2 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ І НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР. ПОНЯТТЯ БАЗИСУ І КООРДИНАТ ВЕКТОРА У БАЗИСІ

Нехай дано n векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ та n дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, тоді вектор $\overline{b} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$ називається ***лінійною комбінацією*** векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ (з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$).

Лінійна комбінація $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$ векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається ***тривіальною***, якщо $\forall\, i = \overline{1,n}\ \alpha_i = 0$.

Лінійна комбінація $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$ векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається ***нульовою***, якщо $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$.

Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається ***лінійно залежною***, якщо хоча б один з її векторів лінійно виражається через інші вектори системи. В противному випадку ця система називається ***лінійно залежною***.

Лема 2.1 Система секторів, яка містить хоча б один нульовий вектор, лінійно залежна.

Лема 2.2 Система векторів, яка містить лінійно залежну підсистему, лінійно залежна.

Лема 2.3 Всяка підсистема лінійно незалежної системи сама лінійно незалежна.

Теорема 2.1 (Критерій лінійної залежності) Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одна нульова, але нетривіальна лінійна комбінація всіх її векторів.

Наслідок (Критерій лінійної незалежності) Система векторів лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли довільна нульова лінійна комбінація її векторів тривіальна.

Теорема 2.2 Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Три вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називаються компланарними, якщо вони паралельні одній площині.

Теорема 2.3 Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок. Три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Векторним простором називається така непуста множина V векторів, у якій довільна лінійна комбінація векторів, що належать цій множині, також належить їй.

Теорема 2.4 Будь-які чотири і більше векторів у просторі геометричних векторів лінійно залежні.

Базисом векторного простору називається довільна впорядкована максимальна лінійно незалежна система його векторів. Інакше кажучи, базис векторного простору V – це така впорядкована система $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ його векторів, якій притаманні такі властивості:

1. система векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ лінійно незалежна;

2. приєднання до системи $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ довільного вектора $\overline{x}$ простору V дає лінійно залежну систему $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n, \overline{x}$.

Число векторів базиса векторного простору V називається розмірністю простору V та позначається $dimV$.

Теорема 2.6 (Про розкладання вектору за базисом) Кожний вектор векторного простору V єдиним чином лінійно виражається через вектори довільного його базиса.

Теорема 2.7 Будь-які два базиси одного векторного простору мають однакову кількість векторів.

Нехай вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ утворюють базис лінійного векторного простору V та для вектора $\overline{x} \in V$ маємо $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n$. Остання рівність називається ***розкладом вектора*** $\overline{x}$ за базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$, а коефіцієнти $x_1, x_2, \dots, x_n$ цього розкладу називаються ***координатами вектора*** $\overline{x}$ у цьому базисі.

Кожний вектор векторного простору єдиним чином визначається своїми координатами в якому-небудь базисі. Це дозволяє (при фіксованому базисі) ототожнювати вектор $\overline{x}$ з рядком $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ своїх координат у даному базисі. При цьому використовують запис $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

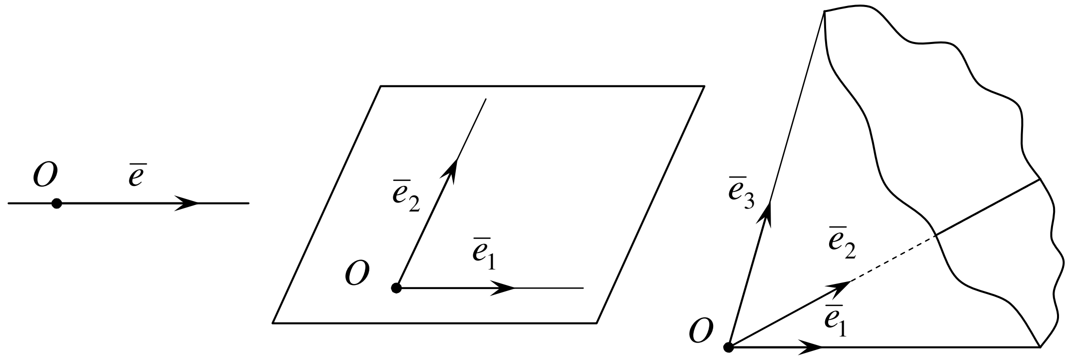
Теорема 2.8 Нехай дано базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ лінійного векторного простору V. Тоді координати суми двох векторів дорівнюють сумі відповідних координат векторів-доданків, а координати добутку вектора на число відповідно дорівнюють добуткам координат вектора на дане число.

Базис векторного простору V називається ***прямокутним***, якщо всі його вектори взаємно перпендикулярні. У противному випадку базис називається ***косокутним***. Прямокутний базис, який складається з одиничних векторів, називається ***ортонормованим*** або ***декартовим***.

Репером (або ***афінним репером***) називається фігура, що складається з деякої точки O, яка називається початком репера, та деякого базиса. Репер називається косокутним, прямокутним, ортонормованим (декартовим) якщо таким є його базис (рис. 2.1).

Координатами точки M відносно афінного репера J називаються координати її радіус-вектора $\overline{r}_M$ відносно базиса цього репера. Нехай $J = \{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ – репер у просторі. Нехай $\overline{r}_M = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$ або $\overline{r}_M = (x_1, x_2, x_3)$. Тоді за означення M має координати x_1, x_2, x_3, що позначається так $M(x_1, x_2, x_3)$. Ясно, що для репера $J = \{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ на площині виникає відповідність між її точками та парами чисел (x_1, x_2), а для репера $J = \{O, \overline{e}\}$ на прямій – відповідність між її точками і числами, так що точка M має на площині дві координати, а на прямій – одну.

Взаємно однозначна відповідність між точками простору (площини чи прямої) і упорядкованими наборами дійсних чисел, називається ***системою координат*** у просторі (на площині чи на прямій). Якщо ця відповідність визначається так, як було описано вище, за допомогою афінного репера J, то ця система координат називається ***афінною системою координат*** у просторі (на площині або прямій), що визначається даним афінним репером J. Якщо репер є прямокутним або декартовим, то ця афінна система координат називається прямокутною або декартовою.



$J=\{O,\bar{e}\}$ $\qquad$ $J=\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ $\qquad$ $J=\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$

Рисунок 2.1 – Афінні репери на прямій, площині та у просторі

Базисні вектори декартової системи координату просторі зазвичай позначають $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, на площині – $\bar{i},\bar{j}$, на прямій – $\bar{i}$.

Прямі, що проходять через початок репера та визначаються векторами репера, називаються осями координат або ***координатними осями***. Початок репера називається також ***початком координат*** (рис. 2.1).

Теорема 2.9 Нехай у деякому афінному репері $J=\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ точки $A(x_A,y_A,z_A)$ та $B(x_B,y_B,z_B)$ є початком та кінцем вектора $\overline{AB}$, тоді $\overline{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$.

Теорема 2.10 (Про ділення відрізка у даному відношенні) Нехай точки $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ і $C(x_C,y_C,z_C)$ лежать на одній прямій. Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні λ, то справедливі співвідношення (координатна форма рівності (1.1)):

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\; y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\; z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Наслідок (Координати середини відрізка) Якщо точка $C(x_C,y_C,z_C)$ є серединою відрізка AB між точками $A(x_A,y_A,z_A)$ та $B(x_B,y_B,z_B)$, то мають місце рівності:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\; y_C=\frac{y_A+y_B}{2},\; z_C=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Тест для самоконтролю

1. $ABCD$ – квадрат. Сума яких із зазначених векторів є нульовим вектором?

А. $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **Б.** $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$ **В.** $\overline{AC}$ і $\overline{DA}$ **Г.** $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$

2. Виберіть правильне твердження:

А. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то точка M ділить відрізок BA у відношенні $(-\lambda)$;

Б. точка M, що належить прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В. якщо точка M – середина відрізка AB, то точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$;

Г. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$.

3. $ABCD$ – квадрат. Укажіть пари рівних векторів.

А. $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ **Б.** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **В.** $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$ **Г.** $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$

4. Точка M – середина відрізка AB, тоді точка M ділить відрізок AB у відношенні:

А. $\lambda = -\frac{1}{2}$ **Б.** $\lambda = \frac{1}{2}$ **В.** $\lambda = 1$ **Г.** $\lambda = 2$

5. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари колінеарних векторів.

А. $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ **Б.** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **В.** $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ **Г.** $\overline{DA}$ і $\overline{BD}$

6. Точка M – середина відрізка AB. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Б.** $\bar{r}_M = \bar{r}_A - \bar{r}_B$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_B$

7. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари не колінеарних векторів.

А. $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **Б.** $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ **В.** $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ **Г.** $\overline{DA}$ і $\overline{BC}$

8. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -\frac{1}{2}$. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A - \bar{r}_B$ **Б.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A + \bar{r}_B$

9. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{3}{2}$. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = \frac{1}{5}(2\bar{r}_A - 3\bar{r}_B)$ **Б.** $\bar{r}_M = \frac{1}{5}(2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B)$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{3}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = \frac{3}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$

10. Виберіть неправильне твердження:

А. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$;

Б. точка M, що лежить на прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В. якщо точка M – середина відрізка AB, то точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 1$;

Г. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то точка M ділить відрізок BA у відношенні $\frac{1}{\lambda}$.

11. Відомо, що $\bar{r}_M = -2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B$. У якому відношенні точка *M* ділить відрізок *AB*?

А. $\frac{3}{2}$ **Б.** $-\frac{2}{3}$ **В.** $-\frac{3}{2}$ **Г.** $\frac{2}{3}$

12. Відомо, що точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ. У якому відношенні ця точка ділить відрізок *BA*?

А. $-\lambda$ **Б.** $\lambda+1$ **В.** $1-\lambda$ **Г.** $\frac{1}{\lambda}$

13. *ABCD* – паралелограм. Точки *M* і *N* ділять навпіл сторони *AB* і *BC* відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно залежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 4

14. *ABCD* – паралелограм. Координатами вектора $\overline{AB}$ в базисі $\{\overline{AD}, \overline{DC}\}$ будуть:

А. $(1,0)$ **Б.** $(-1,0)$ **В.** $(0,-1)$ **Г.** $(0,1)$

15. Вершину *A* тетраедра *OABC* прийнято за полюс, вектори $\overline{AO}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ – за базис. Координатами радіус-вектора центру ваги грані *OAB* тетраедра будуть:

А. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ **Б.** $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ **В.** $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **Г.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

16. При яких значеннях λ і μ вектори $\bar{a}(-1, 2\mu, 3)$ і $\bar{b}(\lambda, 3, -2)$ будуть колінеарні?

А. $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{9}{4}$ **Б.** $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$ **В.** $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{9}{4}$ **Г.** $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$

17. *ABCD* – паралелограм. Точки *M* і *N* ділять навпіл сторони *AB* і *BC* відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно незалежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 4

18. Лінійно незалежною є система векторів ($\bar{a} \neq \bar{0}$) …

А. $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = \bar{0}\}$ **Б.** $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$ **В.** $\{\bar{d}_1 = \bar{a}\}$ **Г.** $\{\bar{d}_1 = \bar{0}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$

19. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = -\frac{1}{2}$. Укажіть координати точки *M*, якщо $A(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А. $(0; 0; 0)$ **Б.** $(-3; -6; -9)$ **В.** $(1; 2; 3)$ **Г.** $(3; 6; 9)$

20. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = \frac{3}{2}$. Укажіть координати точки *A*, якщо $M(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А. $(-4; -8; -12)$ **Б.** $(1; 2; 3)$ **В.** $(4; 8; 12)$ **Г.** $(-2; -4; -6)$

21. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = -\frac{2}{3}$. Укажіть координати точки B, якщо $A(1;\,2;\,3)$, $M(-1;\,-2;\,-3)$.

А. $(-2;\,-4;\,-6)$ **Б.** $(1;\,2;\,3)$ **В.** $(4;\,8;\,12)$ **Г.** $(2;\,4;\,6)$

22. На матеріальну точку діють дві сили $\overline{F_1}=-2\overline{a}$ і $\overline{F_2}=3\overline{b}$, де $\overline{a}(5;-2;\,3)$, $\overline{b}(1;\,0;\,-4)$. Координатами їх рівнодійної будуть

А. $(-7;\,7;\,-18)$ **Б.** $(-7;\,4;\,6)$ **В.** $(-13;\,4;\,6)$ **Г.** $(-7;\,4;\,-18)$

23. Дано вектори $\overline{a}(-1;\,3;\,2)$, $\overline{b}(0;\,1;\,4)$. Координатами вектора $\dfrac{3\overline{a}-2\overline{b}}{4}$ будуть

А. $\left(-\frac{3}{4};\,\frac{7}{4};\,-\frac{1}{2}\right)$ **Б.** $\left(-\frac{3}{4};\,2;\,-\frac{1}{2}\right)$ **В.** $\left(\frac{3}{4};\,\frac{7}{4};\,-\frac{1}{2}\right)$ **Г.** $\left(-\frac{3}{4};\,\frac{7}{4};\,-\frac{1}{4}\right)$

24. Відомо, що $\dim V=3$. Яку максимальну кількість лінійно незалежних векторів можна указати в цьому просторі?

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** 3

Відповіді: 1. А. 2. Г. 3. А. 4. В. 5. Б. 6. В. 7. Б. 8. А. 9. Б. 10. Б. 11. В. 12. Г. 13. Б. 14. Г. 15. А. 16. Г. 17. Б. 18. В. 19. Г. 20. В. 21. Г. 22. Г. 23. А. 24. Г.

Приклади розв'язування задач

1. Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ містить нульовий вектор. З'ясуйте, чи є вектори цієї системи лінійно залежними або лінійно незалежними?

Розв'язання:

Без обмеження загальності міркувань можна припустити, що $\overline{a}_1=\overline{0}$, тоді, $1\cdot\overline{a}_1+0\cdot\overline{a}_2+...+0\cdot\overline{a}_n=\overline{0}$. У цій лінійній комбінації векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ коефіцієнт при першому векторі відмінний від нуля. Отже, за теоремою 2.1 розглянуті вектори лінійно залежні. Таким чином, система лінійно незалежних векторів не може містити нульовий вектор.

Висновок: система, що містить нульовий вектор, лінійно залежна.

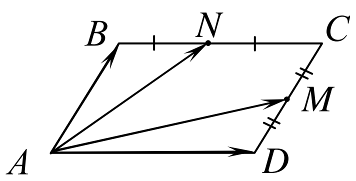


Рисунок 2.1 – Ілюстрація до прикладу 2

2. В паралелограмі $ABCD$ точка M – середина DC, N – середина BC. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$.

Розв'язання:

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, зрозуміло, що вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ лінійно залежні. Знайдемо якунебудь нульову, але нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів.

Виберемо базис $\{\overline{AB},\,\overline{AD}\}$. Розкладемо вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ за базисом, отримаємо

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\overline{AD},\ \overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AD}+\overline{AB},\ \overline{CB}=-\overline{AD}.$$

Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{AM}+\beta\overline{AN}+\gamma\overline{CB}=\overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію знайдені розклади цих векторів за базисом та зберемо коефіцієнти при базисних векторах, отримаємо

$$\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\overline{AB}+\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma\right)\overline{AD}=\overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha+\beta=0,\\ \alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \alpha=\gamma-\frac{1}{2}\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \gamma=-\frac{3}{2}\beta.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, що задовольняє системі, тому покладемо $\beta=-2$. Тоді $\alpha=4$, $\gamma=3$. Таким чином, знайдено нетривіальну нульову комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$: $4\overline{AM}-2\overline{AN}+3\overline{CB}=\overline{0}$.

3. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарні. Чи будуть компланарними вектори $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$: $\overline{l}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{m}=\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{n}=3\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$. Якщо так, то знайдіть їх лінійну залежність.

Розв'язання:

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, зрозуміло, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні. Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{l}+\beta\overline{m}+\gamma\overline{n}=\overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію їх розклади і зберемо коефіцієнти при векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$$(\alpha+\beta+3\gamma)\overline{a}+(\alpha-\beta-\gamma)\overline{b}+(\alpha+\gamma)\overline{c}=\overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0,\\ \alpha-\beta-\gamma=0,\\ \alpha+\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=2\alpha,\\ \gamma=-\alpha.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\alpha=1$. Тоді $\beta=2$, $\gamma=-1$. Таким чином, вектори $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ компланарні та їх лінійну залежність можна записати у вигляді

$$\overline{l}+2\overline{m}-\overline{n}=\overline{0}.$$

4. Знайдіть вектор $\overline{a}=\overline{AB}$, якщо $A(1;3;2)$ і $B(5;8;-1)$.

Розв'язання:

Координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, тому можемо записати: $\overline{r}_A(1;3;2)$, $\overline{r}_B(5;8;-1)$. Знайдемо координати шуканого вектора:

$$\overline{a}=\overline{AB}=\overline{r}_B-\overline{r}_A=(4;\,5;\,-3).$$

5. Знайдіть координати *P* – центру ваги трикутника *ABC*, якщо відомі координати його вершин: *A*(–4; 2), *B*(2; 0), *C*(1; 3).

Розв'язання:

Центр тяжіння трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан, наприклад *CD*:

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=-1,\; y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=1,\; D(-1;\,1).$$

Центр ваги ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника:

$$x_P=\frac{x_C+2x_D}{1+2}=\frac{1+2\cdot(-1)}{3}=-\frac{1}{3},\; y_P=\frac{y_C+2y_D}{1+2}=\frac{3+2\cdot 1}{3}=\frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(-\frac{1}{3};\,\frac{5}{3}\right)$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Виразіть радіус-вектор $\overline{r}_D$ вершини *D* паралелограма *ABCD* через радіус-вектори $\overline{r}_A,\ \overline{r}_B,\ \overline{r}_C$ вершин A, B, C.

2. Як записати умову колінеарності трьох точок A, B, C через радіус-вектори $\overline{r}_A, \overline{r}_B, \overline{r}_C$ цих точок? Перевірте, чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо відомі радіус-вектори цих точок: $\overline{r}_A=2\overline{i}+4\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{r}_B=3\overline{i}+7\overline{j}+5\overline{k}$, $\overline{r}_C=4\overline{i}+10\overline{j}+9\overline{k}$.

3. Доведіть, що відрізки, що сполучають середини протилежних ребер тетраедра, проходять через одну точку та поділяються в ній навпіл.

4. Як розташовані точки A, B, C, якщо їх радіус-вектори $\overline{r}_A, \overline{r}_B, \overline{r}_C$ пов'язані співвідношенням $\alpha\overline{r}_A+\beta\overline{r}_B+\gamma\overline{r}_C=\overline{0}$, причому $\alpha+\beta+\gamma=0$ та $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$?

5. Точки *M* та M_1 – центри тяжіння трикутників *ABC* та $A_1B_1C_1$ відповідно. Доведіть векторну рівність $\overline{MM_1}=\frac{1}{3}\left(\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}\right)$.

6. На сторонах *CA* і *CB* (або на їх продовженнях) трикутника *ABC* дано відповідно точки B_1 і A_1, які поділяють ці сторони у відношеннях $\overline{CB_1}:\overline{B_1A}=\lambda$, $\overline{CA_1}:\overline{A_1B}=\mu$. Доведіть, що при довільному виборі полюсу *O* у просторі радіус-вектор $\overline{r}$ точки перетину прямих AA_1 і BB_1 має вид $\overline{r}=\dfrac{\lambda\overline{r}_A+\mu\overline{r}_B+\overline{r}_C}{\lambda+\mu+1}$, де $\overline{r}_A, \overline{r}_B, \overline{r}_C$ радіус-вектори точок A, B, C.

7. Дано довільний трикутник *ABC* зі сторонами $AB=c,\ BC=a,\ AC=b$. Доведіть, що радіус-вектор $\overline{r}$ точки перетину бісектрис трикутника *ABC* можна виразити через радіус-вектори $\overline{r}_A, \overline{r}_B, \overline{r}_C$ вершин A, B, C таким чином: $\overline{r} = \dfrac{a\overline{r}_A + b\overline{r}_B + c\overline{r}_C}{a+b+c}$.

8. Виразіть вектор $\overline{CD}$ висоти прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) через вектори $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$ та їх довжини a і b.

9. Два подібних трикутника мають спільну вершину $A(3;-6)$ та при ній спільний кут. Знайдіть дві інші вершини більшого трикутника, якщо відомі вершини меншого $B(6{,}2;-3{,}6)$ та $C(5;1)$, а відношення відповідних сторін дорівнює $5:2$.

10. Три вершини A_1, B_1, C_1 паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ належать відповідно сторонам AB, BC, AC трикутника ABC, причому $AA_1 = 0{,}3AB$, $BB_1 = 0{,}6BC$, $AC_1 = 0{,}5AC$. Виразіть радіус-вектор $\overline{r}_{D_1}$ вершини D_1 через радіус-вектори $\overline{r}_A, \overline{r}_B, \overline{r}_C$.

11. На прямій AB знайдіть всі точки M, для яких:
а) $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{BM} : \overline{MA}$, б) $\overline{AM} : \overline{MB} = \left(\overline{BM} : \overline{MA}\right)^{-1}$.

12. Дано відрізки AC і CB. Точки $M \in AB, N \in CD$ ділять їх у відношенні k. Виразіть вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

13. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\lambda = \dfrac{1}{2}$. У якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

14. Точки D, E, F, що лежать на сторонах трикутника ABC, поділяють відповідно сторони BC, CA, AB у відношеннях $\lambda_D = 3,\ \lambda_E = \dfrac{2}{3},\ \lambda_F = \dfrac{1}{2}$. Доведіть, що прямі AD, BE, CF перетинаються в одній точці.

15. Спираючись на розв'язок задачі 1 пункту 1, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{CE}, \overline{AE}, \overline{FB}$; б) $\overline{DA}, \overline{CA}, \overline{FB}$.

16. Спираючись на розв'язок задачі 4 пункту 1, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{PA}, \overline{QB}, \overline{NQ}, \overline{MB}$; б) $\overline{MN}, \overline{PN}, \overline{QA}, \overline{CP}$.

17. Спираючись на розв'язок задачі 8 пункту 1, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{CA}$; б) $\overline{BD}, \overline{OB}, \overline{OA}, \overline{OL}$; в) $\overline{LK}, \overline{LB}, \overline{KD}$.

18. Знайдіть, якщо вона існує лінійну залежність векторів:
а) $\overline{l} = 2\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{m} = -\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}$, $\overline{n} = -\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}$;
б) $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{n} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$;
в) $\overline{l} = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{n} = \overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c}$,
де вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарні.

19. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{a}(1,3,5)$, $\overline{b}(0,4,5)$, $\overline{c}(7,-8,4)$, $\overline{d}(2,-1,3)$.

20. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр – прийнята за початок координат, а вектори $\overline{OA},\overline{OB}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин шестикутника.

21. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно, а точки P,Q поділяють сторону DC на три рівні частини. Приймемо за початок координат точку B, а вектори $\overline{BM}$, $\overline{BP}$, $\overline{BC}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин тетраедра.

22. Дано паралелограм $ABCD$. O – точка перетину діагоналей, K – середина сторони BC, L – середина сторони DC. Приймемо за початок координат точку B, а вектори $\overline{BK}$, $\overline{BO}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин паралелограму, точок O та L.

23. На прямій, що визначається точками $A(1,0,4)$ та $B(3,-1,2)$, знайдіть таку точку C, щоб:
а) точка A лежала між C і B, причому $AC=3AB$;
б) точка B лежала між A і C, причому $AC=3AB$.

24. У якому відношенні площина Oxz ділить відрізок AB, якщо $A(2,-7,1)$, $B(4,5,-2)$.

25. Знайдіть координати точки B, якщо відомо відношення λ, у якому площина Oxz ділить відрізок AB: $\lambda=\frac{1}{2}$, $A(2,-7,1)$.

26. Чи лежать точки $A(4,-1)$, $B(6,-7)$, $C(3,2)$ на одній прямій?

27. Доведіть, що вектори $\overline{a}(1,-1,2)$, $\overline{b}(2,2,-1)$, $\overline{c}(3,7,-7)$ утворюють базис. Знайдіть координати вектора $\overline{d}(2,1,0)$ у цьому базисі.

28. Дано три вектори $\overline{a}(3,-1)$, $\overline{b}(1,-2)$, $\overline{c}(-1,7)$. Визначте коефіцієнти розкладу вектора $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ за базисом $\{\overline{a},\overline{b}\}$.

29. Знайдіть розклад вектора $\overline{c}(11,-6,5)$ за базисом $\overline{p}(3,-2,1)$, $\overline{q}(-1,1,-2)$, $\overline{r}(2,1,-3)$. Які координати має вектор $\overline{c}$ у базисі $\{\overline{q},\overline{r},\overline{p}\}$?

30. Дано вектори $\overline{a}(2,3)$, $\overline{b}(1,-3)$, $\overline{c}(-1,3)$. При якому значенні α вектори $\overline{p}=\overline{a}+\alpha\overline{b}$ та $\overline{q}=\overline{a}+\alpha\overline{c}$ колінеарні?

31. Знайдіть числа α,β,γ, для яких вектори $\alpha\overline{a},\beta\overline{b},\gamma\overline{c},\overline{d}$ утворюють замкнену ламану лінію, де $\overline{a}(3,-2,1)$, $\overline{b}(-1,1,-2)$, $\overline{c}(2,1,-3)$, $\overline{d}(11,-6,5)$.