4 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\,\overline{a}\,\right|\cdot\left|\,\overline{b}\,\right|\cdot cos\,\varphi,$$

де $\varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)$ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Теорема 4.1 (Властивості скалярного добутку) Скалярному добутку притаманні наступні властивості:

1. $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{a}\right)$ (комутативність або симетричність).
2. $\left(\overline{a}_1+\overline{a}_2,\overline{b}\right)=\left(\overline{a}_1,\overline{b}\right)+\left(\overline{a}_2,\overline{b}\right)$.
3. $\left(\lambda\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{a},\lambda\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.
4. $\left|\,\overline{a}\,\right|=\sqrt{\left(\overline{a},\overline{a}\right)}$.
5. $cos\,\varphi=\dfrac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left|\,\overline{a}\,\right|\cdot\left|\,\overline{b}\,\right|}$, $\varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.
6. $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\,\overline{a}\,\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\,\overline{b}\,\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$.
7. $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=0\;\Leftrightarrow\;\overline{a}\perp\overline{b}$.

Теорема 4.2 (Про обчислення скалярного добутку в декартовому базисі) Скалярний добуток двох векторів, заданих у декартовому базисі, дорівнює сумі добутків відповідних координат співмножників, тобто для $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$, $\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$:

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (4.1)$$

Наслідок 4.1 Необхідною та достатньою умовою ортогональності векторів $\overline{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ та $\overline{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ у декартовому базисі є рівність:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \qquad (4.2)$$

Наслідок 4.2 Довжина вектора $\overline{a}=\left(x,y,z\right)$ у декартовому базисі обчислюється за формулою:

$$\left|\,\overline{a}\,\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (4.3)$$

Наслідок 4.3 У декартовому базисі кут між двома векторами $\overline{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ та $\overline{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ визначається за формулою:

$$cos\,\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (4.4)$$

Наслідок 4.4 Декартові координати вектора $\overline{a}=\left(x,y,z\right)$ дорівнюють скалярним добуткам цього вектора на одиничні вектори базису:

$$x=\left(\overline{x},\overline{i}\right),\;\; y=\left(\overline{y},\overline{j}\right),\;\; z=\left(\overline{z},\overline{k}\right).$$

Наслідок 4.5 Декартові координати вектора $\overline{a}=\left(x,y,z\right)$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі декартової системи координат:

$$x=np_{\overline{i}}\overline{a},\;\; y=np_{\overline{j}}\overline{a},\;\; z=np_{\overline{k}}\overline{a}.$$

Наслідок 4.6 Напрямні косинуси вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ у декартовому базисі визначаються за формулами:

$$cos\angle(\bar{a},\bar{i}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, cos\angle(\bar{a},\bar{j}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$cos\angle(\bar{a},\bar{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Задано вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 8\bar{j} + 4\bar{k}$ і $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання:

Скористаємось формулою (4.2):

$$4m + 8m - 28 = 0,\ m = \frac{7}{3}.$$

Відповідь: $m = \frac{7}{3}$.

2. Знайдіть кут між векторами $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ і $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис.

Розв'язання:

Скористаємось формулою (4.4):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{2}{7},\ \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Відповідь: $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

3. Знайдіть орт вектора $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$.

Розв'язання:

Знайдемо довжину вектора $\bar{a}$ за формулою (4.3): $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$.

Оскільки орт вектора $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, то $\bar{a}_0 = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$.

Відповідь: $\bar{a}_0\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

4. До точки прикладені дві сили $\bar{P}$ і $\bar{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\bar{P}| = 7$, $|\bar{Q}| = 4$. Знайдіть величину рівнодійної сили $\bar{R}$.

Розв'язання:

Оскільки $\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$, то

$$|\bar{R}| = \sqrt{\bar{R}^2} = \sqrt{(\bar{P} + \bar{Q})^2} = \sqrt{\bar{P}^2 + 2\bar{P}\bar{Q} + \bar{Q}^2} =$$

$$=\sqrt{\left|\overline{P}\right|^2+2\left|\overline{P}\right|\cdot\left|\overline{Q}\right|\cdot\cos120^\circ+\left|\overline{Q}\right|^2}=\sqrt{37}.$$

Відповідь: $\left|\overline{R}\right|=\sqrt{37}$.

5. Обчисліть роботу, що виконується силою $\overline{F}=(3;-5;2)$, коли точка прикладання переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}(2,-5,7)$.

Розв'язування:

Якщо вектор зображає силу $\overline{F}$, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A=(\overline{F},\overline{S})=3\cdot2+(-5)\cdot(-5)+2\cdot7=45.$$

Відповідь: $A=45$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$, обчисліть: 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\overline{a}^2$; 3) $\overline{b}^2$; 4) $(\overline{a}+\overline{b})^2$; 5) $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$; 6) $(\overline{a}-\overline{b})^2$; 7) $(3\overline{a}+2\overline{b})^2$.

2. Дано, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=5$. Визначте, при якому значенні α вектори $\overline{a}+\alpha\overline{b}$ і $\overline{a}-\alpha\overline{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

3. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\overline{c}$ утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=5$, $\left|\overline{c}\right|=8$, обчисліть: 1) $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$; 2) $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})^2$; 3) $(\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c})^2$.

4. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\overline{b}\right|=1$, обчисліть кут між векторами $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-\overline{b}$.

5. Знайдіть кут між векторами $\overline{a}=2\overline{e}_1-\overline{e}_2+2\overline{e}_3$ та $\overline{b}=4\overline{e}_1+\overline{e}_2-3\overline{e}_3$, якщо $\left|\overline{e}_1\right|=1$, $\left|\overline{e}_2\right|=2$, $\left|\overline{e}_3\right|=3$, $\angle(\overline{e}_1,\overline{e}_2)=\angle(\overline{e}_1,\overline{e}_3)=60^\circ$, $\angle(\overline{e}_2,\overline{e}_2)=90^\circ$.

6. Дано вектори $\overline{a}(4;-2;-4)$, $\overline{b}(6;-3;2)$. Обчисліть: 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\sqrt{\overline{a}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{b}^2}$; 4) $(2\overline{a}-3\overline{b})(\overline{a}+2\overline{b})$; 5) $(\overline{a}+\overline{b})^2$; 6) $(\overline{a}-\overline{b})^2$.

7. Дано точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ і $C(0;1;-5)$. Обчисліть:
1) $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

8. Який кут утворюють одиничні вектори $\overline{s}$ та $\overline{t}$, якщо відомо, що вектори $\overline{p}=\overline{s}+2\overline{t}$ та $\overline{q}=5\overline{s}-4\overline{t}$ взаємно перпендикулярні?

9. Чи рівносильні рівняння $\overline{a}=\overline{b}$ та $\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}$?

10. При якому взаємному розташуванні ненульових векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ справедлива рівність $(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}=(\overline{b}\cdot\overline{c})\cdot\overline{a}$?

11. Якій умові повинні задовольняти вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, щоб мала місце рівність

$|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$?

12. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC дорівнює c. Обчисліть суму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

13. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE, CF. Обчисліть $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}$.

14. Доведіть, що у трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ.

15. Знайдіть суму квадратів медіан трикутника, якщо сума квадратів його сторін дорівнює k.

16. Знайдіть кути, що утворює діагональ куба з діагоналями якої-небудь його грані.

17. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(2;\,1;\,0)$ і $\bar{b}(0;\,-2;\,1)$.

18. Знайдіть таке число λ, щоб вектори $\bar{a}=\bar{i}+5\bar{j}-6\bar{k},\ \bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\lambda\bar{k}$ були ортогональні.

19. Знайдіть $np_{\bar{b}}\bar{a}$ та $np_{\bar{a}}\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}(2,1),\ \bar{b}(1,1)$; 2) $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j},\ \bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}$; 3) $\bar{a}(4,-3,2),\ \bar{b}(1,1,1)$;

4) $\bar{a}=-4\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k},\ \bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$.

20. Дано два вектори $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k},\ \bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, що задовольняє умовам: $\bar{x}\cdot\bar{k}=0$, $\bar{x}\cdot\bar{a}=1$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=4$.

21. Знайдіть вектор $\bar{x}$, який колінеарний вектору $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$ та задовольняє умову $\bar{x}\cdot\bar{a}=3$.

22. Дано три вектори $\bar{a}(1,2,-3),\ \bar{b}(5,1,2),\ \bar{c}(-3,0,1)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, що задовольняє одночасно трьом умовам: $\bar{x}\cdot\bar{a}=-4$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=5$, $\bar{x}\cdot\bar{c}=2$.

23. Дано два вектори $\bar{a}(8,4,1),\ \bar{b}(2,-2,1)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, компланарний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$, ортогональний вектору $\bar{a}$, рівний йому за довжиною та такий, що утворює з вектором $\bar{b}$ тупий кут.

24. Промінь утворює з векторами $\bar{i}$ та $\bar{j}$ кути, що дорівнюють відповідно $\dfrac{\pi}{4}$ та $\dfrac{\pi}{3}$, а з вектором $\bar{k}$ – тупий кут. Знайдіть цей кут.

25. Обчисліть координати вектора, довжина якого дорівнює 8, знаючи, що він утворює з вектором $\bar{i}$ кут $\dfrac{\pi}{4}$, а з вектором $\bar{k}$ – кут $\dfrac{\pi}{3}$, а з вектором $\bar{j}$ – гострий кут.

26. Дано вектори $\bar{a}(2;\,3;\,0)$, $\bar{b}(-1;\,2;\,2)$, $\bar{c}(3;\,1;\,0)$. Знайдіть:

1) $(3\bar{a}-4\bar{b})+(\bar{b}-3\bar{c})+(2\bar{c}-\bar{a})$; 2) $(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})(-2\bar{a}-3\bar{b})$; 3) $|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}|$;

4) $\angle(\bar{a},\,\bar{i})$; 5) $\angle(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c},\,-2\bar{a}-3\bar{b})$;

27. Обчисліть проекцію вектора $\bar{a}=5\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$ на вісь, що визначається векторром $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

28. Дано три вектори $\bar{a}(7, -6, 1)$, $\bar{b}(2, -3, -6)$ і $\bar{c}(3, -4, 12)$. Обчисліть $np_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c})$ та знайдіть $\overline{np_{\bar{b}}}(\bar{a}+\bar{c})$.

29. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$, кут між якими α. Знайдіть величину рівнодійної.