1 ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА І ЛІНІЙНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД НИМИ. ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАЦІЙ

Вектором називається напрямлений відрізок. Якщо точка A – початок вектора, а точка B – кінець, то вектор будемо позначити так: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$ (рис. 1.1). Інакше вектор можна позначати символом $\overline{a}$ або $\vec{a}$.

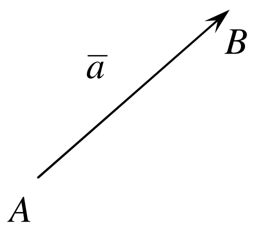
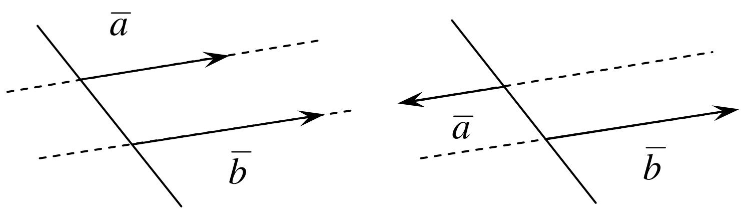


Рисунок 1.1 – Вектор $\overline{AB} = \overline{a}$

Відстань між кінцем і початком вектора $\overline{a}$ будемо називати ***довжиною*** або ***модулем вектора*** й позначати одним із символів: $|\overline{a}|$ або a. Якщо довжина вектора $\overline{a}$ дорівнює нулю, то вектор $\overline{a}$ називають ***нульовим*** і пишуть $\overline{a} = \overline{0}$.

Два ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають ***колінеарними*** ($\overline{a} \parallel \overline{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Два ненульові вектори мають ***однаковий напрямок*** ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ – співспрямлені), якщо вони колінеарні та їх кінці лежать по одну сторону від прямої, що проходить через їх початки (рис. 1.2 а). Якщо ж по різні сторони, то вектори називають ***протилежно спрямованими*** ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ на рис. 1.2 б). Два вектори вважаються ***рівними***, якщо вони мають однакові довжини й однакові напрямки.

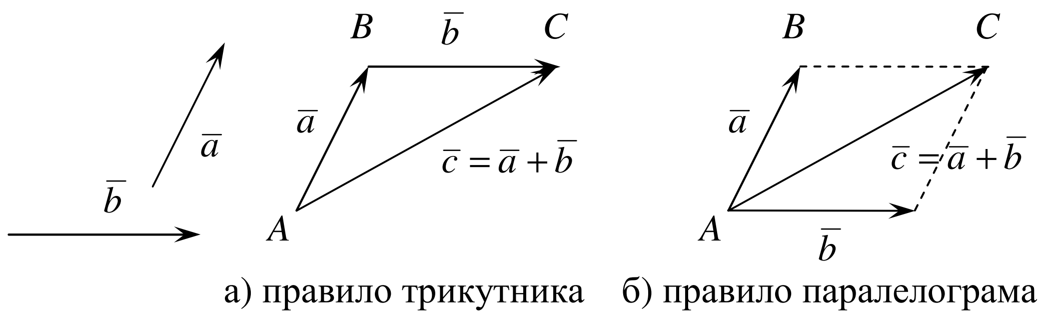


а) б)

Рисунок 1.2 – Однаково та протилежно спрямовані вектори

Під ***лінійними операціями*** над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на число.

Сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який можна отримати в результаті таких дій: з довільної точки A простору відкладаємо вектор $\overline{a}$, а з кінця B цього вектора відкладаємо вектор $\overline{b}$, будемо вважати при цьому, що кінець вектора $\overline{b}$ розташовано в точці C, тоді вектор $\overline{AC}$ і є сумою векторів $\overline{a}$ і



а) правило трикутника б) правило паралелограма

Рисунок 1.3 – Додавання векторів

$\overline{b}$ (рис 1.3 а). У деяких випадках зручніше користуватися правилом паралелограма (рис. 1.3 б): якщо вектори відкласти від однієї точки, то вектор-сума – це діагональ паралелограма, що виходить з початку векторів-доданків.

За правилом трикутника поняття суми легко узагальнюється на випадок будь-якого скінченого числа векторів.

Вектор $\overline{b}$ будемо називати ***протилежним*** вектору $\overline{a}$, якщо $\overline{b}=-\overline{a}$. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають так: $-\overline{a}$. Напрямки векторів $\overline{a}$ й $-\overline{a}$ протилежні, а модулі однакові.

Теорема 1.1 (Властивості операції додавання векторів) Операції додавання векторів притаманні наступні властивості:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (комутативність).
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ (асоціативність).
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}$.
4. $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$, вектор $-\overline{a}$ є протилежним вектору $\overline{a}$.

Різницею $\overline{a}-\overline{b}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який у сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$ (рис. 1.4). Легко отримати правило віднімання векторів, які відкладено від однієї точки. Воно виражається рівністю:

$$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}.$$

Добутком вектора $\overline{a}$ на число α називають вектор, який має довжину $|\alpha|\cdot|\overline{a}|$; напрямок вектора $\alpha\overline{a}$ збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний йому, якщо $\alpha<0$. Якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Теорема 1.2 Операції множення вектора на число притаманні наступні властивості. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ та будь-яких дійсних чисел α і β:

1. $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$.
2. $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.
3. $\alpha(\beta\overline{a})=(\alpha\beta)\overline{a}$.
4. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$.
5. $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$.
6. $0\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot 0=\overline{0}$.
7. $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$.
8. $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.

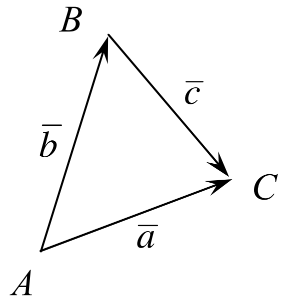


Рисунок 1.4 – Віднімання векторів

Нехай на площині або в просторі зафіксована точка *O*. Будемо називати її ***полюсом***. Вектор $\overline{OM}$ з початком у точці *O* та кінцем у деякій точці *M* площини або простору називається ***радіус-вектором*** точки *M* та позначається $\overline{r}_M$.або $\overline{r}(M)$.

Нехай дано три точки *A*, *B*, *C*, що лежать на одній прямій. Говорять, що точка *C* ***ділить*** напрямлений відрізок *AB* ***у відношенні*** λ, якщо $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$. Очевидно, що точка *C*, яка ділить *AB* у відношенні λ, лежить на відрізку тоді і тільки тоді, коли $\lambda>0$, та поза ним на прямій *AB*, якщо $\lambda<0$.

Теорема 1.3 Якщо точка *C* ділить напрямлений відрізок *AB* у відношенні

$\lambda \neq -1$, то радіус вектор $\overline{r}_C$ точки C виражається через радіус-вектори $\overline{r}_A$ і $\overline{r}_B$ точок A й B наступним чином:

$$\overline{r}_C = \frac{\overline{r}_A + \lambda \overline{r}_B}{1+\lambda}, \ \lambda \neq -1 \qquad (1.1)$$

– формула ділення відрізка в даному відношенні.

Приклади розв'язування задач

1. У трикутнику ABC пряма AM – бісектриса кута BAC, причому точка M належить стороні BC. Виразіть вектор $\overline{AM}$ через $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{c}$ (рисунок 1.5)·

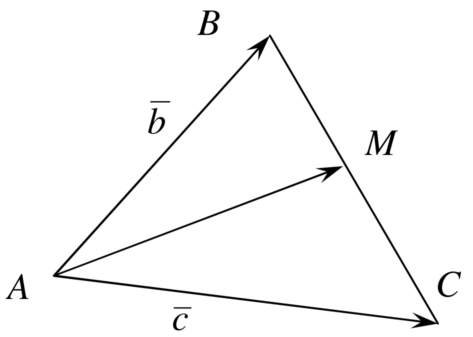


Рисунок 1.5 – Ілюстрація до прикладу 1

Розв'язання:

Вектор $\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо:

$$\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{MC}\right| = \left|\overline{b}\right| : \left|\overline{c}\right|,$$

$$\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{b}\right| : \left(\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|\right).$$

Отже, $\overline{BM} = \dfrac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|}\left(\overline{c} - \overline{b}\right)$. Оскільки $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, то

$$\overline{AM} = \overline{b} + \frac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|}\left(\overline{c} - \overline{b}\right) = \frac{\overline{b}\left|\overline{c}\right| + \overline{c}\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|}.$$

2. Радіус-векторами вершин A, B, C трикутника ABC є $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$ відповідно. Знайдіть радіус-вектор точки M перетину медіан трикутника (рисунок 1.6).

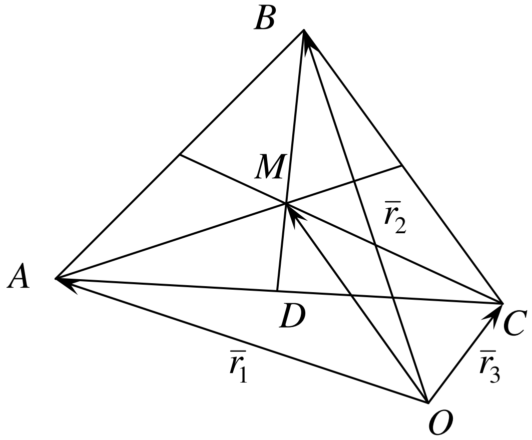


Рисунок 1.6 – Ілюстрація до прикладу 2

Розв'язання:

Оскільки $\overline{BC} = \overline{r}_3 - \overline{r}_2$, $\overline{BD} = \dfrac{\overline{r}_3 - \overline{r}_2}{2}$ (D – середина сторони BC), $\overline{AB} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$,

$$\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \frac{\overline{r}_3 - \overline{r}_2}{2} + \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \frac{\overline{r}_3 + \overline{r}_2 - 2\overline{r}_1}{2}$$

, $\overline{AM} = \dfrac{2}{3}\overline{AD}$, тому $\overline{AM} = \dfrac{\overline{r}_3 + \overline{r}_2 - 2\overline{r}_1}{3}$.

Отже, $\overline{r}_M = \overline{r}_1 + \overline{AM} = \dfrac{\overline{r}_1 + \overline{r}_2 + \overline{r}_3}{3}$.

3. У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{MN}\right| = \left|\overline{NB}\right|$. Виразіть вектор $\overline{CM}$ через $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$.

Розв'язання:

Оскільки $\overline{AB}=\overline{b}-\overline{a}$, то $\overline{AM}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{3}$. Враховуючи, що $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}$, маємо: $\overline{CM}=\overline{a}+\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{3}=\dfrac{2\overline{a}+\overline{b}}{3}$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр. Виразіть вектори $\overline{OC}, \overline{OB}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DA}, \overline{CA}, \overline{CE}, \overline{AE}, \overline{FD}, \overline{FB}$ через вектори $\overline{OA}=\overline{a}, \overline{OB}=\overline{b}$.

2. Точка O – точка перетину медіан (центр тяжіння) трикутника ABC. Виразіть вектори $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{BO}, \overline{AO}, \overline{CO}$ через вектори $\overline{AB}=\overline{a}, \overline{BC}=\overline{b}$.

3. Виразіть вектори-медіани трикутника ABC через вектори $\overline{AB}=\overline{b}, \overline{AC}=\overline{c}$.

4. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно, а точки P, Q поділяють сторону DC на три рівні частини. Виразіть вектори $\overline{CP}, \overline{MB}, \overline{PA}, \overline{QB}, \overline{NQ}, \overline{MN}, \overline{PN}, \overline{QA}$ через вектори $\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}$.

5. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O, точка M – середина ребра AA_1, точка P – середина ребра CC_1. Доведіть, що $\overline{MO}=\overline{OP}$.

6. Точки C_1, C_2 поділяють сторону AB трикутника ABC на три рівні частини, а точка A_1 – сторону BC навпіл, а точки B_1, B_2, B_3 – сторону AC на чотири рівні частини. Виразіть вектори $\overline{AA_1}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}, \overline{B_1C_2}, \overline{B_3A_1}, \overline{BB_3}$ через $\overline{BC_2}=\overline{a}, \overline{BA_1}=\overline{b}$.

7. Доведіть, що середини основ трапеції та точка перетину продовжень її бокових сторін належать одній прямій.

8. Дано паралелограм $ABCD$. O – точка перетину діагоналей, K – середина сторони BC, L – середина сторони DC. Виразіть вектори $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{CA}, \overline{LK}, \overline{LB}, \overline{KD}, \overline{BD}, \overline{OB}, \overline{OA}, \overline{OL}$ через вектори $\overline{AK}$ і $\overline{AL}$.

9. Точки A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA, AB трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{0}$.

10. Точка M_1 – середина відрізка A_1B_1, точка M_2 – середина відрізка A_2B_2. Доведіть векторну рівність $\overline{M_1M_2}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}\right)$.

11. На сторонах AB, BC, AD, DC паралелограма $ABCD$ обрано відповідно точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, що $AA_1=\frac{4}{9}AB,\ BB_1=\frac{4}{13}BC,\ AD_1=\frac{9}{13}AD,$ $DC_1=\frac{5}{9}DC$. Доведіть, що $A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм.

12. На стороні AD та діагоналі AC паралелограма $ABCD$ задано відповідно точки M та N так, що $AM=\frac{1}{5}AD,\ AN=\frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки M, N, B лежать на одній прямій.

13. Дано чотирикутник $KLMN$. Знайдіть у площині цього трикутника таку точку O, щоб виконувалась векторна рівність $\overline{OK}+\overline{OL}+\overline{OM}+\overline{ON}=\overline{0}$.

14. Дано тетраедр $ABCD$, точки M та N є серединами ребер AB та CD. Доведіть, що середини відрізків MC, MD, NA, NB є вершинами паралелограма.

15. На ребрах чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точки: K, L, M, N, P, Q, R так, що $AK:KD=1:3$, $DL:LC=2:1$, $C_1M:MC=5:3$, $B_1N:NC_1=2:7$, $A_1P:PB_1=3:1$, $D_1Q:QC_1=1:1$, $AR:RA_1=1:3$; O – точка перетину його діагоналей. Через вектори а) $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AA_1}$; б) $\overline{CB}, \overline{CD}, \overline{CC_1}$ виразіть вектори $\overline{KL}, \overline{AK}, \overline{LM}, \overline{B_1M}, \overline{MN}, \overline{CN}, \overline{NP}, \overline{A_1P}, \overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{ON}, \overline{OR}, \overline{CO}, \overline{BO}$.