7 ПОНЯТТЯ ПОВЕРХНІ ТА ЛІНІЇ В АНАЛІТИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ. ФОРМИ ЇХ РІВНЯНЬ

Нехай матеральна точка M переміщується у просторі. Вона змінює своє положення у ньому так, що це положення залежить від часу t. Тоді її кординати токож є функціями часу , тобто

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in [a,b]. \end{cases} \tag{7.1}$$

Таким чином, виникає відображення r відрізка $[a,b]$ у простір R^3:

$$r : [a,b] \to R^3 : \ t \to M\left(x(t), y(t), z(t)\right). \tag{7.2}$$

З механічного змісту випливає, що координати $x(t), y(t), z(t)$ точки M траекторії повинні бути неперервними функціями часу t.

Лінією (або ***кривою***) у просторі називається образ відрізка $[a,b]$ при неперерному відображенні його у простір. Система рівнянь (7.1) називається ***системою параметричних рівнянь*** лінії у просторі, а саме відображення (7.2) – ***параметризацією лінії*** або ***параметризованою кривою***. Позначимо через $\bar{r}(t)$ – радіус-вектор точки $r(t) = M\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ лінії. Помножимо рівняння системи (7.1) на вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ відповідно та додамо. Отримаємо:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \tag{7.3}$$

або

$$\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}. \tag{7.4}$$

Рівняння (7.3) або (7.4) називається ***векторним рівнянням лінії*** (або її ***векторно-параметричним рівнянням***).

Вектор-функцією $\bar{r}(t)$ одного скалярного аргументу t називається співставлення кожному дійсному числу t з проміжка $[a,b]$ деякого вектора $\bar{r}(t)$. Якщо всі функції $x(t), y(t), z(t)$ неперервні, то вектор-функція $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ називається ***неперервною***. Відкладемо всі вектори $\bar{r}(t)$ від початку координат O. Тоді множина кінців $M = r(t)$ векторів $\bar{r}(t)$, відкладених від точки O, визначається параметричними рівняннями (7.1), тобто представляє собою лінію у сенсі (7.1).

Зауваження На площині параметричні рівняння лінії мають вид:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [a,b], \end{cases} \tag{7.5}$$

а векторне рівняння – вид

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} \tag{7.6}$$

або

$$\bar{r}(t) = \{x(t), y(t)\}. \tag{7.7}$$

За аналогією введемо поняття ***вектор-функції двох аргументів*** як відображення, яке ставить у відповідність кожній точці (u,v) деякої підмножини $D \subset R^2$ деякий вектор

$$\bar{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}. \tag{7.8}$$

Відкладемо всі вектори $\bar{r}(u,v)$ від однієї точки – початку координат O. Тоді множина кінців $M = r(u,v)$ векторів $\bar{r}(t)$, відкладених від точки O, представляє собою ***поверхню***.

Рівняння

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \tag{7.9}$$

називаються ***параметричними рівняннями поверхні***, а рівняння (7.8) – ***векторним рівнянням поверхні***.