# 5 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Трійка векторів називається ***упорядкованою***, якщо задано порядок слідування векторів один за одним. Тобто запис $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ означає, що в цій трійці вектор $\overline{c}$ слідує за вектором $\overline{b}$, який слідує за вектором $\overline{a}$.

Упорядкована трійка некомпланарних векторів у просторі називається ***додатно орієнтованою*** (або ***правою трійкою***), якщо найкоротший поворот від першого вектора трійки до другого видно з кінця третього вектора таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 5.1). У противному випадку (рис. 5.2) (тобто коли поворот видно таким, що відбувається за годинниковою стрілкою) трійка називається ***лівою*** (або ***від'ємно орієнтованою***).

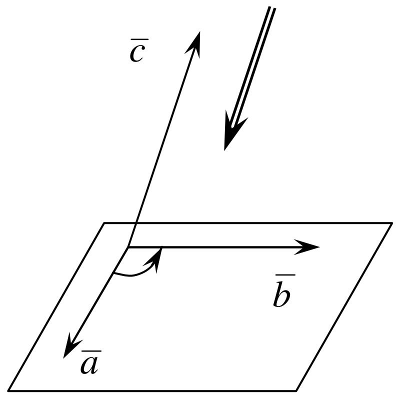


Рисунок 5.1 – Права трійка $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$

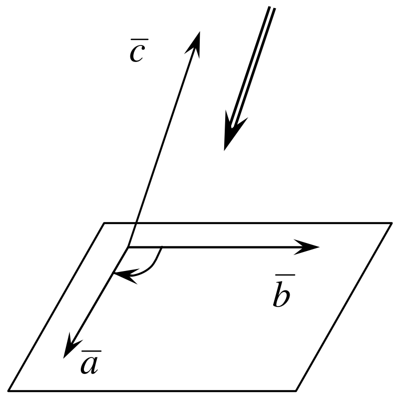


Рисунок 5.2 – Ліва трійка $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$

**Лема (Властивості орієнтованих трійок)**

1. При множенні одного з векторів орієнтованої трійки на додатне число її орієнтація не змінюється, а при множенні на від'ємне – змінюється на протилежну.
2. При заміні одного з векторів трійки на протилежний її орієнтація змінюється на протилежну.
3. При перестановці довільних двох векторів трійки її орієнтація змінюється на протилежну.

Назвемо заміну порядку слідування векторів упорядкованої трійки векторів ***циклічною***, якщо при цій заміні номери всіх векторів , крім першого, зменшуються (збільшуються) на одиницю, а перший (останній) вектор становиться останнім (першим).

**Наслідок (Про збереження орієнтації при циклічній заміні)** При циклічній заміні порядку векторів трійки її орієнтація не змінюється.

Нехай дано два неколінеарних вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$. ***Векторним добутком*** векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який задовольняє наступним умовам:

1. вектор $\overline{c}$ перпендикулярний векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$;
2. довжина вектора $\overline{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, як на сторонах ($|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot sin\alpha,\ \alpha = \angle(\overline{a},\overline{b})$);
3. вектор $\overline{c}$ спрямований так, що трійка векторів $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ – права.

Векторний добуток колінеарних векторів за означенням вважається таким, що дорівнює $\overline{0}$.

Векторний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначається так: $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$ або $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Нехай $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – правий декартовий базис у просторі. Тоді $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$. Дійсно, паралелограм, побудований на векторах $\overline{i}, \overline{j}$, є квадратом зі стороною, яка дорівнює одиниці. Тому вектор $\overline{i} \times \overline{j}$ є одиничним вектором, перпендикулярним площині векторів $\overline{i}, \overline{j}$ та спрямованим так, щоб трійка векторів $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{i} \times \overline{j}\}$ була правою. Це означає, що $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$. Аналогічно можна довести, що $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$, $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$.

**Теорема (Про обчислення векторного добутку)** Нехай дано два вектори $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ своїми декартовими координатами у деякому декартовому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Тоді їх векторний добуток можна представити у вигляді визначника:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{5.1}$$

**Наслідок (Таблиця векторних добутків векторів декартового базису)** Нехай $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – декартовий базис у просторі. Тоді таблиця векторних добутків може бути представлена у вигляді:

| 2-й вектор<br>1-й вектор | $\overline{i}$ | $\overline{j}$ | $\overline{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\overline{i}$ | $\overline{0}$ | $\overline{k}$ | $-\overline{j}$ |
| $\overline{j}$ | $-\overline{k}$ | $\overline{0}$ | $\overline{i}$ |
| $\overline{k}$ | $\overline{j}$ | $-\overline{i}$ | $\overline{0}$ |

**Теорема (Властивості векторного добутку)** Векторному добутку двох векторів притаманні наступні властивості:

1. $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$.
2. $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \| \overline{b}$.
3. $[\lambda\overline{a}, \overline{b}] = \lambda[\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \lambda\overline{b}]$.
4. $[\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{b}] = [\overline{a}_1, \overline{b}] + [\overline{a}_2, \overline{b}]$, $[\overline{a}, \overline{b}_1 + \overline{b}_2] = [\overline{a}, \overline{b}_1] + [\overline{a}, \overline{b}_2]$.

Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, після чого отриманий вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ помножимо векторно на вектор $\overline{c}$. В результаті отримаємо вектор – ***подвійний векторний добуток*** $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$. Помножуючи вектор $\overline{a}$ векторно на $\overline{b} \times \overline{c}$, отримаємо подвійний векторний добуток $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$.

В загальному випадку $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} \neq \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$.

**Теорема** Мають місце тотожності:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}=\bar{b}\left(\bar{a},\,\bar{c}\right)-\bar{a}\left(\bar{b},\,\bar{c}\right),$$
$$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}\left(\bar{a},\,\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a},\,\bar{b}\right).$$

**Теорема (Тотожність Якобі)** Має місце тотожність:

$$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)+\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)+\bar{c}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\bar{0}.$$

***Приклади розв'язування задач***

**1.** Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(1;1;1)$, $\bar{b}(3;2;1)$, якщо координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задано в правому ортонормованому базисі $\bar{i},\ \bar{j},\bar{k}$ .

*Розв'язання:*

У випадку правого ортонормованого базису $\bar{i},\ \bar{j},\bar{k}$ має місце формула (5.1), згідно з якою:

$$\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}.$$

Таким чином, $\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]=(-1;\,2;\,-1)$. Визначимо модуль вектора $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}\ \text{(кв. од)}.$$

*Відповідь:* $S=\sqrt{6}$ кв. од.

**2.** Силу $\bar{P}=(2;\,-4;\,5)$ прикладено до точки $A(2;\,-1;\,1)$. Визначте момент цієї сили відносно початку координат.

*Розв'язання:*

Якщо вектор $\bar{f}$ зображає силу, що прикладена в деякій точці *M*, а вектор $\bar{S}$ виходить з деякої точки *B* в точку *M*, то вектор $\left[\bar{S},\ \bar{f}\right]=\overline{M}_B$ є моментом сили $\bar{f}$ відносно точки *B*, тут $\left[\bar{S},\ \bar{f}\right]$ – векторний добуток векторів $\bar{S}$ і $\bar{f}$ .

Оскільки вектор $\overline{OA}(2;\,-1;\,2)$, то моментом сили $\bar{P}$ відносно початку координат буде:

$$\overline{M}_O=\left[\overline{OA},\ \bar{P}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=3\bar{i}-6\bar{j}-6\bar{k}.$$

*Відповідь:* $\overline{M}_O(3,\,-6,\,-6)$.

**3.** Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$ , якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$, $\angle\left(\bar{a},\,\bar{b}\right)=30^\circ$.

*Розв'язання:*

За властивостями векторного добутку:

$$\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)=\bar{a}\times(3\bar{a})+\left(3\bar{b}\right)\times(3\bar{a})+\bar{a}\times\bar{b}+\left(3\bar{b}\right)\times\bar{b}=$$

$$= 3 \cdot \bar{0} - 9\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{b} + 3 \cdot \bar{0} = -8\bar{a} \times \bar{b}.$$

Отже,

$$S = \left| -8\bar{a} \times \bar{b} \right| = 8\left| \bar{a} \times \bar{b} \right| = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ (кв. од.)}.$$

*Відповідь:* $S = 4$ кв. од.

### *Задачі для самостійного розв'язування*

1. Дано три вектори $\bar{a}(7, -6, 1)$, $\bar{b}(2, -3, -6)$ і $\bar{c}(3, -4, 12)$. Обчисліть $np_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c})$ та знайдіть $\overline{np_{\bar{b}}}(\bar{a} + \bar{c})$.
2. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$, кут між якими $\alpha$. Знайдіть величину рівнодійної.
3. Дано точки $A(3, 1, 2)$, $B(4, 0, 1)$, $C(4, 5, 7)$. Обчисліть площу трикутника $ABC$.
4. Знайдіть орт вектора, перпендикулярного до векторів $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ та $\bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}$.
5. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}$ і $\bar{b} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.
6. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, обчисліть: 1) $(\bar{a} \times \bar{b})^2$; 2) $((2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b}))^2$; 3) $((\bar{a} + 3\bar{b}) \times (3\bar{a} - \bar{b}))^2$.
7. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, обчисліть: 1) $|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|$; 2) $|(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})|$.
8. Знаючи вектори $\overline{AB}(-3; -2; 6)$ та $\overline{BC}(-2; 4; 4)$, обчисліть довжину висоти $\overline{AD}$ трикутника $ABC$.
9. Обчисліть відстань між паралельними сторонами паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overline{AB}(6; 0; 2)$ та $\overline{AC}(1{,}5; 2; 1)$.
10. Переконайтеся, що вектори $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ та $\bar{b} = -2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, відкладені від однієї точки, можна взяти у якості ребер куба, та знайдіть третє ребро, що виходить з тієї ж вершини.
11. Дано два вектори $\bar{a}(2, 3, -1)$, $\bar{b}(1, -1, 3)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, знаючи, що він ортогональний цим векторам та задовольняє умову: $\bar{x} \cdot (2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}) = 51$.
12. Вектор $\bar{x}$ ортогональний векторам $\bar{a}(2, 3, -1)$, $\bar{b}(1, -1, 3)$, утворює з вектором $\bar{i}$ тупий кут. Знайдіть координати вектора $\bar{x}$, якщо $|\bar{x}| = \sqrt{138}$
13. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1\ 2; -1)$ і $C(3; 2; 1)$. Знайдіть координати векторних добутків: 1) $\overline{AB} \times \overline{BC}$; 2) $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.
14. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB} = 6\bar{a} - 3\bar{b}$

та $\overline{AD} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$ , якщо $|\overline{a}| = 4,\ |\overline{b}| = 5,\ \angle(\overline{a}, \overline{b}) = 30^\circ$.

**15.** Доведіть, що якщо $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c} \times \overline{d},\ \overline{a} \times \overline{c} = \overline{b} \times \overline{d}$ , то вектори $\overline{a} - \overline{d}$ та $\overline{b} - \overline{c}$ колінеарні.

**16.** Обчисліть $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$ , якщо

1) $\overline{a}(1,\ 2,\ -1),\ \overline{b}(2, 1, -2),\ \overline{c}(3, 1, -1)$; 2) $\overline{a}(3,\ 2,\ 1),\ \overline{b}(0, 1, -1),\ \overline{c}(-1, 1, 1)$.

**17.** Обчисліть $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} - \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$, якщо $\overline{a}(1, -1, 3),\ \overline{b}(-2, 2, 1),\ \overline{c}(3, -2, 5)$.

**18.** Доведіть, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні, якщо виконується умова $\overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{c} + \overline{c} \times \overline{a} = \overline{0}$.

**19.** У трикутнику $ABC$ через точку $H$ на стороні $AC$ проведено пряму, паралельну $BC$ до перетину зі стороною $AB$ у точці $M$. Площа трикутника $BHM$ у 4,5 рази менша площі трикутника $ABC$. Знайдіть відношення $AM : MB$.

**20.** Площа трапеції $ABCD$ дорівнює $S$, відношення довжин основ $AD : BC = 3 : 1$. Відрізок $MN$ паралельний стороні $CD$ та перетинає сторону $AB$. При цьому $AM : BN = 3 : 2$, $MN : CD = 1 : 3$, відрізок $AM$ паралельний $BN$. Знайдіть площу трикутника $BNC$.

**21.** Знайдіть вектор $\overline{x}$ з рівняння $\overline{a} \times \overline{x} = \overline{b}$, де $\overline{a}$ та $\overline{b}$ – відомі взаємо ортогональні вектори.