6 МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Мішаним добутком $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$ векторного добутку перших двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$.

Теорема 6.1 (Геометричний смисл мішаного добутку) Мішаний добуток трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ дорівнює орієнтованому об'єму V паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Інакше кажучи, якщо V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, то

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{cases}+V, & \text{якщо трійка } \{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\} \text{ – права;}\\ -V, & \text{якщо трійка } \{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\} \text{ – ліва;}\\ 0, & \text{якщо вектори } \overline{a},\overline{b},\overline{c} \text{ – компланарні.}\end{cases}$$

Наслідок 6.1 (Про перестановку квадратних дужок всередині круглих) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})=(\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$.

Наслідок 6.2 (Ознака компланарності) Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 6.3 (Ознака орієнтованості) Трійка векторів додатно (від'ємно) орієнтована тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток додатний (від'ємний).

Теорема 6.2 (Властивості мішаного добутку) Мішаному добутку притаманні наступні властивості:

1. При циклічній перестановці векторів орієнтованої трійки їх мішаний добуток не змінюється:

$$(\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c})=(\overline{c},\,\overline{a},\,\overline{b})=(\overline{b},\,\overline{c},\,\overline{a}).$$

2. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ та для будь-якого числа λ:

$$(\lambda\overline{a},\overline{b},\,\overline{c})=\lambda(\overline{a},\,\overline{b},\overline{c}).$$

3. При перестановці будь-яких двох з трьох векторів орієнтованої трійки їх мішаний добуток $(\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c})$ змінює знак:

$$(\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c})=-(\overline{b},\,\overline{a},\,\overline{c}).$$

Теорема 6.3 (Про обчислення мішаного добутку) Мішаний добуток трьох векторів $\overline{a}(\alpha_1,\,\beta_1,\,\gamma_1)$, $\overline{b}(\alpha_2,\,\beta_2,\,\gamma_2)$, $\overline{c}(\alpha_3,\,\beta_3,\,\gamma_3)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, дорівнює визначнику, рядками якого є координати цих векторів:

$$(\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (6.1)$$

Тест для самоконтролю

1. При яких значеннях числа k вектор $k\overline{c}+\overline{c}$ $(\overline{c}\neq\overline{0})$ протилежно спрямовано по відношенню до вектора $\bar{c}$?

А. $k<0$ **Б.** $k>-1$ **В.** $k<-1$ **Г.** $k>0$

2. $SABC$ – правильний тетраедр із ребром 1. Скалярний добуток $\overline{SA}\cdot\overline{SB}$ дорівнює:

А. 1 **Б.** 2 **В.** $\frac{1}{2}$ **Г.** $-\frac{1}{2}$

3. З рівності $\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$ $(\bar{c}\neq\bar{0})$ випливає:

А. $\bar{a}=\bar{b}$ **Б.** $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$, $\bar{a}\neq\bar{b}$ **В.** $(\bar{a}-\bar{b})\,||\,\bar{c}$ **Г.** $\bar{a}=\bar{b}$ чи $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$

4. Скільки існує векторів $\bar{a}$ у просторі таких, що $\bar{a}^2=\log_{0,3}2$?

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** безліч

5. Дано ненульовий вектор $\bar{a}$ простору. Скільки існує векторів $\bar{x}$ таких, що $\bar{a}\cdot\bar{x}=-1$?

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** нескінченно багато

6. Якщо для трьох ненульових векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у просторі виконується рівність $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$, то...

А. $\bar{a}\,||\,\bar{b}$ **Б.** $\bar{a}=\bar{b}$ **В.** $\bar{a}\perp\bar{b}$ **Г.** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні

7. Спростіть вираз $(\bar{i}\times(\bar{j}\times\bar{k}))\cdot\bar{i}$, де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – ортонормований базис.

А. 1 **Б.** 0 **В.** $\bar{i}^2$ **Г.** –1

8. Дано точки $A(-2;\ -3;\ -6)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$, $D(3;\ -2;\ 4)$. Знайдіть $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

А. 9 **Б.** –3 **В.** $\sqrt{3}$ **Г.** 3

9. При яких значеннях p вектор $\bar{a}=\bar{i}+p\bar{j}+\bar{k}$ ортогональний до вектора $\bar{b}(-2;1;0)$?

А. –2 **Б.** 2 **В.** 1 **Г.** 0

10. Одиничний вектор, протилежний вектору (2; –1; 0), дорівнює:

А. (–2; 1; 0) **Б.** $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ **В.** $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ **Г.** (–1; 1; 0)

11. Укажіть всі значення p і q при яких вектори $\bar{a}(1;0;p)$ і $\bar{b}(2;q;1)$ колінеарні?

А. $p=\frac{1}{2}$, $q=2$ **Б.** $p=2$, $q=\frac{1}{2}$ **В.** $p=\frac{1}{2}$, $q=0$ **Г.** $p=2$, $q=0$

12. Вектори простору $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні. Укажіть усі значення параметрів λ і μ, при яких компланарні вектори $\bar{a}$, $\bar{a}+\lambda\bar{b}$, $\mu\bar{a}-\bar{b}$.

А. $\lambda>0,\ \mu>0$ **Б.** $\lambda=0,\ \mu\in R$ **В.** $\lambda\in R$, $\mu=0$ **Г.** $\lambda\in R$, $\mu\in R$

13. Вектори простору $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні. При якому значенні параметру α вектори $\bar{p}=\alpha\bar{a}+5\bar{b}$ і $\bar{q}=3\bar{a}-\bar{b}$ будуть колінеарні?

А. 0 **Б.** –13 **В.** –15 **Г.** 1

14. Дано вектори $\overline{AB}(1;0;-2)$ і $\overline{AC}(-1;0;1)$. Площа трикутника ABC дорівнює:

А. 1 **Б.** $\frac{1}{2}$ **В.** $\sqrt{3}$ **Г.** 2

15. Як розміщені прямі *AB* і *AC*, якщо виконується рівність $\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2=\left(\overline{AB}-\overline{AC}\right)^2$?

А. паралельні **Б.** перпендикулярні
В. перетинаються **Г.** визначити неможливо

Відповіді: 1. В. 2. В. 3. Г. 4. А. 5. Г. 6. Б. 7. Б. 8. А. 9. Б. 10. В. 11. В. 12. Г. 13. В. 14. Б. 15. Б.

Приклади розв'язування задач

1. В ортонормованому базисі $\bar{i},\ \bar{j},\bar{k}$ задано вектори $\bar{a}(1;\,2;\,3)$, $\bar{b}(3;\,2;\,1)$, $\bar{c}(3;\,2;\,1)$. З'ясуйте, чи є трійка векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ правою. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання:

Обчислимо мішаний добуток векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ за формулою (2.8):

$$\left(\bar{a},\,\bar{b},\,\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=12.$$

Оскільки $\left(\bar{a},\,\bar{b},\,\bar{c}\right)>0$, то за властивістю 1 мішаного добутку векторів, трійка векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – права й об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V=12$ (куб. од.).

Відповідь: трійка векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – права і $V=12$ куб. од.

2. Знайдіть об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2;\,2;\,2)$, $B(4;3;\,3)$, $C(4;\,5;\,4)$ і $D(5;\,5;\,6)$.

Розв'язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини *A*: $\overline{AB}(2;\,1;\,1)$, $\overline{AC}(2;\,3;\,2)$, $\overline{AD}(3;\,3;\,4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (2.8):

$$\left(\overline{AB},\,\overline{AC},\,\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=24+6+6-9-12-8=7.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V=\frac{7}{6}$ (куб. од.).

Відповідь: $V=\frac{7}{6}$ куб. од.

Задачі для самостійного розв’язування

1. З’ясуйте, праву чи ліву трійку утворюють вектори:
1) $\overline{a}(2, 1, 2)$, $\overline{b}(3, -2, 1)$ і $\overline{c}(3, -1, -2)$;
2) $\overline{a}(2, -2, -3)$, $\overline{b}(2, 0, 3)$ і $\overline{c}(1, 1, 1)$.

2. Знайдіть висоту, проведену з вершини A тетраедра $ABCD$, заданого координатами вершин $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$.

3. Дано три вектори $\overline{a}(8, 4, 1)$, $\overline{b}(2, 2, 1)$ і $\overline{c}(1, 1, 1)$. Знайдіть одиничний вектор $\overline{d}$, що утворює з векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ однакові кути, перпендикулярний до вектору $\overline{c}$ та спрямований так, що впорядковані трійки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ та $\overline{a}, \overline{b}, \overline{d}$ мали однакову орієнтацію.

4. Дано три вектори $\overline{a}(8, 4, 1)$, $\overline{b}(2, -2, 1)$ і $\overline{c}(1, 1, 1)$. Знайдіть одиничний вектор $\overline{d}$, що компланарний векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, ортогональний вектору $\overline{c}$ та спрямований так, що впорядковані трійки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ та $\overline{a}, \overline{d}, \overline{c}$ мали протилежну орієнтацію.

5. Доведіть, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні, якщо виконується умова $\overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{c} + \overline{c} \times \overline{a} = \overline{0}$.

6. Доведіть, що:
1) якщо вектори $\overline{a} \times \overline{b}, \overline{b} \times \overline{c}, \overline{c} \times \overline{a}$ компланарні, то вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні;
2) якщо вектори $\overline{a} \times \overline{b}, \overline{b} \times \overline{c}, \overline{c} \times \overline{a}$ компланарні, то вони колінеарні.

7. Точка M належить ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $BM : MB_1 = 2:1$. Довжина ребра куба дорівнює a. Знайдіть відстань між прямими CD_1 та MD.

8. Дано неколінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та скаляр p.
1) Знайдіть який-небудь вектор $\overline{x}$, що задовольняє рівнянню $(\overline{x} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}) = p$.
2) Поясніть геометричний зміст всіх розв’язків рівняння $(\overline{x} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}) = p$, а також його частинного розв’язку, ортогонального векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

9. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні. При яких значеннях скаляра λ компланарні вектори $\overline{a} + 2\overline{b} + \lambda\overline{c}, 4\overline{a} + 5\overline{b} + 6\overline{c}, 7\overline{a} + 8\overline{b} + \lambda^2\overline{c}$?

10. Доведіть тотожності:
1) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{c} \times \overline{d}) = (\overline{a} \cdot \overline{c}) \cdot (\overline{b} \cdot \overline{d}) - (\overline{a} \cdot \overline{d}) \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$;
2) $(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d}) = (\overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}) \cdot \overline{b} - (\overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}) \cdot \overline{a}$;
3) $(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d}) = \overline{c}(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d}) - \overline{d}(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})$;
4) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot (\overline{c} \times \overline{a}) = (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})^2$;
5) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{c} \times \overline{d}) + (\overline{a} \times \overline{c}) \cdot (\overline{d} \times \overline{b}) + (\overline{a} \times \overline{d}) \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = 0$;
6) $(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})^2 + |(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}|^2 = |\overline{a} \times \overline{b}|^2 \cdot |\overline{c}|^2$.