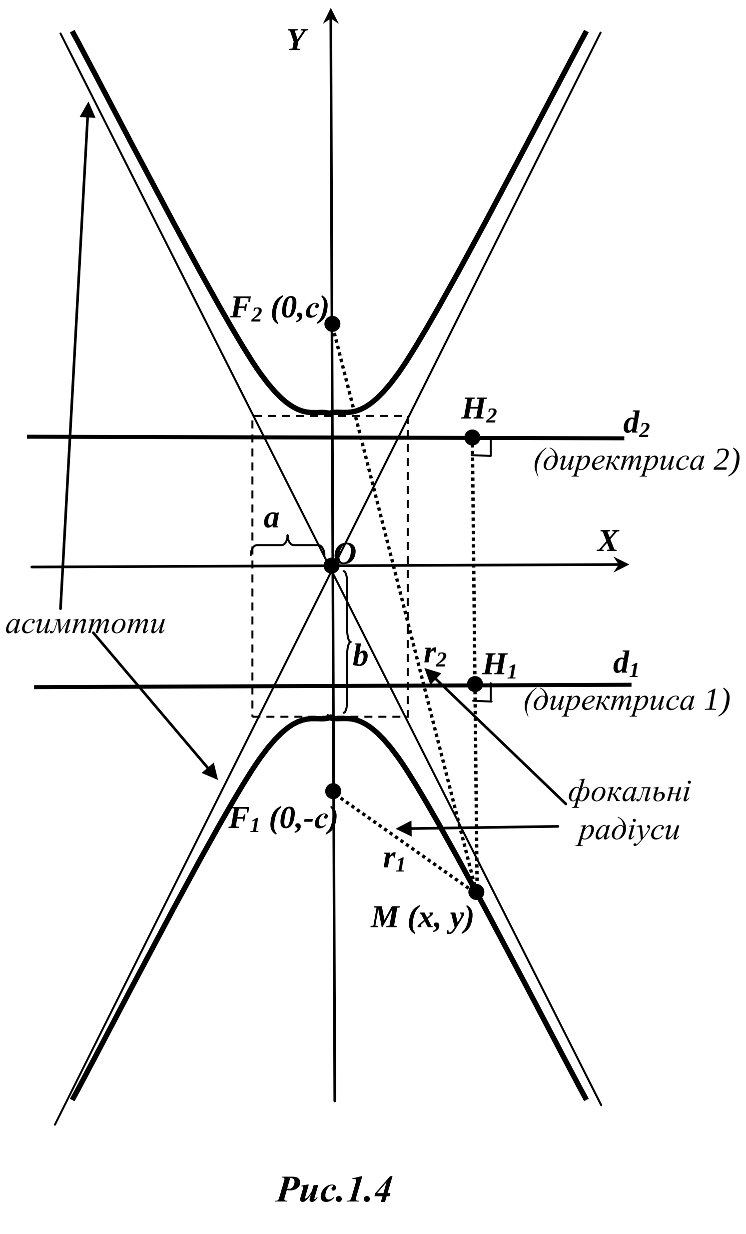
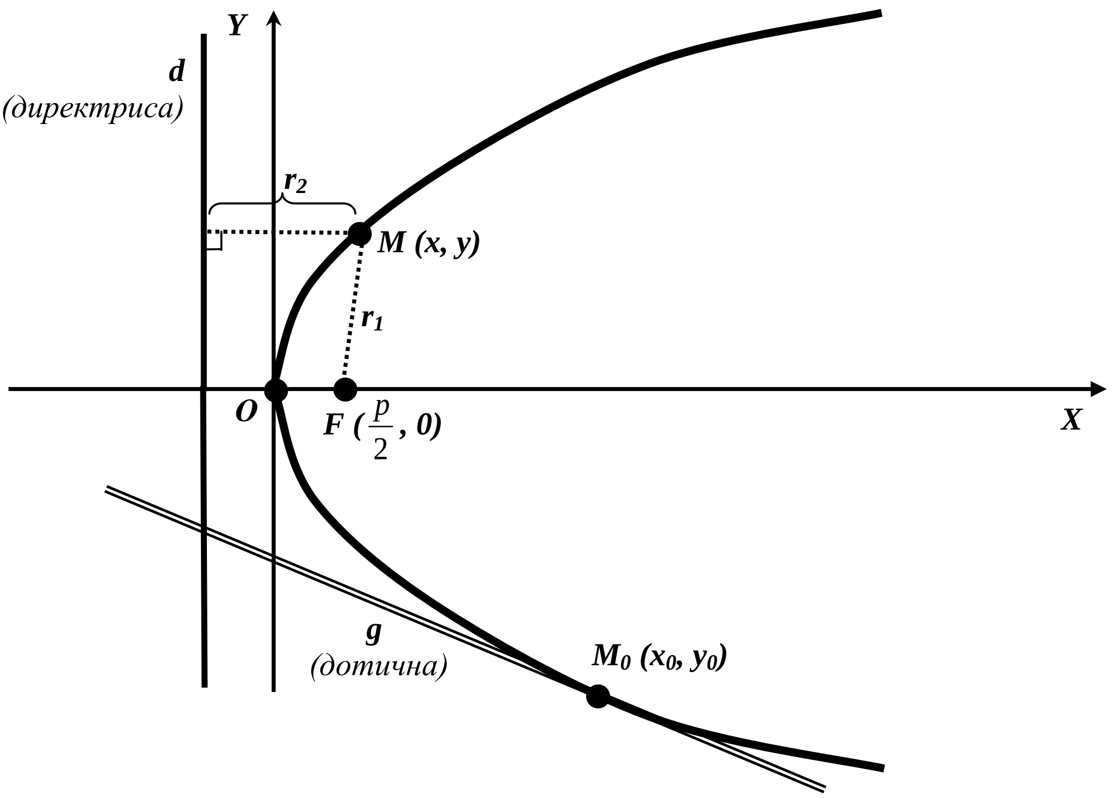


Рис.1.4

III. Парабола
 *Рис. 1.5*
Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки (r_1), що називається фокусом, і даної прямої (r_2), що називається директрисою: $r_1 = r_2$. Канонічне рівняння параболи (див. рис. 1.5): $y^2 = 2px$. Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$. Дана парабола має фокус в точці $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$. Рівняння дотичної до параболи, в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка належить параболі: $$yy_0 = p(x + x_0).$$

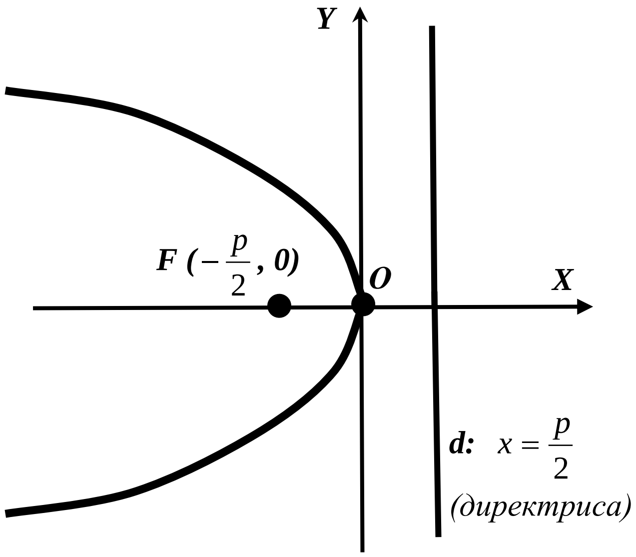
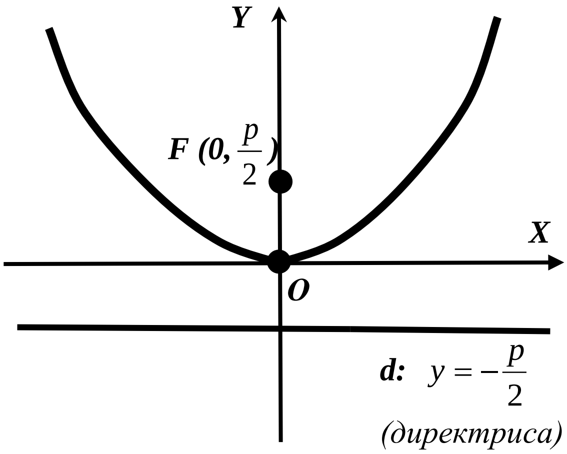
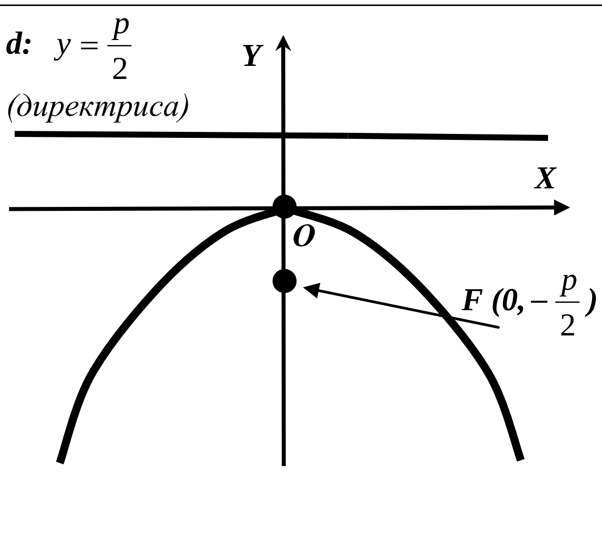
Оптичні властивості ліній другого порядку.

1. Світлові промені, які виходять з одного фокуса еліпса, після дзеркального відбиття від еліпса проходять через його другий фокус.

2. Світлові промені, які виходять з одного фокуса гіперболи, відбившись від неї, розходяться так, що їх продовження проходять через його другий фокус гіперболи.

3. Промені, які виходять з фокуса параболи, після дзеркального відбиття від неї, ідуть паралельно до її осі.

Розглянемо інші випадки розміщення параболи відносно координатних осей та подамо їх канонічні рівняння із зазначенням фокусів та директрис (див. рис. 1.6-1.8).

	***Рис. 1.6. Парабола*** $y^2 = -2px$
	***Рис. 1.7. Парабола*** $x^2 = 2py$
	***Рис. 1.8. Парабола*** $x^2 = -2py$

Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в ***полярній системі координат*** (єдине для всіх): $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cos\phi}$, де p – полярний параметр лінії (для еліпса і гіперболи $p = \dfrac{b^2}{a}$), ε – ексцентриситет.

Хордою лінії другого порядку називається відрізок, що сполучає будь-які дві її точки.

Середини паралельних між собою хорд лінії другого порядку лежать на одній прямій.

Пряма, яка проходить через середини паралельних між собою хорд лінії другого порядку, називається ***діаметром*** цієї лінії, спряженим до хорд даного напряму (див. рис. 1.9).

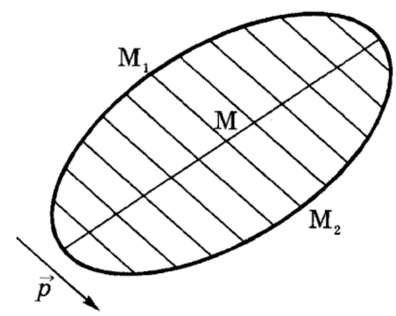


Рис. 1.9

Два діаметри еліпса (або гіперболи) називаються ***спряженими***, коли один поділяє навпіл хорди, паралельні другому, або навпаки.

Геометричне місце середин паралельних хорд з кутовим коефіцієнтом k' є діаметр з кутовим коефіцієнтом k: для еліпса: $k\,k' = -\dfrac{b^2}{a^2}$,   для гіперболи: $k\,k' = \dfrac{b^2}{a^2}$.

Усі діаметри параболи паралельні: $y = \dfrac{p}{k}$

Лінії другого порядку (еліпс, гіперболу, параболу) ще називають ***конічними перерізами*** через те, що їх можна дістати як лінії перетину звичайного кругового конуса з площиною.

Загальне рівняння лінії другого порядку має шість членів:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Подане рівняння може описувати такі лінії:

I. Невироджені: еліпс, гіперболу, параболу.

II. Вироджені: лінії еліптичного типу (пара комплексно спряжених прямих); лінії гіперболічного типу (пара дійсних прямих, що перетинаються); лінії параболічного типу (пара паралельних прямих дійсних або уявних).

Алгоритм зведення рівняння лінії другого порядку
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ **до канонічного вигляду**:

1) скласти характеристичне рівняння лінії:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ і знайти його корені λ_1, λ_2;

2) знайти кут повороту системи координат за формулами:

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};$$

3) записати формули повороту системи координат:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

і, підставивши їх у відповідне рівняння лінії, знайти коефіцієнти a'_{13}, a'_{23}, беручи до уваги, що коефіцієнти при квадратах змінних дорівнюють λ_1, λ_2, а коефіцієнт при добутку $x'y'$ дорівнює 0. Записати рівняння лінії в новій системі координат:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0;$$

4) паралельним перенесенням системи координат одержати канонічне рівняння лінії.

1.2. БАЗОВІ ЗАДАЧІ ТА СИСТЕМА ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

РІВЕНЬ А

Завдання 1.1. *Задано рівняння лінії другого порядку (див. таблиця 1.1). Виконайте такі дії:*
а) визначте за рівнянням тип лінії;
б) для еліпса знайдіть величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис;
в) для гіперболи визначте величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис та асимптот;
г) для параболи знайдіть значення параметра, координати фокуса, складіть рівняння директриси;
д) побудуйте криву з поданням фокусів, директрис, асимптот (за наявності).

Таблиця 1.1

Рівняння лінії згідно варіанта	*Рівняння лінії згідно варіанта*
1.1.1. $25x^2+4y^2-100=0$	1.1.17. $x^2+4y^2-4=0$
1.1.2. $y^2+8x=0$	1.1.18. $9x^2+4y^2-36=0$
1.1.3. $16x^2-9y^2+144=0$	1.1.19. $16x^2-25y^2-400=0$
1.1.4. $x^2+9y^2-9=0$	1.1.20. $-16x^2+25y^2-400=0$
1.1.5. $25x^2-36y^2-900=0$	1.1.21. $x^2+10y=0$
1.1.6. $9x^2-5y^2-45=0$	1.1.22. $9x^2-16y^2+144=0$
1.1.7. $4x^2-9y^2+36=0$	1.1.23. $16x^2+25y^2-400=0$
1.1.8. $x^2-12y=0$	1.1.24. $y^2-4x=0$
1.1.9. $36x^2+16y^2-576=0$	1.1.25. $16x^2-36y^2-576=0$
1.1.10. $9x^2+16y^2-144=0$	1.1.26. $25x^2+16y^2-400=0$
1.1.11. $5x^2-4y^2+20=0$	1.1.27. $x^2-4y^2-4=0$
1.1.12. $9x^2+36y^2-324=0$	1.1.28. $4x^2+25y^2-100=0$
1.1.13. $x^2-4y^2+4=0$	1.1.29. $9x^2-36y^2+324=0$
1.1.14. $36x^2+25y^2-900=0$	1.1.30. $4x^2+9y^2-36=0$
1.1.15. $25x^2-36y^2+900=0$	1.1.31. $5x^2+4y^2-20=0$
1.1.16. $2y^2-x=0$	1.1.32. $x^2-8y=0$

Покажемо розв'язання завдання 1.1 для лінії $9x^2-4y^2=36$.

Розв'язання.

1. Поділимо на 36 ліву і праву частини рівняння:

$$\frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36}, \text{ тобто маємо } \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Лінією другого порядку, що описується канонічним рівнянням $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, є гіпербола.

2. Гіпербола має довжини півосей $a = \sqrt{4} = 2$ і $b = \sqrt{9} = 3$.

Щоб записати координати фокусів, обчислимо параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Тому координати фокусів будуть такими: $F_1\left(-\sqrt{13}, 0\right)$ і $F_2\left(\sqrt{13}, 0\right)$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2} > 1$ (ексцентриситет у гіперболи більший за одиницю).

Рівняння директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \pm\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Рівняння асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{3}{2}x$ (див. рис. 1.10).

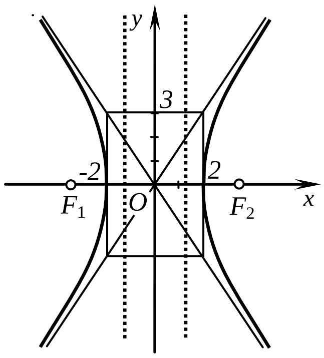


Рис. 1.10

Відповідь: 1. Гіпербола. 2. $a = 2$, $b = 3$; $F_1\left(-\sqrt{13}, 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{13}, 0\right)$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$; $x = \pm\dfrac{4}{\sqrt{13}}$; $y = \pm\dfrac{3}{2}x$.

Завдання 1.2. *Покладаючи свое значення для ексцентриситету і знаючи координати фокуса F, скласти канонічне рівняння заданої лінії другого порядку та обчислити довжину хорди, що проходить через фокус і перпендикулярно до координатної осі, де лежить фокус (див. таблиця 1.2).*

Таблиця 1.2

№	*Координати фокуса*	*Задана лінія*
1.2.1.	$F(-1, 0)$	гіпербола
1.2.2.	$F(0, -3)$	еліпс
1.2.3.	$F(2, 0)$	парабола
1.2.4.	$F(0, 4)$	гіпербола
1.2.5.	$F(-2, 0)$	парабола
1.2.6.	$F\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$	гіпербола
1.2.7.	$F(3, 0)$	еліпс
1.2.8.	$F(0, 1)$	парабола
1.2.9.	$F\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$	еліпс
1.2.10.	$F(0, -2)$	парабола
1.2.11.	$F(1, 0)$	гіпербола
1.2.12.	$F\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$	еліпс
1.2.13.	$F(-3, 0)$	гіпербола
1.2.14.	$F(0, -7)$	еліпс
1.2.15.	$F\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$	парабола
1.2.16.	$F(0, 2)$	гіпербола
1.2.17.	$F(-4, 0)$	парабола

1.2.18.	$F(0,-5)$	гіпербола
1.2.19.	$F\left(\frac{1}{2},0\right)$	еліпс
1.2.20.	$F(0,3)$	парабола
1.2.21.	$F(-7,0)$	еліпс
1.2.22.	$F\left(0,-\frac{1}{4}\right)$	парабола
1.2.23.	$F(4,0)$	гіпербола
1.2.24.	$F(0,5)$	еліпс
1.2.25.	$F(-5,0)$	гіпербола
1.2.26.	$F(0,-4)$	еліпс
1.2.27.	$F(7,0)$	парабола
1.2.28.	$F\left(0,\frac{1}{2}\right)$	гіпербола
1.2.29.	$F\left(-\frac{1}{4},0\right)$	парабола
1.2.30.	$F(0,-1)$	гіпербола
1.2.31.	$F(5,0)$	еліпс
1.2.32.	$F(0,7)$	парабола

Покажемо розв'язання завдання 1.2 для *гіперболи* з фокусом $F(0,6)$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння такої гіперболи згідно заданого фокуса будемо шукати у вигляді $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (див. рис. 1.4). Ексцентриситет для гіперболи більший за *1*, тому покладемо власне значення, наприклад, $\varepsilon=2$.

Оскільки задано фокус, то відомий параметр $c=6$. З означення ексцентриситета маємо $\varepsilon=\frac{c}{b}$, тобто $2=\frac{6}{b}$, тому $b=\frac{6}{2}=3$, а $b^2=9$.

Із співвідношення між параметрами для такої гіперболи $c^2=a^2+b^2$ маємо $6^2=a^2+3^2$, тобто $a^2=36-9=27$, а $a=3\sqrt{3}$.

Остаточно, канонічне рівняння шуканої гіперболи запишеться так:

$$-\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Через заданий фокус проходить хорда, перпендикулярно до координатної осі, де лежить фокус. Це означає, що ординати усіх точок цієї хорди рівні 6, тобто підставимо $-\frac{x^2}{27}+\frac{6^2}{9}=1$, отже, $-\frac{x^2}{27}+4=1$, тому $x^2=81$ і $x=\pm 9$.

А довжина шуканої хорди буде шукатись як $|x_2-x_1|=|9-(-9)|=18$ (лін. од.)

Відповідь: 1) $-\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{9}=1$ і 2) *18* лін.од.

РІВЕНЬ Б

Завдання 1.3. *Зобразити множину точок, яка в прямокутній системі координат задається нерівністю (див. таблиця 1.3):*

Таблиця 1.3

Нерівність згідно варіанта	*Нерівність згідно варіанта*
1.3.1. $x^2+(y+2)^2\le 4$	1.3.17. $\sqrt{(y-2)^2+x^2}+\sqrt{(y+2)^2+x^2}>4$
1.3.2. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2>25$	1.3.18. $1\le\frac{x^2}{9}+y^2\le 9$
1.3.3. $y^2\le 4x$	1.3.19. $y^2>6x$
1.3.4. $x^2+y^2+3x<0,\quad y<0$	1.3.20. $x\le y^2\le 3x$
1.3.5. $-1\le x^2+y^2-2x+2y\le 7$	1.3.21. $-2x-x^2<y^2<-2x$
1.3.6. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1$	1.3.22. $\left\lvert\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}\right\rvert\le 1$
1.3.7. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1$	1.3.23. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\ge 1$
1.3.8. $4x^2-4x+9y^2+6y+1<0$	1.3.24. $\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}<2$
1.3.9. $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}<6$	1.3.25. $\sqrt{(y-1)^2+x^2}+\sqrt{(y+1)^2+x^2}>4$
1.3.10. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}\le 1$	1.3.26. $1<\frac{x^2}{4}+y^2\le 4$
1.3.11. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1$	1.3.27. $\left\lvert x^2-\frac{y^2}{4}\right\rvert\ge 1$
1.3.12. $2x\le y^2<9x$	1.3.28. $-3\le x^2+4y^2-2x+4y\le 4$
1.3.13. $x<y^2\le 4x$	1.3.29. $\sqrt{(y-2)^2+x^2}+\sqrt{(y+2)^2+x^2}>6$
1.3.14. $\left\lvert\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}\right\rvert<1$	1.3.30. $1\le\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{7}\le 3$
1.3.15. $\lvert 3x^2-9y^2\rvert>1$	1.3.31. $x<y^2\le 4x$
1.3.16. $\left\lvert\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}\right\rvert\le 2$	1.3.32. $\lvert x^2-4y^2\rvert<8$

Покажемо розв'язання завдання 1.3 для нерівності:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2.$$

Розв'язання.

Множиною точок, яка в прямокутній системі координат задається нерівністю: $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2$, буде частина координатної площини, обмежена лінією $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$. Спростимо рівняння даної лінії: $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$, $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2+\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ і піднесемо ліву і праву частини до квадрату: $(x-2)^2+y^2=4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$. Зведемо подібні доданки, отримаємо $-8x-4=4\sqrt{(x+2)^2+y^2}$. Розділимо ліву і праву частини на 4, матимемо $-2x-1=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$. При умові, що $-2x-1\geq 0$, піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $(-2x-1)^2=\left(\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2$.

Після елементарних перетворень матимемо: $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

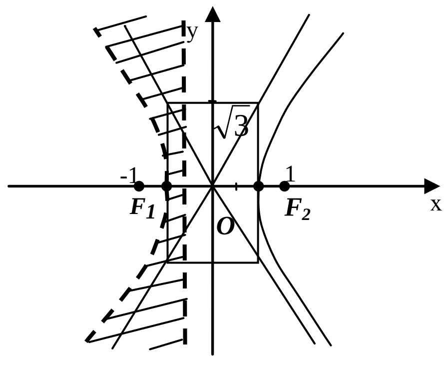


Рис. 1.11

Тобто, гіпербола $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ розбиває координатну площину на дві частини, тому підставивши координати довільної точки з якоїсь з півплощин і порівнявши знак виразу з умовою, виберемо шукану.

Наприклад, точка з координатами $(0;0)$: $\sqrt{(0-2)^2+0^2}-\sqrt{(0+2)^2+0^2}-2=-2<0$. Тому шуканою півплощиною буде та, де лежить точка з координатами $(0;0)$ і згідно знаку сама гіпербола не входить в шукану множину.

Не забудемо врахувати, що в ході перетворень ми накладали умову $-2x-1\geq 0$, або $x\leq -\frac{1}{2}$.

Тепер зобразимо дану множину точок (див. рис. 1.11).

Завдання 1.4. *Якщо заданою лінією другого порядку є еліпс або гіпербола, скласти рівняння і знайти довжини двох спряжених діаметрів такої лінії другого порядку, один з яких проходить через задану точку. Для параболи обчислити довжину хорди, яка б ділилася заданою точкою навпіл (див. таблиця 1.4).*

Таблиця 1.4

№	*Задана лінія*	*Координати точки*
1.4.1.	$3y^2-4x=0$	$(3,-1)$
1.4.2.	$3x^2-2y^2=12$	$(0,\ -3)$
1.4.3.	$3x^2+8y^2=45$	$(-1,2)$
1.4.4.	$y^2-4x=0$	$(5,\ 1)$
1.4.5.	$2x^2-3y^2=6$	$(-3,\ 6)$
1.4.6.	$2x^2+7y^2=14$	$(-2,\ 0)$
1.4.7.	$2y^2-5x=0$	$(-4,\ 8)$
1.4.8.	$4x^2-7y^2=28$	$(0,\ 9)$
1.4.9.	$x^2+2y^2=8$	$(1;-0{,}5)$
1.4.10.	$y^2-10x=0$	$(7,\ -1)$
1.4.11.	$3x^2-8y^2=24$	$(-5,\ 2)$
1.4.12.	$2x^2+9y^2=18$	$(-1,\ -1)$
1.4.13.	$5y^2-x=0$	$(6,\ -1)$
1.4.14.	$8x^2-y^2=24$	$(-1,\ 8)$

1.4.15.	$x^2+3y^2=9$	$(-2;-0{,}25)$
1.4.16.	$y^2-x=0$	$(10,\ 3)$
1.4.17.	$x^2-5y^2=10$	$(-4,\ 3)$
1.4.18.	$4x^2+25y^2=100$	$(0;1{,}5)$
1.4.19.	$2y^2-x=0$	$(9,-2)$
1.4.20.	$5x^2-7y^2=35$	$(-3,\ -4)$
1.4.21.	$3x^2+4y^2=12$	$(1,\ -1)$
1.4.22.	$y^2-6x=0$	$(2,\ -2)$
1.4.23.	$x^2-4y^2=12$	$(4,\ -5)$
1.4.24.	$3x^2+5y^2=45$	$(0,-2{,}5)$
1.4.25.	$3y^2-8x=0$	$(7,\ -3)$
1.4.26.	$2x^2-7y^2=28$	$(-2,\ -8)$
1.4.27.	$x^2+5y^2=15$	$(1,-1)$
1.4.28.	$y^2-12x=0$	$(12,\ -7)$
1.4.29.	$4x^2-6y^2=24$	$(-1,\ -1)$
1.4.30.	$x^2+6y^2=18$	$(0{,}5;\ -1)$
1.4.31.	$y^2-x=0$	$(5,-2)$
1.4.32.	$4x^2-6y^2=24$	$(3,\ -3)$

Покажемо розв’язання завдання 1.4 для лінії, заданої рівнянням $y^2-4x=0$ і точки $A(2,1)$.

Розв’язання.

За рівнянням $y^2=4x$ визначимо, що заданою лінією є парабола.

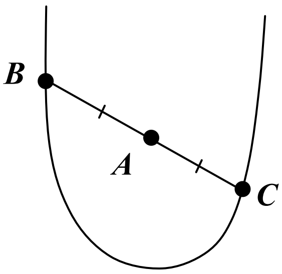


Рис. 1.12

З рівняння параболи визначимо її параметр: $y^2=2px=4x=2\cdot 2x\Rightarrow p=2$. Тоді рівняння діаметра для параболи через точку *A* таке: $y=\dfrac{p}{k}=\dfrac{2}{k}=1\Rightarrow k=2$.

Тепер запишемо рівняння шуканої хорди через точку A (див. рис. 1.12) як прямої через задану точку і кутовий коефіцієнт: $y-y_0=k(x-x_0)$, тобто після підстановки маємо $y-1=2(x-2)$. Після спрощення: $2x-y-3=0$.

Щоб обчислити довжину шуканої хорди BC, знайдемо координати точок B і C, як точок перетину прямої з параболою, тобто розв’яжемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2=4x \\ 2x-y-3=0 \end{cases}.$$

Виразимо $x=\dfrac{y^2}{4}$ і підставимо $2\cdot\dfrac{y^2}{4}-y-3=0$,

$$y^2-2y-6=0,$$

$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=28,$$

$$y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{28}}{2}=1\pm\sqrt{7}.$$

Підставимо $x_1=\frac{{y_1}^2}{4}=\frac{\left(1+\sqrt{7}\right)^2}{4}=2+\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{4+\sqrt{7}}{2}$, отже точка B має координати $\left(\frac{4+\sqrt{7}}{2},1+\sqrt{7}\right)$. Підставимо $x_2=\frac{{y_2}^2}{4}=\frac{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}{4}=2-\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{4-\sqrt{7}}{2}$, отже точка C має координати $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{2},1-\sqrt{7}\right)$.

Довжину шуканої хорди BC будемо шукати за формулою відстані між двома точками:

$$BC=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(\left(\frac{4-\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{4+\sqrt{7}}{2}\right)\right)^2+\left(\left(1-\sqrt{7}\right)-\left(1+\sqrt{7}\right)\right)^2}=\sqrt{35}$$

Відповідь: $\sqrt{35}$.

РІВЕНЬ С

Завдання 1.5. *Які точки заданої лінії другого порядку мають найкоротшу відстань до заданої прямої (див. таблиця 1.5). Обчислити цю відстань:*

Таблиця 1.5

№	*Задана лінія*	*Задана пряма*
1.5.1.	$y^2=16x$	$x+y-4=0$
1.5.2.	$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$	$12x+5y-6=0$
1.5.3.	$6x^2-5y^2=19$	$x-y+7=0$
1.5.4.	$y^2=12x$	$2x-3y+25=0$
1.5.5.	$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$	$5x+y+1=0$
1.5.6.	$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{5}=1$	$4x+3y+14=0$
1.5.7.	$y^2=64x$	$3x+4y+5=0$
1.5.8.	$\frac{27x^2}{28}+\frac{9y^2}{7}=1$	$3x-y+5=0$
1.5.9.	$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{36}=1$	$x-5y+12=0$
1.5.10.	$y^2=4x$	$x+4y-10=0$
1.5.11.	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$	$x-2y+1=0$
1.5.12.	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$	$x+3y-16=0$
1.5.13.	$y^2=2x$	$4x-2y+23=0$

1.5.14.	$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$	$3x+10y=0$
1.5.15.	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$	$4x+10y-9=0$
1.5.16.	$y^2=6x$	$x+y+2=0$
1.5.17.	$3x^2+8y^2=45$	$5x-6y-16=0$
1.5.18.	$\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$	$2x+2y-3=0$
1.5.19.	$y^2=8x$	$x-y-5=0$
1.5.20.	$x^2+5y^2=1$	$5x-6y-16=0$
1.5.21.	$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$	$7x-y+7=0$
1.5.22.	$y^2=10x$	$x+y+6=0$
1.5.23.	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1$	$2x+y-7=0$
1.5.24.	$8x^2-6y^2=48$	$x-4y+3=0$
1.5.25.	$y^2=20x$	$5x-6y-16=0$
1.5.26.	$6x^2+y^2=9$	$4x+y-1=0$
1.5.27.	$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{6}=1$	$x-y-2=0$
1.5.28.	$y^2=14x$	$5x-2y+1=0$
1.5.29.	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$	$4x+3y-7=0$
1.5.30.	$3x^2-y^2=9$	$8x+y=0$
1.5.31.	$y^2-3x=0$	$-3x+2y+1=0$
1.5.32.	$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$	$2x-y+4=0$

Покажемо розв'язання завдання 1.5 для лінії $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$

і прямої $2x-y+15=0$.

Розв'язання.

Найкоротшу відстань до заданої прямої має та точка гіперболи, яка є точкою дотику прямих, паралельних до заданої прямої. Тому запишемо рівняння дотичної до гіперболи, паралельної до заданої прямої. Рівняння будь-якої дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$ таке $\frac{x\cdot x_0}{2}-\frac{y\cdot y_0}{4}=1$, де $(x_0;y_0)$ – координати точки дотику. Щоб прямі були паралельні, потрібно зберегти пропорційність відповідних коефіцієнтів при змінних, тобто $\frac{\frac{x_0}{2}}{2}=\frac{\frac{y_0}{4}}{1}$, або $y_0=x_0$. Оскільки точка $(x_0;y_0)$ належить гіперболі, то її координати задовольняють рівняння гіперболи, тому маємо систему з двох рівнянь:

$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ \dfrac{x_0^{\ 2}}{2} - \dfrac{y_0^{\ 2}}{4} = 1 \end{cases}$, розв’язком якої є пари чисел $(2;2)$ і $(-2;-2)$. Знайдені пари чисел є координатами точок дотику прямих, паралельних до заданої. Тепер обчислимо відстані від одержаних точок до заданої прямої: 1) $\rho_1 = \dfrac{|2\cdot 2 - 1\cdot 2 - 15|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{5}}$; 2) $\rho_2 = \dfrac{|2\cdot(-2) - 1\cdot(-2) - 15|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{21}{\sqrt{5}}$. Отже, точка гіперболи з координатами $(2;2)$ розташована найближче до заданої прямої $2x - y + 15 = 0$ і ця відстань дорівнює $\dfrac{13}{\sqrt{5}}$.

Відповідь: $(2;2)$; $\dfrac{13}{\sqrt{5}}$.

Завдання 1.6. *Визначити тип лінії другого порядку (див. таблиця 1.6), скласти її канонічне рівняння та зробити рисунок:*

Таблиця 1.6

№	*Загальне рівняння лінії другого порядку*
1.6.1.	$2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$
1.6.2.	$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$
1.6.3.	$xy + 2x + y = 0$
1.6.4.	$5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$
1.6.5.	$25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$
1.6.6.	$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$
1.6.7.	$x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$
1.6.8.	$x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$
1.6.9.	$15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$
1.6.10.	$(12x - 17y - 6)^2 + (5x + 17y + 1)^2 = 1$
1.6.11.	$(4x + 3y - 1)^2 + (4x + 3y + 2)^2 = 5$
1.6.12.	$4x^2 + 28xy + 49y^2 - 3x - 15y + 2 = 0$
1.6.13.	$2x^2 + 2xy + 5y^2 - 2y + 4 = 0$
1.6.14.	$x^2 + 10xy + 25y^2 + 2x + 10y - 39 = 0$
1.6.15.	$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$
1.6.16.	$4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$
1.6.17.	$x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$
1.6.18.	$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
1.6.19.	$8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$
1.6.20.	$8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$
1.6.21.	$225x^2 - 240xy + 64y^2 + 30x - 16y + 1 = 0$
1.6.22.	$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$
1.6.23.	$15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0$

1.6.24.	$(3x-4y)^2-5(x+2y-1)^2=1$
1.6.25.	$(x-y-3)(x+y+3)=4$
1.6.26.	$17x^2-2xy+y^2-3x-y-3=0$
1.6.27.	$4x^2-12xy+8y^2-15x+25y+14=0$
1.6.28.	$2x^2-5xy-35y^2+9x+y+4=0$
1.6.29.	$5x^2-16xy+13y^2+6x-10y+2=0$
1.6.30.	$x^2-8xy+16y^2+6x-24y+9=0$
1.6.31.	$x^2-6xy+12y^2+4x-8y+7=0$
1.6.32.	$-3x^2+4xy+3y^2-16x+4y-7=0$

Покажемо розв'язання завдання 1.6 для наступної лінії другого порядку

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

Розв'язання.

1) Складемо характеристичне рівняння лінії і знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,\quad (1-\lambda)^2-1=0,\quad \lambda_1=0, \lambda_2=2;$$

2) Знайдемо кут повороту системи координат:

$$tg\alpha=\frac{0-1}{-1}=1,\ \text{отже,}\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \cos\alpha=\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

3) Запишемо формули повороту системи координат:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y',\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

Запишемо рівняння лінії в новій системі координат $OX'Y'$:

$$0\cdot(x')^2+2\cdot(y')^2-10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)-6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+25=0;$$

$$2\cdot(y')^2-8\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+25=0$$

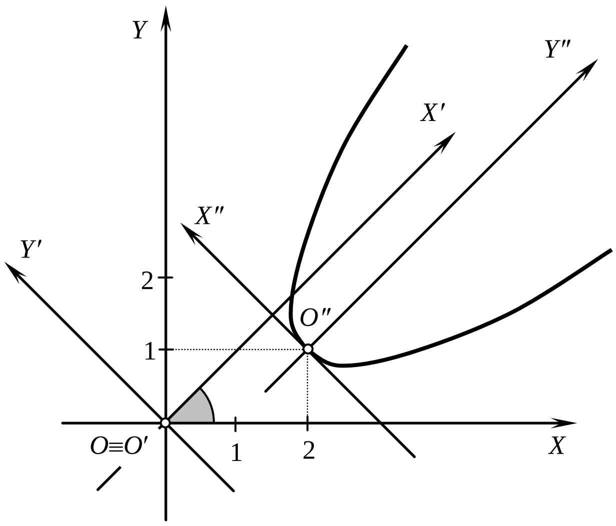


Рис. 1.13.

4) Виділимо повний квадрат по y', згрупуємо лінійний доданок з x' з вільним членом і отримаємо:

$$\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-4\sqrt{2}\left(x'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=0.$$

Здійснивши паралельне перенесення за формулами $x''=x'-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y''=y'+\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $x'=x''+\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y'=y''-\frac{\sqrt{2}}{2}$, дістанемо $(y'')^2-4\sqrt{2}x''=0$, або $(y'')^2=4\sqrt{2}x''$.

Отже, дана лінія – це парабола з параметром $p=2\sqrt{2}$ (рис. 1.13.).

1.3. ВКАЗІВКИ ЩОДО ОФОРМЛЕННЯ ПОЗААУДИТОРНОЇ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ» ТА КРИТЕРІЇ ЇЇ ОЦІНЮВАННЯ

Модульна контрольна робота складається з шести завдань різного типу складності. Кожне завдання інтерпретується у 32 варіантах і наводиться приклад розв'язання кожного завдання.

Для успішного виконання модульної контрольної роботи виконайте наступні кроки:

I. З'ясуйте термін виконання модульної контрольної роботи (встановлює викладач).

II. Визначте свій варіант за номером прізвища у журналі групи. (Наприклад, якщо прізвище студента міститься під номером 5, то він виконує 5-й варіант). Слід зауважити, що варіант роботи для студента (студентів) може бути змінений викладачем.

III. Підпишіть зошит для модульної контрольної роботи на титульній сторінці наступним чином (див. рис. 1.14):

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТИ (ПОЗААУДИТОРНА) №__ із аналітичної геометрії студента ____групи очної (заочної) форми навчання фізико-математичного факультету ЖДУ імені Івана Франка (прізвище, ім'я та по-батькові   ) Тема: «Лінії другого порядку» Варіант: Термін здачі: ____________ Перевірив: ______________ Бали:
Рис. 1.14

IV. Ознайомтесь перед розв'язуванням варіанта з теоретичними відомостями, поданими на початку кожного розділу та рекомендованою літературою. Продивіться розв'язання типового завдання. З'ясуйте чим умова для вашого варіанта відрізняється від розв'язаного. Проконсультуйтесь, у разі необхідності, із викладачем.

V. Розв'язані завдання записуйте в тому порядку, в якому вони подані у варіанті. Спочатку запишіть умову; потім власне розв'язання, яке може супроводжуватись малюнком і поясненням кроків міркувань та математичних операцій; в кінці обов'язково слід записати відповіді на усі запитання завдання.

VI Критерії оцінювання модульної контрольної роботи представлено у таблиці 1.7.

Таблиця 1.7

<table>
<tr><th colspan="2">Вид завдання</th><th>Бали</th><th>Критерії оцінювання</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Рівень А</td><td>Завдання 1</td><td>2,5</td><td>0,5 бала – вірно визначено тип лінії;
0,5 бала – записані величини півосей;
0,5 бала – записано координати фокусів;
0,5 бала – обчислено ексцентриситет;
0,5 бала – записані рівняння ліній (директрис, асимптот)</td></tr>
<tr><td>Завдання 2</td><td>2,5</td><td>0,5 бала – вірно вибраний тип канонічного рівняння лінії II-го порядку;
0,5 бала – вірно покладене значення ексцентриситету записані величини півосей;
0,5 бала – готове рівняння кривої;
1 бал – правильно обчислена довжина хорди</td></tr>
<tr><td colspan="2">Максимальна кількість балів</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Рівень В</td><td>Завдання 3</td><td>4</td><td>2 бали – вірні арифметичні перетворення рівняння лінії;
2 бал – якісний малюнок</td></tr>
<tr><td>Завдання 4</td><td>5</td><td>0,5 бала – вірно визначений тип лінії;
0,5 бала – правильно вибрана умова для спряжених напрямів;
2 бали – знайдено рівняння спряжених діаметрів (або діаметра);
2 бали – вірно обчислено довжини діаметрів (діаметра)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Максимальна кількість балів</td><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Рівень С</td><td>Завдання 5</td><td>5</td><td>2 бали – вірно записано рівняння дотичної, паралельної до заданої прямої;
2 бали –знайдено координати точки дотику;
1 бал – правильно обчислена відстань</td></tr>
<tr><td>Завдання 6</td><td>8</td><td>1 бал – складене характеристичне рівняння;
1 бал – знайдений кут повороту системи;
1 бал – записати формули кута повороту системи;
1 бал – записати рівняння лінії в новій системі координат після повороту і спростити;
1 бал – записати формули паралельного перенесення;
1 бал – записати рівняння лінії в новій системі координат після паралельного перенесення і спростити;
2 бали – якісний малюнок</td></tr>
<tr><td colspan="2">Максимальна кількість балів</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Загальна кількість балів</td><td>27</td><td></td></tr>
</table>

1.4. ВАРІАНТИ ПМКР З ТЕМИ «ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»

Номер варіанта	*Завдання № 1*	*Завдання № 2*	*Завдання № 3*	*Завдання № 4*	*Завдання № 5*	*Завдання № 6*
В – 1	1.1.1.	1.2.1.	1.3.1.	1.4.1.	1.5.1.	1.6.1.
В – 2	1.1.2.	1.2.2.	1.3.2.	1.4.2.	1.5.2.	1.6.2.
В – 3	1.1.3.	1.2.3.	1.3.3.	1.4.3.	1.5.3.	1.6.3.
В – 4	1.1.4.	1.2.4.	1.3.4.	1.4.4.	1.5.4.	1.6.4.
В – 5	1.1.5.	1.2.5.	1.3.5.	1.4.5.	1.5.5.	1.6.5.
В – 6	1.1.6.	1.2.6.	1.3.6.	1.4.6.	1.5.6.	1.6.6.
В – 7	1.1.7.	1.2.7.	1.3.7.	1.4.7.	1.5.7.	1.6.7.
В – 8	1.1.8.	1.2.8.	1.3.8.	1.4.8.	1.5.8.	1.6.8.
В – 9	1.1.9.	1.2.9.	1.3.9.	1.4.9.	1.5.9.	1.6.9.
В – 10	1.1.10.	1.2.10.	1.3.10.	1.4.10.	1.5.10.	1.6.10.
В – 11	1.1.11.	1.2.11.	1.3.11.	1.4.11.	1.5.11.	1.6.11.
В – 12	1.1.12.	1.2.12.	1.3.12.	1.4.12.	1.5.12.	1.6.12.
В – 13	1.1.13.	1.2.13.	1.3.13.	1.4.13.	1.5.13.	1.6.13.
В – 14	1.1.14.	1.2.14.	1.3.14.	1.4.14.	1.5.14.	1.6.14.
В – 15	1.1.15.	1.2.15.	1.3.15.	1.4.15.	1.5.15.	1.6.15.
В – 16	1.1.16.	1.2.16.	1.3.16.	1.4.16.	1.5.16.	1.6.16.
В – 17	1.1.17.	1.2.17.	1.3.17.	1.4.17.	1.5.17.	1.6.17.
В – 18	1.1.18.	1.2.18.	1.3.18.	1.4.18.	1.5.18.	1.6.18.
В – 19	1.1.19.	1.2.19.	1.3.19.	1.4.19.	1.5.19.	1.6.19.
В – 20	1.1.20.	1.2.20.	1.3.20.	1.4.20.	1.5.20.	1.6.20.
В – 21	1.1.21.	1.2.21.	1.3.21.	1.4.21.	1.5.21.	1.6.21.
В – 22	1.1.22.	1.2.22.	1.3.22.	1.4.22.	1.5.22.	1.6.22.
В – 23	1.1.23.	1.2.23.	1.3.23.	1.4.23.	1.5.23.	1.6.23.
В – 24	1.1.24.	1.2.24.	1.3.24.	1.4.24.	1.5.24.	1.6.24.
В – 25	1.1.25.	1.2.25.	1.3.25.	1.4.25.	1.5.25.	1.6.25.
В – 26	1.1.26.	1.2.26.	1.3.26.	1.4.26.	1.5.26.	1.6.26.
В – 27	1.1.27.	1.2.27.	1.3.27.	1.4.27.	1.5.27.	1.6.27.
В – 28	1.1.28.	1.2.28.	1.3.28.	1.4.28.	1.5.28.	1.6.28.
В – 29	1.1.29.	1.2.29.	1.3.29.	1.4.29.	1.5.29.	1.6.29.
В – 30	1.1.30.	1.2.30.	1.3.30.	1.4.30.	1.5.30.	1.6.30.
В – 31	1.1.31.	1.2.31.	1.3.31.	1.4.31.	1.5.31.	1.6.31.
В – 32	1.1.32.	1.2.32.	1.3.32.	1.4.32.	1.5.32.	1.6.32.

1.5. ДОБІРКА ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТТЯХ

I. Зобразити множину точок, яка в полярній системі координат задається рівнянням:

1.1) $r=1$;	1.6) $r=\frac{3}{2}$;
1.2) $r=\dfrac{1}{1-2\cos\varphi}$;	1.7) $r=\dfrac{6}{1-\cos\varphi}$;
1.3) $r=\dfrac{3}{2-\cos\varphi}$;	1.8) $r=\dfrac{25}{12-13\cos\varphi}$;
1.4) $r=\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$;	1.9) $r=\dfrac{4}{1-\cos\varphi}$;
1.5) $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$;	1.10) $r=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$.

II. Скласти канонічне рівняння:

1.11) еліпса, якщо відстань між вершинами, що лежать на великій осі, рівна *16*, а відстань між фокусами рівна *10;*

1.12) еліпса, якщо хорда, яка з'єднує дві вершини еліпса, має довжину *5* і нахилена до його великої осі під кутом $\arcsin\frac{3}{5}$;

1.23) еліпса, якщо фокусами еліпса є точки *(1, 0), (-1, 0)*, а точка $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ належить еліпсу;

1.24) еліпса, якщо фокусами еліпса є точки *(2, 0), (-2, 0)*, а директрисами є прямі $x=\pm 18$;

1.25) еліпса, якщо відстань від директриси до найближчої вершини рівна *4*, а до вершини, яка лежить на осі *Oy*, рівна *8*;

1.26) еліпса, якщо трикутник з вершинами у фокусах і в кінці малої осі правильний, а діаметр кола, яке проходить через центр і дві вершини еліпса, рівний *7*;

1.27) еліпса, якщо відрізок осі *Ox* між фокусом F_1 і віддаленою вершиною *A* великої осі ділиться другим фокусом F_2 навпіл, а відстань від F_2 до прямої , яка проходить через *A* і вершину малої осі, рівна $\frac{1}{\sqrt{17}}$;

1.28) еліпса, якщо директрисами еліпса э прямі $x=\pm 4$, а чотирикутник з вершинами в фокусах і кінцях малої осі є квадратом;

1.29) еліпса, якщо ексцентриситет еліпса дорівнює $\frac{\sqrt{7}}{4}$, а чотирикутник, вершинами якого є вершини еліпса, описаний навколо кола радіуса *4,8*;

1.30) еліпса, якщо прямі $x=\pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ є директрисами еліпса, а мала піввісь рівна *2*;

1.31) гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює 60^0 і гіпербола проходить через точку $M\ (4\sqrt{3}\,,\ 2)$;

1.32) гіперболи, якщо вона має асимптоти $4y \pm 3x = 0$ і директриси $5x \pm 16 = 0$;

1.33) гіперболи, якщо відстань між вершинами рівна *10*, а відстань між фокусами рівна *12*;

1.34) гіперболи, якщо довжина дійсної осі рівна *1*, а точка *(1, 3)* належить гіперболі;

1.35) гіперболи, якщо директрисами гіперболи є прямі $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$, а точка *(-9, 4)* належить гіперболі;

1.36) гіперболи, якщо довжина уявної осі дорівнює *1*, а вершина гіперболи ділить відстань між фокусами у відношенні *4:1*;

1.37) гіперболи, якщо ексцентриситет гіперболи рівний *1,4*, а відстань від вершини до найближчого фокуса рівна *2*;

1.38) гіперболи, якщо точка $(7,\ -2\sqrt{3})$, яка належить гіперболі, віддалена від лівого фокуса на відстань $4\sqrt{7}$;

1.39) гіперболи, якщо кут між асимптотами, який містить фокус, дорівнює 60^0, а відстань від директриси до найближчої вершини рівна $\frac{3}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$;

1.40) гіперболи, якщо точка $\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$ належить гіперболі, а асимптотами є прямі $y = \pm 2x$;

1.41) гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює 60^0 і гіпербола проходить через точку $M\ (4\sqrt{3}\,,\ 2)$;

1.42) гіперболи, якщо точка *(-1, 3)* належить гіперболі, а асимптотами є прямі $y = \pm 2x$;

1.43) гіперболи, знаючи чотири точки $(\pm 4, \pm 2)$ перетину її директрис і асимптот;

1.44) параболи, якщо її фокус $F(-7;0)$, а рівняння директриси $x - 7 = 0$;

1.45) параболи, якщо її фокус $F(-6;0)$, а рівняння директриси $x - 6 = 0$;

1.46) спільної хорди параболи $y^2 = 8x$ й кола $(x-6)^2 + y^2 = 64$;

1.47) спільної хорди параболи $y^2 = 18x$ й кола $(x+6)^2 + y^2 = 100$.

III. Обчислити:

1.48) довжину фокальної хорди еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, яка перпендикулярна до великої осі;

1.49) відстань від кінців великої осі до однієї з його директрис еліпса $\frac{õ^2}{25} + \frac{ó^2}{9} = 1$;

1.50) ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між фокусом і віддаленою вершиною великої осі ділиться другим фокусом у відношенні *2:1*;

1.51) ексцентриситет еліпса, якщо відстань від фокуса до віддаленої вершини великої осі в 1,5 рази більша за відстань до вершини малої осі;

1.52) ексцентриситет еліпса, якщо велика вісь видна з кінця малої осі під кутом 120^0;

1.53) площу прямокутника, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$, протилежні сторони якого проходять через фокуси еліпса;

1.54) ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між фокусом і віддаленою вершиною великої осі видно з кінця малої осі під прямим кутом;

1.55) ексцентриситет еліпса, якщо сторони квадрата, вписаного в еліпс, проходять через фокуси еліпса;

1.56) ексцентриситет еліпса, знаючи, що відстань між фокусами є середнім арифметичним довжин осей;

1.57) ексцентриситет еліпса, знаючи, що сторони вписаного в нього квадрата проходять через фокуси еліпса;

1.58) довжину сторони квадрата, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

1.59) площу прямокутника, вершини якого лежать на гіперболі $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{10}=1$, а дві сторони проходять через фокуси паралельно до осі Oy;

1.60) ексцентриситет гіперболи, якщо її півосі рівні;

1.61) фокальні радіус-вектори та кут між ними точки гіперболи $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ з абсцисою, рівною *10*, і позитивною ординатою;

1.62) ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами, який містить фокус, дорівнює 120^0;

1.63) ексцентриситет гіперболи, якщо асимптотами гіперболи є прямі $y=\pm 3x$;

1.64) ексцентриситет гіперболи, якщо відстані від точки $M(5, -4)$, яка належить гіперболі, до директрис відносяться як *2:1*;

1.65) ексцентриситет гіперболи, якщо сума відстаней від точки $P(-5, -4)$ до асимптот гіперболи рівна $\frac{20}{3}$;

1.66) фокальний радіус FM точки M параболи $y^2 = 8x$, якщо її абсциса дорівнює *8;*

1.67) довжину фокальної хорди параболи $y^2=\frac{x}{5}$, яка перпендикулярна до осі параболи;

1.68) довжину сторони правильного трикутника ABC, вписаного в параболу з параметром *5*, припускаючи, що точка A співпадає з вершиною параболи;

1.69) площу неорієнтованого трикутника, в якого одна вершина належить директрисі параболи $y^2 = 2px$, а дві інші є кінцями хорди, що проходить через фокус і перпендикулярно до осі Ox;

IV. Знайти:

1.70) точки перетину параболи $y^2 = 12x$ з еліпсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

1.71) софокусну гіперболу, яка проходить через точку $M\ (-5,\ 3)$ для рівносторонньої гіперболи $x^2 - y^2 = 8$;

1.72) кут між асимптотами гіперболи, в якої відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами;

1.73) таку точку на гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, для якої відстань від лівого фокуса вдвічі більша, ніж від правого;

1.74) таку точку на гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, для якої фокальні радіус-вектори перпендикулярні один до одного;

1.75) точки перетину параболи $y^2 = 6x$ з прямою $6x + 3y - 1 = 0$;

1.76) таку точку M на параболі $y^2 = 10x$, щоб площа трикутника з вершинами в даній точці M, фокусі параболи й точці перетину осі параболи з директрисою дорівнює 5;

1.77) таку точку M на параболі $y^2 = 10x$, щоб пряма, яка проходить через точку M і фокус параболи, утворює з віссю Ox кут 60^0;

V. Через точку:

1.78) $M\ (0,\ 3)$ провести пряму, яка перетинає еліпс $x^2 + 4y^2 = 25$ в двох точках A і B так, що $MA = 2\ MB$;

1.79) $A\ (2,\ 1)$ провести таку хорду параболи $y^2 = 14x$, яка ділилася б в цій точці навпіл;

1.80) $A\ (2,\ 2)$ провести таку хорду параболи $x^2 = 4y$, яка ділилася б в цій точці навпіл.

VI. Скласти рівняння:

1.81) прямої, яка дотикається до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$ у точці $(\sqrt{5};2)$;

1.82) дотичних до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, які паралельні до прямої $x + y - 4 = 0$;

1.83) дотичних до еліпса $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, які паралельні до прямої $4x - 2y + 23 = 0$, і визначити відстань між ними;

1.84) еліпса, який проходить через точку $A(4;-1)$ і дотикається до прямої $x + 4y - 10 = 0$, якщо його осі збігаються з координатними осями;

1.85) рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45$, віддаль яких від центра еліпса дорівнює 3;

1.86) дотичних до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, які паралельні до прямої $x + y + 2 = 0$;

1.87) дотичних еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, які проходять через точку $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$;

1.88) еліпса, до якого дотикається пряма $x - y - 5 = 0$ і фокуси якого знаходяться в точках $F_1(-3{,}0)$ і $F_2(3{,}0)$;

1.89) дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, які перпендикулярні до прямої $3x+10y=0$;

1.90) дотичну до гіперболи $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$, що проходить через точку $M(6;-3)$;

1.91) гіперболи, яка дотикається до двох прямих $5x-6y-16=0$ і $13x-10y-48=0$, якщо осі гіперболи збігаються з координатними осями;

1.92) гіперболи, знаючи рівняння її асимптот: $y=\pm\frac{1}{2}x$ і рівняння дотичної: $5x-6y-8=0$;

1.93) гіперболи, яка дотикається до прямої $x-y-2=0$ в точці $(4, 2)$;

1.94) дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, які перпендикулярні до прямої $4x+3y-7=0$;

1.95) дотичних до параболи $y^2=4x$, які проходять через точку $M(-3;2)$;

1.96) дотичної до параболи $y^2=12x$, що утворює з прямою $4x-2y+9=0$ кут $\frac{\pi}{4}$;

1.97) прямої, яка дотикається параболи $y^2=8x$ і яка паралельна до прямої $2x+2y-3=0$;

1.98) кола, що має центр на прямій $2x+y=0$ і дотикається до прямих $4x-3y+10=0$; $4x-3y-30=0$;

1.99) кола з центром в точці $P(6,-3)$, яке дотикається до прямої $3x-4y-15=0$;

1.100) кола, яке дотикається до прямих $7x-y-5=0$; $x+y+13=0$, причому до однієї з них в точці $M(1;2)$;

1.101) дотичних до кола $x^2+y^2=5$, що проходять через точку $A(11;3)$.

1.102) Із точки $P(1,-5)$ проведені дотичні до гіперболи $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. Обчислити відстань d від точки P до хорди гіперболи, яка сполучає точки дотику.

1.103) Визначити параметр параболи $y^2=2px$, якщо вона дотикається до прямої $x-2y+5=0$.

РОЗДІЛ 2. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Поверхнею другого порядку називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)$ – многочлен другого степеня.

Усі поверхні другого порядку можна утворити рухом прямої або рухом лінії другого порядку. Найпростіші форми руху є обертання і паралельне перенесення. Більшість поверхонь другого порядку можна дістати обертанням лінії другого порядку навколо осі і рівномірним стисненням або розтягненням добутої поверхні обертання в певному напрямі.

Означимо та проілюструємо усі невироджені поверхні другого порядку й запишемо їх канонічні рівняння.

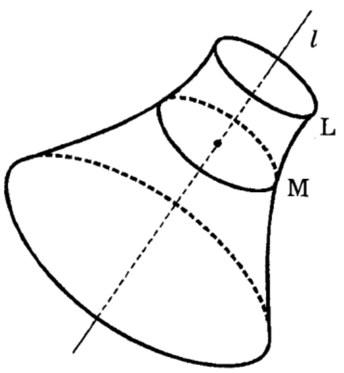
<table>
<tr><th colspan="2">I. Поверхні обертання</th></tr>
<tr><td>

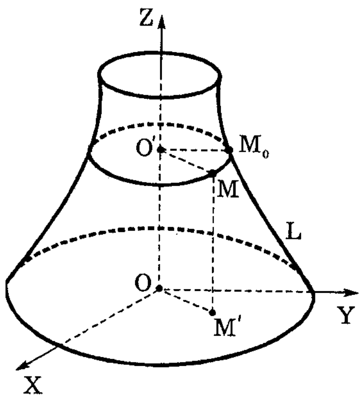
Рис. 2.1</td>
<td>

Рис. 2.2</td></tr>
<tr><td>Поверхня, яка утворюється внаслідок обертання кривої L навколо прямої l, називається поверхнею обертання (див. рис. 2.1). При цьому пряма l називається віссю обертання, а крива L – твірною поверхні обертання.</td>
<td>Якщо крива L у системі координат Oyz задається рівнянням $F(y;z)=0$ і вісь обертання поверхні l збіглася з віссю Oz, то рівняння поверхні обертання (див. рис. 2.2) запишеться так: $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2};z\right)=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило складання рівняння поверхні обертання: необхідно в рівнянні лінії, яка обертається, залишити без змін ту змінну, яка відповідає осі обертання, а другу змінну замінити на корінь квадратний, взятий зі знаками «+» та «–», з суми квадратів цієї ж змінної і тієї змінної, яка відсутня в рівнянні кривої.</td></tr>
</table>

Приклади утворення поверхонь обертання			
Назва поверхні	**Вісь** l	**Твірна лінія** L	**Рівняння поверхні**
Сфера	Ox	коло $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$	$x^2+y^2+z^2=R^2$
Еліпсоїд обертання	Oy	еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$	$\dfrac{x^2+z^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Однопорожнинний гіперболоїд обертання	Oz	гіпербола $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$	$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
Двопорожнинний гіперболоїд обертання	Ox	гіпербола $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$
Параболоїд обертання	Oz	парабола $\begin{cases} x^2=2pz \\ y=0 \end{cases}$	$x^2+y^2=2pz$

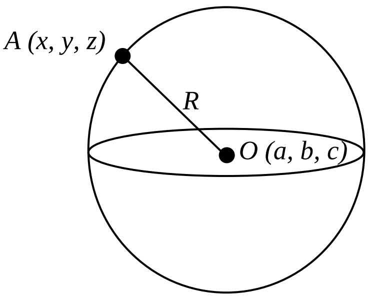
<table>
<tr><th colspan="2">II. Сфера</th></tr>
<tr><td>

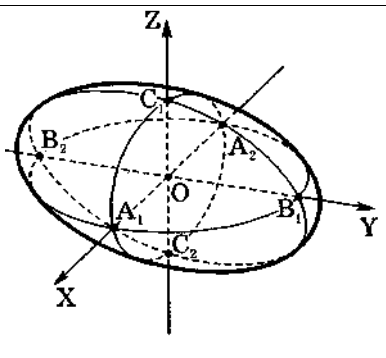
Рис. 2.3</td>
<td>Сферою (див. рис. 2.3) називається геометричне місце точок, відстань яких від заданої точки простору (центр сфери) є величина стала (радіус сфери).
Сферу можна задати чотирма точками, які не лежать на одній площині.</td></tr>
<tr><th colspan="2">III. Еліпсоїд</th></tr>
<tr><td>

Рис. 2.4</td>
<td>Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.4): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.
Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення еліпсоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.</td></tr>
</table>

IV. Однопорожнинний гіперболоїд

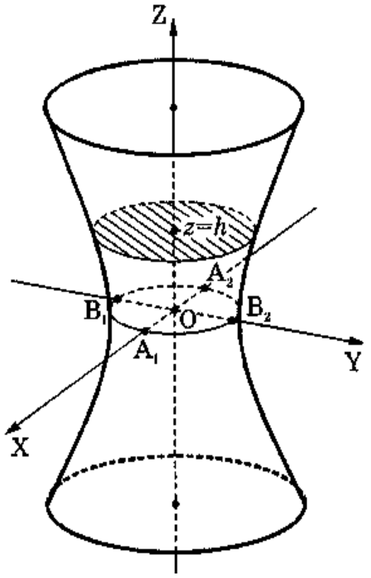


Рис. 2.5

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.5):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення однопорожнинного гіперболоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.

Інші канонічні рівняння однопорожнинних гіперболоїдів:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

V. Двопорожнинний гіперболоїд

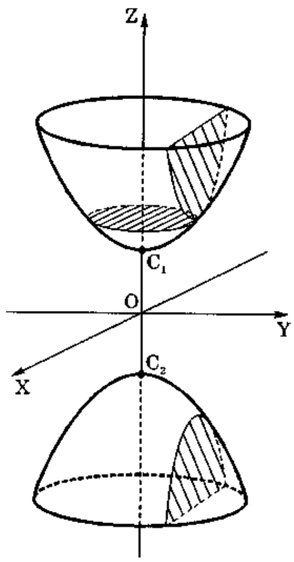


Рис. 2.6

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.6):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення двопорожнинного гіперболоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.

Інші канонічні рівняння двопорожнинних гіперболоїдів:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

VI. Еліптичний параболоїд

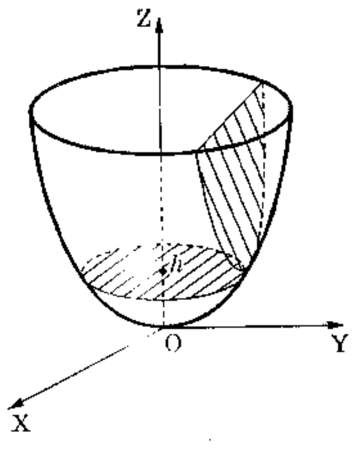


Рис. 2.7

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.7):

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ .$$

Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення параболоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.

Інші канонічні рівняння еліптичних параболоїдів:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y\ ,\quad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$$

VII. Гіперболічний параболоїд

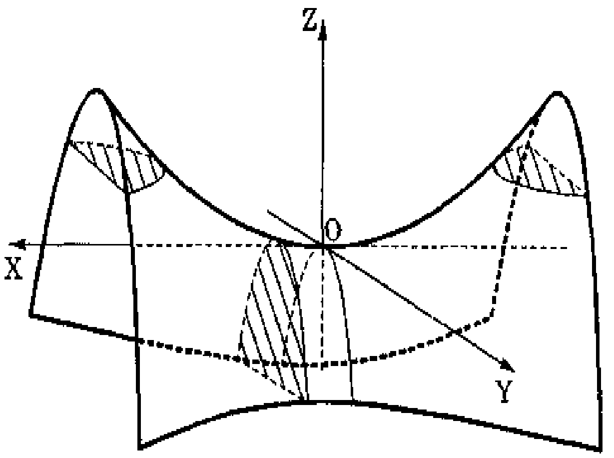


Рис. 2.8

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.8):

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ .$$

Поверхня описана параболою, яка рухається в просторі так, що її площина залишається весь час паралельною заданій площині (Oyz), а вершина ковзає по нерухомій параболі, розміщеній в перпендикулярній площині (Oxz). Напрями осей обох парабол (рухомої і нерухомої) протилежні.

Інші канонічні рівняння гіперболічних параболоїдів:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y\ ,\quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x\ ,$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2z\ ,\quad \frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=-2y\ ,\quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=-2x$$

Еліптичний параболоїд теж можна утворити рухом параболи, площина якої, переміщаючись, залишається весь час паралельною заданій площині, а вершина ковзає по нерухомій параболі, розміщеній в площині, перпендикулярній до неї. Але напрями осей обох парабол (рухомої і нерухомої) повинні мати однакові напрями.

VIII. Циліндрична поверхня

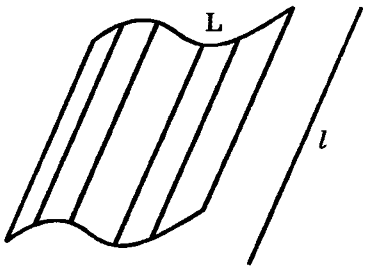


Рис. 2.9

Поверхня, утворена внаслідок руху прямої (твірної), яка перетинає задану криву (напрямну) L і залишається паралельною даній прямій l, називається ***циліндричною поверхнею*** (див. рис. 2.9).

Кожне рівняння другого порядку з двома змінними x, y в просторі, якщо воно виражає дійсну поверхню і не розкладається на два лінійні множники, є рівняння циліндра, твірні якого паралельні осі Oz.

Коли б рівняння поверхні в просторі мало дві змінні x, z, то воно виражало б циліндр з твірними, паралельними осі Oy, а коли б воно містило змінні y, z, то твірні циліндра були б паралельні осі Ox.

Приклади циліндрів та їх канонічних рівнянь

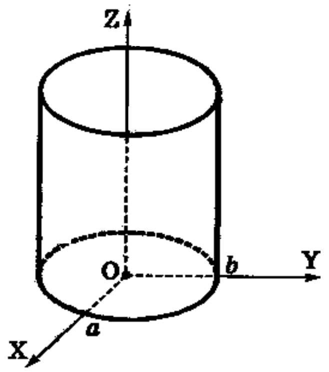


Рис. 2.10. *Еліптичний циліндр* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

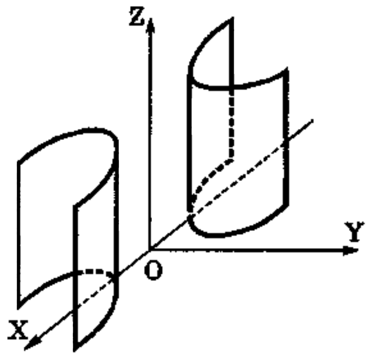


Рис. 2.11. *Гіперболічний циліндр* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

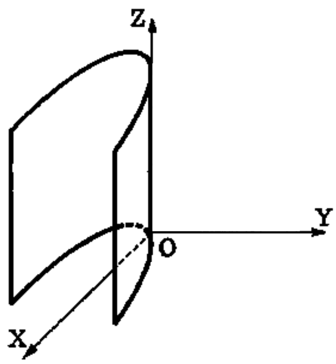
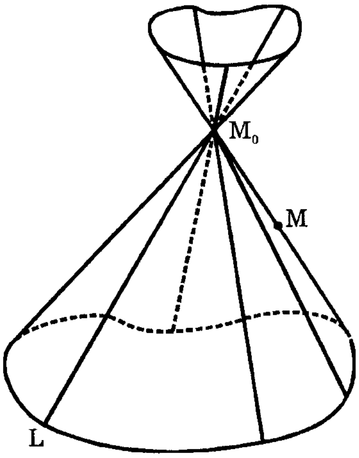
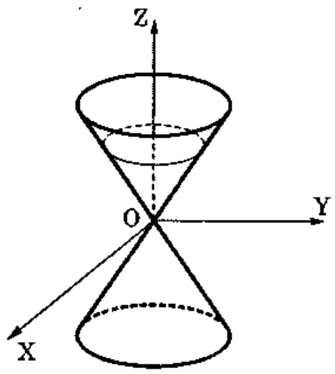


Рис. 2.12. *Параболічний циліндр* $y^2=2px$

IX. Конічна поверхня	
 ***Рис. 2.13***	 ***Рис. 2.14***
Поверхня, утворена внаслідок руху прямої (твірної), яка проходить через дану точку M_0 (вершину) і перетинає дану криву L (напрямну), називається ***конічною поверхнею*** (див. рис. 2.13).	Однорідне рівняння другого порядку з трьома змінними, якщо воно виражає дійсну поверхню в просторі і не розкладається на лінійні множники, є рівняння конуса з вершиною в початку координат, наприклад: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (див. рис. 2.14).

Інші важливі характеристик поверхонь другого порядку.

Довільна пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках. Перетином поверхні другого порядку з довільною площиною є лінія другого порядку або пряма.

Поверхні другого порядку, які мають дійсні прямолінійні твірні, називають ***лінійчастими***. Їх можна утворити рухом прямої. До таких поверхонь належать циліндричні й конічні поверхні, однопорожнинний гіперболоїд та гіперболічний параболоїд.

Дотичною площиною в точці до поверхні другого порядку називається геометричне місце дотичних до всіх ліній, які лежать на поверхні і проходять через цю точку (точку дотику). Опукла поверхня другого порядку (наприклад, еліпсоїд) з дотичною площиною мають одну спільну точку. Лінійчасті поверхні з дотичною площиною мають або спільну пряму дотику (наприклад, циліндр, конус), або дві спільні прямі (прямолінійні твірні) (наприклад, однопорожнинний гіперболоїд та гіперболічний параболоїд).

Для поверхні другого порядку $F(x,y,z)=0$ і точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$, яка належить цій поверхні, рівняння дотичної площини в точці $P_0(x_0,y_0,z_0)$ матиме вигляд: $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$.

Центром поверхні другого порядку називається точка, в якій усі хорди поверхні, що через неї проходять, діляться навпіл. Тому розрізняють такі типи невироджених поверхонь другого порядку: 1) центральні (еліпсоїд, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди, конус); 2) нецентральні (еліптичний і гіперболічний параболоїди); 3) поверхні з прямою центрів (еліптичний і гіперболічний циліндри) тощо.

Щоб знайти центр поверхні другого порядку, необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)=0 \\ F'_y(x,y,z)=0 \\ F'_z(x,y,z)=0 \end{cases}.$$

Відрізок, який сполучає дві довільні точки поверхні другого порядку, називається ***хордою*** цієї поверхні. Середини паралельних хорд поверхні другого порядку лежать на площині. Площина, яка проходить через середини хорд поверхні другого порядку, паралельних до деякого вектора $\vec{u}(a,b,c)$, називається ***діаметральною площиною*** цієї поверхні, спряженою з вектором $\vec{u}$. Рівняння діаметральної площини, спряженої з вектором $\vec{u}$ має вигляд:

$$F'_x(x,y,z)\cdot a + F'_y(x,y,z)\cdot b + F'_z(x,y,z)\cdot c = 0.$$

2.2. БАЗОВІ ЗАДАЧІ ТА СИСТЕМА ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

РІВЕНЬ А

Завдання 2.1. *Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо заданої осі такої лінії (див. таблиця 2.1):*

Таблиця 2.1

№	*Вісь обертання*	*Задана лінія*
2.1.1.	*Oy*	$x^2-3y^2=2$, $z=0$
2.1.2.	*Oz*	$5x+z-4=0$, $y=0$
2.1.3.	*Ox*	$3x^2+y-5=0$, $z=0$
2.1.4.	*Oy*	$yz-z^2-4=0$, $x=0$
2.1.5.	*Oz*	$x^2+5z^2-7=0$, $y=0$
2.1.6.	*Ox*	$5x^2+y^2=2x$, $z=0$
2.1.7.	*Oy*	$\frac{1}{2}x^2-7y^2+12y-9=0$, $z=0$
2.1.8.	*Oz*	$4y+yz-z^2+2=0$, $x=0$

2.1.9.	Ox	$2z^2-12x+9z=0$, $y=0$
2.1.10.	Oy	$y-z-5=0$, $x=0$
2.1.11.	Oz	$3y^2+2z^2-7y=0$, $x=0$
2.1.12.	Ox	$2x^2-z^2+5x=0$, $y=0$
2.1.13.	Oy	$\frac{3}{2}x^2+5y-12=0$, $z=0$
2.1.14.	Oz	$z^2+3yz+14=0$, $x=0$
2.1.15.	Ox	$4x-7y+11=0$, $z=0$
2.1.16.	Oy	$z^2+5y^2+5z-13=0$, $x=0$
2.1.17.	Oz	$3x^2-\frac{7}{13}z^2-9=0$, $y=0$
2.1.18.	Ox	$y+6xy+x^2-1=0$, $z=0$
2.1.19.	Oy	$3x^2+y-5=0$, $z=0$
2.1.20.	Oz	$\frac{5}{11}z-3y+17=0$, $x=0$
2.1.21.	Ox	$6x^2+5z^2-7z+x=0$, $y=0$
2.1.22.	Oy	$3x^2-4y^2+4y-3=0$, $z=0$
2.1.23.	Oz	$y-z-5=0$, $x=0$
2.1.24.	Ox	$x^2-3x+4y-4=0$, $z=0$
2.1.25.	Oy	$3y^2+z^2+z+y=0$, $x=0$
2.1.26.	Oz	$4x^2-z^2+z-7=0$, $y=0$
2.1.27.	Ox	$5x+z-4=0$, $y=0$
2.1.28.	Oy	$5x^2-9y+4x-7=0$, $z=0$
2.1.29.	Oz	$8x^2+7z^2+15z-x=0$, $y=0$
2.1.30.	Ox	$\frac{1}{5}y^2-3y+5x^2-1=0$, $z=0$
2.1.31.	Oy	$-2y+\frac{1}{3}z-24=0$, $x=0$
2.1.32.	Oz	$2y^2-3z^2+6=0$, $x=0$

Покажемо розв'язання завдання 2.1 для осі Oz і лінії $\begin{cases}(x-4)^2+z^2=1\\ y=0\end{cases}$.

Розв'язання.

Щоб отримати рівняння шуканої поверхні обертання скористаємось правилом: необхідно в рівнянні лінії, яка обертається, залишити без змін ту змінну, яка відповідає осі обертання, а другу змінну замінити на корінь квадратний, взятий зі знаками «+» та «–», з суми квадратів цієї ж змінної і тієї змінної, яка відсутня в рівнянні кривої. Тобто, якщо віссю обертання є Oz, то змінну z залишаємо без змін, а замість x в рівняння твірної лінії (кола) підставимо $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Відповідно, отримуємо $\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-4\right)^2+z^2=1$. Далі розкриємо дужки, піднісши до квадрату: $x^2+y^2+16\pm8\sqrt{x^2+y^2}+z^2=1$.

Остаточно звільнившись від ірраціональності, маємо рівняння поверхні обертання (до речі, це тор): $\left(x^2 + y^2 + z^2 + 15\right)^2 = 64\left(x^2 + y^2\right)$.

Відповідь: $\left(x^2 + y^2 + z^2 + 15\right)^2 = 64\left(x^2 + y^2\right)$.

Завдання 2.2. *Знайти центр і радіус поданого кола, утвореного при перетині сфери площиною (див. таблиця 2.2):*

Таблиця 2.2

№	*Рівняння кола*	*№*	*Рівняння кола*
2.2.1.	$\begin{cases} 2x - y + 2z - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64 \end{cases}$	2.2.17.	$\begin{cases} 4x + 2y - z - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 64 \end{cases}$
2.2.2.	$\begin{cases} 3x + 2y + z - 4 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+7)^2 + (z+1)^2 = 25 \end{cases}$	2.2.18.	$\begin{cases} x - 4y + 3z - 1 = 0 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 81 \end{cases}$
2.2.3.	$\begin{cases} x - 5y + 3z = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36 \end{cases}$	2.2.19.	$\begin{cases} 4x - y + z - 7 = 0 \\ x^2 + (y+6)^2 + (z-1)^2 = 64 \end{cases}$
2.2.4.	$\begin{cases} 4x + y - z + 1 = 0 \\ (x+4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 49 \end{cases}$	2.2.20.	$\begin{cases} 2x + y - 3z - 7 = 0 \\ (x-4)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 100 \end{cases}$
2.2.5.	$\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 64 \end{cases}$	2.2.21.	$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 81 \end{cases}$
2.2.6.	$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25 \end{cases}$	2.2.22.	$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 25 \end{cases}$
2.2.7.	$\begin{cases} 2x - y + 3z + 2 = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36 \end{cases}$	2.2.23.	$\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ x^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 36 \end{cases}$
2.2.8.	$\begin{cases} 2x - 3y + 4z + 1 = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 81 \end{cases}$	2.2.24.	$\begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 64 \end{cases}$
2.2.9.	$\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 100 \end{cases}$	2.2.25.	$\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 100 \end{cases}$
2.2.10.	$\begin{cases} -x + 4y + z - 5 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 36 \end{cases}$	2.2.26.	$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 64 \end{cases}$
2.2.11.	$\begin{cases} -2x + 3y + 2z - 12 = 0 \\ x^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 100 \end{cases}$	2.2.27.	$\begin{cases} 3x - 4y + z - 6 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25 \end{cases}$
2.2.12.	$\begin{cases} x + y - 4z + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 64 \end{cases}$	2.2.28.	$\begin{cases} 3x + y - 4z + 2 = 0 \\ (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 81 \end{cases}$
2.2.13.	$\begin{cases} x + 3y - 3z + 1 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 144 \end{cases}$	2.2.29.	$\begin{cases} 3x - 2y + z + 10 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64 \end{cases}$
2.2.14.	$\begin{cases} 2x - 2y + z - 7 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 225 \end{cases}$	2.2.30.	$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 25 \end{cases}$
2.2.15.	$\begin{cases} x - 3y + 5z - 2 = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 36 \end{cases}$	2.2.31.	$\begin{cases} x - 2y + z + 2 = 0 \\ x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 36 \end{cases}$

2.2.16.	$\begin{cases} 3x-3y-z+5=0 \\ (x+2)^2+y^2+(z+3)^2=81 \end{cases}$	2.2.32.	$\begin{cases} 2x-5y+z=0 \\ (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=100 \end{cases}$

Покажемо розв'язання завдання 2.2 для кола $\begin{cases} 3x+y-z-9=0 \\ (x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36 \end{cases}$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку радіус кола. Зробимо рисунок (рис. 2.15).

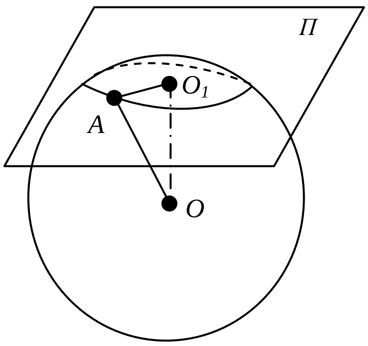


Рис. 2.15

Нехай $OA = R$ – радіус сфери, дорівнює 6.

OO_1 теж можна знайти як відстань від точки *O* до площини *П:*

$$\rho(O, \text{Ï}\ ) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$$= \frac{|3\cdot 4+1\cdot 7-1\cdot(-1)-9|}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{11}.$$

Тобто $OO_1 = \sqrt{11}$.

Тепер за теоремою Піфагора маємо: $r = O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1{}^2} = \sqrt{6^2-\left(\sqrt{11}\right)^2} = 5$.

Центр кола знайдемо як точку перетину площини *П* і прямої, яка перпендикулярна до *П*, і проходить через точку *O*.

Рівняння цієї прямої має вигляд: $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Розв'язавши систему $\begin{cases} \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z+1}{-1} \\ 3x+y-z-9=0 \end{cases}$, маємо координати центра кола *O_1 (1, 6, 0).*

Відповідь: радіус кола $r=5$, центр кола *O_1 (1, 6, 0).*

РІВЕНЬ В

Завдання 2.3. *Дослідити методом перерізів поверхню другого порядку, задану в прямокутній декартовій системі координат рівнянням (див. таблиця 2.3):*

Таблиця 2.3

№	*Задана поверхня другого порядку*
2.3.1.	$3x^2+y^2-2z^2=0$
2.3.2.	$9x^2+8y^2+24z^2-72=0$
2.3.3.	$2x^2-5y^2-10=0$
2.3.4.	$4x^2+9y^2-36z^2-144=0$
2.3.5.	$x^2+2y^2-4z=0$
2.3.6.	$x^2-4y^2-4z=0$

2.3.7.	$x^2-2y^2-4x-z+1=0$
2.3.8.	$4x^2+y^2-16z=0$
2.3.9.	$x^2+2y^2+z^2+4x-8=0$
2.3.10.	$2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0$
2.3.11.	$x^2+y^2+z^2-4z+5=0$
2.3.12.	$2x^2-y^2+2z^2-8x+6y-12z-10=0$
2.3.13.	$x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$
2.3.14.	$x^2+y^2+z^2-6x+10=0$
2.3.15.	$2x^2+y^2-3z^2+4x-4y=0$
2.3.16.	$2x^2+z^2+2x+z=0$
2.3.17.	$2x^2-y^2+2z+1=0$
2.3.18.	$2x^2+y^2+2z+1=0$
2.3.19.	$2x^2+y^2-3z^2+6z=0$
2.3.20.	$2x^2+y^2-3z^2-4x+4y+6=0$
2.3.21.	$4x^2-y^2+2z^2-2y=0$
2.3.22.	$x^2-8y^2+6z^2-4x-1=0$
2.3.23.	$2x^2-5y^2+6x-20=0$
2.3.24.	$4x^2+y^2-6z^2-8z+121=0$
2.3.25.	$x^2-8y^2+4z=0$
2.3.26.	$4x^2+4y^2-12z+3=0$
2.3.27.	$x^2+2y^2-4y+z-4=0$
2.3.28.	$3x^2-2y^2+5z^2+6z=0$
2.3.29.	$x^2+2y^2+9z^2-4x+4y+2=0$
2.3.30.	$6x^2-3y^2+2z^2-2y=0$
2.3.31.	$2x^2+6y^2-4z^2-4x+9=0$
2.3.32.	$x^2-3y^2+6x+y=0$

Покажемо розв’язання завдання 2.3 для поверхні другого порядку

$$2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0.$$

Розв’язання.

Будемо перетинати нашу поверхню другого порядку площинами, паралельними до координатних:

1) $x=h$:

$$2h^2-3y^2-2z^2-8h+6y-12z-21=0,$$

після спрощення отримаємо $3(y-1)^2+2(z+3)^2=2h^2-8h$.

Якщо $h\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, то в перерізах будуть еліпси; якщо $h=0$ або $h=4$ маємо в перерізі дві точки *(0, 1, -3)* і *(4, 1, -3)*; при $h\in(0;4)$ поверхні не існує.

2) $y=h$:

$$2x^2-3h^2-2z^2-8x+6h-12z-21=0,$$

після спрощення отримаємо $2(x-2)^2-2(z+3)^2=3h^2-6h+11$.

Оскільки $3h^2-6h+11>0$, то в перерізах для $h\in R$ завжди будуть гіперболи.

3) $z=h$:

$$2x^2-3y^2-2h^2-8x+6y-12h-21=0,$$

після спрощення отримаємо $2(x-2)^2-3(y-1)^2=2h^2+12h+26$.

Оскільки $2h^2+12h+26>0$, то в перерізах для $h\in R$ завжди будуть гіперболи.

Отже, даною поверхнею є двопорожнинний гіперболоїд.

Відповідь: це двопорожнинний гіперболоїд.

Завдання 2.4. *Дано алгебраїчне рівняння (див. таблиця 2.4).*

А) Визначте, яку поверхню другого порядку воно описує;

Б) Що являє собою центр поверхні?

В) Запишіть рівняння дотичної площини до поверхні в заданій точці;

Г) Скласти рівняння діаметральної площини поверхні, спряженої із заданим вектором.

Таблиця 2.4

№	*Рівняння поверхні*	*Точка*	*Вектор*
2.4.1.	$x^2+y^2=z^2$	$A(10,-1,2)$	$\vec{u}(3,-5,1)$
2.4.2.	$y^2+z^2-\dfrac{x^2}{4}=0$	$S(0,0,-1)$	$\vec{u}(-2,0,-4)$
2.4.3.	$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{1}=1$	$M(-2,-7,1)$	$\vec{u}(7,4,0)$
2.4.4.	$x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+25=0$	$A(0,5,-5)$	$\vec{u}(0,9,-2)$
2.4.5.	$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=0$	$D(3,-4,5)$	$\vec{u}(0,-6,0)$
2.4.6.	$z=x^2+y^2$	$E(-8,0,0)$	$\vec{u}(1,2,-5)$
2.4.7.	$\dfrac{x^2+z^2}{6}-\dfrac{y^2}{5}+1=0$	$S(7,10,-4)$	$\vec{u}(0,-2,7)$
2.4.8.	$8x^2-4y^2+24z^2-48=0$	$M(-2,5,0)$	$\vec{u}(3,0,-8)$
2.4.9.	$4z=x^2-y^2$	$A(1,3,-2)$	$\vec{u}(0,1,0)$
2.4.10.	$8x-y^2-2z^2=0$	$D(-3,1,0)$	$\vec{u}(1,-9,0)$
2.4.11.	$z^2-4x=0$	$E(-8,1,0)$	$\vec{u}(-5,3,1)$
2.4.12.	$x^2+4y^2-8=0$	$S(-2,10,-1)$	$\vec{u}(1,-6,8)$
2.4.13.	$3x^2+5y^2=12z$	$M(4,-2,7)$	$\vec{u}(-2,0,11)$
2.4.14.	$2x^2-5y^2-8=0$	$A(-5,0,1)$	$\vec{u}(0,-11,3)$
2.4.15.	$2y^2+z^2=1-x$	$D(2,9,-1)$	$\vec{u}(7,6,-3)$
2.4.16.	$3x^2-y^2-z^2=3$	$E(-1,4,3)$	$\vec{u}(-2,5,7)$
2.4.17.	$z^2+4z-2x+6=0$	$S(-6,0,9)$	$\vec{u}(1,-1,4)$

2.4.18.	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=2z$	$M\,(2,-7,6)$	$\vec{u}\,(0,-2,7)$
2.4.19.	$x=9y^2$	$A\,(0,6,-2)$	$\vec{u}\,(-5,7,1)$
2.4.20.	$y^2+2y-4x+1=0$	$D\,(0,-3,8)$	$\vec{u}\,(1,0,-9)$
2.4.21.	$\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{2}=0$	$E\,(7,-2,-2)$	$\vec{u}\,(2,-3,6)$
2.4.22.	$2x^2+z^2=1-y$	$S\,(-2,0,3)$	$\vec{u}\,(3,0,4)$
2.4.23.	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$	$M\,(3,0,-1)$	$\vec{u}\,(0,-7,2)$
2.4.24.	$x=2z^2$	$A\,(0,-4,-7)$	$\vec{u}\,(2,-5,1)8$
2.4.25.	$4x^2-y^2-2z^2=0$	$D\,(-4,5,-9)$	$\vec{u}\,(1,-5,0)$
2.4.26.	$\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$	$E\,(8,-3,6)$	$\vec{u}\,(1,-2,4)$
2.4.27.	$\frac{y^2+z^2}{4}-\frac{x^2}{3}=-1$	$S\,(0,0,-1)$	$\vec{u}\,(6,2,-3)$
2.4.28.	$\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{7}=1$	$M\,(-2,-7,1)$	$\vec{u}\,(11,-1,1)$
2.4.29.	$z=1-x^2-y^2$	$A\,(0,5,-5)$	$\vec{u}\,(4,-7,1)$
2.4.30.	$x^2+y^2+z=0$	$D\,(3,-4,5)$	$\vec{u}\,(8,-5,10)$
2.4.31.	$x^2-y^2+x-7y+5z+6=0$	$E\,(-8,0,0)$	$\vec{u}\,(4,0,-5)$
2.4.32.	$x^2+6y^2-z^2+3y-z=0$	$S\,(7,10,-4)$	$\vec{u}\,(2,-2,7)$

Покажемо розв'язання завдання 2.4 для рівняння поверхні $4x^2+y^2-8z=0$, точки $B\,(-1,2,-2)$ і вектора $\vec{u}\,(0,-3,2)$.

Розв'язання.

А) Дане алгебраїчне рівняння $4x^2+y^2-8z=0$ описує поверхню другого порядку, а саме: $4x^2+y^2=8z$, або $x^2+\frac{y^2}{4}=2z$ – це еліптичний параболоїд.

Б) Щоб знайти центр поверхні, скористаємось формулою:

$$\begin{cases} F'_x\,(x,y,z)=0 \\ F'_y\,(x,y,z)=0 \\ F'_z\,(x,y,z)=0 \end{cases}.$$

З вихідного рівняння маємо $F\,(x,y,z)=4x^2+y^2-8z$, тому

$$\begin{cases} F'_x\,(x,y,z)=4\cdot 2x=8x=0 \\ F'_y\,(x,y,z)=2y=0 \\ F'_z\,(x,y,z)=-8\neq 0 \end{cases}.$$

Ми не можемо розв'язати систему, отже, еліптичний параболоїд не має центра (це нецентральна поверхня).

В) Щоб записати рівняння дотичної площини до поверхні в точці $B\,(-1,2,-2)$, скористаємось формулою:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Частинні похідні в загальному вигляді вже шукали, тепер підставимо координати точки:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)=8x_0=8\cdot(-1)=-8,$$
$$F'_y(x_0,y_0,z_0)=2y_0=2\cdot 2=4,$$
$$F'_z(x_0,y_0,z_0)=-8.$$

Тепер підставимо в рівняння дотичної площини:

$-8\cdot(x-(-1))+4\cdot(y-2)-8\cdot(z-(-2))=0$, або після розкриття дужок маємо $2x-y+2z+8=0$.

Г) Щоб записати рівняння діаметральної площини, спряженої з вектором $\vec{u}$, скористаємось формулою:

$$F'_x(x,y,z)\cdot a+F'_y(x,y,z)\cdot b+F'_z(x,y,z)\cdot c=0.$$

З попереднього пункту маємо $F'_x(x,y,z)=4\cdot 2x=8x$, $F'_y(x,y,z)=2y$, $F'_z(x,y,z)=-8$.

Підставимо в рівняння: $8x\cdot 0+2y\cdot(-3)-8\cdot 2=0$, або після спрощення $3y+8=0$.

Відповідь: А) еліптичний параболоїд; Б) нецентральна поверхня; В) $2x-y+2z+8=0$; Г) $3y+8=0$.

Завдання 2.5. *Використовуючи задане рівняння кривої як напрямної (див. таблиця 2.5), скласти:*
а) рівняння конічної поверхні з вершиною в заданій точці;
б) рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні до заданої прямої.

Таблиця 2.5

№	*Рівняння кривої*	*Задана точка*	*Задана пряма*
2.5.1.	$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=-1\\ y=0\end{cases}$	$M\,(-2,5,0)$	$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{4}$
2.5.2.	$\begin{cases}x^2+2xy+3y^2-x=0\\ z=0\end{cases}$	$A(1,3,-2)$	$\begin{cases}x=t-2\\ y=5t\\ z=8t+1\end{cases}$
2.5.3.	$\begin{cases}(x-1)^2+z^2=4\\ y=0\end{cases}$	$D\,(-3,1,0)$	$\begin{cases}2x-4y=0\\ x-y+z-2=0\end{cases}$
2.5.4.	$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ z=0\end{cases}$	$E\,(-8,1,0)$	$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{3}$
2.5.5.	$\begin{cases}x=y^2+z^2\\ x=2z\end{cases}$	$S\,(-2,10,-1)$	$\begin{cases}x=2t+9\\ y=t-3\\ z=-t+1\end{cases}$

2.5.6.	$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$	$M\,(4,-2,7)$	$\begin{cases} 3x-y+2z-4=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$
2.5.7.	$\begin{cases} 4x^2-y^2+3z=0 \\ 2x-y+5z=1 \end{cases}$	$A\,(-5,0,1)$	$\frac{x}{1}=\frac{y-9}{-3}=\frac{z+2}{6}$
2.5.8.	$\begin{cases} x^2+6xz-4z^2+3x=0 \\ y=0 \end{cases}$	$D\,(2,9,-1)$	$\begin{cases} x=-2t \\ y=4t-5 \\ z=3t-10 \end{cases}$
2.5.9.	$\begin{cases} (x-4)^2+(y+1)^2=9 \\ z=0 \end{cases}$	$E\,(-1,4,3)$	$\begin{cases} -x+3y-z-4=0 \\ 5x-y+3z-8=0 \end{cases}$
2.5.10.	$\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{24}=1 \\ z=0 \end{cases}$	$S\,(-6,0,9)$	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{9}=\frac{z}{0}$
2.5.11.	$\begin{cases} x^2-4xz+6z^2+x=0 \\ y=0 \end{cases}$	$M\,(2,-7,6)$	$\begin{cases} x=-t \\ y=12 \\ z=5t-7 \end{cases}$
2.5.12.	$\begin{cases} (x+2)^2+y^2=6 \\ z=0 \end{cases}$	$A\,(0,6,-2)$	$\begin{cases} x-2y-z+10=0 \\ 4x+z-1=0 \end{cases}$
2.5.13.	$\begin{cases} 5y^2+2z^2=20 \\ x=0 \end{cases}$	$D\,(0,-3,8)$	$\frac{x-11}{3}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-9}{4}$
2.5.14.	$\begin{cases} 3y^2-z^2+5x=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$	$E\,(7,-2,-2)$	$\begin{cases} x=10 \\ y=-4t+1 \\ z=3t-9 \end{cases}$
2.5.15.	$\begin{cases} x^2+6z^2+4x=0 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$	$S\,(-2,0,3)$	$\begin{cases} x-y-z+3=0 \\ 5x-y+2z-4=0 \end{cases}$
2.5.16.	$\begin{cases} \frac{\tilde{o}^2}{4}-\frac{\acute{o}^2}{9}+\frac{z^2}{2}=1 \\ 2\tilde{o}-3z+1=0 \end{cases}$	$M\,(3,0,-1)$	$\frac{x+5}{-5}=\frac{y-8}{3}=\frac{z+1}{2}$
2.5.17.	$\begin{cases} x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16 \\ x=5 \end{cases}$	$A\,(0,-4,-7)$	$\begin{cases} x=6t+1 \\ y=-2t+5 \\ z=-3t \end{cases}$
2.5.18.	$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1 \\ 3x+y-z-1=0 \end{cases}$	$D\,(-4,5,-9)$	$\begin{cases} -x+3y+z-2=0 \\ 3x+y-2z+3=0 \end{cases}$
2.5.19.	$\begin{cases} \frac{x^2}{5}+y^2+\frac{z^2}{2}=1 \\ 2x-y+4z=0 \end{cases}$	$E\,(8,-3,6)$	$\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+9}{7}$

2.5.20.	$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=21\\ x-z=4\end{cases}$	$S\,(0,\,0,\,-1)$	$\begin{cases}x=6t+3\\ y=-t+1\\ z=7t-2\end{cases}$
2.5.21.	$\begin{cases}\dfrac{\tilde{o}^2}{16}-\dfrac{\acute{o}^2}{7}+z^2=1\\ 4y+3z+12=0\end{cases}$	$M\,(-2,\,-7,\,1)$	$\begin{cases}x-3=0\\ 2x-3y+4z-2=0\end{cases}$
2.5.22.	$\begin{cases}2x^2+z^2-y+1=0\\ y-z+1=0\end{cases}$	$A\,(0,\,5,\,-5)$	$\dfrac{x+20}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+7}{-9}$
2.5.23.	$\begin{cases}4x^2+3z^2=9\\ y=0\end{cases}$	$D\,(3,\,-4,\,5)$	$\begin{cases}x=2t+3\\ y=-5t\\ z=t-10\end{cases}$
2.5.24.	$\begin{cases}y^2+(z-3)^2=2\\ x=0\end{cases}$	$E\,(-8,\,0,\,0)$	$\begin{cases}x-4y-z-6=0\\ 2x-y+z-2=0\end{cases}$
2.5.25.	$\begin{cases}\dfrac{\acute{o}^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1\\ \tilde{o}=0\end{cases}$	$S\,(7,\,10,\,-4)$	$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+9}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$
2.5.26.	$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1\\ x+y=0\end{cases}$	$M\,(0,\,-7,\,0)$	$\begin{cases}x=4t-2\\ y=2t\\ z=-3t+7\end{cases}$
2.5.27.	$\begin{cases}2y^2-yz+z^2-3z=0\\ x=0\end{cases}$	$A\,(-2,\,1,\,2)$	$\begin{cases}x+y+z-4=0\\ x-y+z-3=0\end{cases}$
2.5.28.	$\begin{cases}\dfrac{z^2}{10}-\dfrac{y^2}{7}=-1\\ x=0\end{cases}$	$D\,(-7,\,-2,\,11)$	$\dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-9}{-4}$
2.5.29.	$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=2z\\ x^2+y^2+z^2=10z\end{cases}$	$E\,(8,\,3,\,-2)$	$\begin{cases}x=-3t\\ y=t+4\\ z=-2t+7\end{cases}$
2.5.30.	$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1\\ 2x-y+4z-2=0\end{cases}$	$S\,(0,\,-8,\,9)$	$\begin{cases}x-2y+4=0\\ 2x-y+5z-37=0\end{cases}$
2.5.31.	$\begin{cases}x^2+y^2+(z-5)^2=9\\ z=4\end{cases}$	$M\,(-1,\,0,\,-3)$	$\dfrac{x+5}{-7}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{4}$
2.5.32.	$\begin{cases}3x^2+6y^2-z=0\\ x+y+z=1\end{cases}$	$A\,(10,\,-1,\,2)$	$\begin{cases}x=5t+7\\ y=t-2\\ z=10\end{cases}$

Покажемо розв'язання завдання 2.5 для лінії $\begin{cases}(\tilde{o}-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25\\ x+\acute{o}-z+2=0\end{cases}$,

точки $M\ (0,5,0)$ і прямої $\begin{cases}x=y\\ z=4\end{cases}$.

Розв'язання.

А) Знайдемо рівняння шуканої конічної поверхні.

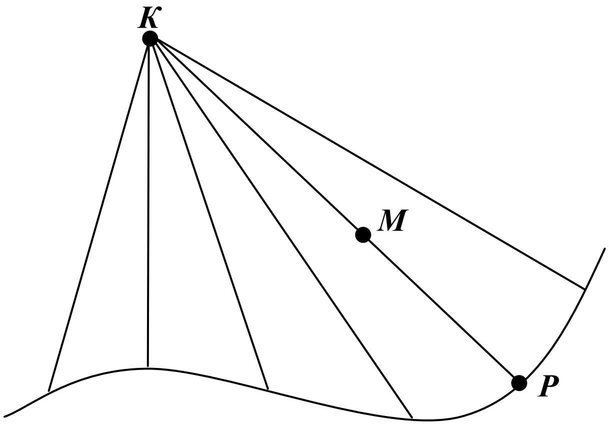


Рис. 2.16

Зробимо рисунок (рис. 2.16).

Нехай *M (X, Y, Z)* – біжуча точка шуканої конічної поверхні, *P (x, y, z)* – її проекція на напрямну конуса, а $\vec{p}\,(m,n,1)$ – вектор, якому колінеарні вектори $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{KP}$.

З колінеарності векторів випливає пропорційність їх координат, тому маємо наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases}\dfrac{X-0}{m}=\dfrac{Y-5}{n}=\dfrac{Z-0}{1}\\[2mm] \dfrac{x-0}{m}=\dfrac{y-5}{n}=\dfrac{z-0}{1}\end{cases}$$

Виразимо з другого рівняння x і y через z і підставимо все в рівняння напрямної:

$$x=mz \quad \text{і} \quad y=nz+5,$$

$$\begin{cases}(mz-1)^2+(nz+3)^2+(z-2)^2=25\\ mz+nz+5-z+2=0\end{cases}.$$

Виразимо з другого рівняння z через m і n: $z=-\dfrac{7}{m+n-1}$ і підставимо в перше рівняння:

$$\left(-\frac{7m}{m+n-1}-1\right)^2+\left(-\frac{7n}{m+n-1}+3\right)^2+\left(-\frac{7}{m+n-1}-2\right)^2=25.$$

Після спрощення маємо $52m^2-4n^2-50mn+36m+92n+10=0$.

Тепер використавши підстановку $m=\dfrac{X}{Z}$ і $n=\dfrac{Y-5}{Z}$, остаточно отримаємо рівняння конічної поверхні: $52X^2-4(Y-5)^2+(92Z-50X)(Y-5)+36XZ+10Z^2=0$.

Б) Знайдемо рівняння шуканої циліндричної поверхні.

Зробимо рисунок (рис. 2.17). Нехай *M (X, Y, Z)* – біжуча точка шуканої циліндричної поверхні, *P (x, y, z)* – її проекція на напрямну циліндра, а $\vec{p}$ – напрямний вектор твірних.

Знайдемо спочатку координати вектора $\vec{p}$, якщо відомо, що твірні паралельні до прямої $\begin{cases} x = y \\ z = 4 \end{cases}$.

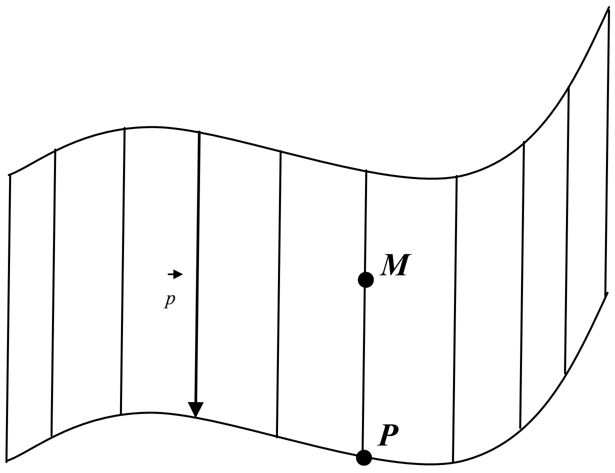


Рис. 2.17

Треба обчислити наступний детермінант $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$. Тобто, за кординати вектора $\vec{p}$ можна взяти або *(-1, -1, 0)*, або *(1, 1, 0)*.

З колінеарності векторів $\vec{p}$ і $\overrightarrow{PM}$ випливає пропорційність їх координат, тому маємо співвідношення:

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{1} = \frac{Z - z}{0}, \text{ тобто}$$

$$\begin{cases} X = x + t \\ Y = y + t \\ Z = z \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} x = X - t \\ y = Y - t \\ z = Z \end{cases}.$$

Врахувавши умову $\begin{cases} (\tilde{o} - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25 \\ x + \acute{o} - z + 2 = 0 \end{cases}$, маємо $\begin{cases} (X - t - 1)^2 + (Y - t + 3)^2 + (Z - 2)^2 = 25 \\ X - t + Y - t - Z + 2 = 0 \end{cases}$. З другого рівняння системи маємо $t = \dfrac{X + Y - Z + 2}{2}$, підставимо в перше рівняння: $\left(X - \dfrac{X + Y - Z + 2}{2} - 1 \right)^2 + \left(Y - \dfrac{X + Y - Z + 2}{2} + 3 \right)^2 + (Z - 2)^2 = 25$ і маємо, після спрощення, рівняння циліндричної поверхні: $(X - Y + Z - 4)^2 + (Y + Z - X + 4)^2 + 4(Z - 2)^2 = 100$.

Відповідь: А) $52X^2 - 4(Y - 5)^2 + (92Z - 50X)(Y - 5) + 36XZ + 10Z^2 = 0$;

Б) $(X - Y + Z - 4)^2 + (Y + Z - X + 4)^2 + 4(Z - 2)^2 = 100$.

Завдання 2.6. *Скласти рівняння тих прямолінійних твірних заданої лінійчастої поверхні, які паралельні до заданої площини.*

Таблиця 2.6

№	*Рівняння поверхні*	*Рівняння площини*
2.6.1.	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$	$2x - y - 2z - 10 = 0$
2.6.2.	$z = 4x^2 - y^2$	$2x + 3y - z - 7 = 0$

2.6.3.	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$	$x-y+5z=0$
2.6.4.	$z^2-9y^2-16x=0$	$3x+y-z+2=0$
2.6.5.	$x^2+\frac{\acute{o}^2}{81}-\frac{z^2}{4}=1$	$3x-y-3z-4=0$
2.6.6.	$\frac{y^2}{25}-x^2=2z$	$5x+2y-z-3=0$
2.6.7.	$\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{25}=1$	$2x-y+4z=0$
2.6.8.	$\frac{x^2}{9}-z^2=12y$	$6x+3y-z+2=0$
2.6.9.	$\frac{\tilde{o}^2}{25}-\frac{\acute{o}^2}{4}+z^2=1$	$9x-2y-z-1=0$
2.6.10.	$\frac{x^2}{4}-9y^2-6z=0$	$2x+y-5z-8=0$
2.6.11.	$x^2+\frac{\acute{o}^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$	$3x-2y+9z=0$
2.6.12.	$25x^2-4z^2=y$	$x+3y-z+22=0$
2.6.13.	$x^2-y^2+\frac{z^2}{25}=1$	$4x-y-3z+5=0$
2.6.14.	$\frac{x^2}{81}-y^2-4z=0$	$4x+y-z-11=0$
2.6.15.	$9x^2+4y^2-z^2=1$	$2x-y+z=0$
2.6.16.	$9y^2-z^2-2x=0$	$6x+7y-z+1=0$
2.6.17.	$36x^2-y^2+25z^2=1$	$3x-2y-4z-8=0$
2.6.18.	$\frac{x^2}{25}-z^2=12y$	$x+9y-z-13=0$
2.6.19.	$\frac{\tilde{o}^2}{4}+\frac{\acute{o}^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$	$x-3y+z=0$
2.6.20.	$25x^2-4z^2=10y$	$4x+8y-z+11=0$
2.6.21.	$\frac{\tilde{o}^2}{4}+\frac{\acute{o}^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$	$x-4y-z-14=0$
2.6.22.	$x^2-z^2=y$	$12x+3y-6z-7=0$
2.6.23.	$x^2-81y^2+9z^2=1$	$2x-6y+9z=0$
2.6.24.	$8x^2-2z^2=3y$	$3x+4z+2=0$
2.6.25.	$x^2-\frac{\acute{o}^2}{4}+\frac{z^2}{64}=1$	$3y-2z-9=0$
2.6.26.	$4y^2-25z^2+10x=0$	$7x+5y-2z-1=0$
2.6.27.	$\frac{\tilde{o}^2}{25}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$	$2x-y+7z=0$
2.6.28.	$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{81}=2y$	$3x+4y-2z+15=0$

2.6.29.	$x^2-36y^2+81z^2=1$	$3x+8y-10=0$
2.6.30.	$y^2-16z^2+8x=0$	$2x+9y-z-4=0$
2.6.31.	$x^2+9y^2-\frac{z^2}{4}=1$	$6x-y+3z=0$
2.6.32.	$9y^2-16z^2=16y$	$x+3y-2z+18=0$

Покажемо розв'язання завдання 2.6 для поверхні $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ і площини $4x-5y-10z-20=0$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння сімейств прямолінійних твірних для заданого однопорожнинного гіперболоїда.

$$\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{4}=1-\frac{y^2}{16},$$

$$\left(\frac{x}{5}-\frac{z}{2}\right)\left(\frac{x}{5}+\frac{z}{2}\right)=\left(1-\frac{y}{4}\right)\left(1+\frac{y}{4}\right),$$ тому маємо

$$d_1:\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{z}{2}=k\left(1-\frac{y}{4}\right)\\ \frac{x}{5}+\frac{z}{2}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{4}\right)\end{cases} \quad \text{і} \quad d_2:\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{z}{2}=m\left(1+\frac{y}{4}\right)\\ \frac{x}{5}+\frac{z}{2}=\frac{1}{m}\left(1-\frac{y}{4}\right)\end{cases}.$$

Для того, щоб пряма була паралельна до площини, необхідно, щоб скалярний добуток напрямного вектора прямої і вектора нормалі до площини дорівнював би нулеві.

Знайдемо координати векторів $\vec{n}$, $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$.

Координати вектора $\vec{n}$ візьмемо з рівняння площини: $\vec{n}(4,-5,-10)$. Для того, щоб знайти координати вектора $\vec{d_1}$, треба обчислити наступний «детермінант»:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{5} & \frac{k}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4k} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{k^2-1}{8k}\cdot\vec{i}-\frac{1}{5}\cdot\vec{j}-\frac{k^2+1}{20k}\cdot\vec{k}.$$

З умови, що $(\vec{d_1},\vec{n})=0$, тобто $\frac{k^2-1}{8k}\cdot 4-\frac{1}{5}\cdot(-5)-\frac{k^2+1}{20k}\cdot(-10)$ $=$ $k+1$ $=$ 0. Звідки $k=-1$.

Аналогічно знайдемо m:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{5} & -\frac{m}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4m} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1-m^2}{8m}\cdot\vec{i}-\frac{1}{5}\cdot\vec{j}+\frac{1+m^2}{20k}\cdot\vec{k}.$$

З умови, що $\left(\vec{d_2},\vec{n}\right)=0$, тобто $\frac{1-m^2}{8m}\cdot 4-\frac{1}{5}\cdot(-5)+\frac{1+m^2}{20m}\cdot(-10) = 1-m = 0.$ Звідки $m=1$.

Отже, маємо наступні прямолінійні твірні, паралельні до заданої площини:

$$d_1:\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{z}{2}=\frac{y}{4}-1\\ \frac{x}{5}+\frac{z}{2}=-\frac{y}{4}-1\end{cases} \quad \text{і} \quad d_2:\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{z}{2}=1+\frac{y}{4}\\ \frac{x}{5}+\frac{z}{2}=1-\frac{y}{4}\end{cases}, \text{ або}$$

$$d_1:\begin{cases}4x-5y-10z+20=0\\ 4x+5y+10z+20=0\end{cases} \quad \text{і} \quad d_2:\begin{cases}4x-5y-10z-20=0\\ 4x+5y+10z-20=0\end{cases}.$$

<u>*Відповідь:*</u> $\begin{cases}4x-5y-10z+20=0\\ 4x+5y+10z+20=0\end{cases}$ і $\begin{cases}4x-5y-10z-20=0\\ 4x+5y+10z-20=0\end{cases}$.

2.3. ВКАЗІВКИ ЩОДО ОФОРМЛЕННЯ ПОЗААУДИТОРНОЇ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ» ТА КРИТЕРІЇ ЇЇ ОЦІНЮВАННЯ

Модульна контрольна робота складається з шести завдань різного типу складності. Кожне завдання інтерпретується у 32 варіантах і наводиться приклад розв’язання кожного завдання.

Для успішного виконання модульної контрольної роботи виконайте наступні кроки:

I. З’ясуйте термін виконання модульної контрольної роботи (встановлює викладач).

II. Визначте свій варіант за номером прізвища у журналі групи. (Наприклад, якщо прізвище студента міститься під номером 5, то він виконує 5-й варіант). Слід зауважити, що варіант роботи для студента (студентів) може бути змінений викладачем.

III. Підпишіть зошит для модульної контрольної роботи на титульній сторінці наступним чином (див. рис. 2.18).

IV. Ознайомтесь перед розв’язуванням варіанта з теоретичними відомостями, поданими на початку кожного розділу та рекомендованою літературою. Продивіться розв’язання типового завдання. З’ясуйте чим умова для вашого варіанта відрізняється від розв’язаного. Проконсультуйтесь, у разі необхідності, із викладачем.

V. Розв’язані завдання записуйте в тому порядку, в якому вони подані у варіанті. Спочатку запишіть умову; потім власне розв’язання, яке може супроводжуватись малюнком і поясненням кроків міркувань та математичних операцій; в кінці обов’язково слід записати відповіді на усі запитання завдання.

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТИ (ПОЗААУДИТОРНА) №__ із аналітичної геометрії студента ____групи очної (заочної) форми навчання фізико-математичного факультету ЖДУ імені Івана Франка (__________прізвище, ім’я та по-батькові______) Тема: «Поверхні другого порядку» Варіант: Термін здачі: ____________ Перевірив: ______________ Бали:
Рис. 2.18

VI Критерії оцінювання модульної контрольної роботи представлено у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7

Вид завдання		**Бали**	**Критерії оцінювання**
Рівень А	Завдання 1	3	1 бал – вірно вибрана підстановка; 2 бали – без помилок звільнилися від ірраціональності
	Завдання 2	4	1 бал – знайдена відстань від центра сфери до площини; 1 бал – обчислено радіус кола; 1 бал – записано рівняння прямої через центр сфери і перпендикулярно до площини; 1 бал – правильно визначено координати сфери
Максимальна кількість балів		**7**	
Рівень В	Завдання 3	7	по 2 бали – за перетин поверхні площиною, паралельною до координатної; 1 бал – інтерпретація результатів
	Завдання 4	7	1 бал – правильна назва поверхні; 2 бали – знайдено центр; 2 бали – записано рівняння дотичної площини; 2 бали – записано рівняння діаметральної площини
Максимальна кількість балів		**14**	
Рівень С	Завдання 5	12	по 1 балу – записана система співвідношень (для конуса і циліндра); по 2 бали – вираження 2-х змінних через третю і підстановка в рівняння напрямної; по 2 бали – записано рівняння відносно біжучих параметрів; по 1 балу – рівняння поверхні
	Завдання 6	11	2 бали – записані сімейства прямолінійних твірних;

			1 бал – координати вектора нормалі площини; по 2 бали – координати напрямного вектора прямих з сімейства; по 1 балу – знайдено значення лічильника в кожному сімействі; по 1 балу – запис кожної прямої як перетин площин
Максимальна кількість балів		**23**	
Загальна кількість балів		**44**	

2.4. ВАРІАНТИ ПМКР З ТЕМИ «ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»

Номер варіанта	***Завдання № 1***	***Завдання № 2***	***Завдання № 3***	***Завдання № 4***	***Завдання № 5***	***Завдання № 6***
В – 1	2.1.1.	2.2.1.	2.3.1.	2.4.1.	2.5.1.	2.6.1.
В – 2	2.1.2.	2.2.2.	2.3.2.	2.4.2.	2.5.2.	2.6.2.
В – 3	2.1.3.	2.2.3.	2.3.3.	2.4.3.	2.5.3.	2.6.3.
В – 4	2.1.4.	2.2.4.	2.3.4.	2.4.4.	2.5.4.	2.6.4.
В – 5	2.1.5.	2.2.5.	2.3.5.	2.4.5.	2.5.5.	2.6.5.
В – 6	2.1.6.	2.2.6.	2.3.6.	2.4.6.	2.5.6.	2.6.6.
В – 7	2.1.7.	2.2.7.	2.3.7.	2.4.7.	2.5.7.	2.6.7.
В – 8	2.1.8.	2.2.8.	2.3.8.	2.4.8.	2.5.8.	2.6.8.
В – 9	2.1.9.	2.2.9.	2.3.9.	2.4.9.	2.5.9.	2.6.9.
В – 10	2.1.10.	2.2.10.	2.3.10.	2.4.10.	2.5.10.	2.6.10.
В – 11	2.1.11.	2.2.11.	2.3.11.	2.4.11.	2.5.11.	2.6.11.
В – 12	2.1.12.	2.2.12.	2.3.12.	2.4.12.	2.5.12.	2.6.12.
В – 13	2.1.13.	2.2.13.	2.3.13.	2.4.13.	2.5.13.	2.6.13.
В – 14	2.1.14.	2.2.14.	2.3.14.	2.4.14.	2.5.14.	2.6.14.
В – 15	2.1.15.	2.2.15.	2.3.15.	2.4.15.	2.5.15.	2.6.15.
В – 16	2.1.16.	2.2.16.	2.3.16.	2.4.16.	2.5.16.	2.6.16.
В – 17	2.1.17.	2.2.17.	2.3.17.	2.4.17.	2.5.17.	2.6.17.
В – 18	2.1.18.	2.2.18.	2.3.18.	2.4.18.	2.5.18.	2.6.18.
В – 19	2.1.19.	2.2.19.	2.3.19.	2.4.19.	2.5.19.	2.6.19.
В – 20	2.1.20.	2.2.20.	2.3.20.	2.4.20.	2.5.20.	2.6.20.
В – 21	2.1.21.	2.2.21.	2.3.21.	2.4.21.	2.5.21.	2.6.21.
В – 22	2.1.22.	2.2.22.	2.3.22.	2.4.22.	2.5.22.	2.6.22.
В – 23	2.1.23.	2.2.23.	2.3.23.	2.4.23.	2.5.23.	2.6.23.
В – 24	2.1.24.	2.2.24.	2.3.24.	2.4.24.	2.5.24.	2.6.24.
В – 25	2.1.25.	2.2.25.	2.3.25.	2.4.25.	2.5.25.	2.6.25.
В – 26	2.1.26.	2.2.26.	2.3.26.	2.4.26.	2.5.26.	2.6.26.
В – 27	2.1.27.	2.2.27.	2.3.27.	2.4.27.	2.5.27.	2.6.27.

В – 28	2.1.28.	2.2.28.	2.3.28.	2.4.28.	2.5.28.	2.6.28.
В – 29	2.1.29.	2.2.29.	2.3.29.	2.4.29.	2.5.29.	2.6.29.
В – 30	2.1.30.	2.2.30.	2.3.30.	2.4.30.	2.5.30.	2.6.30.
В – 31	2.1.31.	2.2.31.	2.3.31.	2.4.31.	2.5.31.	2.6.31.
В – 32	2.1.32.	2.2.32.	2.3.32.	2.4.32.	2.5.32.	2.6.32.

2.5. ДОБІРКА ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТТЯХ

I. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням:

2.1) навколо осі *Oz* кола, що лежить в площині *xOz*, з центром в точці *(4, 0, 0)* і радіусом, рівним *1;*

2.2) навколо осі *Ox* кола, що лежить в площині *xOy*, з центром в точці *(1, 2, 0)* і радіусом, рівним *2;*

2.3) навколо осі *Oy* кола, що лежить в площині *yOz*, з центром в точці *(0, 2, -1)* і радіусом, рівним *1;*

2.4) навколо осі *Oz* еліпса, розташованого в площині *xOz;*

2.5) навколо осі *Ox* еліпса, розташованого в площині *yOz;*

2.6) навколо осі *Oy* еліпса, розташованого в площині *xOy;*

2.7) навколо осі *Oz* гіперболи, розташованої в площині *yOz;*

2.8) навколо осі *Ox* гіперболи, розташованої в площині *xOz;*

2.9) навколо осі *Oy* гіперболи, розташованої в площині *xOy;*

2.10) навколо осі *Oz* параболи, розташованої в площині *xOz* ;

2.11) навколо осі *Ox* параболи, розташованої в площині *xOy;*

2.12) навколо осі *Oy* параболи, розташованої в площині *yOz*.

II. Вивести рівняння геометричного місця точок:

2.13) сума відстаней яких до двох даних точок *(-3, 0, 0)* і *(3, 0, 0)* є величина стала, рівна *8;*

2.14) сума відстаней яких до двох даних точок *(0, -1, 0)* і *(0, 1, 0)* є величина стала, рівна *4;*

2.15) сума відстаней яких до двох даних точок *(0, 0, -2)* і *(0, 0, 2)* є величина стала, рівна *6;*

2.16) різниця відстаней яких до двох даних точок *(-3, 0, 0)* і *(3, 0, 0)* є величина стала, рівна *10;*

2.17) різниця відстаней яких до двох даних точок *(0, -1, 0)* і *(0, 1, 0)* є величина стала, рівна *6;*

2.18) різниця відстаней яких до двох даних точок *(0, 0, -2)* і *(0, 0, 2)* є величина стала, рівна *8;*

2.19) – середин усіх можливих променів, проведених з точки *(8, 6, -1)* до перетину з площиною *xOz*;

2.20) – середин усіх можливих променів, проведених з точки *(0, -3, 2)* до перетину з площиною xOy;

2.21) – середин усіх можливих променів, проведених з точки *(4, 0, -5)* до перетину з площиною yOz;

2.22) рівновіддалених від двох заданих точок *(1, 2, 0), (-4, 2, 1);*

2.23) рівновіддалених від двох заданих точок *(-3, 5, 1), (0, 3, -1);*

2.24) рівновіддалених від двох заданих точок *(4, 2, -7), (-2, 2, 8).*

III. Записати рівняння сфери:

2.25) з центром в точці *O (1, 1, 1)* і радіусом $\sqrt{3}$;

2.26) з центром в точці *B (1, 2, 3)* і радіусом *1*;

2.27) з центром в точці *C (1, 2, 3)* і яка проходить через точку *A (6, -2, 3);*

2.28) з центром в точці *M (6, -8, 3)* і яка дотикається до осі Oz.

IV. Знайти координати центра і радіус сфери:

2.29) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$;

230) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 12z + 3 = 0$;

2.31) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$;

2.32) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;

2.33) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0$;

2.34) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 2z + 41 = 0$;

2.35) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 36x + 24y - 72z - 95 = 0$.

V. Записати канонічне рівняння еліпсоїда, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точку:

2.36) *M (1,* $\sqrt{3}$*, 2)* і перетинає площину yOz за еліпсом $\frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{20} = 1$;

2.37) *M (0,* $\sqrt{7}$*, 1)* і перетинає площину xOz за еліпсом $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1$;

2.38) *M (1,* $\sqrt{2}, \sqrt{2}$) і перетинає площину xOy за еліпсом $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{10} = 1$;

VI. Записати рівняння еліпсоїда, для якого координатні площини даної прямокутної декартової системи координат є площинами симетрії і який проходить через точки:

2.39) *(2, 2, 4), (0, 0, 6), (2, 4, 2);*

2.40) *(0,* $\sqrt{7}$*, 1), (1, -3, 5), (2, 4, 0);*

2.41) *(-1, 5, 2), (2, 3, -1), (1, 0, -3).*

VII. Знайти точки перетину поверхні:

2.42) $x^2 + y^2 = z$ з прямою $x = y = t, \quad z = 4t$;

2.43) $x^2 + y^2 = z$ з прямою $x = y = z + 1$;

2.44) $x^2+y^2=z$ з прямою $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+6}{8}$;

2.45) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ з прямою $\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$;

2.46) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ з прямою $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$;

2.47) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ з прямою $\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$;

2.48) $x^2-4y^2=4z$ з прямою $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$.

VIII. Написати канонічне рівняння:

2.49) однопорожнинного гіперболоїда, якщо поверхня проходить через точку $(\sqrt{5}, 3, 2)$ і перетинає площину xOz за гіперболою $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1$;

2.50) однопорожнинного гіперболоїда, якщо поверхня перетинає площину xOy за колом $x^2+y^2=9$, а площину xOz за гіперболою $\frac{õ^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$;

2.51) двопорожнинного гіперболоїда, якому належать точки $M_1\ (3, 1, 2)$, $M_2\ (2, \sqrt{11}, 3)$, $M_3\ (6, 2, \sqrt{15})$;

2.52) двопорожнинного гіперболоїда, якому належать точки $M_1\ (4, 0, 0)$, $M_2\ (5, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, $M_3\ (4\sqrt{2}, 2, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

2.53) еліптичного параболоїда з вершиною у початку координат, вісь якого співпадає з віссю Ox та якому належать точки $M_1\ (2, -2, 1)$ і $M_2\ (5,4, -1)$;

2.54) еліптичного параболоїда з вершиною у початку координат, вісь якого співпадає з віссю Oy та якому належать точки $M_1\ (1, -2, 1)$ і $M_2\ (-3,-3, 2)$;

IX. Написати рівняння кругової циліндричної поверхні обертання, якщо

2.55) вісь обертання співпадає з віссю Oz, а радіус рівний шести;

2.56) вісь обертання співпадає з віссю Ox, а радіус рівний трьом;

2.57) вісь обертання співпадає з віссю Oy, а радіус рівний чотирьом.

X. Скласти рівняння конічної поверхні:

2.58) з вершиною в точці $A\ (1, 2, 4)$, твірні якої утворюють з площиною $2x + 2y + z = 0$, кут $\varphi = 45^0$;

2.59) яка проходить через усі три координатні осі;

2.60) утвореної обертанням прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$ навколо осі Ox;

2.61) що є геометричним місцем прямих, які проходять через точку $A\ (3, 0, 5)$ і утворюють з площиною xOy кут $\frac{\pi}{4}$.

XI. Знайти проекцію на площину xOy лінії перетину:

2.62) еліпсоїда $\frac{\tilde{o}^2}{16}+\frac{\acute{o}^2}{4}+z^2=1$ з площиною $x+4z-4=0$;

2.63) еліпсоїда $(x-3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=25$ з площиною $2x-y-2z-10=0$;

2.64) еліпсоїда $\frac{\tilde{o}^2}{12}+\frac{\acute{o}^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ з площиною $2x-3y+4z-11=0$;

2.65) однопорожнинного гіперболоїда гіперболоїда $\frac{\tilde{o}^2}{9}+\frac{\acute{o}^2}{4}-z^2=1$ з площиною $4x-3y-12z-6=0$.

XII. Скласти рівняння прямолінійних твірних:

2.66) гіперболічного параболоїда $4x^2 - z^2 = y$ і визначити ті з них, які проходять через точку *M (1, 3, -1);*

2.67) однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1$ і визначити гострий кут між тими, які проходять через точку *(-6, 2 , 4);*

2.68) гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=2z$ і визначити ті з них, які паралельні до площини $6x + 4y - 8z + 1 = 0$;

2.69) гіперболічному параболоїді $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ і визначити ті з них, які паралельні до площини $3x + 2y - 4z = 0$;

2.70) гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$ і визначити гострий кут між тими, які проходять через точку *A (-2, 0, 1)*;

2.71) однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ і визначити гострий кут між тими, які паралельні до площини $x + y - z = 0$.

XIII. Скласти рівняння сфери:

2.72) яка проходить через чотири точки *(1, -2, -1), (-5, 10, -1), (4, 1, 11), (-8, -2, 2);*

2.73) яка проходить через чотири точки *(0, 3, -1), (2, -2, 5), (1, 7, -3), (2, 10, -3);*

2.74) яка проходить через чотири точки *(1, 1, 0), (-3, 5, 8), (3, 0, -8), (5, 2, 3);*

2.75) яка проходить через точку *(0, -3, 1)* і перетинає площину *xOy* по колу $x^2 + y^2 = 16, z = 0$;

2.76) яка проходить через точку *(1, 5, 1)* і через коло $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$, яке розташоване в площині *xOy*;

2.77) яка дотикається прямої $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-6}{4}$ в точці *(1, -4, 6)* і прямої $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-6}$ в точці *(4, -3, 2)*;

2.78) яка має центр в точці *C (4, 5, -2)* і сфера $x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0$ має з нею внутрішній дотик;

2.79) яка дотикається до кожної з координатних площин і площини $2x + y + z -$

$-1 = 0;$

2.80) яка описана навколо тетраедра, одна з вершин якого співпадає з початком координат, а три інші знаходяться в точках: *A (2, 0, 0), B (0, 5, 0), C (0, 0, 3).*

2.81) Знайти проекцію кола $\begin{cases}(x-3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=25\\ 2x-y-2z-10=0\end{cases}$ на площину *xOz*.

2.82) Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомі рівняння її осі $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - 2t$ і координати однієї з її точок *M (1, -2, 1)*.

XIV. Скласти рівняння циліндричної поверхні:

2.83) якщо напрямна лежить в площині *xOy* і має рівняння $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а твірні паралельні до вектора *(1, 0, 1)*;

2.84) якщо напрямна лежить в площині *xOz* і є колом $(x-1)^2 + z^2 = 4$, а твірні паралельні до осі *Oy*;

2.85) для якої напрям твірної задано співвідношенням $m:n:p=5:3:2$ і напрямною є крива $\begin{cases}x^2+y^2=25\\ z=0\end{cases}$;

2.86) твірні якої паралельні до осі *Ox*, а напрямною є крива $\begin{cases}(\tilde{o}-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25\\ x+\acute{o}-z+2=0\end{cases}$;

2.87) твірні якої перпендикулярні до площини напрямної $\begin{cases}x=y^2+z^2\\ x=2z\end{cases}$;

2.88) описаної навколо сфери $x^2+y^2+z^2=1$, і твірні якої утворюють рівні кути з трьома осями координат.

2.89) Дано три паралельні прямі: $x = y = z$, $x + 1 = y = z - 1$, $x - 1 = y + 1 = z - 2$. Скласти рівняння кругового циліндра, який проходить через них.

2.90) Записати рівняння площини, яка паралельна до площини $x - y + z - 5 = 0$ і перетинає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=2y$ за двома прямолінійними твірними. Знайти рівняння цих твірних.

2.91) Довести, що площина $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ за прямолінійними твірними. Скласти їх рівняння.

2.92) Довести, що еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ має спільну точку з площиною $2x - 2y - z - 10 = 0$. Знайти її координати.

ДЛЯ НОТАТОК