

# Завдання з параметрами

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 |    |    |    |

Ваш мозок може все. Абсолютно все. Головне, переконати себе в цьому. Руки не знають, що вони не вміють віджиматися, ноги не знають, що вони слабкі. Це знає ваш мозок. Переконавши себе в тому, що ви можете все, ви зможете дійсно все. *Роберт Кіосакі*

## ГЛАВА 1. ЛОГІЧНИЙ ПЕРЕБІР В ЗАДАЧАХ З ПАРАМЕТРОМ

1.1. Для кожного значення параметра  $a$  знайдіть число коренів рівняння

$$7(2x - 1)a^2 - (23x - 22)a + 3(x - 1) = 0.$$

1.2. Розв'яжіть рівняння  $|3 - 2x| = 2a - 1$ .

1.3. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $|7x + 8a - 5| = |9x + 7a - 2|$  має два різних кореня, середнє арифметичне яких дорівнює 9.

1.4. При яких значеннях  $a$  рівняння  $\left| \frac{ax-2a-1}{x-2} \right| + |x - 3a - 3| = 0$  має тільки додатні розв'язки? Знайдіть їх.

1.5. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $6 \cdot \log_7(\sin x) + a \cdot \log_7(\sin x) = a^2 + 5a + 4$  має хоча б один корінь.

1.6. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких нерівність  $|3x - 5a - 3| \leq 7 - 5a - x$  має єдиний розв'язок,

1.7. Для кожного значення параметра  $a$  знайдіть множину розв'язків нерівності

$$5xa^2 - (26x + 1)a + 5x + 5 \leq 0.$$

1.8. Для кожного значення параметра  $a$  знайдіть множину розв'язків нерівності

$$4xa^2 - (17x + 4)a + 4x + 1 \geq 0.$$

1.9. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , для кожного з яких система рівнянь має не менш ніж три розв'язка.

$$\begin{cases} (2a^2 - 11a)x - 25y = 2a^2 - 13a - 30 \\ 8x - 5y = 3. \end{cases}$$

1.10. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , для кожного з яких система рівнянь має хоча б один розв'язок

$$\begin{cases} 12 \cdot \cos^2 x + 11 \cdot \cos^2 y + 33a = 31 \\ 33 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos^2 y - 198a + 151 = 0. \end{cases}$$

## ГЛАВА 2. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

### § 2.1. Нелінійні рівняння параметром

**2.1.1.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $x^3 - (a - 5)x^2 - 5ax = 0$  має рівно два різних кореня.

**2.1.2.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $x^2 - 8x + 5a = 0$  и  $2x^2 + x - 7a = 0$  мають хоча б один спільний корінь.

**2.1.3.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $x^2 + 3x - 9a + 18 = 0$  и  $x^2 + 6x - 13a + 25 = 0$  мають хоча б один спільний корінь.

**2.1.4.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\sqrt{5ax + 7a} = 5x + 7$  має хоча б один корінь.

**2.1.5.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(ax^2 - (a^2 + 8)x + 8a)\sqrt{x + 3} = 0$  має рівно два різні кореня.

**2.1.6.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $10 \cos 2x = (a^2 + 13a + 20) \sin x + 10$  має на відрізку  $[0; 2\pi]$  рівно 4 кореня.

**2.1.7.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(3 \sin x - a - 1)(3 \sin x + 2a - 1) = 0$  має на відрізку  $[0; 2\pi]$  рівно 2 кореня.

**2.1.8.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $7 \cos^2 x - (7a + 9) \cos x + 9a = 0$  має хоча б один корінь.

**2.1.9.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких жодне з чисел  $-3$  і  $1$  не є коренем рівняння  $(x^2 + 2x - 3)\sqrt{6x^2 + 2x - 3} + a^2 - 14a + 44 = 0$

**2.1.10.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\log_5(ax^2 - (a - 2)x + 7) + \log_{0,2}(7x^2 - (a - 2)x + a) = 0$  має більше двох коренів.

**2.1.11.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(|x + 1| + |x - a|)^2 - 2(|x + 1| + |x - a|) + 4a(1 - a) = 0$  має рівно два кореня.

**2.1.12.** Знайти  $a$ , при яких рівняння має єдиний розв'язок  $\log_{2x}(ax + 1) = 2$ .

**2.1.13.** Знайти  $a$ , при яких рівняння має єдиний розв'язок  $\frac{\lg ax}{\lg(x+1)} = 2$ .

### § 2.2. Дослідження дискримінанту і формули Вієта

**2.2.1.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , для кожного з яких більший корінь рівняння  $x^2 - (6a - 1)x + 9a^2 - 3a = 0$  у 9 разів більше, ніж його менший корінь.

**2.2.2.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , для кожного з яких більший корінь рівняння  $x^2 - (10a - 19)x + 25a^2 - 95a + 90 = 0$  менше 7.

**2.2.3.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(a - 2)x^2 - 2(a - 2)x + 3 = 0$  має єдиний корінь.

**2.2.4.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$  має рівно два різних кореня.

**2.2.5.** Не розв'язуючи рівняння  $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$  знайти, при якому  $a$  один із коренів у два рази більший за другий.

**2.2.6.** При яких  $a$  сума обернених величин коренів рівняння  $2x^2 - 2ax + a^2 + 2 = 0$  дорівнює  $\frac{2}{3}$  ?

- 2.2.7.** При яких значеннях  $a$  різниця коренів рівняння  $2x^2 - (a + 2)x + 2a - 1 = 0$  дорівнює їх добутку?
- 2.2.8.** При яких значеннях  $a$  корені рівняння  $(a + 2)x^2 - 2ax + 3a = 0$  мають однаковий знак?
- 2.2.9.** При яких значеннях  $a$  обидва корені  $x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$  від'ємні?
- 2.2.10.** При яких значеннях  $a$  всі корені  $(a + 1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$  додатні?
- 2.2.11.** При яких значеннях  $a$  рівняння  $x^2 - 2(a - 2)x + a^2 - 2a - 3 = 0$  має два різних додатних кореня?
- 2.2.12.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $4\cos^4 3x - 4(a - 3)\cos^2 3x - 2a + 5 = 0$  має хоча б один корінь.
- 2.2.13.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - a - 3 = 0$  має хоча б один корінь, і вкажіть розв'язки рівняння для кожного зі знайдених значень  $a$ .
- 2.2.14.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\cos 14x + 2(5a + 9)\sin 7x - 110a + 43 = 0$  має хоча б один корінь.
- 2.2.15.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $36^x - (8a - 1) \cdot 6^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$  має єдиний корінь.
- 2.2.16.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких один з коренів рівняння  $16^x - (4^{a+3} + 16^{a+1}) \cdot 4^x + 4^{3a+5} = 0$  більше іншого в три рази.
- 2.2.17.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\log_{14}^2 x - (18a + 5)\log_{14} x + 81a^2 + 45a + 6 = 0$  має два різних кореня, середнє арифметичне яких дорівнює 105.

### § 2.3. Дробово-раціональні рівняння та рівняння змішаного типу

- 2.3.1.** Для кожного значення параметра  $a$  розв'яжіть рівняння:  $\frac{x^2 - ax + a - 1}{x - 3} = 0$
- 2.3.2.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $\frac{x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a}{x^2 - 4} = 0$  має тільки один розв'язок
- 2.3.3.** При яких значеннях  $b$  рівняння  $\frac{x^2 - (3b + 1)x + 2b^2 + b}{(b - 1)(x^2 - 3x + 2)} = 0$  має єдиний розв'язок.
- 2.3.4.** Для кожного значення параметра  $a$  розв'яжіть рівняння:  $\frac{4x^2 + 4(a - 2)x + 1}{(a - 1)(x - 2)} = 0$
- 2.3.5.** Для кожного значення параметра  $a$  розв'яжіть рівняння:  $\frac{x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2}{(x - 5)(x - 3a)} = 0$
- 2.3.6.** При яких значеннях параметра  $p$  рівняння  $\frac{x^2 - 4px + 4p^2 - 4}{x^2 - 7|x| + 6} = 0$  має два кореня?
- 2.3.7.** Розв'яжіть рівняння відносно параметра  $a$ :  $\frac{x^2 + 1}{a^2 x - 2a} - \frac{1}{2 - ax} = \frac{x}{a}$ .
- 2.3.8.** Для кожного значення параметра  $a$  розв'яжіть рівняння:  $\frac{x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a - 3}{2\sqrt{2x + 1} + 3\sqrt{-x^2 - x + 6}} = 0$ .
- 2.3.9.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\frac{(x^3 - 1)(x^2 - 16)}{\lg(15a - x) - \lg(x - a)} = 0$  має єдиний розв'язок.
- 2.3.10.** Для кожного значення параметра  $b$  розв'яжіть рівняння:  $\frac{(b - 1)\cos x - 3b}{\sqrt{\lg(-2\cos x)}} = 0$ .
- 2.3.11.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{3x^2 - 6ax - a + 2^{\lg_2(x - a)}}{|\cos(\pi x) + 1| - 1} = 0$  залежно від значень параметра  $a$ .
- 2.3.12.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 - 2\sqrt{2a}}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$  залежно від значень параметра  $a$ .

**2.3.13.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $tg(\pi x) \ln(2x + a) = \ln(2x + a)$  має рівно один розв'язок на проміжку  $[0; 1]$ ?

**2.3.14.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $x^2 - (x - 1)\sqrt{2x - a} = x$  має рівно один розв'язок на проміжку  $[0; 1]$ ?

**2.3.15.** Розв'язати рівняння відносно  $a$ : 
$$\frac{(\sqrt{x+2a}-\sqrt{4-x})\sin\frac{\pi x}{7}}{|x+6|-|x|+6} = 0$$

## § 2.4. Дробово-раціональні нерівності та нерівності змішаного типу

**2.4.1.** Розв'язати нерівність  $\frac{x-a}{x-1} \geq 0$ .

**2.4.2.** При кожному значенні параметра  $a$  розв'яжіть нерівність  $\frac{3}{x-a} > a$ .

**2.4.3.** При кожному значенні параметра  $a$  розв'яжіть нерівність  $\frac{15}{ax+2a} > 1$

**2.4.4.** Розв'язати нерівність  $\frac{12-x}{(x-3a)x} \leq 0$

**2.4.5.** Розв'язати нерівність  $\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \leq 0$  залежно від значень параметра.

**2.4.6.** Розв'язати нерівність  $\frac{(9x^2-36x+36)(a-4)}{2^x-a} \geq 0$  залежно від значень параметра.

**2.4.7.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких розв'язком нерівності  $\frac{x^2+7x+12}{x^2-(a-4)x-4a} < 0$  є об'єднання двох інтервалів, що не перетинаються..

**2.4.8.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких нерівність  $(x - 2a + 1)\sqrt{x - 3a} \leq 0$  має єдиний розв'язок.

**2.4.9.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких множиною розв'язків нерівності  $(x - 3a + 4)\sqrt{x + a + 2} \leq 0$  є відрізок числової прямої, довжина якого дорівнює  $|a|$ .

**2.4.10.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких будь-який розв'язок нерівності  $\log_2 x^2 \leq \log_2(6x + 7)$  є розв'язком нерівності  $9x^2 \leq 49a^4$ .

**2.4.11.** Задано систему нерівностей

$$\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geq 0 \\ (\log_3 a)(2\sin^2 x - (2a - 1)\sin x - a) \geq 0, \end{cases} \text{де } x - \text{змінна, } a - \text{додатна стала.}$$

1. Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.

2. Знайдіть множину розв'язків другої нерівності залежно від значень  $a$ .

3. Визначте всі розв'язки системи залежно від значень  $a$ .

## § 2.5. Завдання, що зводяться до дослідження розташування коренів

### квадратного тричлена відносно даних чисел

**2.5.1.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(a - 2)x^2 - 4ax + a - 1 = 0$  має два кореня різних знаків.

**2.5.2.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(a^2 - 9)x^2 - (2a^2 + 5a - 9)x + a + 3 = 0$  має два кореня різних знаків.

**2.5.3.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(a^2 - a)x^2 - (a - 2)x - a - 6 = 0$  має два різних кореня, один з яких більше 1, а інший - менше 1.

**2.5.4.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $x^2 - (2a - 5)x + a - 7 = 0$  має два кореня різних знаків, модуль кожного з яких менше 3.

**2.5.5.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(a - 1)x^2 - 2(a + 1)x - 2a - 1 = 0$  має два різних кореня, кожен з яких більше -2.

**2.5.6.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $(a - 3)x^2 - 2(a + 3)x - 2a - 3 = 0$  має два різних кореня, що належать інтервалу  $(-2; 1)$ .

**2.5.7.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $2x^4 - (a - 2)x^3 + 4x^2 - (a - 2)x + 2 = 0$  має не менше двох різних від'ємних коренів.

**2.5.8.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\log_3^2(3x^2 + 6x + 4) + (5a^2 - a + 4)\log_3(3x^2 + 6x + 4) - a - 2 = 0$  має хоча б один корінь.

**2.5.9.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\log_3^2(7x^2 + 1) + (3a^2 - a + 3) \cdot \log_3(7x^2 + 1) + 4a^2 - a^4 = 0$  має хоча б один корінь.

**2.5.10.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $49^x + (2a^2 - a + 6) \cdot 7^x + 2a^2 + a - 6 = 0$  має єдиний корінь.

**2.5.11.** Розв'яжіть рівняння  $x + \sqrt{a^2 - x^2 + 2x - 1} = 2$

**2.5.12.** Розв'яжіть нерівність  $25^{|x|} - 2 \cdot 5^{|x|} + a \geq 1$ .

**2.5.13.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\sqrt{2x - a + 5} = x - 2a + 4$  має хоча б один корінь, і вкажіть корені рівняння для кожного із знайдених значень  $a$ .

**2.5.14.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $49^x - 2(a - 1) \cdot 7^x + a^2 - 4a - 5 = 0$  має єдиний корінь.

**2.5.15.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\log_3(9^x + 9a) = x$  має два різних кореня.

**2.5.16.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння

$((2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x)\lg a) \lg \frac{36a - 9a^2}{35} = 0$  має 2 кореня. Один з яких  $\geq 0$ , інший  $\leq -1$ .

**2.5.17.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $4(x - \sqrt{a \cdot 4^a})x + 4(4^a - 1) + a = 0$  має хоча б один корінь, і визначте знаки коренів для кожного із знайдених значень параметра  $a$ .

**2.5.18.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких функція  $f(x) = \sin 2x - 8(a + 1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$  є зростаючою на всій числовій прямій і при цьому не має критичних точок.

**2.5.19.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $\log_{\sqrt{2-x}}(4x + a) = 4$  має хоча б один корінь, і вкажіть корені рівняння для кожного із знайдених значень  $a$ .

## § 2.6. Системи рівнянь з параметром.

**2.6.1.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} (2x + a)^2 = (2y + a)^2 \\ \sqrt{3ax - 8x - 6y} = x \end{cases}$  залежно від значень параметра  $a$ .

**2.6.2.** Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких система рівнянь має єдиний

розв'язок  $\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$ .

**2.6.3.** Розв'яжіть систему рівнянь залежно від значень параметра  $a$

$$\begin{cases} |x - y| = |x - a| \\ \lg(y - a) = \lg(4a^2 + x - x^2) \end{cases}$$

**2.6.4.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} ((x + 5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x + 5)^2 + y^2 - a^2)(x + y - a + 5) = 0 \end{cases}$  имеет ровно два различных решения.

**2.6.5.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} (x - 2a - 2)^2 + (y - a)^2 = 1 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$  имеет ровно четыре решения.

**2.6.6.** Найдите значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases} \quad \text{имеет ровно два решения.}$$

## ГЛАВА 3. ДОСЛІДЖЕННЮ ДОПОМАГАЮТЬ ФУНКЦІЇ

### § 3.1. Графічний підхід у розв'язанні задач з параметром

**3.1.1.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $||2x| - 1| = x - a$  має рівно три кореня?

**3.1.2.** Знайдіть всі значення  $a$ , при кожному з яких графік функції  $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$  перетинає вісь абсцис більш ніж в двох різних точках.

**3.1.3.** Знайдіть всі значення  $a$ , при кожному з яких рівняння  $|2x - a| + 1 = |x + 3|$  має рівно один корінь.

**3.1.4.** Знайдіть значення параметра  $a$ , при яких система

$$\begin{cases} y - |x| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ має рівно два різних розв'язки.}$$

**3.1.5.** При яких значеннях параметра  $a$  система має розв'язки?

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

**3.1.6.** Знайдіть всі значення параметра  $a$  при яких система рівнянь

$$\begin{cases} |y| = x^2 - 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \text{ має рівно два розв'язки.}$$

**3.1.7.** При яких значеннях  $a$  існує єдиний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = a \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} ?$$

**3.1.8.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} |x| + |y - 4| = 2 \\ x^2 + (y - a)^2 = 9 \end{cases} \text{ має тільки один розв'язок.}$$

**3.1.9.** Знайдіть всі значення  $a$ , при кожному з яких розв'язок нерівності  $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$  утворюють відрізок довжини 1.

**3.1.10.** Знайдіть всі значення  $a$ , при яких рівняння  $\sqrt{6x - x^2 - 8} + a = \sqrt{2ax - x^2 - a^2 + 1} + 3$  має рівно один корінь.

**3.1.11.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких має рівно один корінь рівняння

$$\text{a) } \sqrt{-4x - x^2 - 3} + 3a = ax + 1; \quad \text{b) } ax + \sqrt{-5 - x^2 - 6x} = 5a + 2.$$

**3.1.12.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь

$$\text{a) } \begin{cases} 4|y - 3| = 12 - 3|x| \\ y^2 - a^2 = 3(2y - 3) - x^2 \end{cases} \text{ має рівно чотири розв'язки;}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5|x + 2| = 60 - 12|y| \\ a^2 - x^2 = 4(x + 1) + y^2 \end{cases} \text{ має рівно вісім розв'язків.}$$

**3.1.13.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} |x - 2a + 2| = y \\ |y - a + 2| = x \end{cases} \text{ має нескінченно багато розв'язків.}$$

**3.1.14.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких дана система рівнянь має рівно два дійсних розв'язки:

$$\begin{cases} 2|y| + |x| + |2y - 3x| = 12 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases};$$

**3.1.15.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких дана система рівнянь має рівно два дійсних розв'язки:

$$\begin{cases} |y| + 2|x| + |4y - 3x| = 10 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}.$$

**3.1.16.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система має рівно три різних розв'язки



$$\begin{cases} |x - 1| + |x + 1| - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

**3.1.17.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 14 \\ x^2 + y^2 = 2(a + 1) \end{cases} \text{ має два розв'язка.}$$

**3.1.18.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 6a - 14 \\ x^2 + y^2 = 3(a + 2) \end{cases} \text{ має два розв'язка.}$$

**3.1.19.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь має єдиний розв'язок.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 - 16x} + \sqrt{x^2 + y^2 + 36 + 12y} = 10 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

**3.1.20.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0 \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, що задовольняє умові  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

## § 3.2. Застосування властивостей функцій до розв'язання задач з параметром

**3.2.1.** Визначити кількість розв'язків рівняння  $2\sin\pi ax = x + \frac{1}{x}$  в залежності від параметра  $a$ .

**3.2.2.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , для якого  $2^{|x|} = \cos a$ .

**3.2.3.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos \frac{18\pi}{a}$  має рівно два рішення.

**3.2.4.** Знайдіть значення  $a$ , при якому корінь рівняння  $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$  належить проміжку  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

**3.2.5.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких наступне рівняння має хоча б

$$\text{один корінь: } \sqrt{7\cos(8x + 9) + 16} = 8a - a^2 - 13$$

**3.2.6.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має хоча б один корінь і вкажіть коріння рівняння для знайдених значень параметра

$$\text{а) } a^2 + 12a + 34 + 3^{25x^2 - 60x + 37} = \cos(10\pi x); \quad \text{б) } 16a^2 + 40a + 20 + 6^{100x^2 - 60x + 10} + \sin(5\pi x) = 0$$

**3.2.7.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має хоча б один корінь і вкажіть

$$\text{коріння рівняння для знайдених значень параметра } (4a^2 - 17a + 4)^8 + (4^{x^2 - x} - 4a)^6 = 0$$

**3.2.8...** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має хоча б один корінь і вкажіть коріння рівняння для знайдених значень параметра

$$\text{а) } \sqrt[6]{\lg^2 x - 3\lg x + a} + |a^2 - 5a + 6| = 0; \quad \text{б) } \sqrt[4]{a^2 - 2a - 8} + |\lg^2 x - \lg x + a| = 0$$

**3.2.9.** Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких функція  $f(x) = x^3 - 3(a - 1)x^2 + 3(a - 1)x - 27$  є зростаючою для всіх  $x \in R$ .

**3.2.10.** При яких значеннях параметра  $a$  функція  $f(x) = \sin 2x - 8(a + 1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$  є зростаючою для всіх  $x \in R$  і не має критичних точок.

**3.2.11.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких функція  $f(x) = e^{2x} + 2(x - a - 2) \cdot e^x - ax^2 + 2ax + 1$  має два екстремуми.

**3.2.12.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких функція  $f(x) = e^{2x} + (x - 4a - 3) \cdot e^x - ax^2 + 4ax - 5$  має один екстремум.

**3.2.13.** При яких значеннях параметра  $a$  точки екстремумів функції  $f(x) = 8x^3 - 3(3a + 1)x^2 - 6(a - 2)x + 5$  належать  $(0; \infty)$ .

**3.2.14.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких функція  $f(x) = a \cdot 8^x - (3a - 2) \cdot 4^x + 3(3a - 2) \cdot 2^x$  не має екстремумів.

**3.2.15.** При якому найбільшому від'ємному значенні  $a$ , рівняння має хоча б один корінь  $\sqrt[4]{|x| - 1} - 2x = a$ .

## ВІДПОВІДІ

### ГЛАВА 1. ЛОГІЧНИЙ ПЕРЕБІР В ЗАДАЧАХ З ПАРАМЕТРОМ

- 1.1. при  $a = \frac{3}{2}$  рівняння не має коренів; при  $a = \frac{1}{7}$  рівняння має нескінченно багато розв'язків;  
при  $a \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{7}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$  рівняння має один корінь.
- 1.2. при  $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  розв'язків немає; при  $a \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ;  $x \in \{2 - a; 1 + a\}$ .
- 1.3. при  $a = -\frac{305}{7}$ .
- 1.4. при  $a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$
- 1.5. при  $a \in (-\infty; -6) \cup [-4; -1]$ .
- 1.6. при  $a = 0,9$ .
- 1.7. при  $a \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (5; +\infty)$   $x \in \left(-\infty; \frac{1}{5a-1}\right]$ ; при  $a \in \left(\frac{1}{5}; 5\right)$   $x \in \left[\frac{1}{5a-1}; +\infty\right)$ ; при  $a = \frac{1}{5}$  розв'язків немає; при  $a = 5$   $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- 1.8. при  $a \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (4; +\infty)$   $x \in \left[\frac{1}{a-4}; +\infty\right)$ ; при  $a \in \left(\frac{1}{4}; 4\right)$   $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a-4}\right]$ ; при  $a = 4$  розв'язків немає; при  $a = \frac{1}{4}$   $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- 1.9. при  $a = -2,5$ .
- 1.10. при  $a \in \left[\frac{17}{22}; \frac{9}{11}\right]$ .

### ГЛАВА 2. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

#### § 2.1.

- 2.1.1.  $a = -5, a = 0$
- 2.1.2.  $a = 0, a = 3$
- 2.1.3.  $a = \frac{37}{16}, a = 4$
- 2.1.4.  $a \in [0; +\infty)$
- 2.1.5.  $a \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{8}{3}; 0\right] \cup \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$
- 2.1.6.  $a \in \{-13; -8; -5; 0\}$ .
- 2.1.7.  $a \in (-4; -1) \cup \{2; 0\}$ .
- 2.1.8.  $a \in [-1; 1]$
- 2.1.9.  $a \in (5; 9)$ .
- 2.1.10.  $a = 7$ .
- 2.1.11.  $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$
- 2.1.12.  $a \neq 0$
- 2.1.13. при  $a < 0$  или  $a = 4$

#### § 2.2.

- 2.2.1.  $\frac{3}{8}$
- 2.2.2.  $a \in (-\infty; 3,2)$
- 2.2.3.  $a = 5$ .

2.2.4.  $a \in (-\infty; -5] \cup [-3; 2; 0] \cup \{-4; 4\}$

2.2.5.  $a = 4$

2.2.6.  $a \in \emptyset$

2.2.7.  $a \in \left\{-\frac{11}{3}; 1\right\}$

2.2.8.  $a \in [-3; -2)$

2.2.9.  $a \in (-4; -3]$

2.2.10.  $a \in [-1; -\frac{3}{4}]$

2.2.11.  $a \in (3; 3,5)$

2.2.12.  $a \in [2,5; 3,5]$

2.2.13. при  $a \in [-3; -2] x = \pm \arccos \sqrt{a+3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

2.2.14.  $a \in [0,2; 0,6]$

2.2.15.  $a \in (-0,25; 0,5]$

2.2.16.  $a = -0,6$ .

2.2.17.  $a = -\frac{1}{9}$

### § 2.3.

2.3.1.  $a = 4 x = 1; a \neq 4 x = \{1; a - 1\}$

2.3.2.  $a \in \{\pm 2; -1; 3\}$

2.3.3.  $b \in \{\frac{1}{2}; 0; 2; -1\}$

2.3.4. при  $a = 1 x \in \emptyset$ ; при  $a = -\frac{1}{8}; x = -\frac{1}{8}$ ; при  $a \neq \{1; -\frac{1}{8}\}; x = \frac{2-a \pm \sqrt{a^2-4a+3}}{2}$

2.3.5.  $a = 3; x \in \emptyset; a = \pm 1; x = 1; x = \{2a - 1; a + 2\}$ .

2.3.6.  $p = \left\{\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm 2; \pm 4\right\}$ .

2.3.7. при  $a = 1 x = -1$ ; при  $a = -2 x = \frac{1}{3}$ ; при  $a = 0 x \in \emptyset$ ; при  $a \neq \{-2; 1; 0\} x = \left\{-1; \frac{a+1}{a-1}\right\}$

2.3.8. при  $a \in [-1,5; 1] x = a + 1$ ; при  $a \in [2,5; 5] x = a - 3$ ; при  $a \in (-\infty; -1,5) \cup (1; 2,5) \cup (5; +\infty) x \in \emptyset$ .

2.3.9. при  $a \in \left(\frac{1}{15}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{15}\right] \cup [1; 4) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

2.3.10. при  $b \in \left(\frac{1}{7}; \frac{1}{4}\right] x = \pm \arccos \left(\frac{3b}{b+1}\right) + 2\pi n n \in \mathbb{Z}$ ; при  $b \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right) x \in \emptyset$ .

2.3.11. при  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) x = -\frac{1}{3}$ ; при  $a \in (0; +\infty) \cup a \neq \frac{1}{4} + \frac{n}{2} n \in \mathbb{N} x = 2a$ ; при  $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right] x \in \emptyset$

2.3.12. при  $a \in (-\infty; 0) x \in \emptyset$ ; при  $a \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right) \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right) x = \{-2a; 4 - 2a\}$ ; при  $a = \frac{1}{3}, x = 3\frac{1}{3}$ ;  
при  $a = 1\frac{2}{3} x = -3\frac{1}{3}$ .

2.3.13.  $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{0; \frac{1}{2}\right\} \cup (1; \infty)$ .

2.3.14.  $a \in (-\infty; 0) \cup [1; 2]$ .

2.3.15. при  $a \in (-\infty; -2) x \in \emptyset$ ; при  $a \in [-2; 0) x = 2 - a$ ; при  $a \in [0; 8) x = \{0; 2 - a\}$ ; при  $a \in [8; \infty) x = 0$

### § 2.4.

2.4.1. при  $a < 1 x \in (-\infty; a] \cup (1; +\infty)$ , при  $a = 1 x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ , при  $a > 1 x \in (-\infty; 1) \cup [a; +\infty)$

2.4.2. при  $a \in (-\infty; 0) x \in \left(-\infty; a + \frac{3}{a}\right) \cup (a; +\infty)$ ; при  $a = 0 x \in (0; +\infty)$ ; при  $a \in (0; +\infty) x \in \left(a; a + \frac{3}{a}\right)$ .

**2.4.3.** при  $a = 0$  розв'язків немає; при  $a \in (0; +\infty)$   $x \in \left(-2; -2 + \frac{15}{a}\right)$ ; при  $a \in (-\infty; 0)$   $x \in \left(-2 + \frac{15}{a}; -2\right)$ .

**2.4.4.** при  $a = 0$   $x \in [12; +\infty)$ ;  $a = 4$   $x \in (0; 12) \cup (12; +\infty)$ ;  $a \in (-\infty; 0)$   $x \in (3a; 0) \cup [12; +\infty)$ ;  $a \in (0; 4)$   $x \in (0; 3a) \cup [12; +\infty)$ ;  $a \in (4; +\infty)$   $x \in (0; 12] \cup (3a; +\infty)$ .

**2.4.5.** при  $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \in (0; 1)$   $x \in [1; 2 - a) \cup (2; +\infty)$ ; при  $a \in (1; 2)$   $x \in (0; 2 - a) \cup [1; 2)$ ; при  $a \in [2; +\infty)$   $x \in [1; 2)$

**2.4.6.** при  $a \leq 0$   $x = 2$ ;  $a \in (0; 4)$   $x \in (-\infty; \log_2 a) \cup \{2\}$ ;  $a \in (a; +\infty)$   $x \in \{2\} \cup (\log_2 a; +\infty)$ .

**2.4.7.**  $a \in (-\infty; -4)$

**2.4.8.**  $a \in [-1; +\infty)$ .

**2.4.9.**  $a = \frac{2}{3}$ .

**2.4.10.**  $a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$

**2.4.11.** при  $a = 1$   $x \in [-\pi; \pi]$ ; при  $a \in (0; 1)$   $x \in \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; \arcsin a\right] \cup [\pi - \arcsin a; \pi]$ ; при  $a \in (1; \infty)$   $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$ .

## § 2.5.

**2.5.1.**  $a \in (1; 2)$

**2.5.2.**  $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3)$

**2.5.3.**  $a \in (-1; 0) \cup (1; 4)$

**2.5.4.**  $a \in \left(\frac{13}{7}; \frac{17}{5}\right)$

**2.5.5.**  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup (1; +\infty)$

**2.5.6.**  $a \in (-4; -1) \cup (0; 0,5)$

**2.5.7.**  $a < 2$ .

**2.5.8.**  $a > -2$ .

**2.5.9.**  $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \cup \{0\}$ .

**2.5.10.**  $a \in (-2; 1,5)$ .

**2.5.11.** при  $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$   $x = \frac{3 + \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$ ; при  $a \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$   $x = \frac{3 \pm \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$ ; при  $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$   $x \in \emptyset$ .

**2.5.12.** при  $a \in (-\infty; 2)$   $x \in \left(-\infty; -\log_5(1 + \sqrt{2 - a})\right) \cup \left(\log_5(1 + \sqrt{2 - a}); +\infty\right)$ ; при  $a \in [2; +\infty)$   $x \in R$ .

**2.5.13.** при  $a \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$   $x = 2a - 3 \pm \sqrt{3a - 2}$ ; при  $a \in (1; +\infty)$   $x = 2a - 3 + \sqrt{3a - 2}$ ; при  $a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$   $x \in \emptyset$ .

**2.5.14.**  $a \in (-1; 5]$

**2.5.15.**  $3a \in \left(0; \frac{1}{36}\right)$ .

**2.5.16.** при  $a \in \left(\frac{3}{2}; 4\right)$ .

**2.5.17.** при  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$   $x \in \emptyset$ ; при  $a = 0$   $x = 0$ ; при  $a \in [4; +\infty)$  два додатні корені.

**2.5.18.** при  $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$

**2.5.19.** при  $a \in (-8; -3) \cup (-3; +\infty)$   $x = 4 - \sqrt{12 + a}$ .

## § 2.6.

- 2.6.1. при  $a \in (-\infty; 0)$ :  $(0; 0)$ ; при  $a \in [0; \frac{14}{3})$ :  
 $(0; 0), (3a; -4a)$ ; при  $a \in [\frac{14}{3}; \infty)$ :  $(3a - 14; 3a - 14), (3a; -4a), (0; 0)$
- 2.6.2.  $a \in (-\infty; -6] \cup [8; +\infty) \cup \{2\}$ .
- 2.6.3. при  $a \in (\frac{-2-\sqrt{2}}{3}; -1), (-1; -\frac{49}{25}), (-\frac{49}{25}; -2 + \sqrt{2})$ .
- 2.6.4. при  $a \in (1; 9)$
- 2.6.5. при  $a \in (-8; -3) \cup (-3; +\infty)$
- 2.6.6.  $a \in (-6; 1] \cup (9; 10) \cup \{8\}$

### ГЛАВА 3. ДОСЛІДЖЕННЮ ДОПОМАГАЮТЬ ФУНКЦІЇ

#### § 3.1. Графічний підхід у розв'язанні задач з параметром

- 3.1.1. при  $a = \{-\frac{1}{2}; -1\}$ ;
- 3.1.2. при  $a \in (-3, 5; 1)$ ;
- 3.1.3. при  $a = \{-4; -8\}$ ;
- 3.1.4. при  $a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$ ;
- 3.1.5. при  $a \in [8; +\infty)$ ;
- 3.1.6. при  $a = \{4\}$ ;
- 3.1.7. при  $a = \{4; 64\}$ ;
- 3.1.8. при  $a = \{-1; 3; 5; 7\}$ ;
- 3.1.9. при  $a = \{-\frac{5}{2}; -\frac{19}{2}\}$ ;
- 3.1.10. при  $a \in [2; 3) \cup (3; 4]$ ;
- 3.1.11. а) при  $a \in \{0\} \cup (\frac{1}{6}; \frac{1}{4}]$ ; б) при  $a \in \{0\} \cup [-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5})$ ;
- 3.1.12. а) при  $a \in (-4; -3) \cup (3; 4) \cup \{-\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\}$ ; б) при  $a \in (-5; -\frac{60}{13}) \cup (\frac{60}{13}; 5)$ ;
- 3.1.13. при  $a = \frac{4}{3}$ ;
- 3.1.14. при  $a = \{\frac{9}{2}; \frac{117}{4}\}$ ;
- 3.1.15. при  $a = \{2; \frac{2500}{121}\}$ ;
- 3.1.16. при  $a = 2 + \sqrt{2}$ ;
- 3.1.17. при  $a = 2,5$ ;
- 3.1.18. при  $a = \frac{7}{3}$ ;
- 3.1.19. при  $a \in [-8; -6) \cup \{\pm \frac{24}{5}\} \cup (6; 8]$ ;
- 3.1.20. при  $a \in (-\infty; -1,25\sqrt{5}] \cup [1,25\sqrt{5}; +\infty)$ .

#### § 3.2. Застосування властивостей функцій до розв'язання задач з параметром

- 3.2.1. при  $a = \pm \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbf{Z}$ , один корінь, при  $a \neq \pm \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbf{Z}$ , немає розв'язків.
- 3.2.2. при  $a = 2\pi k$ .
- 3.2.3. при  $a = \{-3; 9\}$
- 3.2.4. при  $a = -14,3$
- 3.2.5. при  $a = 4$ .
- 3.2.6. а)  $x = 1,2$  при  $a = -6$ ; б)  $x = 0,3$  при  $a = -1,25$ ;
- 3.2.7.  $x = \{-1; 2\}$  при  $a = 4, x = \{0; 1\}$  при  $a = \frac{1}{4}$ ;

**3.2.8.** а)  $x = \{10; 100\}$  при  $a = 2$ ,

б)  $x = \{0,1; 100\}$  при  $a = -2$ ,

**3.2.9.** при  $a \in (1; 2)$ ;

**3.2.10.** при  $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$ ;

**3.2.11.** при  $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ .

**3.2.12.** при  $a \in (-\infty; 0]$ ;

**3.2.13.** при  $a \in (1; 2)$ ;

**3.2.14.** при  $a \in \left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$ ;

**3.2.15.** при  $a = -1,625$ .