10 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Розглянемо пряму, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 10.1). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ та $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ колінеарні, отже, їх координати пропорційні. З цієї умови отримаємо ***рівняння прямої, що проходить через дві точки***

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (10.1)$$

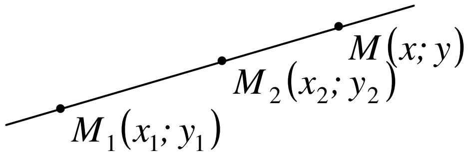

Рисунок 10.1 – Пряма, що проходить через дві точки

Аналогічно, коли дано пряму, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ паралельно вектору $\overline{a}(m,n)$ (рис. 10.2), з умови колінеарності векторів $\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ і $\overline{a}(m,n)$ отримаємо ***канонічне рівняння прямої***

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}. \qquad (10.2)$$

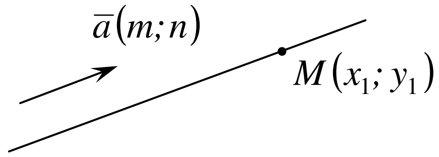

Рисунок 10.2 – Пряма, що проходить через точку паралельно вектору

Вектор $\overline{a}(m,n)$, паралельний прямій, називається ***напрямним вектором*** цієї прямої.

Дорівняємо дроби рівняння (10.2) до деякого параметра $t \in R$, виразимо змінні x, y. Отримаємо ***параметричні рівняння прямої***

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt. \end{cases} \qquad (10.3)$$

Перетворимо рівняння (10.2) наступним чином

$$n(x - x_1) = m(y - y_1),$$

$$nx - my + (-nx_1 + my_1) = 0.$$

Введемо позначення $A = n, B = -m, C = -nx_1 + my_1$. Отримаємо ***загальне рівняння прямої***

$$Ax + By + C = 0. \qquad (10.4)$$

Так як їх скалярний добуток векторів $\overline{a}(m,n)$ і $\overline{n}(A,B)$ дорівнює нулю, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{n}$ перпендикулярні та вектор $\overline{n}(A,B)$ називається ***нормальним вектором прямої*** або ***нормаллю прямої***.

Розглянемо випадок, коли відомі точка $M_1(x_1, y_1)$ та нормаль $\overline{n}(A,B)$ прямої (рис. 10.3). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\overline{n}(A,B)$ та $\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ перпендикулярні, отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю. З цієї умови отримаємо

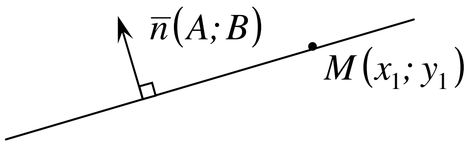

Рисунок 10.3 – Пряма, що проходить через точку перпендикулярно вектору

рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно заданому вектору

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (10.5)$$

Розділимо рівняння (10.4) на довжину вектора нормалі $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$. Отримаємо ***нормальне рівняння прямої***

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \qquad (10.6)$$

Введемо позначення

$$cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

У цих позначеннях рівняння (10.5) приймає вигляд

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + p = 0 \qquad (10.7)$$

та називається ***рівнянням прямої з напрямними косинусами*** (α, β – кути між прямою та осями Ox та Oy відповідно).

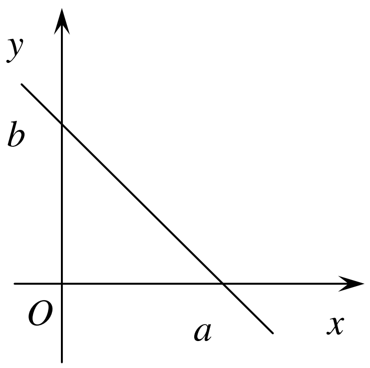

Рисунок 10.4 – Рівняння прямої у відрізках на осях

Розділимо загальне рівняння (10.4) на $-C \neq 0$ та введемо позначення $-\frac{C}{A} = a, -\frac{C}{B} = b$. Отримаємо рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (10.7)$$

Легко бачити, що точки з координатами $(a,0)$ та $(0,b)$ задовольняють рівнянню (10.7). Тому воно називається ***рівнянням прямої у відрізках на осях*** (рис. 10.4).

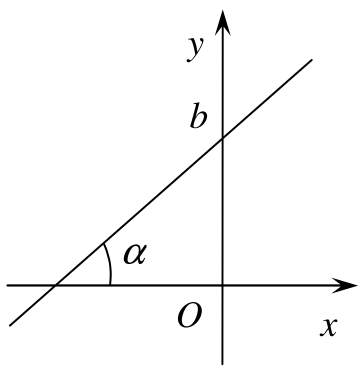

Рисунок 10.5 – Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$

Розділимо загальне рівняння (10.4) на $B \neq 0$ та введемо позначення $-\frac{A}{B} = k, -\frac{C}{B} = b$. Отримаємо рівняння

$$y = kx + b. \qquad (10.8)$$

У ньому k – кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої по відношенню до додатного напряму осі Ox.. Тому рівняння (10.8) називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** (рис. 10.5).

Нехай дано загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$. Тоді ***відстань від точки*** $M_0(x_0, y_0)$ ***до прямої*** обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Таблиця 10.1 – Формули для обчислення кута між двома прямими й умов взаємного розташування двох прямих

Назва формули (умови)	**Види рівнянь прямих**		
	Загальний: $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$	**Канонічний:** $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}$ і $\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}$	**З кутовим коефіцієнтом:** $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$
Кут θ між двома прямими	$cos\,\theta=\frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2\rvert}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}$	$cos\,\theta=\frac{\lvert a_xb_x+a_yb_y\rvert}{\sqrt{(a_x^2+b_x^2)(a_y^2+b_y^2)}}$	$tg\,\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
Умова перпендикулярності	$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$	$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0$	$k_1\cdot k_2=-1$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}$, $\frac{x_1-x_2}{b_x}\neq\frac{y_1-y_2}{b_y}$	$k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$
Умова співпадіння	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}$, $\frac{x_1-x_2}{b_x}=\frac{y_1-y_2}{b_y}$	$k_1=k_2$, $b_1=b_2$

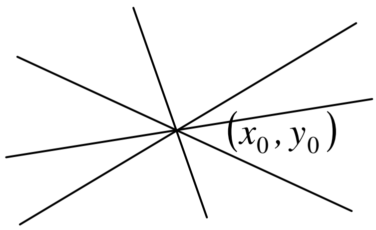

Рисунок 10.5 – Пучок прямих

Сукупність всіх прямих, що проходять через одну і ту саму точку, називають ***пучком прямих***, а їх спільну точку – ***центром пучка***. Якщо (x_0, y_0) – центр пучка, то рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ визначає довільну пряму пучка. Якщо дано дві прямі $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, то всяка пряма, що проходить через точку їх перетину, зобразиться рівнянням:

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0,\ k\in R$$

або

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,\ \alpha,\beta\in R.$$

Кожному значенню параметра пучка відповідає певна пряма пучка.

Приклади розв'язування задач

1. Напишіть рівняння прямої:

а) яка має кутовий коефіцієнт $k=-3$ і такої, що проходить через точку $A(1,-2)$;

б) що проходить через дві точки $A(1;5)$ і $B(2;3)$.

Розв'язання:

а) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k має вигляд (10.8). Підставивши $k=-3$ в рівняння (10.8), одержуємо $y=-3x+b$. Вільний член b знайдемо, підставивши в рівняння координати точки A:

$$-2=-3\cdot 1+b,\ b=1.$$

Тоді рівняння прямої запишемо так $y=-3x+1$.

б) Рівняння прямої за двома точками має вигляд (10.1):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

де $(x_1;y_1)$ – координати першої точки та $(x_2;y_2)$ координати другої.

Підставивши в рівняння (10.1) координати точок $A(1;5)$ та $B(2;3)$, одержуємо:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-5}{3-5}\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}\ \Rightarrow\ -2(x-1)=1(y-5)\ \Rightarrow\ -2x-y+8=0.$$

2. Через точку перетину прямих $2x-y-8=0$ і $4x+3y+4=0$ проведіть пряму, яка проходить через точку $A(4;3)$.

Розв'язання:

Цю задачу розв'яжемо двома способами.

I спосіб. Знайдемо координати точки B – точки перетину прямих $2x-y-8=0$ і $4x+3y+4=0$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x-y-8=0,\\4x+3y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x-8,\\y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\y=-4\end{cases}\Rightarrow B(2;-4).$$

Маємо дві точки: $A(4;3)$ і $B(2;-4)$. Підставивши їх координати у формулу (10.1), одержимо шукане рівняння:

$$\frac{x-4}{2-4}=\frac{y-3}{-4-3}\ \Rightarrow\ -7x+2y+22=0.$$

II спосіб. Усяка пряма, що проходить через точку перетину двох даних прямих, задається рівнянням пучка прямих:

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (10.9)$$

У нашому випадку: $2x-y-8+k(4x+3y+4)=0$. Потрібно тільки підібрати значення параметра k так, щоб пряма пройшла через точку $A(4;3)$, тобто щоб координати цієї точки задовольняли рівнянню прямої. Підставляючи їх у рівняння пучка, одержимо:

$$2\cdot 4-1\cdot 3-8+k(4\cdot 4+3\cdot 3+4)=0\Rightarrow k=\frac{3}{29}.$$

Отже, рівняння прямої буде мати вигляд:

$$2x-y-8+\frac{3}{29}(4x+3y+4)=0\Rightarrow 7x-2y-22=0.$$

3. Складіть загальне рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\overline{a}(-4;4)$ й такої, що проходить:

а) через початок координат;

б) через точку $A(-1;7)$.

Розв'язання:

Загальне рівняння прямої має вигляд (10.4). Якщо пряма перпендикулярна вектору, то його координати можна підставити замість коефіцієнтів при відповідних змінних у загальне рівняння прямої. Підставивши координати вектора $\overline{a}$ в (10.4), одержуємо:

$$4x-4y+C=0.$$

а) Використовуючи умову проходження шуканої прямої через початок координат, одержимо, що коефіцієнт $C=0$, тобто рівняння прямої буде мати вигляд:

$$4x-4y=0 \Rightarrow x-y=0.$$

б) Підставивши координати точки $A(-1;7)$ в рівняння $4x-4y+C=0$, одержимо:

$$4\cdot(-1)-4\cdot 7+C=0 \;\Rightarrow\; C=32,$$

$$4x-4y+32=0 \;\Rightarrow\; x-y+8=0.$$

4. Дано вершини трикутника $A(4;6)$, $B(-4;0)$ і $C(-1;0)$. Складіть рівняння:

а) його сторін;

б) медіани, проведеної з вершини C;

в) бісектриси кута B;

г) висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Розв'язання:

а) Складемо рівняння сторін трикутника за двома точкам, використовуючи формулу (10.1).

$$AB:\ \frac{x-4}{-8}=\frac{y-6}{-6} \;\Rightarrow\; 3x-4y+12=0, \quad BC:\ \frac{x+4}{3}=\frac{y}{0} \;\Rightarrow\; y=0,$$

$$AC:\ \frac{x-4}{-5}=\frac{y-6}{-6} \;\Rightarrow\; -6x+5y-6=0.$$

б) Знайдемо рівняння медіани CM. Точка M – середина сторони AB. Її координати знайдемо за формулами:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2},\; y_M=\frac{y_A+y_B}{2}. \tag{3.5}$$

$$x_M=\frac{4+(-4)}{2}=0,\; y_M=\frac{6+0}{2}.$$

Отже, $M(0,3)$.

Складемо рівняння медіани за двома точками C та M:

$$\frac{x+1}{0+1}=\frac{y-0}{3-0} \Rightarrow 3x-y+3=0.$$

в) Складемо рівняння бісектриси кута B. Для цього знайдемо координати точки P – точки перетину бісектриси із протилежною стороною за формулами:

$$x_P = \frac{m \cdot x_1 + n \cdot x_2}{m+n}, \ y_P = \frac{m \cdot y_1 + n \cdot y_2}{m+n}, \qquad (10.10)$$

де $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – координати кінців протилежної сторони, а m і n – довжини сторін, прилеглих до кута.

Обчислимо довжини сторін AB і BC:

$$m = |AB| = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-6)^2} = 10, \ n = |BC| = \sqrt{(-1+4)^2 + (0-0)^2} = 3.$$

Підставивши ці результати в (10.10), одержимо

$$x_P = \frac{10 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{10+3} = \frac{37}{13}, \ y_P = \frac{10 \cdot 6 + 3 \cdot 0}{10+3} = \frac{60}{13}.$$

Точка P має координати $\left(\frac{37}{13}; \frac{60}{13}\right)$.

Координати точок B і P підставимо у формулу (10.1):

$$BP: \ \frac{x+4}{\frac{37}{13}+4} = \frac{y}{\frac{60}{13}} \quad \Rightarrow \quad 60x - 89y + 240 = 0.$$

г) Знайдемо рівняння висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Приведемо рівняння сторони AC до виду (10.8):

$$y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих, заданих рівнянням (10.8):

$$1 + k_1 k_2 = 0,$$

де k_1, k_2 – кутові коефіцієнти цих прямих. Замість k_1 підставимо кутовий коефіцієнт прямої AC та знайдемо k_2:

$$1 + \frac{6}{5}k_2 = 0, \quad k_2 = -\frac{5}{6}.$$

Рівняння висоти h_B буде мати вигляд:

$$y = -\frac{5}{6}x + b.$$

Вільний член знайдемо, підставивши в це рівняння координати точки B:

$$b = -\frac{10}{3} \text{ та } y = -\frac{5}{6}x - \frac{10}{3}.$$

5. Доведіть, що опуклий чотирикутник $PQRS$, де $P(0;-6)$, $Q(-6;0)$, $R(0;12)$ і $S(12;0)$ – трапеція. Знайдіть її висоту, складіть рівняння середньої лінії й з'ясуєте, чи будуть діагоналі трапеції перпендикулярними.

Розв'язання:

Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні. Для того, щоб визначити чи є наш чотирикутник трапецією, складемо рівняння його сторін. Скористаємося формулою (10.1):

$$PQ:\ \frac{x-0}{-6}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x+y+6=0,$$

$$RS:\ \frac{x-0}{12}=\frac{y-12}{-12}\Rightarrow x+y-12=0.$$

Так як виконуються умови $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{6}{-12}$ (див. табл. 10.1), то $PQ \parallel RS$. Складемо рівняння двох інших сторін.

$$QR:\ \frac{x+6}{6}=\frac{y}{12}\Rightarrow 2x-y+12=0,\quad PS:\ \frac{x}{12}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x-2y-12=0.$$

З рівнянь видно, що ці дві прямі не будуть паралельними. Отже, даний чотирикутник є трапецією.

Складемо рівняння прямої MK – середньої лінії трапеції. Для цього знайдемо середини сторін QR і PS:

$$x_M=\frac{x_Q+x_R}{2}=-3,\ y_M=\frac{y_Q+y_R}{2}=6\ \Rightarrow\ M(-3;6),$$

$$x_K=\frac{x_P+x_S}{2}=6,\ y_K=\frac{y_P+y_S}{2}=-3\ \Rightarrow\ K(6;-3),$$

$$MK:\ \frac{x+3}{9}=\frac{y-6}{-9}\ \Rightarrow\ x+y-3=0.$$

Складемо рівняння діагоналей PR і QS:

$$PR:\ \frac{x-0}{0}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x=0,\ QS:\ \frac{x+6}{6}=\frac{y-0}{0}\Rightarrow y=0.$$

З рівнянь бачимо, що діагоналі трапеції перпендикулярні.

Довжину висоти h знайдемо як відстань від точки (x_0, y_0) до прямої $Ax+By+C=0$ за формулою:

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Підставимо координати точки P, та коефіцієнти рівняння сторони RS у формулу (3.8). Отримаємо:

$$h_P=\frac{|1\cdot 0+1(-6)-12|}{\sqrt{1^2+1^2}}=9\sqrt{2}.$$

6. Обчисліть кут між двома прямими:

1) $y=\frac{1}{2}x+1$ і $y=-3x+2$;

2) $y=-\frac{3}{4}x-4$ і $\begin{cases}x=4+7t,\\ y=-3+2t;\end{cases}$

3) $y=\frac{2}{5}x+3$ і $-8x+3y-12=0$;

4) $2x+20y-3=0$ і $x-\frac{2}{3}y-6=0$;

5) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 1 - 2t', \\ y = -5 + t'. \end{cases}$

Розв'язання:

1) Кут між цими прямими будемо шукати за формулою:

$$tg\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2}, \qquad (10.11)$$

де k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих (див. табл. 10.1). У рівняннях $y = \frac{1}{2}x + 1$ і $y = -3x + 2$: $k_1 = \frac{1}{2}$ і $k_2 = -3$. Підставимо їх в (10.11):

$$tg\varphi = \left| \frac{-3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot (-3)} \right| = 7 \Rightarrow \varphi = arctg7 .$$

2) Приведемо рівняння $\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ до виду (10.8):

$$\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x\text{-}4}{7}, \\ t = \frac{y + 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{2}{7}x - \frac{29}{7} .$$

Користуючись формулою (10.11), одержимо кут між прямими:

$$tg\varphi = \left| \frac{-\frac{3}{4} - \frac{2}{7}}{1 + \frac{3}{4} \cdot (-\frac{2}{7})} \right| = \frac{29}{22} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{29}{22}.$$

3) Приведемо друге рівняння до виду (10.8):

$$-8x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{3}x + 4 .$$

Користуючись формулою (10.11), одержимо кут між прямими:

$$tg\varphi = \left| \frac{\frac{8}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5}} \right| = \frac{36}{31} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{36}{31} .$$

4) Обидва рівняння мають загальний вигляд: $2x + 20y - 3 = 0$ і $x - \frac{2}{3}y - 6 = 0$;

Кут між цими прямими знайдемо за формулою:

$$tg\varphi = \frac{A \cdot B' - A' \cdot B}{A \cdot A' + B \cdot B'}, \qquad (10.12)$$

де A, B й A', B' – координати нормалей даних прямих (коефіцієнти при невідомих у першому й другому рівняннях відповідно).

$$tg\varphi = \frac{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 1\cdot 20}{2\cdot 1 + 20\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{16}{9} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{16}{9}.$$

5) Перетворимо систему параметричних рівнянь прямої l_1 так, щоб утворювалося рівняння, не залежне від t.

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Аналогічно перетворюємо друге:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t', \\ y = -5 + t' \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}.$$

Тоді тангенс кута між прямими дорівнює:

$$tg\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{7}{4}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Визначте, які з точок $A_1(1;-2)$, $A_2(1;1)$ та $A_3(3;-4)$ належать прямій $x + 2y - 3 = 0$.

2. Дано точки $A(-3;6)$, $B(4;-1)$, $C(-3,-5)$, $D(-1,2)$. Складіть рівняння:

1) прямої, що проходить через точки *B* і *C*;
2) прямої, що проходить через точку *A* й утворює кут 135° з віссю *x*;
3) прямої, що проходить через точку *D* перпендикулярно до прямої *BC*;
4) прямої, що проходить через точку *A* паралельно прямій *BC*;
5) прямої, яка проходить через точку *B* і точку, що поділяє відрізок *AD* у відношенні 1:3, рухаючись від точки *A*.

3. Напишіть рівняння прямої, що:

1) має кутовий коефіцієнт $k = -5$ і такої, що проходить через точку $A(1,-2)$;
2) має кутовий коефіцієнт $k = 8$ та відтинає на осі Oy відрізок довжини 2;
3) проходить через дві точки $B(1,5)$ й $C(2,3)$;
4) проходить через точку $D(-2,3)$ й складає з віссю Ox кут 60°;
5) проходить через точку $E(1,7)$ ортогонально вектору $\bar{n}(4,3)$;
6) проходить через точку $F(-2,5)$ та відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини;
7) проходить через точку $K(12,6)$ так, щоб площа трикутника, утвореного нею й координатними осями, дорівнювала 150 кв. од.

4. Знайдіть відрізки, що відтинає пряма $x - 3y + 6 = 0$ на осях координат.

5. Складіть рівняння прямої, що проходить під кутом $\varphi = 150^\circ$ до осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок довжини 3.

6. Під яким кутом до осі Ox нахилена пряма, що проходить через точки $A(-1;\, 3)$ та $B(4;-2)$?

7. Силу прикладено в початку координат. Складові її на координатних осях відповідно дорівнюють 5 і –2. Знайдіть рівняння прямої, вздовж якої напрямлена сила.

8. Через точку $P(-1;3)$ проведіть пряму, перпендикулярну до прямої $4x - 2y + 3 = 0$.

9. Обчисліть відстань від точки P до прямої:

1) $P(-2;1)$, $4x - 3y - 2 = 0$;

2) $P(3;-2)$, $12x + 5y - 3 = 0$;

3) $P(0;1)$, $x - 2y + 1 = 0$.

10. Через точку $P(1;2)$ проведіть пряму, паралельну до прямої $5x + 2y - 11 = 0$.

11. Знайдіть проекцію точки $P(1;-2)$ на пряму $3x - y - 9 = 0$.

12. Промінь світла, що має напрямок прямої $x + 5y = 0$, падає на дзеркало, що визначається рівнянням $2x - y + 5 = 0$. Напишіть рівняння відбитого променя.

13. Через точку перетину прямих $x + 2y - 1 = 0$ і $2x + y - 4 = 0$ проведіть пряму, яка:

1) проходить через точку $M(-1;3)$;

2) паралельна осі Oy;

3) перпендикулярна до прямої $x - 2y + 11 = 0$.

14. Зведіть до нормального вигляду такі рівняння:

1) $4x + 3y + 11 = 0$; 2) $x + 2y - 1 = 0$; 3) $x + 2 = 0$.

15. Дано прямі $l_1 : 2x - 3y + 1 = 0$, $l_2 : 3x - y - 4 = 0$. Знайдіть:

1) відстань від точки $A(2; -1)$ до прямої l_1;

2) кут між прямими l_1 і l_2;

3) значення параметра m, при яких пряма $2x + my + 4 = 0$ перпендикулярна до прямої l_2;

4) значення параметра p, при яких пряма $px - y - p = 0$ збігається з прямою l_2.

16. Дано дві прямі $Ax + By + C = 0$ й $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$. Знайдіть необхідні й достатні умови, при яких прямі:

а) перетинаються;

б) паралельні;

в) збігаються.

17. Установіть, які з пар прямих паралельні, перетинаються, збігаються; у випадку перетину знайдіть спільну точку:

а) $2x + 3y = 0$ і $x = 3 + t,\ y = 2 - t$;

б) $x+2y-15=0$ і $x=5+4t,\ y=-2-2t$;

в) $3x+4y-20=0$ і $x=4-8t,\ y=2+6t$;

г) $x-2y+4=0$ і $-3x+6y+12=0$;

д) $x-5y=0$ і $2x-10y=0$;

е) $2x+3y-8=0$ і $x+y-3=0$.

18. Дано рівняння $x+y-2=0,\ 2x-y+5=0$ двох сторін паралелограма й точка $M(3,1)$ перетину його діагоналей. Напишіть рівняння двох інших сторін паралелограма.

19. Складіть рівняння сторін паралелограма, знаючи координати точки перетину його діагоналей $M(1,6)$, а сторони AB, BC, CD, DA проходять через точки $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$, $S(-5,4)$.

20. Знайдіть координати точки, симетричної точці $P(10,10)$ відносно прямої $3x+4y-20=0$.

21. Дано дві вершини трикутника $A(-6,2)$, $B(-2,2)$ і точка $H(1,-2)$ перетину його висот. Знайдіть координати третьої вершини C.

22. Знайдіть рівняння прямих, що містять катети прямокутного трикутника, площа якого 20 кв. од., якщо відомо, що його гіпотенуза лежить на осі Ox, а вершина прямого кута збігається із точкою $C(1,-4)$.

23. Складіть рівняння прямих, що проходять через точку $A(3,1)$ й нахилені до прямої $2x+3y-1=0$ під кутом 45°.

24. Складіть рівняння бісектрис кутів, утворених при перетині прямих $x=3t,\ y=-t$ і $x-y+8=0$.

25. Складіть рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y=3x+5$ й однієї його вершини $(4,-1)$.

26. Знаючи рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $6x-2y+5=0$ й $x+3y-1=0$, знайдіть рівняння його третьої сторони за умови, що вона проходить через точку $A(1,1)$.

27. Складіть рівняння сторін квадрата, знаючи координати однієї з його вершин $A(-4,5)$ і рівняння діагоналі $7x-y+8=0$.

28. Знайдіть відстань між паралельними прямими:

а) $x-2y+3=0$ і $2x-4y+7=0$;

б) $3x-4y+1=0$ і $x=1+4t,\ y=3t$.

29. Із точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат відновлені перпендикуляри. Знайдіть їх рівняння.

30. Складіть рівняння сторін ромба, знаючи координати його протилежних вершин $A(-3,1)$, $C(5,7)$. Площа ромба $S=25$ кв. од.

31. Трикутник заданий своїми сторонами $x+2y+3=0$, $3x-7y+9=0$ і $5x-3y-11=0$. Перевірте, що його висоти перетинаються в одній точці.

32. Обчисліть площу ромба, знаючи одну його вершину $A(0,-1)$, точку перетину діагоналей $M(4,4)$ і точку $(2,0)$ на стороні AB.

33. У прямокутній декартовій системі координат дано вершини трикутника $A(-6,-3)$, $B(-4,3)$, $C(9,2)$. На внутрішній бісектрисі кута A знайдіть таку точку M, щоб чотирикутник $ABMC$ виявився трапецією.

34. Знаючи рівняння $3x-2y+6=0$ однієї зі сторін кута й рівняння його бісектриси $x-3y+5=0$ складіть рівняння другої сторони.

35. При яких значеннях a і b прямі $ax+by+1=0$, $2x+3y-5=0$ і $x-1=0$ проходять через ту саму точку?

36. У трикутнику ABC відомі: сторона AB: $4x+y-12=0$, висота BH: $5x-4y-15=0$ і висота AH: $2x+2y-9=0$. Запишіть рівняння двох інших сторін і висоти.

37. Через точку перетину прямих $2x+5y-8=0$ і $x-3y+4=0$ проведіть пряму, яка:

а) проходить через початок координат;
б) паралельна осі абсцис;
в) паралельна осі ординат;
г) проходить через точку $(4,3)$.

38. Не обчислюючи координат вершин трикутника, напишіть рівняння прямих, що проходять через ці вершини паралельно протилежним сторонам. Сторони трикутника задано рівняннями: $5x-2y+6=0$, $4x-y+3=0$, $x+3y-7=0$.

39. Знайдіть рівняння прямих, що належать пучку $(x+2y-7)+q(3x-y+5)=0$ й перпендикулярних до кожної з основних прямих пучка.

40. Знайдіть пряму, яка належить одночасно двом пучкам $\alpha_1(x+y-1)+\beta_1(x-1)=0$ і $\alpha_2(2x-3y)+\beta_2(y+1)=0$.

41. Знайдіть рівняння прямої, знаючи, що осі координат відтинають від неї у першому квадранті відрізок, удвічі більше її відстані від початку координат, а площа утвореного таким чином трикутника дорівнює 4,5 кв. одиниць.

42. Знайдіть центр вписаного кола й центр ваги рівнобедреного трикутника, якщо відомі рівняння бічних сторін трикутника $7x-y-9=0$ і $x+y-7=0$ та точка $M(3,-8)$, що лежить на його основі.

43. У рівнобедреному трикутнику відомі рівняння основи $x-2y+3=0$, однієї бічної сторони $4x-y+5=0$ та точка $P(1{,}2;\ 5{,}6)$ на іншій бічній стороні. Обчисліть:

а) відстань бічної сторони від протилежної вершини;
б) координати центру ваги трикутника;
в) площу трикутника.

44. Прямі $3x+4y-30=0$ й $3x-4y+12=0$ дотикаються кола радіуса $R=5$. Обчисліть площу чотирикутника, утвореного цими прямими й радіусами кола, проведеними в точки торкання.

45. Дано координати вершин трикутника ABC: $A(3,-2)$, $B(1,5)$ і $C(-4,3)$.

Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є основи висот трикутника ABC.