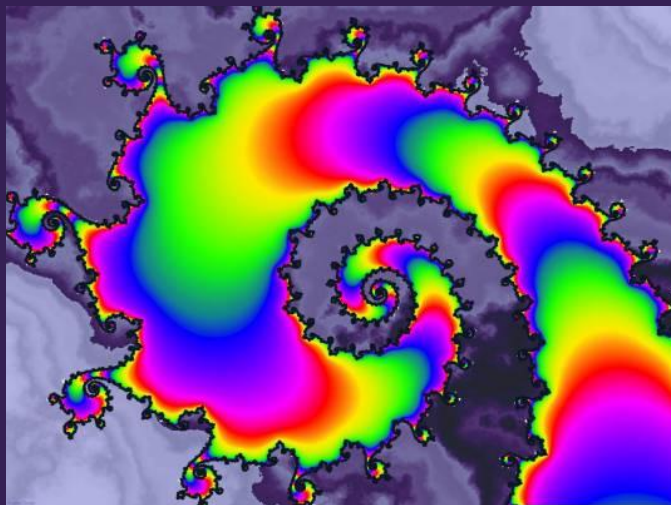


Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В.

# ВВЕДЕННЯ В МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ



Рецензенти:

д.-р фіз.-мат. наук, проф. В.А. Стоян,  
д.-р. фіз.-мат. наук, проф. В.Я. Данілов,  
д.-р фіз.-мат. наук, проф. Бойчук О.А.,  
д.-р фіз.-мат. наук, проф. Козоріз В.В.

*Затверджено вченою радою факультету кібернетики  
(протокол № 3 від 30 листопада 2009 року)*

**Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В.**

Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник

*Викладено теоретичні основи математичного моделювання динамічних систем. При розробці моделей використано математичний апарат звичайних диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь, рівнянь у частинних похідних. Розглянуто математичні моделі аналітичної механіки, механіки рідини й газу, динаміки популяцій.*

*Для студентів та аспірантів факультету кібернетики.*

© Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В., 2010

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

## П Е Р Е Д М О В А

Метою написання даного посібника є поєднання класичних розділів механіки, гідро- та аеродинаміки, аналітичної механіки для створення у студентів старших курсів певного уявлення про методи й засоби моделювання динамічних систем. Теоретичний матеріал і наведені в семінарських заняттях приклади об'єднано спільною ідеєю – показати майбутнім спеціалістам із прикладної математики, яким чином цей матеріал використовується в сучасній математичній дисципліні – моделюванні динамічних систем.

Автори узагальнили матеріали публікацій [1–28] і скомпонували навчальний посібник, спираючись на основні принципи варіаційного числення, теорію диференціальних рівнянь, методи теоретичної й математичної фізики. Уперше посібник був виданий у 2004 р. Після цього автори зробили деякі доповнення й виправлення.

Посібник є частиною стислого нормативного курсу (36 год лекцій і 18 – семінарських занять), що викладається студентам факультету кібернетики Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка. У процесі відбору матеріалу автори керувалися, у першу чергу, наміром систематизувати знання студентів. Сучасний спеціаліст із прикладної математики повинен володіти головними принципами побудови моделей не лише неживої природи [1, 7, 12, 13, 15, 16, 20, 23, 24], але вміти моделювати й досліджувати динаміку процесів у хімічних, еколого-економічних, соціальних та інших системах [1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 18, 22, 26].

Автори мають надію, що посібник буде корисним не тільки для студентів і спеціалістів із прикладної математики, а й для широкого загалу інженерів-дослідників.

## ВСТУП

Моделювання на цифрових обчислювальних машинах є одним із найпотужніших засобів дослідження, зокрема, складних динамічних систем. Воно дає можливість здійснювати обчислювальні експерименти із системами на стадії проектування, а також вивчати системи, натурні експерименти з якими через небезпечність або високу вартість недоцільні. У той же час, завдяки близькості за формою до фізичного моделювання, цей метод дослідження доступний широкому загалу користувачів.

Сьогодні, коли комп'ютерна промисловість пропонує різноманітні засоби моделювання, будь-який кваліфікований інженер, технолог або менеджер повинні вміти не просто моделювати складні об'єкти, але й досліджувати їх за допомогою сучасних технологій, реалізованих у формі графічних середовищ або пакетів візуального моделювання.

У посібнику особливу увагу приділено процесам, що моделюються за допомогою апарату динамічних систем. Під найпростішою динамічною системою зазвичай розуміють систему, поведінка якої задається сукупністю звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші з досить гладкими правими частинами, що забезпечують існування та єдиність розв'язку. Прикладом об'єкта, поведінку якого можна описати диференціальними рівняннями, може бути тіло, кинуте під кутом до горизонту, або відомий зі шкільного підручника басейн із двома трубами, через які вливається й виливається вода. Знаходження розв'язку систем рівнянь у формі Коші – традиційна задача обчислювальної математики, записана у формі диференціальних рівнянь. Створені в останні роки програмні засоби реалізації числових методів не тільки забезпечують задані вимоги до похибки розв'язку, але й вимагають визначення типу (обчислювальної складності) розв'язуваної задачі.

Складнішою є модель, зображена системою звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші й нелінійними алгебраїчними рівняннями, що супроводжуються набором допоміжних формул. Задача числової побудови фазової траєкторії такої системи значно складніша, але, якщо сукупність нелінійних рівнянь одноз-

начно розв'язна в кожній точці та праві частини диференціальних рівнянь досить гладкі, то вона в основному також цілком успішно розв'язується. Попередня підготовка для числового розв'язання в даному випадку мінімальна: потрібно перевірити, чи дорівнює кількість рівнянь кількості невідомих і узгодженість початкових умов; провести сортування формул у правильному порядку (для заміни їх операторами присвоювання).

Математичним апаратом, схожим на звичайні диференціальні рівняння, що з успіхом використовуються при моделюванні динамічних процесів, є різницеві рівняння й системи рівнянь. Вони зручніші у випадку, коли зміна процесу відбувається стрибкоподібно, або дискретно. Такі динамічні процеси зустрічаються в онкології, динаміці популяцій, економіці, банківській справі.

При дослідженні процесів у фізиці, гідромеханіці більш поширеним математичним апаратом є рівняння з частинними похідними. Їх з успіхом використовують при моделюванні динаміки розподілу тепла, руху рідини й газів, коливанні пластин та оболонок. При дослідженні процесів в економіці, біології, медицині останнім часом почали використовувати функціонально-диференціальні рівняння. Найпростішими з них є рівняння з одним сталим запізнюванням і рівняння нейтрального типу.

У математичному моделюванні динамічних систем можна виділити три основні частини:

- ✓ Емпірична частина містить фактичні дані, отримані в експериментах і спостереженнях, а також інформацію з первинної систематизації.

- ✓ Теоретична частина розвиває основні концепції, що дозволяють об'єднати й пояснити з єдиних позицій емпіричні закономірності та явища.

- ✓ Математична частина конструює моделі для перевірки основних теоретичних концепцій, а також методи обробки експериментальних даних, планування експериментів і спостережень.

Математичне моделювання стимулює накопичення фактичного матеріалу, уточнює напрями експериментів.

Необхідною умовою для побудови змістовних математичних моделей є наявність докладної природничо-наукової інформації про механізми функціонування системи. Основними принципа-

ми, що використовуються при побудові моделей, є універсальні закони збереження. Рівняння мають містити кількісні вирази прийнятих гіпотез про специфічні процеси, що відбуваються в системі.

Подібність математичного опису й закономірностей просторово-часової організації є наслідком аналогії кінетичних процесів взаємодії в екологічних і біохімічних системах.

За допомогою математичних моделей нині досліджують також процеси утворення структур на двох рівнях організації – біохімічному та екологічному.

Саме ці задачі та проблеми, що завершуються обчислювальним експериментом, є об'єктами математичного моделювання. Це, насамперед, сучасна методологія й технологія наукової праці, застосовні до всіх галузей знань, теорія й математизація яких досягли досить високого рівня.

Можливості, що математичне моделювання відкриває для розвитку науки, техніки й технологій, важко переоцінити. Саме математичному моделюванню належить істотна частина успіхів, досягнутих у передових галузях сучасної науки. Воно все швидше опановує нові напрями – авіабудування, машинобудування, хімічне виробництво. Уже нині дуже перспективними є спроби його застосування до винятково важливих, але недостатньо формалізованих сфер – економіки, соціології тощо.

Важлива перевага методів моделювання динамічних систем полягає в тому, що вони дозволяють різко скоротити обсяг і масштаби натурних експериментів. Математичне моделювання незамінне там, де натурний експеримент може стати небезпечним і навіть катастрофічним – у ядерній техніці, екології, при розробці економічних реформ.

# 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

## 1.1. Поняття моделі. Математична модель

Заміна одних об'єктів (оригіналів) іншими (моделями) і дослідження властивостей об'єктів за моделями називається моделюванням. Теорія математичного моделювання як окремий науковий напрям виникла досить недавно і становить взаємопов'язану сукупність положень, означень, методів і засобів побудови й вивчення моделей. Ці положення, означення, методи й засоби, як і самі моделі, є предметом теорії моделювання.

Поняття “модель” використовується широко й має різні застосування. Під моделлю об'єкта зазвичай розуміють інший об'єкт, що імітує деякий набір властивостей модельованого об'єкта. Модель не може й не повинна повторювати всі характеристики оригінала, інакше губиться сенс моделювання. Основною метою при побудові моделі є можливість, досліджуючи модель, отримати результати, що можна застосовувати до початкового об'єкта.

Основна мета при побудові моделі – забезпечити дослідження та аналіз функціонування реального об'єкта. Об'єкт реального світу має величезну кількість властивостей і характеристик, однак дослідників цікавить невелика та скінченна їх частина. Тому перед дослідниками постає задача виділити ці основні властивості й перенести їх на модель.

**Типи моделей. Математична модель.** Усі моделі можна поділити на дві категорії: експериментальні й теоретичні моделі. Теоретичні моделі формуються мовою тієї чи іншої предметної галузі. Розрізняють фізичні, біологічні, економічні моделі тощо. Із цього ряду виділимо математичні моделі. Нині у практиці дослідників усього світу прийнято на основі моделі предметної галузі записувати відповідну математичну модель. Основною перевагою математичної моделі є можливість досліджувати властивості й поведінку моделі в усіх чи багатьох ситуаціях, спираючись на формальні методи. Використовуючи розроблений математичний апарат, можна спробувати вийти за межі по-

бутової логіки та отримати якісно нові результати. Безкомпромісна точність математичних методів допомагає визначити ступінь прийнятності отриманих результатів (реально математичні результати занадто жорсткі, що заважає їх використанню на практиці).

З іншого боку, обчислювальні експерименти на основі математичних моделей дозволяють докладно та глибоко вивчати об'єкти в обсязі, недоступному теоретичним методам.

Особливо значущим математичне моделювання стає тоді, коли об'єкт дослідження є в одиничному екземплярі, натурний експеримент дуже тривалий або його вартість занадто висока.

Створення математичної моделі є творчим актом, оскільки для того самого об'єкта можна побудувати кілька нееквівалентних моделей. Дослідник може взяти за основу той чи інший набір характеристик. Той самий об'єкт можна описати, використовуючи різний математичний апарат. Наприклад, вибрати неперервну або дискретну, детерміновану або стохастичну модель. Цей вибір визначає як метод дослідження, так і (опосередковано) можливість отримати ті чи інші результати.

Унаслідок різних підходів до створення математичних моделей розрізняють структурну й функціональну моделі. Структурна модель із деякою точністю імітує внутрішню будову об'єкта. При її побудові структуру об'єкта спрощують. У результаті модель повторює поведінку об'єкта на деякій множині вхідних впливів.

Для побудови функціональної моделі використовують результати спостережень за об'єктом, що моделюється в різних ситуаціях за різних впливів. Структуру об'єкта при цьому не аналізують. Така математична модель повторює поведінку об'єкта (зміну характеристик, що моделюються) у випадках, для яких є результати спостережень. Виродженням випадком такого підходу є модель типу чорної скриньки.

Обидва типи моделей мають переваги й недоліки. Функціональну модель зазвичай побудувати легше, але вона може втратити адекватність за межами області експериментального дослідження. З іншого боку, складніший структурний підхід дозволяє



створити модель, що залишиться адекватною в багатьох ситуаціях.

## 1.2. Процес математичного моделювання

Процес математичного моделювання має складну структуру, де кожен етап взаємодіє з іншими, а результати одного етапу визначають результати й можливість перебігу інших.

Математичне моделювання потрібно розглядати у двох часових масштабах. Загалом процес розвивається послідовно по етапах, але на кожному етапі дослідник ітеративно повертається до вже пройдених етапів, поки не задовольниться результатом, щоб перейти до наступного. На кожній ітерації дослідник знаходить і виправляє помилки, тому ступінь адекватності зростає. Кількість помилок із часом має зменшуватись. На етапі аналізу предметної області можна побудувати кілька моделей різних типів. Однак на етапі тестування кардинально змінити тип моделі вже дуже дорого. Якщо процес перебігає задовільно, то неадекватність виявляють на ранніх етапах. На останніх етапах потрібно задовольнитися дрібними змінами, наприклад, підвищити точність деякого параметра.

**Аналіз предметної області.** Математичне моделювання починають з аналізу предметної області. На цьому етапі визначають об'єкт дослідження, виділяють усі компоненти середовища, в якому перебуває об'єкт, аналізують вплив середовища й можливі стани об'єкта.

**Побудова моделі предметної області.** На наступному етапі формулюють модель предметної області. Уже в цей момент об'єкт дослідження замінюють його образом – моделлю. У моделі описують, які властивості об'єкта важливі з погляду дослідника. Якщо будують структурну математичну модель, то в моделі предметної області описують структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів і вихідні сигнали.

**Математичне формулювання задачі.** На основі предметної області будують математичну модель. Математична модель існує у формі записів із використанням прийнятих математичних

символів і відображає властивості об'єкта – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, що властиві його складовим частинам, тощо.

**Вибір методу досліджень. Теоретичне дослідження.** Для дослідження записаної математичної моделі дослідник підбирає відповідний математичний апарат. Використовуючи вибрані теоретичні методи, можна отримати нові знання про об'єкт.

**Математична модель. Числовий експеримент.** Математичну модель можна будувати як на основі створеного формального опису процесу, так і прямо використовуючи модель предметної області. Математичні моделі, призначені для безпосереднього використання, називають імітаційними.

Математичну модель треба адаптувати для застосування числових методів. Наприклад, для неперервної моделі будують дискретний аналог.

**Тестування моделі.** Як для математичної, так і для кібернетичної моделі треба визначити ступінь адекватності, тобто відповідність моделі до модельованого об'єкта. Під адекватністю розуміють, з одного боку, правильний якісний опис реального об'єкта. Наприклад, стійкість динаміки моделі має підтверджуватися стійкістю оригінала, і навпаки. З іншого боку, у випадках, коли це можливо, модель повинна правильно описувати об'єкт із кількісного погляду за заданими характеристиками з достатньою точністю.

Не для всіх моделей розумно вимагати кількісної адекватності. Наприклад, для соціологічних чи деяких економічних моделей важливим є адекватний опис принципів поведінки соціальних груп або економічних агентів, відповідно, а не їх кількісні характеристики.

Крім того, для моделі мають виконуватися закони предметної області, про які відомо заздалегідь. Це можуть бути феноменологічні або напівемпіричні закони (закон Ньютона у фізиці) або результати, отримані з використанням інших методів дослідження.

**Аналіз та інтерпретація результатів.** На підставі результатів теоретичного дослідження й числових експериментів у термінах предметної області треба сформулювати певні закономір-

ності. Це можуть бути, наприклад, прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо. Особливо цінним є неочікуваний результат, який пощастило отримати за рахунок застосування математичного моделювання й використання методів математичного дослідження, тобто деяка нова якість моделі. Наприклад, за допомогою методів математичного моделювання в роботах [20, 23] було отримано фізичний ефект Т-шару.

Без цього етапу дослідження не можна вважати таким, що відбулося, оскільки воно залишається „річчю в собі” й не має практичної користі.

### 1.3. Основні вимоги до математичної моделі

Для того, щоб бути корисною, математична модель повинна задовольняти деякі вимоги, що мають рекомендаційний суб'єктивний характер. Розглянемо вимоги, які зазвичай задовольняє якісна математична модель.

**Вимога адекватності.** Модель повинна задовольняти умову адекватності відносно вибраної системи характеристик. Під адекватністю моделі розуміють:

а) Правильний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками. Наприклад, стійкість руху моделі свідчить про стійкість реального об'єкта.

б) Правильний якісний опис за вибраними характеристиками з деякою розумною мірою точності.

Отже, адекватність визначається не тільки об'єктом і моделлю, а також заданою множиною характеристик, що моделюються. Іноді кажуть про міру адекватності моделі, розуміючи під цим частку істинності моделі відносно вибраної множини характеристик.

**Невраховані фактори.** Формулюючи математичну модель, дослідник завжди нехтує низкою факторів, які вважає неістотними. Інші характеристики об'єкта дослідження ідеалізуються. Існує поняття *стійкості (грубості) моделі*, що означає здатність моделі зберігати якісні властивості при застосуванні в реально-

му середовищі. Звісно, існує деякий інтервал параметрів, на якому не можна чітко визначити, яка модель адекватніша – стійка чи нестійка.

**Простота та оптимальність моделі.** Вимогу простоти та оптимальності складно формалізувати. Під простотою варто розуміти обсяг зусиль, що повинен докласти дослідник для вивчення моделі. У цілому простота й адекватність – суперечливі властивості. Для поліпшення адекватності може виникнути потреба у громіздкій системі з великою кількістю рівнянь, які складно досліджувати. Модель достатньо проста, якщо сучасні методи дослідження дають можливість із розумними витратами й задовільною точністю робити якісний і кількісний аналіз вибраних характеристик та осмислювати результат.

**Ієрархія змінних.** Значущість змінних і параметрів може бути різною. Змінні, що з'являються в головних залежностях, називають основними, а інші – другорядними.

Особливо важливою є класифікація змінних за темпом зміни у часі. При постановці задачі визначають деякі характерні значення – основні масштаби шкали часу та шкали простору. Виходячи із заданої часової шкали розрізняють нормальні, повільні та швидкі змінні. Повільні змінні можна брати в моделі за параметри.

Швидкі змінні поділяють на короточасні й тривалі. Перші легко замінити середніми значеннями. Другі відіграють важливу роль при аналізі перехідних процесів, що пов'язують один усталений режим з іншим.

За аналогією змінні класифікують також за просторовим впливом: близькі, далекі, дуже далекі. Таким чином установлюють деяку ієрархію змінних. Часто ефективним методом розв'язання задач може бути перехід від складної моделі з великою кількістю мікрозмінних до простішої з невеликою кількістю макрозмінних. Прикладом такого підходу є перехід від рівнянь, що описують траєкторію руху молекул, до рівнянь із частинними похідними, що використовують поняття температури й щільності.

**Інші вимоги.** Дослідники зазначають інші фактори, що впливають на властивості й розвиток моделі – феноменологічні

й напівемпіричні закони. Ці закони існують у предметній області і від того, чи виконуються вони, залежить адекватність моделі. У класичній механіці це, наприклад, закони Ньютона й закон Гука.

У процесі побудови моделі дуже важливим є правильний вибір параметрів, що характеризують стан об'єкта чи процесу, а також кількості степенів вільності, під якою розуміють кількість однорідних скалярних параметрів. Кількість параметрів може бути скінченною або нескінченною. Незважаючи на те, що реальні об'єкти мають нескінченну кількість параметрів, дослідники намагаються працювати зі скінченною кількістю, оскільки це значно полегшує аналіз. При моделюванні наперед вибраних характеристик цього зазвичай достатньо.

#### **1.4. Типи математичних моделей і методологія конструювання**

Основою моделювання є теорія подібності, яка стверджує, що абсолютна подібність має місце лише за умови заміни одного об'єкта іншим, точно таким самим. При моделюванні абсолютна подібність не має місця, вимагається лише, щоб модель достатньо адекватно відображала властивості функціонування об'єкта, що досліджується.

Залежно від характеру процесів типи математичного моделювання можна поділити на детерміновані та стохастичні, статичні й динамічні, дискретні, дискретно-неперервні й неперервні.

Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких припускають повну відсутність випадкових впливів. Стохастичне моделювання відображає ймовірнісні події та процеси. При моделюванні аналізують низку реалізацій випадкового процесу та оцінюють його характеристики, тобто набір однорідних реалізацій.

Статичне моделювання передбачає незмінність досліджуваного явища в часі. Будують математичну модель, що відображає поведінку об'єкта в цілому. Динамічне моделювання служить

для опису поведінки об'єкта в будь-який довільний змінний момент часу.

Дискретні, дискретно-неперервні й неперервні математичні моделі є конкретизацією динамічних моделей. Частіше за все використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, різниці рівняння, рівняння з післядією та інтегральні.

Вигляд математичної моделі залежить не тільки від природи реального об'єкта, але також від задач і можливостей дослідника, необхідної достовірності й точності розв'язання задачі.

Математичне моделювання можна поділити на аналітичне та імітаційне. Під аналітичним моделюванням зазвичай розуміють власне розробку математичного апарату, тобто запис функціональних співвідношень. Отримані співвідношення вивчають формальними методами математичних досліджень. При імітаційному моделюванні на підставі вибраної математичної моделі та алгоритму її реалізації проводять обчислювальні експерименти, що дає змогу кількісно оцінювати адекватність вибраної моделі та прогнозувати поведінку реального об'єкта.

При розробці математичних моделей використовують такі підходи.

**Балансовий підхід.** В основі балансового підходу лежить припущення, що приріст змінної, яка описує процес, дорівнює різниці функції, що забезпечує збільшення кількості (функція приросту) і функції, що забезпечує зменшення кількості (функція смертності) [14]. Якщо розглядати проміжок часу  $\Delta t$ , то

$$x(t + \Delta t) - x(t) = B(t, x(t), \Delta t) - D(t, x(t), \Delta t).$$

Тут  $B(t, x(t), \Delta t)$  – збільшення фазової змінної, а  $D(t, x(t), \Delta t)$  – її зменшення. Одна з ефективних математичних моделей, що використовує цей підхід – модель Леонтєва [8].

**Гамільтонів (варіаційний) підхід.** Найкращі результати в математичному моделюванні динамічних процесів отримані у класичній механіці [7, 12, 13, 16, 17, 20]. Це зумовлено, з одного боку, історичними особливостями. Усі перші наукові роботи були пов'язані з морською навігацією, рухом планет тощо, тому математичний апарат розв'язання цих проблем цілком устале-

ний. З іншого боку, для виведення рівнянь руху був запропонований формалізм Гамільтона, що добре себе зарекомендував. Він полягає в наступному. Якщо система у фазовому просторі змінює стан із положення  $x_0$  у момент часу  $t_0$  до положення  $x_1$  у момент  $t_1$ , то інтеграл (сума) рухів має бути мінімальним:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \min.$$

Функція  $L(t, x(t), x'(t))$  називається функцією Лагранжа та є різницею кінетичної й потенціальної енергій. Необхідна умова максимуму функціонала  $I[x(t)]$  – рівність нулю його першої варіації. На підставі цього твердження математична модель динаміки процесу набуває вигляду рівняння Ейлера – Лагранжа

$$L_x(t, x, x') - \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x, x') = 0.$$

Методологія побудови досить широкого класу математичних моделей така: на основі кінетичної й потенціальної енергій складають функцію Лагранжа. Математичну модель при цьому описують диференціальними рівняннями другого порядку у звичайних або частинних похідних [12, 13, 17].

**Моделі, що базуються на фундаментальних законах природи.** Найпоширеніший метод побудови моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи (закони збереження енергії, матерії та імпульсу, Ньютона, закон Гука тощо) і конкретної ситуації [16, 20].

**Метод аналогій.** Один із підходів, що широко застосовують при побудові математичних моделей – це метод аналогій. Якщо при моделюванні деякого об'єкта складно чи неможливо використати фундаментальні закони природи чи варіаційні принципи, то можна скористатися принципом подібності. Застосування аналогій до раніше вивчених явищ є одним із плідних підходів у моделюванні.

**Ієрархічний підхід.** Тільки у виняткових випадках вдається цілком побудувати модель. Зазвичай через багатофакторність процесу, складність залежностей і кількість зв'язків це зробити неможливо. Тому природним стає підхід від простого до склад-

ного. При такому підході будують ланцюг (ієрархію) моделей, що поступово ускладнюються, кожна з яких включає попередню як частинний випадок.

**Лінійні й нелінійні моделі.** Моделювання з використанням лінійних систем здійснюють головним чином із таких причин:

1. За певних обмежень (малі часові проміжки) нелінійні процеси завжди можна апроксимувати лінійними (криву можна замінити відрізками прямих).

2. Точні розв'язки лінійних систем можна визначити в аналітичній формі.

3. Для лінійних систем існують ефективні методи оцінки збурень.

4. Розроблено високоякісні обчислювальні методи розв'язання лінійних систем.

Аналітичні методи розв'язання нелінійних систем є скоріш винятком, ніж правилом. Навіть якщо можна отримати розв'язок нелінійної системи в аналітичному вигляді, то виникають труднощі при її якісному дослідженні.

Основною властивістю лінійних систем є принцип суперпозиції. Він полягає у такому. Нехай входи  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  викликає реакцію системи  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ . Тоді вхід, що є сумою входів  $f_i(t), i = \overline{1, n}$ , викликає реакцію, що дорівнює сумі  $q_i(t), i = \overline{1, n}$ , а вхід, пропорційний входу  $f(t)$  із коефіцієнтом пропорційності  $k$ , викликає реакцію  $q(t)$  із тим самим коефіцієнтом пропорційності. Оскільки на площині цей закон є рівнянням прямої лінії, то такі системи називають лінійними.

Лінійні динамічні системи частіше за все описують системами лінійних звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних і лінійними різницевидами та інтегральними рівняннями.

Швидкість зміни змінної пропорційна її значенню в поточний момент часу – це основне припущення при побудові лінійних динамічних систем. Вочевидь одна з перших моделей такого типу – це модель зміни чисельності населення (Мальтуса)



[15]. В її основі лежить твердження, що швидкість зміни населення пропорційна чисельності, помноженій на коефіцієнт  $k(t)$ , що дорівнює різниці коефіцієнтів народжуваності  $\alpha(t)$  та смертності  $\beta(t)$ , тобто

$$\frac{dN(t)}{dt} = k(t)N(t), \quad k(t) = \alpha(t) - \beta(t).$$

Модернізація лінійних моделей здійснювалась у двох напрямках. Вважалося, що в околі стаціонарного (усталеного) процесу на динаміку системи діють невеликі збурювальні впливи. Так з'явилися квазілінійні моделі

$$\dot{N}(t) = A(t)N(t) + \varepsilon F(t, N(t)).$$

З іншого боку, припускали, що коефіцієнт біля фазової змінної залежить, у тому числі, від  $N(t)$ . Таким чином уможливили обмеження області значень змінних і наблизили динаміку лінійної моделі до реального процесу. Найпростіша модель такого типу – це система Лотки – Вольтерра [6]:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = [\alpha - \beta N_2(t)]N_1(t), \\ \dot{N}_2(t) = [\gamma - \delta N_1(t)]N_2(t). \end{cases}$$

## 2. МОДЕЛІ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ Й СИСТЕМИ ТОЧОК

### 2.1. Складання рівнянь руху. Принцип найменшої дії

Розглянемо сукупність  $n$  матеріальних точок. Як відомо, положення точки у просторі визначається її радіус-вектором  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Перша й друга похідні визначають швидкість і прискорення й мають вигляд

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}).$$

Щоб визначити положення системи  $n$  матеріальних точок у просторі, треба знати  $n$  радіус-векторів або  $3n$  координат. Кількість незалежних величин, що визначають положення системи у просторі, називається *кількістю степенів вільності* системи. У загальному випадку це можуть бути й недекартові координати (полярні, сферичні тощо). Тому будь-які  $n$  величин  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , що визначають положення системи (із  $n$  степенями вільності), називаються узагальненими координатами, а їх похідні за часом – узагальненими швидкостями.

Співвідношення, що зв'язують прискорення з координатами та швидкостями, називають рівняннями руху. Зазвичай вони становлять систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$F_i(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нехай виконано умови теореми існування та єдиності розв'язку системи диференціальних рівнянь. Стан системи вважають визначеним у момент часу  $t$ , якщо рівняння дозволяє знайти положення системи в наступні моменти часу. Для цього необхідно задати *початкові умови* розв'язання диференціального рівняння (*умови Коші*). Для рівняння другого порядку це будуть початкові координати й початкові швидкості, тобто  $q_1(t_0), q_2(t_0), \dots, q_n(t_0), \dot{q}_1(t_0), \dot{q}_2(t_0), \dots, \dot{q}_n(t_0)$ .

Розглянемо (для простоти) механічну систему з одним ступенем вільності. Одним із найзагальніших принципів, що дозволяє побудувати рівняння руху, тобто створити математичну модель функціонування динамічної системи, є *принцип найменшої дії* (Гаміль-

тона). Згідно із ним кожна механічна система характеризується деякою визначеною функцією  $L(q, \dot{q}, t)$ .

Нехай у моменти  $t = t_0$  і  $t = t_1$  система займає визначені положення  $q_0$  та  $q_1$ . Тоді з усіх можливих траєкторій, по яких система може перейти з  $q_0$  у  $q_1$ , реалізується лише та, що доставляє мінімум інтегралу

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

Функція  $L(q, \dot{q}, t)$  називається *функцією Лагранжа* системи, а інтеграл – *дією*.

Необхідною умовою екстремуму функціонала є рівність нулю його першої варіації, тобто

$$\delta I[q] = \delta \left[ \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \right] = 0.$$

Обчислюючи варіацію функціонала, маємо

$$\begin{aligned} \delta I[q] = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ L_q(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right] \delta q(t) dt + \\ & + L_{\dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q(t) \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Оскільки розглядається задача із закріпленими кінцями, то варіація на кінцях дорівнює нулю, тобто другий доданок дорівнює нулю. Тому варіація функціонала має вигляд

$$\delta I[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ L_q(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right] \delta q(t) dt.$$

Узагалі кажучи, з рівності нулю інтеграла не впливає рівність нулю підінтегрального виразу. Однак за основною лемою варіаційного числення інтеграл дорівнює нулю при довільній функції  $\delta q(t)$  тоді й тільки тоді, коли дорівнює нулю підінтегральна функція. Отже, необхідну умову екстремуму функціонала  $I[q]$  можна записати у вигляді

$$L_q(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Якщо система складається із  $n$  матеріальних точок, то одержуємо систему  $n$  диференціальних рівнянь другого порядку

$$L_{q_i}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ці рівняння називають *рівняннями Ейлера – Лагранжа*.

Таким чином, одним із найпоширеніших методів складання математичних моделей динамічних систем у механіці є знаходження функції Лагранжа та одержання за її допомогою рівнянь Ейлера – Лагранжа.

## 2.2. Основні властивості функції Лагранжа

Спочатку розглянемо функцію Лагранжа у найбільш узагальненому вигляді. Найзагальнішими властивостями функції Лагранжа є такі:

1) Якщо дві системи не взаємодіють, то їх функції Лагранжа не мають загальних змінних. Звідси загальна функція Лагранжа дорівнює їх сумі:

$$L = L_1 + L_2.$$

2) Множення функції Лагранжа на довільну сталу не впливає на рівняння руху системи.

3) Розглянемо дві функції Лагранжа –  $L_1(q, \dot{q}, t)$  та  $L_2(q, \dot{q}, t)$ , що відрізняються на повну похідну деякої функції  $f(q, t)$  уздовж траєкторій системи  $q(t)$ , тобто

$$L_1(q, \dot{q}, t) = L_2(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t).$$

Відповідні інтеграли руху пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned}
I_1[q] &= \int_{t_0}^{t_1} L_1(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} [L_2(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d}{dt} f(q(t), t)] dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} L_2(q_2(t), \dot{q}(t), t) dt + f(q(t_1), t_1) - \\
&\quad - f(q(t_0), t_0) = I_2[q] + f(q_1, t_1) - f(q_0, t_0).
\end{aligned}$$

Вони відрізняються на сталу  $f(q_1, t_1) - f(q_0, t_0)$ , що залежить від крайових умов і зникає при обчисленні першої варіації, тобто

$$\delta I_1[q] = \delta I_2[q].$$

Отже, рівняння руху систем, обумовлених двома функціями Лагранжа, збігаються. Таким чином, функція Лагранжа визначається з точністю до складової, що є повною похідною вздовж руху від довільної функції координат і часу.

### 2.3. Інерціальна система відліку

Розглянемо питання вибору системи відліку. Найпростішими властивостями простору є *ізотропність* і *однорідність*, а часу – *однорідність*.

Стосовно вільного (тобто такого, що не піддається зовнішнім збуренням) руху матеріальної точки це означає, що в будь-якому місці простору така точка, перебуваючи у спокої, буде перебувати в цьому стані як завгодно довго. Отже, формально функція Лагранжа не залежить ні від координат, ні від часу. Крім того, вона не залежить від напрямку вектора швидкості  $\vec{v}$  (далі цю умову будемо записувати як  $\vec{v}^2 = v^2$ ), тобто  $L = L(v^2)$ . Підставляючи її в рівняння Лагранжа, одержуємо

$$\frac{d}{dt} L_{\vec{v}}(v^2) = 0.$$

Звідси  $L_{\vec{v}}(v^2) = \text{const}$  і, отже,  $\vec{v} = \text{const}$ .

Таким чином, у системі відліку, в якій простір ізотропний та однорідний, а час однорідний, будь-який вільний рух матеріаль-

ної точки відбувається зі сталою за величиною й напрямком швидкістю (*перший закон Ньютона*).

Така система координат називається *інерціальною*. В інерціальній системі координат будь-який вільний рух відбувається зі сталою за величиною й напрямком швидкістю. Це твердження означає *закон інерції*.

Нехай маємо дві системи координат, а  $\vec{r}$  та  $\vec{r}_1$  – координати однієї й тієї самої точки в різних системах відліку, причому одна рухається відносно іншої зі швидкістю  $\vec{v}$ . Тоді  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}t$ .

Вважаємо, що зміна часу в цих системах відліку однакова, тобто  $t = t_1$ . Отримані залежності називаються *перетвореннями Галілея*.

#### 2.4. Функція Лагранжа вільної матеріальної точки

Розглянемо конкретний вигляд функції Лагранжа, а саме – вільний рух матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку. У цьому випадку функція Лагранжа залежить лише від квадрата вектора швидкості. Якщо інерціальна система відліку  $O_1$  рухається відносно іншої інерціальної системи  $O$  з малою швидкістю  $\vec{\xi}$ , то  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{\xi}$ ,  $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{\xi}$ .

Оскільки рівняння руху повинні мати той самий вигляд, то функція Лагранжа  $L(v^2)$  повинна відрізнятися від функції Лагранжа  $L(v_1^2)$  на повну похідну за часом від функції координат і часу. Оскільки за припущенням  $L(v^2) = L(v_1^2 + 2\vec{v}_1\vec{\xi} + \xi^2)$ , то, розкладаючи в ряд за степенями  $\vec{\xi}$  і залишаючи лише лінійне наближення, одержуємо

$$L(v^2) = L(v_1^2) + \left. \frac{\partial L}{\partial v^2} \right|_{\vec{\xi}=0} \cdot 2\vec{v}_1\vec{\xi}.$$

Другий член виразу є повною похідною за часом тоді й тільки тоді, коли залежить від швидкості лінійно. Тому  $\frac{\partial L}{\partial v^2}$  від швидкості не залежить, тобто функція Лагранжа має вигляд

$$L = a \cdot v^2.$$

Для випадку скінченної швидкості матимемо  $\bar{\xi} = \bar{v}_2$

$$\begin{aligned} L(v^2) &= a \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)^2 = av_1^2 + 2\bar{v}_1\bar{v}_2 + av_2^2 = \\ &= L(v_1^2) + \frac{d}{dt}(2a\bar{r}\bar{v}_2 + av_2^2 \cdot t). \end{aligned}$$

Другий член є повною похідною й може бути опущений. Позначивши  $a = m/2$ , одержимо  $L = m \cdot v^2 / 2$ .

У цьому виразі величина  $m$  є масою матеріальної точки.

При розгляді кількох незалежних точок із масами  $m_i$  і швидкостями  $\bar{v}_i, i = \overline{1, n}$ , згідно з адитивністю функція Лагранжа матиме вигляд

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

## 2.5. Функція Лагранжа системи взаємодіючих матеріальних точок

Ускладнимо модель руху, а саме розглянемо систему взаємодіючих точок. Взаємодію між точками можна описати додаванням до функції Лагранжа деякої додаткової (залежної від характеру взаємодії) функції координат. Позначивши її через  $-U(r_1, r_2, \dots, r_n)$ , одержимо

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots, r_n), \quad v_i^2 = |\bar{v}_i|^2, \quad r_i = |\bar{r}_i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

У цьому випадку величину  $\sum_{i=1}^n m_i v_i^2 / 2$  називають *кінетичною енергією*, а  $U(r_1, r_2, \dots, r_n)$  – *потенціальною енергією* системи.

Потенціальна енергія залежить тільки від розташування всіх матеріальних точок в один і той самий момент часу, а зміна положення однієї з них миттєво впливає на інші точки. Отже, *варіаційний принцип Гамільтона* стверджує, що серед усіх можли-

вих рухів здійснюється лише той, при якому досягається мінімум функціонала:

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ T(v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2) - U(r_1, r_2, \dots, r_n) \right] dt,$$

де  $T(\cdot)$  – кінетична,  $U(\cdot)$  – потенціальна енергії системи.

**Приклад 2.5.1.** Дано систему матеріальних точок із масами  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  і координатами  $(x_i, y_i, z_i)$ , на яку діють сили  $\vec{F}_i = (F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i})$ , що мають силову (потенціальну) функцію  $-U(\cdot)$ , яка залежить тільки від координат, тобто

$$F_{x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, F_{y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, F_{z_i} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Для даного випадку кінетичну енергію запишемо у вигляді

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

а потенціальну – позначимо  $U$ . Інтеграл дії матиме вигляд

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(\cdot) \right] dt.$$

Отже, система рівнянь Ейлера – Лагранжа записується у вигляді

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0$$

або

$$m \ddot{x}_i - F_{x_i} = 0, \quad m \ddot{y}_i - F_{y_i} = 0, \quad m \ddot{z}_i - F_{z_i} = 0.$$

**Приклад 2.5.2.** Виведення рівняння коливання струни.

Помістимо початок координат в один із кінців струни. Відхилення від положення рівноваги позначимо  $u(x, t)$ . Воно є функцією абсциси  $x$  і часу  $t$ . Потенціальна енергія пропорційна розтягання струни. Ділянка струни  $dx$  у деформованому стані має довжину

$$ds = \sqrt{1 + (u_x')^2} dx, \quad (ds^2 = dx^2 + du^2).$$



Отже, подовження елемента дорівнює

$$ds - dx = (\sqrt{1 + (u'_x)^2} - 1)dx.$$

За формулою Тейлора

$$\sqrt{1 + (u'_x)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(u'_x)^2.$$

Тому вважаємо, що потенціальна енергія елемента струни дорівнює  $ku'_x{}^2/2$ ,  $k$  – коефіцієнт пропорційності, а потенціальну енергію всієї струни запишемо співвідношенням

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l ku'_x{}^2 dx.$$

Інтеграл дії має вигляд

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l pu_t'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l ku_x'^2 dx \right] dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l (pu_t'^2 - ku_x'^2) dx dt.$$

Рівняння Ейлера – Лагранжа для функціонала дії:

$$L_u - \frac{\partial}{\partial t} L_p - \frac{\partial}{\partial x} L_q = 0,$$

де  $p = \partial u / \partial t$ ,  $q = \partial u / \partial x$ . Звідси одержуємо рівняння динаміки струни

$$\frac{\partial}{\partial t} (pu_t') - \frac{\partial}{\partial x} (ku_x') = 0.$$

Якщо струна однорідна, тобто  $p$ ,  $k$  – сталі, то рівняння поперечних коливань струни мають простіший вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k}{p}.$$

**Приклад 2.5.3.** Рівняння коливань стрижня. Кінетична енергія стрижня має вигляд

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l pu_t'^2 dt.$$

Вважаємо стрижень нерозтяжним. Потенціальна енергія пропорційна квадрату кривизни, тобто

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}^2 dx.$$

Якщо відхилення стрижня від положення рівноваги малі, то  $(\partial u / \partial x)^2 \approx 0$  та одержуємо

$$U = \frac{1}{2} \int k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Інтеграл дії:

$$I[q] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_0^l \left( p \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \right] dt.$$

Отже, рівняння Ейлера – Лагранжа матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( p \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Якщо стрижень однорідний, то  $p$  і  $k$  – сталі. Одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad a^2 = \frac{k}{p}.$$

## 2.6. Закони збереження

Застосовуючи принцип Гамільтона, одержимо основні закони збереження.

### 2.6.1. Закон збереження енергії

Однорідність часу означає, що функція Лагранжа замкненої системи не залежить явно від часу, тобто  $L = L(r_1, r_2, \dots, r_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

Для такого випадку запишемо її повну похідну за часом:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial r_i} v_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i} \dot{v}_i.$$

Як впливає з рівнянь Ейлера – Лагранжа,

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}, i = \overline{1, n}.$$

Отже,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( v_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{\partial L}{\partial v_i} \dot{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} \right)$$

або

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^n \left( v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - L \right] = 0.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \text{const.}$$

Це означає, що величина  $E = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L$  уздовж руху замкненої системи незмінна (перший інтеграл системи). Вона називається *енергією системи*. Енергія системи вздовж її руху за відсутності зовнішніх збурень є сталою.

Механічні системи, енергія яких зберігається, називаються *консервативними*. Підставляючи до значення повної енергії руху функцію Лагранжа системи матеріальних точок

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots, r_n),$$

отримуємо формулу повної енергії системи матеріальних точок

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U(r_1, r_2, \dots, r_n).$$

Одержали закон збереження енергії, що формулюється так: *повна енергія, що дорівнює сумі потенціальної й кінетичної енергій системи, у консервативній системі стала.*

### 2.6.2. Закон збереження імпульсу

Інший закон пов'язаний з однорідністю простору. Однорідність простору означає незмінність властивостей системи при будь-якому її паралельному перенесенні як цілого, тобто при зміщенні  $r_i = r_i^1 + \rho$ , де  $\rho$  – стала зміщення. Формально це означає, що вигляд функції Лагранжа не змінюється, тобто

$$L(r_1, r_2, \dots, r_n, v_1, v_2, \dots, v_n) = L(r_1^1 + \rho, r_2^1 + \rho, \dots, r_n^1 + \rho, v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Згідно з незалежністю  $L$  від  $\rho$  одержуємо

$$\frac{dL}{d\rho} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0.$$

З рівняння Лагранжа випливає, що

$$\frac{dL}{dr_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тому, використовуючи попереднє рівняння, запишемо

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0.$$

Величина  $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i}$ , виражена через функцію Лагранжа, на-

зивається в замкненій механічній системі *імпульсом* системи (у старому формулюванні – *кількістю руху*).

Розглянемо систему матеріальних точок. Оскільки функція Лагранжа системи взаємодіючих матеріальних точок має вигляд

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots, r_n),$$

то, підставивши її значення в отриманий вираз імпульсу системи, матимемо залежність для імпульсу системи матеріальних точок:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i v_i .$$

Отриманий результат є *законом збереження імпульсу*, що формулюється так: *у замкненій механічній системі імпульс системи залишається у процесі руху сталим.*

### 2.6.3. Закон збереження сил

Розглянемо умову

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0, \quad L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots, r_n) .$$

Її можна переписати таким чином:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0 .$$

Однак, оскільки  $-\frac{\partial U}{\partial r_i} = \vec{F}_i$ , то ця умова матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0 .$$

Отже, справедливий *закон збереження сил*: *сума сил, що діють на всі частини замкненої системи, дорівнює нулю.*

### 2.6.4. Закон збереження моменту імпульсу

Нехай система  $O_1$  рухається відносно системи  $O$  зі швидкістю  $\vec{v}''$ . Тоді значення імпульсу

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}'') = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i' + \vec{v}'' \sum_{i=1}^n m_i$$

або

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{v}'' \sum_{i=1}^n m_i .$$

Виберемо таку інерціальну систему відліку  $Q_1$ , щоб імпульс у ній дорівнював нулю, тобто  $\vec{P}' = 0$ . Звідси одержуємо

$$\vec{v}'' = \frac{\vec{P}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \frac{d}{dt} \vec{R}.$$

Отже,  $\vec{v}'' = d\vec{R}/dt$ . Це означає, що швидкість системи матеріальних точок як єдиного цілого є швидкістю переміщення у просторі точки, радіус-вектор якої

$$\vec{R} = \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n m_i \right).$$

Таку точку називають *центром інерції*. Якщо є система з розподіленими параметрами зі щільністю  $\rho(x, y, z)$  та об'ємом  $D$ , обмеженим поверхнею  $S$ , то

$$\vec{R} = \left[ \iiint_D \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \right] / \left[ \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz \right].$$

Поняття центра інерції дозволяє зводити дослідження руху абсолютно твердого тіла до дослідження руху точки.

*Ізотропність* простору означає, що властивості замкненої системи не змінюються при будь-якому повертанні системи як цілого. Нехай радіус-вектор  $\vec{r}$  системи здійснив малий поворот  $\delta\vec{\varphi}$ . Тоді він одержав збільшення  $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}]$ , де  $[\cdot, \cdot]$  – векторний добуток векторів. Швидкості часток відповідно одержали збільшення  $\delta\vec{v} = [\delta\vec{\varphi}, \vec{v}]$ . Варіація функції Лагранжа має при повертанні дорівнювати нулю, тобто

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \delta \vec{v}_i \right) = 0.$$

Позначимо через  $\vec{p}_i = \partial L / \partial \vec{v}_i$  узагальнені імпульси, через  $\vec{p}_i = \partial L / \partial \vec{r}_i = \vec{F}_i$  – узагальнені сили. Отримаємо

$$\sum_{i=1}^n (\dot{\vec{p}}_i [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_i] + \vec{p}_i [\delta\vec{\varphi}, \vec{v}_i]) = 0.$$

За асоціативністю змішаного добутку векторів маємо

$$\delta\bar{\varphi} \sum_{i=0}^n ([\bar{r}_i, \dot{\bar{p}}_i] + [\bar{v}_i, \bar{p}_i]) = 0.$$

Згідно з довільністю повороту  $\delta\bar{\varphi}$  (за аналогію з основною лемою варіаційного числення) скалярний добуток дорівнює нулю, якщо дорівнює нулю другий співмножник, тобто

$$\sum_{i=1}^n ([\bar{r}_i, \dot{\bar{p}}_i] + [\bar{r}_i, \bar{p}_i]) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\bar{r}_i, \bar{p}_i] = 0.$$

Це означає, що при русі замкненої механічної системи векторна величина  $\vec{M} = \sum_{i=1}^n [\bar{r}_i, \bar{p}_i]$  є сталою, тобто

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n [\bar{r}_i, \bar{p}_i] = \text{const}.$$

Буде справедливим закон збереження моменту імпульсу: при русі замкненої механічної системи момент імпульсу системи є сталим.

Таким чином, одержали сім функцій, що є сталими вздовж руху системи, тобто сім інтегралів руху. Вони характеризують:

повну енергію;

імпульс системи (за трьома координатами);

момент імпульсу (за трьома координатами).

## 2.7. Рівняння Гамільтона

Формулювання математичних моделей руху за допомогою функції Лагранжа допускає опис системи шляхом задання її узагальнених координат і швидкостей. Можливий інший підхід, оснований на заданні узагальнених координат та імпульсів системи. Такий підхід здійснюється за допомогою функції Гамільтона. Перехід від одного набору змінних до іншого можливий шляхом *перетворення Лежандра*.

Нехай функція Лагранжа залежить тільки від координат і швидкостей, тобто  $L = L(q, \dot{q})$ . Тоді її повний диференціал

$$dL = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Його можна переписати у вигляді

$$dL = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i,$$

де  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  – узагальнені імпульси, а  $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$  – узагальнені сили. Перепишемо другий доданок:

$$\sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i = d \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i.$$

Звідси

$$dL = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i + d \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i$$

та

$$d \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i.$$

Як випливає з означення енергії,

$$E = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L.$$

Енергія системи, виражена через координати та імпульси, називається *функцією Гамільтона* системи. Її можна записати таким чином:

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Отже, одержуємо

$$dH(p, q) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i.$$

Оскільки за визначенням диференціала

$$dH(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i,$$

то



$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Ці рівняння називають *рівняннями Гамільтона*. Повна похідна функції Гамільтона за часом

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Крім того, якщо функція Гамільтона явно не залежить від часу, то

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

тобто функція Гамільтона, що виражає повну енергію системи, уздовж руху системи є сталою. І знов повертаємось до закону збереження енергії.

## 2.8. Закони руху планет

Основними законами руху планет є *закони Кеплера*:

1. Планети рухаються навколо Сонця по еліптичних орбітах, у фокусі яких розташоване Сонце.

2. За рівні проміжки часу радіус-вектор планети замітає при її русі рівні площі.

3. Квадрати періодів обертання планет пропорційні кубам великих осей їх орбіт.

### 2.8.1. Виведення залежності для потенціальної енергії

Як впливає із закону рівнодії сил,

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

або

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} + \frac{\partial U}{\partial r_2} + \dots + \frac{\partial U}{\partial r_n} = 0.$$

Маємо одне лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними. Для його розв'язання складаємо відповідну систему

звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі (рівняння характеристик)

$$\frac{dr_1}{1} = \frac{dr_2}{1} = \dots = \frac{dr_n}{1} = 0,$$

що має  $(n-1)$  незалежних перших інтегралів

$$r_1 - r_2 = c_1, r_2 - r_3 = c_2, \dots, r_{n-1} - r_n = c_{n-1}.$$

Загальний розв'язок рівняння з частинними похідними

$$U = U(r_1 - r_2, r_2 - r_3, \dots, r_{n-1} - r_n),$$

де  $U(\cdot)$  – довільна неперервно диференційована функція.

Для конкретизації функції  $U(\cdot)$  накладемо певні обмеження.

По-перше, розглядатимемо рівняння руху, в якому потенціальна енергія є однорідною функцією координат, тобто

$$\begin{aligned} U(\lambda(r_1 - r_2), \lambda(r_2 - r_3), \dots, \lambda(r_{n-1} - r_n)) = \\ = \lambda^k U(r_1 - r_2, r_2 - r_3, \dots, r_{n-1} - r_n), \end{aligned}$$

де  $\lambda$  – стала,  $k$  – степінь однорідності функції. Зробимо заміну:

$$r_i = \lambda \rho_i, \quad t = \mu \tau, \quad i = \overline{1, n}.$$

Підставимо цю заміну у функцію Лагранжа. Отримаємо

$$\begin{aligned} L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1 - r_2, r_2 - r_3, \dots, r_{n-1} - r_n) = \\ = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sum_{i=1}^n \frac{m_i u_i^2}{2} - \lambda^k U(\rho_1 - \rho_2, \rho_2 - \rho_3, \dots, \rho_{n-1} - \rho_n). \end{aligned}$$

Тут  $v_i = \frac{dr_i}{dt}$ ,  $u_i = \frac{d\rho_i}{d\tau}$ . Покладемо  $\frac{\lambda^2}{\mu^2} = \lambda^k$ , тобто  $\mu = \lambda^{1-\frac{k}{2}}$ . Тоді

$$L(r_1, r_2, \dots, r_n, v_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda^k L(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Отже, отримали функцію Лагранжа, помножену на сталий множник  $\lambda^k$ . Як впливає із другої властивості функції Лагранжа, при множенні на сталу рівняння руху (Ейлера – Лагранжа) зберігаються. За зробленої заміни рівняння руху зберігають геометрично подібні траєкторії, причому часи руху (між відповідними точками) відносяться як

$$\frac{t}{\tau} = \left( \frac{r}{\rho} \right)^{1-\frac{k}{2}},$$

де  $\frac{r}{\rho}$  – відношення радіусів. Із третього закону Кеплера маємо

$$\left( \frac{t}{\tau} \right)^2 = \left( \frac{r}{\rho} \right)^3.$$

Звідси  $k = -1$ . Це означає, що потенціальна енергія поля тяжіння є однорідною функцією координат у степені мінус одиниця, тобто

$$U(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{1}{r_i}.$$

Отримали досить важливу залежність для виразу потенціальної енергії.

### 2.8.2. Задача двох тіл

Розглянемо частинний випадок руху двох тіл. Нехай механічна система замкнена й містить дві матеріальні точки з масами  $m_1$  та  $m_2$ , відповідно. Позначимо через  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  вектор взаємного розташування точок. Тоді функція Лагранжа

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

За інерціальну систему координат зручно вибрати таку, в якій система як ціле незмінна. Помістивши початок координат у центр інерції, одержимо

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}, \end{cases}$$

отримаємо  $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$ ,  $\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$ .

Функція Лагранжа матиме вигляд

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) =$$

$$= \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{m \dot{r}^2}{2} - U(|r|),$$

де  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – зведена маса.

Отже, функція Лагранжа системи двох матеріальних точок збігається з функцією Лагранжа однієї точки з масою  $m$ , що рухається в центральному полі  $U(|r|)$ , зовнішньому стосовно цієї точки. Тоді задача про рух двох взаємодіючих мас зводиться до задачі руху зведеної маси в зовнішньому центральному полі  $U(|r|)$ . При русі в такому полі зберігається проекція моменту на будь-яку вісь, що проходить через центр, тобто зберігається вектор  $\vec{M}$  моменту, визначеного не відносно довільної точки простору, а відносно центра поля. З перпендикулярності  $\vec{M}$  та  $\vec{r}$  випливає, що траєкторія маси, яка рухається, залишається під час руху в одній площині, перпендикулярній до вектора  $\vec{M}$ . Тому можна в цій площині ввести полярні координати  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  та одержати функцію Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Функція Лагранжа не містить у явному вигляді змінну  $\varphi$ . Тому з відповідного рівняння Ейлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \right)$$

одержуємо  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$ . Звідси  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}$  і узагальнений імпульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = m r^2 \dot{\varphi},$$

тобто  $p_\phi = mr^2\dot{\phi} = \text{const}$  є інтегралом рівняння руху. Ця рівність називається *законом збереження площі*.

### 2.8.3. Другий закон Кеплера

Позначимо через  $ds$  диференціал площі сектора, утвореного приростом руху радіус-вектора, тобто

$$ds = \frac{1}{2} r^2 d\phi.$$

Звідси

$$2 \frac{ds}{dt} = r^2 \frac{d\phi}{dt}.$$

Оскільки  $mr^2\dot{\phi} = \text{const}$ , то  $\dot{s} = \text{const}$ , тобто зміна величини площі пропорційна часу. Одержуємо *другий закон Кеплера*: за рівні проміжки часу радіус-вектор планети замітає при її русі рівні площі.

### 2.8.4. Закон всесвітнього тяжіння

Як було показано раніше, потенціальна енергія руху двох тіл є однорідною функцією координат степеня мінус один, тобто

$$U(r) = -\frac{c(m_1, m_2)}{r},$$

де  $c(m_1, m_2)$  – деяка стала, що залежить від мас тіл. Для зручності вважатимемо, що  $c(m_1, m_2) = f(m_1, m_2) \cdot m_1 m_2$ , де  $f(m_1, m_2)$  – деяка функція, що залежить від  $m_1, m_2$ . Тоді потенціальна енергія

$$U(r) = -f(m_1, m_2) \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Очевидно, що функція  $f(m_1, m_2)$  симетрична, тобто  $f(m_1, m_2) = f(m_2, m_1)$ . Для визначення функції  $f$  припустимо, що зміна маси одного тіла в  $\lambda$  разів приводить до зміни сили взаємного притягання також у  $\lambda$  разів. Тоді

$$f(m_1, \lambda m_2) \frac{m_1(\lambda m_2)}{r} = \lambda \left[ f(m_1, m_2) \frac{m_1 m_2}{r^2} \right],$$

де  $m_1, m_2$  – довільні фіксовані маси. Звідси випливає, що

$$f(m_1, \lambda m_2) = f(m_1, m_2).$$

Ураховуючи симетричність функції  $f$ , маємо

$$f(\lambda m_1, m_2) = f(m_1, m_2),$$

що можливо лише за умови  $f(m_1, m_2) = \gamma = \text{const}$ . Отже,

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Останній вираз визначає силу взаємодії двох тіл і є одним із важливих законів природи.

### 2.8.5. Перший закон Кеплера

Як впливає із закону збереження енергії, значення енергії вздовж руху за відсутності її втрат є сталою, тобто

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const}.$$

Тут  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – зведена маса. Використовуючи закон збереження узагальненого імпульсу (інтеграл рівняння руху)

$M = m r^2 \dot{\phi} = \text{const}$ , перепишемо рівняння енергії:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Звідси

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}.$$

Розділимо змінні

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}.$$

Оскільки  $d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt$ , то, перейшовши від змінної часу  $t$  до кута  $\varphi$  і проінтегрувавши, одержимо

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}.$$

Дослідимо залежність під знаком радикала. З виразу для енергії випливає, що

$$2mEr^2 + 2mm_1m_2\gamma r - M^2 = mr^2\dot{r}^2 \geq 0.$$

Розглянемо окремі випадки.

1. Нехай дискримінант квадратичної форми від'ємний, тобто

$$D = 4m^2m_1^2m_2^2\gamma^2 + 8mEM^2 < 0.$$

Тоді квадратне рівняння не має дійсних коренів, а енергія  $E < 0$  і нерівність не виконується.

2. Якщо дискримінант невід'ємний, тобто

$$D = 4m^2m_1^2m_2^2\gamma^2 + 8mEM^2 \geq 0,$$

то

$$E \geq -\frac{mm_1^2m_2^2\gamma^2}{2M^2}.$$

Звідси квадратний тричлен матиме дійсні корені  $r_1^*$  та  $r_2^*$ . Як

впливає з теореми Вієта,  $r_1^* + r_2^* = -\frac{m_1m_2\gamma}{E}$ ,  $r_1^* r_2^* = -\frac{M}{2mE}$ .

2.1. У випадку  $E < 0$  корені додатні й нерівність виконується при  $r_1^* \leq r \leq r_2^*$ . Це означає, що рух відбувається всередині кільця.

2.2. Якщо  $E \geq 0$ , то корені мають різні знаки й нерівність виконується при  $r > r_2^*$ .

Інтегруючи, одержуємо

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{mm_1m_2\gamma}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2m_1^2m_2^2\gamma^2}{M^2}}} + \text{const}.$$

Поклавши  $\text{const} = 0$  і позначивши

$$p = \frac{M^2}{mm_1m_2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{mm_1^2m_2^2\gamma^2}},$$

перепишемо отриманий інтеграл у вигляді

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{r} \frac{M^2}{mm_1m_2\gamma} - 1}{\frac{M}{mm_1m_2\gamma} \sqrt{2mE + \frac{m^2m_1^2m_2^2\gamma^2}{M^2}}}$$

або  $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi$ . Це рівняння конічного перетину площини з фокусом у початку координат, де  $p$ ,  $e$  – параметр і ексцентриситет орбіти.

При  $E < 0$  маємо, що ексцентриситет  $e < 1$ , орбіта є еліпсом і рух фінітний. Причому найменшому значенню енергії

$$E = -\frac{mm_1^2m_2^2\gamma^2}{2M^2}$$

відповідає  $e = 0$ , тобто еліпс перетворюється на коло.

При  $E = 0$  маємо  $e = 1$  і траєкторія є параболою.

При  $E > 0$  маємо  $e > 1$  і траєкторія є гіперболою.

Строго кажучи, планети обертаються не навколо Сонця, а навколо центра інерції Сонячної системи. Однак, оскільки маса Сонця становить 99,8 % маси всієї системи, то вважають, що центр інерції розташований усередині Сонця.

### 2.8.5. Задача трьох тіл

Знаменита задача динаміки, так звана задача трьох тіл, формується так. Три матеріальні точки взаємно притягаються



згідно з ньютонівським законом гравітації. Початковий рух їх заданий, і вони можуть займати будь-які положення у просторі. Потрібно знайти рух.

Якщо позначити  $m_1, m_2, m_3$  маси трьох тіл,  $\vec{r}_1(q_1, q_2, q_3)$ ,  $\vec{r}_2(q_4, q_5, q_6)$ ,  $\vec{r}_3(q_7, q_8, q_9)$  – відстані від початку координат, то вектори, що йдуть від однієї маси до іншої, дорівнюють  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_{23} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3$ ,  $\vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ .

Відстані між ними

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{12}| &= \sqrt{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2}, \\ |\vec{r}_{23}| &= \sqrt{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2 + (q_6 - q_9)^2}, \\ |\vec{r}_{31}| &= \sqrt{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2}. \end{aligned}$$

Функція взаємодії тіл  $\bar{F} = \gamma \left( \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|} + \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_{23}|} + \frac{m_3 m_1}{|\vec{r}_{31}|} \right)$ .

Для рівнянь руху  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \vec{r}_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Таким чином, маємо систему трьох векторних рівнянь другого порядку або дев'яти скалярних рівнянь другого порядку відносно  $q_i$ ,  $i = \overline{1, 9}$ .

Останню систему можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= -\gamma m_1 \left( m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \right), \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\gamma m_2 \left( m_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right), \\ \ddot{\vec{r}}_3 &= -\gamma m_3 \left( m_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right). \end{aligned}$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нехай на систему не діють жодні зовнішні сили. Тоді центр рухається по прямій зі сталою швидкістю, тобто

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{a}, \quad \sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i = \vec{a}t + \vec{b}.$$

Ці два векторних рівняння, що відповідають шести скалярним (із шістьма сталими інтегрування  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ), зображують шість інтегралів, за допомогою яких систему можна звести до системи дванадцяти рівнянь.

2. Умова збереження імпульсу:

$$\sum_{i=1}^3 [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \vec{c}.$$

Якщо написати три скалярних інтеграли та ввести циклічну координату, то систему можна звести до системи восьми рівнянь.

3. Подальше зниження кількості рівнянь (на два) можна здійснити, застосовуючи інтеграл енергії. Помножимо рівняння

$$m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = \overline{1,3}$$

на  $\dot{\vec{r}}_i$ , просумуємо, а потім проінтегруємо:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \int \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i dt = \sum_{i=1}^3 \int \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}_i} \vec{r}_i dt.$$

Одержимо

$$m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2 + m_3 \dot{r}_3^2 = 2\vec{F} - \text{const.}$$

Рівняння задачі трьох тіл не можуть бути проінтегровані у квадратурах. Починаючи з 1750 р. і до сьогоднішнього часу вишло більш ніж 800 публікацій із цього питання, але проблема досі не розв'язана.

### 2.8.6. Обмежена задача трьох тіл

Історія обмеженої задачі починається з Ейлера й Лагранжа (1772). Далі вона одержала розвиток у працях Якобі (1836), Хілла (1878), Пуанкаре (1899), Леві – Чівіта (1905), Біркгофа (1915).

Формулювання задачі таке. Нехай два тіла обертаються навколо загального центра мас за круговими орбітами під дією

взаємного ньютонівського притягання, а третє (притягується двома першими, але не впливає на їхній рух) – рухається у площині, обумовленій двома першими. Обмеження задачі трьох тіл полягає в тому, щоб описати рух третього тіла.

### 3. РІВНЯННЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Тверде тіло визначають як систему матеріальних точок, відстань між якими не змінюється. Для опису руху твердого тіла зручно використовувати дві системи координат. Одна з них, *інерціальна*, – нерухома. Інша система – *рухома*, тісно пов'язана з тілом і бере участь у всіх його рухах. Початок *рухомої системи* вибирається в центрі інерції тіла.

Положення рухомої системи відносно нерухомої визначається радіус-вектором  $\vec{R}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ , що задається початком координат і трьома незалежними кутами, які визначають орієнтацію осей. Таким чином, на відміну від матеріальної точки, вільне тверде тіло має шість *степенів вільності*: три координати  $(X_0, Y_0, Z_0)$  і три кути.

#### 3.1. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла

Нехай  $\vec{R}$  – радіус-вектор деякої точки твердого тіла в нерухомій системі координат, а  $\vec{r}$  – у рухомій. Нескінченно мале переміщення цієї точки можна зобразити як суму перенесення рухомої системи й обертання навколо центра мас на кут  $d\vec{\varphi}$ . У цьому випадку приріст радіус-вектора має вигляд

$$d\vec{R} = d\vec{R}_0 + [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$$

або

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + [\vec{\Omega}, \vec{r}],$$

де  $\vec{V}_0 = d\vec{R}_0 / dt$ ,  $\vec{V} = d\vec{R} / dt$ ,  $\vec{\Omega} = d\vec{\varphi} / dt$ . Як і в попередньому розділі, символом  $[\cdot, \cdot]$  позначимо *векторний добуток*. Вектор  $\vec{\Omega}$ , спрямований уздовж миттєвої осі обертання твердого тіла, називається *кутовою швидкістю обертання*.

Розглянемо тіло як дискретний набір матеріальних точок. Кінетична енергія має вигляд суми

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{V}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left( \vec{V}_0 + [\vec{\Omega}, \vec{r}_i] \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \vec{V}_0^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_0 [\vec{\Omega}, \vec{r}_i] + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} [\vec{\Omega}, \vec{r}_i]^2.$$

Як впливає із властивостей векторного добутку,

$$\vec{V}_0 [\vec{\Omega}, \vec{r}_i] = \vec{r}_i [\vec{V}_0, \vec{\Omega}].$$

Тому

$$T = \vec{V}_0^2 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} + [\vec{V}_0, \vec{\Omega}] \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} [\vec{\Omega}, \vec{r}_i]^2.$$

Оскільки початок координат обраний у центрі мас, то

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0.$$

Позначимо через  $\mu = \sum_{i=1}^n m_i$  повну масу тіла. Оскільки

$$[\vec{\Omega}, \vec{r}_i]^2 = \vec{\Omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\Omega} \vec{r}_i)^2,$$

то одержуємо залежність

$$T = \frac{1}{2} \mu \vec{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \vec{\Omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\Omega} \vec{r}_i)^2 \right\} = \frac{1}{2} \mu \vec{V}_0^2 + T_{\text{об}}.$$

Таким чином, кінетичну енергію можна зобразити у вигляді суми кінетичної енергії поступального руху точки з масою

$\mu = \sum_{i=1}^n m_i$  і кінетичної енергії обертального руху з кутовою

швидкістю  $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  щодо осі, яка проходить через центр мас тіла.

Розпишемо отриманий вираз кінетичної енергії обертального руху покомпонентно:

$$\begin{aligned}
T_{\text{об.}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\{ (\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\Omega_x x_i + \Omega_y y_i + \Omega_z z_i)^2 \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \{ (y_i^2 + z_i^2) \Omega_x^2 + (x_i^2 + z_i^2) \Omega_y^2 + (x_i^2 + y_i^2) \Omega_z^2 - 2\Omega_x \Omega_y x_i y_i - \\
&- 2\Omega_y \Omega_z y_i z_i - 2\Omega_x \Omega_z x_i z_i \} = \\
&= \frac{1}{2} \Omega_x^2 \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) - \frac{1}{2} \Omega_x \Omega_y \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - \\
&- \frac{1}{2} \Omega_x \Omega_z \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i - \frac{1}{2} \Omega_y \Omega_x \sum_{i=1}^n m_i y_i x_i + \\
&+ \frac{1}{2} \Omega_y^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) - \frac{1}{2} \Omega_y \Omega_z \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - \\
&- \frac{1}{2} \Omega_z \Omega_x \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i - \frac{1}{2} \Omega_z \Omega_y \sum_{i=1}^n m_i z_i y_i + \frac{1}{2} \Omega_z^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2).
\end{aligned}$$

Позначимо матрицю

$$\begin{aligned}
I &= \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i y_i x_i & \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i z_i x_i & -\sum_{i=1}^n m_i z_i y_i & \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

і назвемо її *матрицею моментів інерції*. Кінетичну енергію обертального руху можна записати у квадратичній формі:

$$T_{\text{об.}} = \frac{1}{2} \bar{\Omega}^T I \bar{\Omega}.$$

Відомо, що симетрична матриця має лише дійсні власні числа. Довільну симетричну матрицю шляхом неособливих перетворень (повертань) можна звести до головних осей, що збігаються із власними векторами. Осі називаються *головними осями інерції*, а відповідні значення – *головними моментами інерції*. У цьому випадку кінетична енергія обертального руху матиме вигляд

$$T_{\text{об.}} = \frac{1}{2} \left( I_{xx} \Omega_x^2 + I_{yy} \Omega_y^2 + I_{zz} \Omega_z^2 \right).$$

Відповідно функція Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \mu \bar{V}_0^2 + \frac{1}{2} \left( I_{xx} \Omega_x^2 + I_{yy} \Omega_y^2 + I_{zz} \Omega_z^2 \right) - U(\cdot),$$

де  $U(\cdot)$  – потенціальна енергія тіла.

### 3.2. Момент імпульсу руху твердого тіла

Визначимо момент імпульсу руху твердого тіла відносно його центра інерції. Оскільки центр рухомої системи координат розташований у центрі інерції, то

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[ \bar{r}_i, \bar{V}_0 \right] = \left[ \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \right), \bar{V}_0 \right] = \bar{0}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \bar{r}_i, \bar{V}_i \right] = \sum_{i=1}^n m_i \left[ \bar{r}_i, \left( \bar{V}_0 + \left[ \bar{\Omega}, \bar{r}_i \right] \right) \right] = \sum_{i=1}^n m_i \left[ \bar{r}_i, \left[ \bar{\Omega}, \bar{r}_i \right] \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \left[ r_i^2 \bar{\Omega} - \bar{r}_i \left( \bar{r}_i, \bar{\Omega} \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \left\{ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) - (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z) (x_i, y_i, z_i) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \left\{ (y_i^2 + z_i^2) \Omega_x - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_i y_i \Omega_y - x_i z_i \Omega_z, -y_i x_i \Omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \Omega_y - y_i z_i \Omega_z, - \\
& -z_i x_i \Omega_x - z_i y_i \Omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \Omega_z \} = \\
& = \{ M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} \},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{cases} M_{ox} = I_{xx} \Omega_x + I_{xy} \Omega_y + I_{xz} \Omega_z, \\ M_{oy} = I_{yx} \Omega_x + I_{yy} \Omega_y + I_{yz} \Omega_z, \\ M_{oz} = I_{zx} \Omega_x + I_{zy} \Omega_y + I_{zz} \Omega_z. \end{cases}$$

Запишемо момент імпульсу руху твердого тіла відносно центра інерції у векторно-матричній формі:

$$\overline{M} = I \overline{\Omega}.$$

Якщо рухомі осі розташовані вздовж головних осей інерції, то  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$  і складові моменту мають вигляд

$$M_{ox} = I_{xx} \Omega_x, \quad M_{oy} = I_{yy} \Omega_y, \quad M_{oz} = I_{zz} \Omega_z.$$

Розглянемо рух тіла без дії зовнішніх сил, тобто рух, при якому  $U(\cdot) = 0$ . Тоді тіло рухається рівномірно й прямолінійно. Як впливає із закону збереження енергії,

$$E = 2T - L = \text{const}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \mu \vec{V}_0^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \Omega_x^2 + I_{yy} \Omega_y^2 + I_{zz} \Omega_z^2) - U(\cdot), \\
T &= \frac{1}{2} (I_{xx} \Omega_x^2 + I_{yy} \Omega_y^2 + I_{zz} \Omega_z^2),
\end{aligned}$$

то одержуємо, що при обертальному русі вільного тіла  $\vec{V}_0 = 0$ ,  $U(\cdot) = 0$  та

$$I_{xx} \Omega_x^2 + I_{yy} \Omega_y^2 + I_{zz} \Omega_z^2 = \text{const}.$$

### 3.3. Рівняння руху твердого тіла



Складемо одне з основних рівнянь динаміки – рівняння руху. Ураховуючи рівняння зміни імпульсу, запишемо рівняння руху центра інерції

$$\mu \frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i,$$

де  $\mu$  – повна маса тіла,  $\vec{V}_0$  – швидкість центра інерції тіла,  $\vec{f}_i$  – сила, прикладена до  $i$ -ї частинки тіла,  $\vec{F}$  – повний вектор сил.

З одного боку, закон зміни моменту імпульсу має вигляд

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{R}, \mu \dot{\vec{V}}] = \left[ \vec{R}, \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \right] = \sum_{i=1}^n [\vec{R}, \vec{f}_i],$$

де  $\vec{R}$  – радіус-вектор точки,  $\vec{M}$  – момент інерції тіла відносно нерухомої системи координат.

З іншого боку, перейдемо до обчислення моменту інерції тіла  $\vec{M}_0$  відносно центра інерції. Оскільки

$$\vec{M} = \mu [\vec{R}_0, \vec{V}_0] + \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i, [\vec{\Omega}, \vec{r}_i]] = \mu [\vec{R}_0, \vec{V}_0] + \vec{M}_0,$$

то після диференціювання одержимо

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \mu \left[ \vec{R}_0, \frac{d\vec{V}_0}{dt} \right] + \frac{d\vec{M}_0}{dt}.$$

Порівнюючи дві залежності для  $d\vec{M}/dt$ , маємо

$$\mu \left[ \vec{R}_0, \frac{d\vec{V}_0}{dt} \right] + \frac{d\vec{M}_0}{dt} = \sum_{i=1}^n [(\vec{R}_0 + \vec{r}_i), \vec{f}_i] = \sum_{i=1}^n [\vec{R}_0, \vec{f}_i] + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{f}_i]$$

або

$$\mu \left[ \vec{R}_0, \frac{d\vec{V}_0}{dt} \right] + \frac{d\vec{M}_0}{dt} = [\vec{R}_0, \vec{F}] + \vec{K},$$

де  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$ ,  $\vec{K} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{f}_i]$  – сума моментів усіх сил. Оскільки

$$\mu \left[ \vec{R}_0, \frac{d\vec{V}_0}{dt} \right] = \left[ \vec{R}_0, \mu \frac{d\vec{V}_0}{dt} \right] = [\vec{R}_0, \vec{F}],$$

то після скорочення одержуємо рівняння для зміни моментів

$$\frac{d\vec{M}_0}{dt} = \vec{K}, \quad \vec{K} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{f}_i].$$

Таким чином, рівняння руху твердого тіла визначається векторним рівнянням руху центра інерції

$$\mu \frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{F}$$

і векторним рівнянням зміни моменту імпульсу відносно центра мас

$$\frac{d\vec{M}_0}{dt} = \vec{K}.$$

Ці рівняння рівносильні шістьом скалярним рівнянням, з яких визначаються три координати центра інерції й три кути, що визначають положення осей пов'язаної з тілом системи відліку.

### 3.4. Рівняння Ейлера

Перейдемо до конкретизації отриманих двох векторних рівнянь. Розглянемо випадок, коли осі рухомої системи координат збігаються з головними моментами інерції.

Знайдемо зв'язок між зміною за одиницю часу векторів  $\vec{V}_0$  та  $\vec{M}_0$  у нерухомій системі координат і зміною тих самих векторів за одиницю часу в рухомій системі координат. Нехай  $\vec{A}$  – деякий вектор,  $d\vec{A}/dt$  – його похідна в нерухомій системі координат,  $d'\vec{A}/dt$  – похідна в рухомій системі координат. Якби величина вектора  $\vec{A}$  в рухомій системі координат не змінювалася, то його зміна в нерухомій системі координат обумовлювалася б лише його обертанням, тобто

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{A}].$$

Якщо він до того ж рухається, то

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{A}].$$

Застосовуючи цей підхід до отриманих у попередньому розділі векторних рівнянь руху

$$\mu \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}, \quad \vec{K} = \sum_{i=1}^n [\vec{V}_i, \vec{f}_i],$$

одержуємо

$$\mu \frac{d\vec{V}_0}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{V}_0] = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{M}_0}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{M}_0] = \vec{K}.$$

Розписавши за осями, маємо

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{dV_x}{dt} + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y \right) = F_x, \\ \mu \left( \frac{dV_y}{dt} + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z \right) = F_y, \\ \mu \left( \frac{dV_z}{dt} + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x \right) = F_z, \\ I_{xx} \frac{d\Omega_x}{dt} + (I_{zz} - I_{yy}) \Omega_y \Omega_z = K_x, \\ I_{yy} \frac{d\Omega_y}{dt} + (I_{xx} - I_{zz}) \Omega_z \Omega_x = K_y, \\ I_{zz} \frac{d\Omega_z}{dt} + (I_{yy} - I_{xx}) \Omega_x \Omega_y = K_z. \end{cases}$$

Ці співвідношення називають *рівняннями Ейлера*. Вони є конкретизацією отриманих у попередньому розділі векторних рівнянь руху для спеціальної рухомої системи координат.

Розглянемо окремий випадок вільного обертання симетричного тіла  $I_{xx} = I_{yy} = I$ . У цьому випадку

$$\vec{K} = (K_x, K_y, K_z) = (0, 0, 0).$$

Запишемо

$$\frac{d\Omega_x}{dt} + \frac{I_{zz} - I}{I} \Omega_y \Omega_z = 0,$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt} + \frac{I - I_{zz}}{I} \Omega_z \Omega_x = 0, \quad \frac{d\Omega_z}{dt} = 0.$$

З останнього рівняння випливає, що  $\Omega_z = \text{const}$ . Тоді перші два рівняння матимуть вигляд

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = -\omega \Omega_y, \quad \frac{d\Omega_y}{dt} = \omega \Omega_x, \quad \omega = \Omega_z \frac{I_{zz} - I}{I}.$$

Загальний розв'язок системи

$$\Omega_x = A \cos(\omega t + B), \quad \Omega_y = A \sin(\omega t + B).$$

Отже, для часткового випадку обертання симетричного вільного тіла можна отримати розв'язок в аналітичному вигляді.

### 3.5. Кути Ейлера

Перейдемо від диференціальних рівнянь у кутових швидкостях до рівнянь у кутах. Для того, щоб одержати рівняння руху в узагальнених координатах, необхідно конкретизувати систему кутів. За такі кути зазвичай вибирають *кути Ейлера*.

Нехай  $xOy$  – рухома система координат,  $XOY$  – нерухома система координат (рис. 3.1).

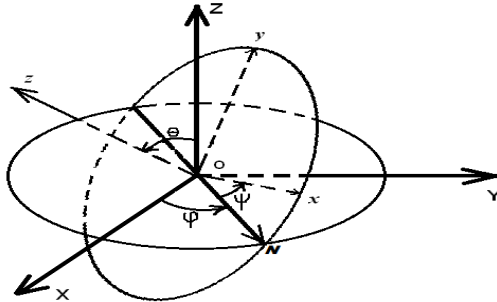


Рис. 3.1

Площина  $xOy$  перетинає площину  $XOY$  по прямій – *лінії вузлів*. Ця лінія перпендикулярна до площини, в якій розташовані осі  $Oz$  та  $OZ$ . За додатний напрямок на цій лінії виберемо напрямок, колінеарний вектору  $[\vec{Z}, \vec{z}]$ . Для визначення положення осей  $x, y, z$  у нерухомій системі  $X, Y, Z$  виберемо такі кути:

$\theta$  – кут між  $OZ$  та  $Oz$ ;

$\varphi$  – кут між  $OX$  і лінією вузлів;

$\psi$  – кут між лінією вузлів і віссю  $Ox$ .

Кути змінюються в межах:  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ .

Виразимо компоненти кутової швидкості  $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  за рухомими осями  $x, y, z$  через кути Ейлера та їх похідні. Кутова швидкість  $\dot{\theta}$  спрямована по лінії вузлів  $ON$ , а її складові за осями  $x, y, z$  дорівнюють

$$\dot{\theta}_x = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \dot{\theta}_y = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \dot{\theta}_z = 0.$$

Кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  спрямована за віссю  $OZ$ , її проекція на вісь  $Oz$  дорівнює  $\dot{\varphi}_z = \dot{\varphi} \cos \theta$ , а проекція на площину  $xOy$  –  $\dot{\varphi} \sin \theta$ . Тому

$$\dot{\varphi}_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \dot{\varphi}_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \quad \dot{\varphi}_z = \dot{\varphi} \cos \theta.$$

Нарешті, кутова швидкість  $\dot{\psi}$  спрямована за віссю  $Oz$ , тобто

$$\dot{\psi}_x = 0, \quad \dot{\psi}_y = 0, \quad \dot{\psi}_z = \dot{\psi}.$$

Тому

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases}$$

Три координати центра інерції  $X_0, Y_0, Z_0$  і три кути Ейлера  $\theta, \varphi, \psi$  утворюють шість узагальнених координат твердого тіла. Рівняння

$$\begin{cases} \mu(\ddot{X} + \Omega_y \dot{Z} - \Omega_z \dot{Y}) = F_x, \\ \mu(\ddot{Y} + \Omega_z \dot{X} - \Omega_x \dot{Z}) = F_y, \\ \mu(\ddot{Z} + \Omega_x \dot{Y} - \Omega_y \dot{X}) = F_z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{\Omega}_x + (I_{zz} - I_{yy}) \Omega_y \Omega_z = K_x, \\ I_{yy} \dot{\Omega}_y + (I_{xx} - I_{zz}) \Omega_z \Omega_x = K_y, \\ I_{zz} \dot{\Omega}_z + (I_{yy} - I_{xx}) \Omega_x \Omega_y = K_z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

дають шість диференціальних рівнянь другого порядку відносно змінних  $X, Y, Z, \phi, \theta, \psi$  і визначають рух твердого тіла.

**Приклад 3.5.1.** Розглянемо симетричний вовчок, в якого

$$I_{xx} = I_{yy} = I_1, \quad I_{zz} = I_3.$$

Кінетична енергія обертання дорівнює

$$\begin{aligned} T_{\text{об.}} &= \frac{1}{2} I_1 (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \frac{1}{2} I_3 \Omega_z^2 = \\ &= \frac{1}{2} I_1 [(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \\ &\quad - \dot{\theta} \sin \psi)^2] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 = \\ &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2). \end{aligned}$$

Оскільки вовчок симетричний, то обертання можна спростити. Вибравши вісь  $Ox$ , що збігається з лінією вузлів, одержимо  $\psi = 0$ , тоді

$$\Omega_x = \dot{\theta}, \quad \Omega_y = \dot{\phi} \sin \theta, \quad \Omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.$$

Для компонент вектора моменту  $\overline{M} = \{M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}\}$  маємо

$$M_{ox} = I_1 \dot{\theta}, \quad M_{oy} = I_1 \dot{\phi} \sin \theta, \quad M_{oz} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

Виберемо вісь  $OZ$  нерухомої системи координат у напрямку сталого моменту вовчка  $M$ . Вісь  $Oz$  рухомої системи спрямована за віссю вовчка. Оскільки  $Ox$  перпендикулярна до осі  $OZ$ , то, підставивши праві частини в попередні рівняння, одержуємо

$$M_{ox} = 0, \quad M_{oy} = \sin \theta, \quad M_{oz} = M \cos \theta,$$

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1 \dot{\phi} = M, \quad I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M \cos \theta.$$

Перше рівняння дає  $\theta = \text{const}$ , тобто сталий кут нахилу вовчка до напрямку  $M$ , друге –  $\dot{\phi} = M/I_1 = \text{const}$ , третє – сталу кутову швидкість вовчка  $\dot{\phi}$  навколо своєї осі.

## 4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Тверде тіло – це тіло, відстань між точками якого не змінюється. У той же час існує широка сфера проблем, де тіла слід розглядати як такі, що деформуються. У цьому розумінні антиподом твердому тілу є рідина. Розглядати рідину як сукупність континууму матеріальних точок (молекул) із постійно змінюваними взаємодіями практично неможливо, та й не потрібно. Тому доцільно рідке середовище зображувати деяким суцільним середовищем, що наділене визначеними властивостями. Однією з найважливіших властивостей суцільного середовища є *нерозривність*.

### 4.1. Рівняння нерозривності суцільного середовища

Розглянемо дискретне середовище, що складається з великої кількості частинок. Уведемо скалярну величину

$$\rho'(\vec{r}', t') = \sum_{k=1}^n m_k \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_k(t')),$$

де  $\vec{r}'$  – радіус-вектор довільної точки простору,  $\vec{r}'_k(t')$  – радіус-вектор  $k$ -ї частинки в момент  $t'$ ,  $\delta(\cdot)$  –  $\delta$ -функція Дірака. Назвемо цю величину узагальненою щільністю середовища в точці  $\vec{r}'$  у момент  $t'$ . Проінтегрувавши останній вираз за об'ємом  $W$ , отримаємо сумарну масу частинок об'ємом  $W$  у момент  $t'$ :

$$\int_W \rho'(\vec{r}', t') dw = \sum_{k=1}^n m_k \int_W \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_k(t')) dw = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Отже, ввели до розгляду спеціальну функцію, що є лінійною комбінацією  $\delta$ -функцій Дірака з коефіцієнтами, які відображують маси частинок. Зрозуміло, що так введена функція є дуже негладкою, з нею неможливо отримати аналітичні результати. Замінімо її деякою іншою, яку назвемо щільністю. Для цього спочатку введемо усереднену функцію, а за її допомогою зро-



бимо локальне усереднення функції  $\rho'(r',t')$  у кожній точці  $r'_k(t')$ .

Уведемо усереднену функцію  $R(\bar{r} - \bar{r}', t - t')$ , що задовольняє вимоги:

1)  $R(\bar{r} - \bar{r}', t - t') \equiv R_0 [(\bar{r} - \bar{r}')^2] \cdot T[(t - t')^2]$ , тобто функція  $R(\cdot)$  дорівнює добутку двох функцій різних аргументів.

2)  $R(\bar{r} - \bar{r}', t - t') > 0$ , якщо одночасно  $|\bar{r} - \bar{r}'| < \lambda$  і  $|t - t'| < \tau$ . Тут  $\lambda, \tau$  – параметри усереднення у просторі й за часом, і  $R(\bar{r} - \bar{r}', t - t') \equiv 0$  в іншому випадку. Таким чином, функція  $R(\cdot)$  виконує усереднення в досить малому циліндрі розширеного фазового простору.

3) Функції  $R_0 [(\bar{r} - \bar{r}')^2]$  і  $T[(t - t')^2]$  мають необхідний степінь гладкості.

4) Інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} R(\bar{r} - \bar{r}', t - t') dw_{r'}$   $= \frac{4}{3} \pi \lambda^3 \cdot 2\tau = 2W_\lambda \cdot \tau$ , де інтегрування здійснюється за всім розширеним фазовим простором, а  $W_\lambda = \frac{4\pi\lambda^3}{3}$  (об'єм кулі радіусом  $|\bar{r} - \bar{r}'| \leq \lambda$ ).

За допомогою введеної усередненої функції виконаємо усереднення узагальненої щільності  $\rho'(\bar{r}', t')$ :

$$\begin{aligned} \rho(\bar{r}, t) &= \frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(\bar{r}', t') R(\bar{r} - \bar{r}', t - t') dw_{r'} = \\ &= \frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^m m_k \delta(\bar{r} - \bar{r}'_k(t')) R(\bar{r} - \bar{r}'_k(t'), t - t') dw_{r'} = \\ &= \frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(\bar{r} - \bar{r}'_k(t'), t - t') dt', \end{aligned}$$

тобто одержимо

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(\vec{r} - \vec{r}'_k(t'), t - t') dt'.$$

Усереднення за простором дозволяє перейти від дискретних змінних до *неперервних*. Фактично відбувається заміна дельта-функції деякою функцією, досить гладкою, але локально близькою до дельта-функції. Усереднення за часом пов'язане з тим, що в моменти зіткнення частинок швидкості розриваються, тобто радіус-вектор  $\vec{r}'_k(t')$  є кусково-диференційованою функцією.

Покажемо, що введена функція щільності  $\rho(\vec{r}, t)$  задовольняє основну властивість – інтеграл за фіксованим об'ємом дорівнює масі, що перебуває в цьому об'ємі.

Проінтегруємо щільність  $\rho(\vec{r}, t)$  за об'ємом  $W$  і одержимо

$$\mu = \int_W \rho(\vec{r}, t) dw_r = \sum_{k=1}^n m_k \frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_W R(\vec{r} - \vec{r}'_k(t'), t - t') dw_r.$$

Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_W R(\vec{r} - \vec{r}'_k(t'), t - t') dw_r$$

згідно з умовою, накладеною на усереднену функцію  $R(\vec{r} - \vec{r}'_k(t'), t - t')$  малістю за змінними  $\lambda$ :  $|\vec{r} - \vec{r}'| < \lambda$  та  $\tau$ :  $|t - t'| < \tau$ , за визначенням дорівнює  $2\tau W_\lambda$ . Тому  $\mu$  – повна маса часток об'ємом  $W$  у момент  $t$ . Отже, усереднена функція  $\rho(\vec{r}, t)$  зберігає основну властивість узагальненої щільності, інтеграл за цією функцією дорівнює масі, що перебуває в розглянутому об'ємі, і саме тому її називають щільністю.

Одержимо основне рівняння для функції щільності, що називається *рівнянням нерозривності*. Продиференціюємо  $\rho(\vec{r}, t)$  за часом і, ураховуючи гладкість згладжувальної функції  $R(\vec{r} - \vec{r}'_k(t'), t - t')$ , одержимо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} R(\vec{r} - \vec{r}'_k(t'), t - t') dt'.$$

Неважко бачити, що

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{d\bar{r}'_k(t')}{dt'}$$

Позначимо через  $\frac{d\bar{r}'_k(t')}{dt'} = \bar{V}'_k(t')$ . Тоді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial R}{\partial t'} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{r}} \cdot \bar{V}'_k(t') \right) dt'$$

За другою властивістю функції  $R(\cdot)$  одержуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial R}{\partial t'} dt' &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{\partial R}{\partial t'} dt' = \lim_{T \rightarrow +\infty} R \Big|_{t'=-T}^{t'=T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} [R(\bar{r} - \bar{r}'_k(T), t - T) - R(\bar{r} - \bar{r}'_k(-T), t + T)] = 0. \end{aligned}$$

Другий підінтегральний доданок

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{r}} \bar{V}'_k = \frac{\partial R}{\partial x} u'_k + \frac{\partial R}{\partial y} v'_k + \frac{\partial R}{\partial z} w'_k, \quad \bar{V}'_k = (u'_k, v'_k, w'_k).$$

Оскільки швидкість не залежить від поточної координати, то маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial R}{\partial x} u'_k + \frac{\partial R}{\partial y} v'_k + \frac{\partial R}{\partial z} w'_k \right) dt' = \\ &= -\operatorname{div} \left[ \frac{1}{2W_\lambda \cdot \tau} \sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}'_k(t') R(\bar{r} - \bar{r}'_k(t'), t - t') dt' \right]. \end{aligned}$$

За аналогією з усередненням щільності введемо середнє значення швидкості частинки в точці  $\bar{r}$  у момент  $t$ :

$$\bar{V}(\bar{r}, t) = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}'_k(t') R(\bar{r} - \bar{r}'_k(t'), t - t') dt'}{\sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(\bar{r} - \bar{r}'_k(t'), t - t') dt'}.$$

Остаточно перепишемо останнє рівняння:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0.$$

Це рівняння називається *рівнянням нерозривності середовища*. Воно відіграє важливу роль у механіці рідини й газів.

Розглянемо зміст рівняння нерозривності. Проінтегруємо рівняння за деяким об'ємом  $W$ . Одержимо

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dw_r + \int_W \operatorname{div}(\rho \vec{V}) dw_r = 0.$$

Перший інтеграл запишемо у вигляді  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_W \rho dw_r \right]$ . Він є зміною маси рідини, що міститься в об'ємі  $W$ , за одиницю часу в момент  $t$ .

Другий інтеграл за формулою Остроградського перетвориться на поверхневий інтеграл

$$\int_W \operatorname{div}(\rho \vec{V}) dw_r = \int_S (\rho \vec{V}) \vec{n}_r dS_r,$$

де  $S$  є поверхнею, що обмежує об'єм  $W$ ,  $\vec{n}_r$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до площини  $dS_r$ . Інтеграл дорівнює кількості маси, що витікає через поверхню  $S$  з об'єму  $W$  за одиницю часу в момент  $t$ . Проінтегроване рівняння нерозривності

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dw_r + \int_W \operatorname{div}(\rho \vec{V}) dw_r = 0$$

є *рівнянням балансу мас (закон збереження мас)*.

Розглянемо частинні випадки. Якщо щільність середовища не залежить від часу, то  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Тоді рівняння набуває вигляду

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0.$$

Якщо рідина така, що не стискається, тобто  $\rho = \text{const}$ , то одержуємо *стаціонарне рівняння нерозривності*

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Якщо вектор швидкості  $\vec{V} = (u, v, w)$ , то рівняння нерозривності записуємо у традиційному вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

## 4.2. Рівняння динаміки ідеальної рідини

Для складання рівняння руху рідини використаємо закон зміни імпульсу механічної системи. Обчислимо об'єм рідини й порахуємо його імпульс в момент  $t$ . Імпульс рідини, що міститься в об'ємі  $W$ ,

$$\vec{P}_w = \int_W \rho(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) d\vec{w}_r .$$

Закон зміни імпульсу, як і для твердого тіла, має вигляд

$$\frac{d\vec{P}_w}{dt} = \vec{F}_w ,$$

де  $\vec{F}_w$  – повний вектор усіх *зовнішніх сил*, прикладених до об'єму. На відміну від твердого тіла, для ідеальної рідини можна виділити два класи сил, що діють на неї. Ними є *об'ємні* (або масові) і *поверхневі сили*. Під об'ємними розуміють сили, що діють на одиницю об'єму (гравітаційні, магнітні, електростатичні). Поверхневі діють на одиницю поверхні. Однак фактично матимемо справу не із самими силами, а із *щільністю їх розподілу*.

Для об'ємних сил

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}(\vec{r}, t)}{\rho(\vec{r}, t) \Delta W} = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}(\vec{r}, t)}{\Delta W} .$$

Переходячи до границі, одержуємо

$$d\vec{F} = \rho \vec{f} d\vec{w} .$$

Аналогічно поверхневі сили задаються *поверхневим натягом*

$$\vec{\sigma}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Sigma}(\vec{r}, t)}{\Delta S} ,$$

де  $\vec{\Sigma}(\vec{r}, t)$  – повний вектор сил, прикладений до елемента площини  $\Delta S$ . Звідси

$$d\vec{\Sigma}(\vec{r}, t) = \vec{\sigma} ds .$$

Тому повний вектор зовнішніх сил, прикладений до об'єму  $W$ ,

$$\vec{F}_w = \int_W \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t) dw_{\vec{r}} + \int_S \vec{\sigma}_{\vec{n}} ds_{\vec{r}} .$$

Тут  $S$  – поверхня, що обмежує об’єм  $W$ ,  $\vec{\sigma}_{\vec{n}}$  – проекція  $\vec{\sigma}$  на вектор зовнішньої нормалі до поверхні  $S$ ,  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  ( $\vec{n}$  – зовнішня нормаль, тобто  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ ).

Накладемо на розглянуту модель деякі обмеження. Вважати-мемо рідину ідеальною, тобто зневажатимемо тертям. У цьому випадку вектор  $\vec{\sigma}_{\vec{n}}$

$$\vec{\sigma}_{\vec{n}} = -p\vec{n},$$

де  $p = p(\vec{r}, t)$  – скалярна величина, що називається тиском.

Основною властивістю ідеальної рідини є така умова (*закон Паскаля*): *величина нормального тиску в потоці не залежить від напрямку площадки, до якої він прикладений*. Тому

$$\vec{F}_w = \int_W \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t) dw_r - \int_S p(\vec{r}, t) \vec{n}(\vec{r}, t) ds_r .$$

За формулою Остроградського перетворимо поверхневий інтеграл на об’ємний:

$$\int_S p(\vec{r}, t) \vec{n}(\vec{r}, t) ds_r = \int_W \overline{\text{grad}} p(\vec{r}, t) dw_r .$$

Звідси

$$\vec{F}_w = \int_W \left[ \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t) - \overline{\text{grad}} p(\vec{r}, t) \right] dw_r .$$

Повернемося до рівняння зміни імпульсу

$$\frac{d\vec{P}_w}{dt} = \vec{F}_w, \quad \vec{P}_w = \int_W \rho(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) dw_r .$$

У рівняннях динаміки істотним моментом є те, що похідна обчислюється вздовж руху.

Позначимо через  $r_0(x_0, y_0, z_0)$  змінні Лагранжа, через  $r(x, y, z)$  – змінні Ейлера. У змінних Ейлера параметри в момент  $t$  належать до даної точки простору (*рівняння нерозривності*). У змінних Лагранжа всі параметри середовища в момент  $t$  відно-

сяться до точки з початковим положенням  $r_0(x_0, y_0, z_0)$ . Тому похідна за часом  $t$  від деякої функції  $\varphi(\cdot)$  у змінних Ейлера

$$\frac{d}{dt} \varphi = \frac{d\varphi}{dt} + (\overline{\text{grad}} \varphi, \vec{V})$$

(повна похідна вздовж розв'язків системи). Позначимо

$$I[r_0, t] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}, \quad \begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

якобіан перетворення однієї системи координат на іншу. Тоді об'єми пов'язані співвідношенням  $dw_r = I[r_0, t] dw_{r_0}$ .

Оскільки брати похідну від об'єму, що змінюється, важко, то здійснимо перетворення. Спочатку перейдемо до *рівняння зміни імпульсу в лагранжеві системі координат*. Потім обчислимо похідну (покладаючи об'єм сталим) і знову повернемося до вихідної системи координат. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_w}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{w_0} (\rho'(r_0, t) \vec{V}'(r_0, t)) I(r_0, t) dw_{r_0} \right] = \\ &= \int_{w_0} \left[ \frac{d}{dt} (\rho'(r_0, t) \vec{V}'(r_0, t)) + \rho'(r_0, t) \vec{V}'(r_0, t) \frac{1}{I[r_0, t]} \frac{dI[r_0, t]}{dt} \right] I[r_0, t] dw_{r_0}. \end{aligned}$$

Оскільки об'єм  $W_r$  при русі складається з одних і тих самих частинок, то його маса

$$m_w = \int_w \rho(r, t) dw_r,$$

а оскільки вона не змінюється, то

$$\frac{d}{dt} m_w = \frac{d}{dt} \left\{ \int_w \rho(r, t) dw_r \right\} = 0.$$

При переході до нових змінних отримаємо

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{W_0} \rho'(r_0, t) J(r_0, t) dw_{r_0} \right\} = 0.$$

Оскільки змінна  $W_0$  не залежить від часу, то, обчисливши похідну, маємо

$$\int_{W_0} \left\{ \frac{\partial \rho'(r_0, t)}{\partial t} J(r_0, t) + \rho'(r_0, t) \frac{\partial J(r_0, t)}{\partial t} \right\} dw_{r_0} = 0.$$

Унаслідок довільності об'єму  $W_0$  із рівності нулю інтеграла випливає рівність нулю підінтегрального виразу, тобто

$$\frac{\partial \rho'(r_0, t)}{\partial t} J(r_0, t) + \rho'(r_0, t) \frac{\partial J(r_0, t)}{\partial t} = 0.$$

Звідси

$$\rho'(r_0, t) \frac{1}{J(r_0, t)} \frac{\partial J(r_0, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \rho'(r_0, t)}{\partial t}.$$

Оскільки виконується рівняння нерозривності, то

$$\rho'(r_0, t) \frac{1}{J(r_0, t)} \frac{\partial J(r_0, t)}{\partial t} = \rho'(r_0, t) \operatorname{div} \bar{V}'(r_0, t).$$

Повертаючись до вихідних змінних, одержуємо

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{P}_w}{dt} = \\ & = \int_{W_0} \left[ \frac{d}{dt} (\rho'(r_0, t) \bar{V}'(r_0, t)) + \rho'(r_0, t) \bar{V}'(r_0, t) \frac{1}{I[r_0, t]} \frac{dI[r_0, t]}{dt} \right] I[r_0, t] dw_{r_0} = \\ & \int_W \left[ \frac{d}{dt} (\rho(r, t) \bar{V}(r, t)) + \rho(r, t) \bar{V}(r, t) \operatorname{div} \bar{V}(r, t) \right] dw_r. \end{aligned}$$

Порівнюючи сили, маємо

$$\int_W \left[ \frac{d}{dt} (\rho \bar{V}) + \rho \bar{V} \operatorname{div} \bar{V} \right] dw_r = \int_W \left[ -\overline{\operatorname{grad} p}(\bar{r}, t) + \rho(\bar{r}, t) \bar{f}(\bar{r}, t) \right] dw_r.$$



Згідно з довільністю об'єму  $W$  інтеграли рівні тоді й тільки тоді, коли рівні підінтегральні вирази. Звідси одержуємо систему рівнянь

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{V}) + \rho \vec{V} \operatorname{div} \vec{V} = -\overline{\operatorname{grad}} p(\vec{r}, t) + \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t)$$

або

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} \right) = -\overline{\operatorname{grad}} p(\vec{r}, t) + \rho \vec{f}(\vec{r}, t).$$

Оскільки вираз у дужках дорівнює нулю (рівняння нерозривності), то остаточно маємо

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \overline{\operatorname{grad}} p(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t).$$

Це *рівняння руху ідеальної рідини (Ейлера)*.

Ліворуч стоїть повна похідна вздовж руху. Ураховуючи  $\vec{V} = (u, v, w)$  і взявши повну похідну вздовж руху системи, розпишемо покоординатно та одержимо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z. \end{cases}$$

Додавши рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0,$$

отримаємо систему чотирьох рівнянь із п'ятьма невідомими, а саме: трьох складових вектора швидкості  $\vec{V} = (u, v, w)$ , функцію щільності  $\rho(\vec{r}, t)$  і тиску  $p(\vec{r}, t)$ . Векторне поле  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$  об'ємних сил вважаємо заданим. Щоб замкнути систему, необхідне ще одне рівняння – *рівняння термодинамічного стану* даної рідини, що пов'язує щільність і тиск:

$$\rho = \rho(p).$$

Рідини із зазначеними залежностями називаються *баротропними*.

Накладемо обмеження на зовнішні сили. Нехай вони потенціальні, тобто зумовлені наявністю потенціального поля, та існує скалярна функція  $U(r)$  така, що

$$\vec{f} = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

Тоді рівняння динаміки ідеальної рідини можна записати так:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases}$$

де

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)},$$

або у векторному вигляді

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - [\vec{V}, \text{rot} \vec{V}] = -\frac{\partial B}{\partial r},$$

де

$$\text{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\},$$

$B = \frac{1}{2}V^2 + P(p) + U$  – тричлен Бернуллі. Вихор  $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V}$  є важливою характеристикою рідини. Він характеризує обертальну складову рідини в малому околі точки  $r(x, y, z)$ .

Розглянемо більш простий випадок. Нехай є рідина для якої характерний *безвихровий рух*, тобто рух, при якому вихор відсутній і

$$\operatorname{rot} \bar{V} = 0.$$

При такому русі елементарні об'єми рідини виконують лише поступальний рух, що супроводжується неперервним деформуванням.

За умови відсутності вихору векторне поле швидкості  $\bar{V}(r, t)$  має потенціал  $\varphi(r, t)$ , тобто існує функція  $\varphi(r, t)$ , для якої

$$\bar{V} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \left( u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

У цьому випадку рівняння руху має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B \right) = 0, \quad B = \frac{1}{2} V^2 + P(p) + U.$$

Звідси

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + P(p) + U = \Phi(t)$$

або

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + P(p) + U = \Phi(t),$$

де  $\Phi(t)$  – функція часу, обумовлена граничними умовами. Отримане співвідношення називається *інтегралом Коші – Лагранжа*.

Якщо потік *стаціонарний* (не змінюється з часом), то одержуємо *інтеграл Бернуллі*

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + P(p) + U = \text{const.}$$

### 4.3. Плоскі течії

Найконструктивніші результати отримані для плоских течій, тобто таких, що змінюються у просторі змінних  $x$ ,  $y$  та часі  $t$ . Вектор швидкості  $\vec{V}$  має дві складові  $\vec{V} = (u, v)$ , вектор вихору  $\vec{\Omega}$  – одну скалярну складову

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega.$$

Тому рівняння руху мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v\Omega + \frac{\partial B}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\Omega + \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad [\vec{V}, \text{rot}\vec{V}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & \Omega \end{vmatrix} = \{v\Omega, -u\Omega, 0\}.$$

Прикладами математичних моделей плоских течій можуть бути обтікання повітрям крил літаків великої довжини і сталого перерізу, поширення плоских хвиль тощо.

Продиференціюємо друге рівняння за змінною  $x$ , а перше – за змінною  $y$  та відніmemo від другого перше. Одержимо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega + \frac{\partial}{\partial x} (u\Omega) + \frac{\partial}{\partial y} (v\Omega) = 0,$$

тобто

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega + \text{div}(\Omega \vec{V}) = 0.$$

Це рівняння за формою подібне до рівняння нерозривності

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0.$$

Рівняння нерозривності є диференціальною формою закону збереження мас. Отримане рівняння, у свою чергу, є диференціальною формою закону збереження сумарного вихору, що міститься в одиниці об'єму.

Якщо розглядати стаціонарне безвихрове обтікання плоского профілю нестисливої рідини, то рівняння набудуть вигляду:

– умова відсутності вихору:  $\Omega = \Omega_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ;

– рівняння нерозривності:  $\operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .

Додавши інтеграл Бернуллі  $\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + P(p) + U = \text{const}$ ,

$\vec{V} = (u, v)$ , де  $P(p)$  – відома функція тиску  $p$ , одержимо замкнену систему трьох рівнянь відносно невідомих функцій  $\vec{V} = (u, v)$  та  $p$ .

Припустимо, що зовнішні сили відсутні, тобто  $U = 0$ . Зазвичай на функції  $\vec{V}$  та  $p$  накладають умови обмеженості на нескінченності, тобто

$$\vec{V}_\infty = \text{const}, \quad p_\infty = \text{const}.$$

За граничні на контурі профілю вибирають умови непротікання

$$\vec{V}_n(r)|_\Gamma = u(r)n_x + v(r)n_y|_\Gamma = \vec{V} \cdot \vec{n}|_\Gamma = 0,$$

де  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  – вектор нормалі до контуру профілю в точці  $r$

на границі  $\Gamma$ . Якщо покласти  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , де  $\psi = \psi(x, y)$  –

деяка неперервно диференційована функція з певним гідродинамічним змістом, то

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Функція  $\psi(x, y)$  називається *функцією струму*. Неважко бачити, що

$$\vec{V} \frac{\partial \psi}{\partial r} = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Таким чином, градієнт функції  $\psi(x, y)$  ортогональний до вектора швидкості  $\vec{V}$ . Вектор швидкості  $\vec{V}$ , згідно з умовою *непротікання*, напрямлений за дотичною до ліній струму, що збігаються із траєкторіями частинок. Звідси функція  $\psi(x, y)$  зберігає

стале значення вздовж ліній струму. Іншими словами, *сім'я ліній рівня* функції  $\{\psi(x, y)\} : \psi(x, y) = c$  є *лініями струму*.

Якщо існує потенціал швидкостей, тобто функція  $\phi(x, y)$  така, що

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v,$$

то умова відсутності вихору  $\text{rot} \vec{V} = 0$  ( $\text{rot} \vec{V} = \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ )

еквівалентна виконанню рівняння

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Причому потенціал швидкостей  $\phi(x, y)$  і функція струму  $\psi(x, y)$  пов'язані співвідношеннями  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , тоб-

то функції  $\phi(x, y)$  та  $\psi(x, y)$  задовольняють умову *Коші – Рімана*. Отже, функція комплексної змінної  $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  є аналітичною.

Таким чином, отримуємо твердження: будь-який потенціальний плоский рух рідини відповідає аналітичній функції комплексної змінної, що складається з *потенціалу швидкостей* (дійсна частина) і *функції струму* (уявна частина).

#### 4.4. Обтікання кругового циліндра

Нехай на круговий циліндр радіусом  $r = a$  набігає плоский потік рідини, що має на нескінченності *сталу* швидкість  $u$ . У випадку *стаціонарного руху* можна цю задачу розглядати як рух циліндра зі сталою швидкістю  $u$  відносно *нерухомої* рідини. Пов'яжемо з циліндром *нерухому систему* координат і напрямимо вісь  $Ox$  паралельно швидкості руху циліндра.

На поверхні циліндра виконуються граничні умови непротікання

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = u \frac{\partial y}{\partial s},$$

де  $ds$  – елемент дуги на контурі. У випадку поступального руху зі швидкістю  $u$  цю умову можна проінтегрувати ( $u = \text{const}$ ). Тоді

$$\Psi|_{r=a} = uy + c.$$

Отже, одержали рівняння Лапласа

$$\Delta \Psi(x, y) = 0$$

із граничними умовами:

$$1) \Psi(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = uy + c,$$

$$2) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \rightarrow 0, \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty.$$

Друга умова означає, що функція

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_x - i v_y$$

поза колом є аналітичною й перетворюється на нуль у нескінченно віддаленій точці, тобто

$$w = c_1 \ln z - \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} - \dots$$

Поклавши  $c_k = A_k + iB_k$ , визначимо сталі  $A_k$  та  $B_k$  із граничних умов

$$\psi = ua \sin \theta + c$$

(заміна  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ , тобто  $z = ae^{i\theta}$ ). Одержимо

$$A_1 = 0, A_2 = ua^2, A_3 = 0,$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}, B_2 = 0, B_3 = 0.$$

Звідси

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - u \frac{a^2}{z},$$

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - u \cos \theta \frac{a^2}{r}, \quad \Psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + u \sin \theta \frac{a^2}{r}.$$

Таким чином, комплексний потенціал потоку, що обтікає нерухомий циліндр на нескінченності зі швидкістю  $u$ , запишемо рівнянням

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + uz + \frac{ua^2}{z}.$$

#### 4.5. Рівняння газової динаміки

Рівняння газової динаміки в найпростішому скалярному випадку для одновимірного руху (у напрямку  $Ox$ ) мають вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \quad (\text{рівняння нерозривності});$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dp}{dx} \quad (\text{рівняння руху});$$

$$p = f(\rho, T) \quad (\text{рівняння стану}).$$

Отже, рівняння газодинаміки є рівняннями руху *ідеальної стисливої рідини* за відсутності зовнішніх сил.

#### 4.6. Закон збереження енергії в газах

Енергію одиниці об'єму газу можна записати як

$$E = \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho \varepsilon.$$

Тут перший член є *кінетичною енергією*, другий – *внутрішньою енергією*,  $\varepsilon$  визначає *внутрішню енергію одиниці маси*. Для ідеального газу

$$\varepsilon = c_v T,$$

де  $c_v$  – теплоємність,  $T$  – температура. Зміна енергії за одиницю часу

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon).$$

Використовуючи рівняння газодинаміки для першого члена, одержуємо



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) &= \frac{V^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) + \rho V \left[ -V \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right] = \\ &= -\frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) - \rho V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) - V \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Розглянемо другий доданок. *Перший принцип термодинаміки* виражає закон збереження енергії

$$dQ = d\varepsilon + pd\tau,$$

де  $dQ$  – кількість тепла, отримана (віддана) системою ззовні,  $pd\tau$  – робота, витрачена при зміні об'єму на величину  $d\tau$

( $\tau = \frac{1}{\rho}$  – питомий об'єм),  $d\varepsilon$  – зміна внутрішньої енергії.

Якщо теплообміну із середовищем немає, то

$$dQ = 0,$$

звідки

$$d\varepsilon = -pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Тому

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \varepsilon d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho = \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) d\rho = \omega d\rho,$$

де  $\omega = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$  – *теплова функція*, чи теплоємність одиниці маси.

Похідна  $\partial\omega/\partial x$  задовольняє рівняння

$$\rho V \frac{\partial \omega}{\partial x} = \rho V \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = \rho V \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] = V \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Таким чином, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varepsilon) = \\ &= \left[ -\frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) - \rho V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) - V \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varepsilon) = \end{aligned}$$

$$= \left[ -\frac{\partial}{\partial x} [V^2 \rho V] - \rho V \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \omega \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Рівняння нерозривності запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [V^2 \rho V] - \rho V \frac{\partial \omega}{\partial x} - \omega \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [V^2 \rho V + \omega \rho V] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho V \left( \frac{V^2}{2} + \omega \right) \right]. \end{aligned}$$

Остаточно отримали співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho \varepsilon \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho V \left( \frac{V^2}{2} + \omega \right) \right].$$

Для з'ясування фізичного змісту проінтегруємо його за об'ємом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (\rho V^2 + \rho \varepsilon) dx \right] = -\rho V \left( \frac{V^2}{2} + \omega \right) \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

У лівій частині виразу відображена зміна енергії за одиницю часу на інтервалі  $x(t) > N$ , у правій – потік енергії, що змінюється за одиницю часу в розглянутому об'ємі.

#### **4.7. Математичний апарат, використовуваний при моделюванні систем, пов'язаних із твердими тілами, рідинами, газами**

При виведенні основних законів природи (збереження енергії, маси, імпульсу тощо) використовують принцип найменшої дії (Гамільтона). Для складання рівнянь руху твердого тіла застосовують закони зміни імпульсу й моменту імпульсу системи матеріальних точок, ураховуючи, що кількість степенів вільності твердого тіла дорівнює шести так само, як кількість рівнянь, отриманих унаслідок застосування цих законів. Отже, для однієї

матеріальної точки маємо замкнену систему звичайних диференціальних рівнянь *другого порядку*.

У рідинах і газах через відсутність *жорстких* зв'язків між елементами кількість *степенів вільності системи* практично нескінченна. Для запобігання такої ситуації застосовують *процедуру усереднення* з подальшим переходом до моделі з *розподіленими параметрами й характеристиками*. Фактично це означає *перехід до системи з нескінченною кількістю степенів вільності*. Це зумовлює використання математичного апарату диференціальних рівнянь із частинними похідними. Якщо у випадку дослідження динаміки твердих тіл маємо справу зі *скалярними й векторними функціями часу*, то в рідинах і газах – зі *скалярними й векторними полями*.

## 5. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ДИНАМІЦІ ПОПУЛЯЦІЙ

### 5.1. Основні положення моделювання динаміки популяцій

Розглянемо ізольовану *популяцію* або сукупність взаємодіючих популяцій. Під популяцією розумітимемо сукупність індивідів, що можуть давати життєздатне потомство й піддаються впливу однакових внутрішніх і зовнішніх факторів. Припустимо, що ареал їх проживання обмежений.

Основним припущенням, що використовується при побудові математичних моделей динаміки зміни чисельності популяцій, є *балансове співвідношення* між різними групами у структурі популяцій під впливом факторів різної природи. В основі побудови балансових співвідношень лежать прості припущення, що приріст чисельності хижаків пов'язаний із швидкістю споживання жертв, але при цьому споживанні неминучою є втрата біомаси і, отже, кількість народжених хижаків не може перевищувати кількості споживаних жертв. З даної території не може *мігрувати* популяцій більше, ніж проживає на ній.

Якщо припустити, що зовнішніх впливів немає, то баланс чисельності популяції складається з таких основних факторів: *народжуваність, смертність, імміграція та еміграція*. Для зручності покладемо, що чисельність популяції є величиною неперервною.

Для такого класу задач нині існують досить непогані математичні моделі, що використовують апарат диференціальних і різницевих рівнянь.

Процес зміни чисельності популяції за малий проміжок часу  $\Delta t$  можна описати рівнянням

$$x(t + \Delta t) = x(t) + B(t, x(t))\Delta t - D(t, x(t))\Delta t,$$

де  $B(t, x(t))$  – кількість *народжених* і таких, що *емігрували*,  $D(t, x(t))$  – кількість *померлих* і таких, що *іммігрували*. Очевидно, що

$$B(t, 0) \equiv 0, D(t, 0) \equiv 0.$$

Перейшовши до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ , одержимо диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) = B(t, x(t)) - D(t, x(t)).$$

## 5.2. Найпростіші моделі динаміки популяцій

Однією з перших робіт із динаміки популяцій була робота *Томаса Мальтуса* "Досвід закону про народонаселення" (1797). У цій роботі модель мала вигляд звичайного скалярного лінійного диференціального рівняння зі сталим коефіцієнтом

$$\dot{x}(t) = kx(t), \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Змінні визначали:  $x(t)$  – чисельність популяції в момент  $t$ ,  $k$  – інтенсивність народжуваності (смертності). Рівняння мало розв'язок

$$x(t) = x_0 e^{kt}, \quad t \geq 0.$$

Чисельність популяції залежно від знака  $k$  прямувала або до нескінченності, тобто  $x(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , або до нуля, тобто  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Модель досить адекватно описувала процес у малих проміжках часу за відсутності *саморегулювання*.

У 1825 р. Б. Гомпертц запропонував модель з обмеженою чисельністю популяції

$$\dot{x}(t) = a[\ln K - \ln x(t)]x(t),$$

де  $K$  – гранично припустима величина чисельності. У 1838 р. П. Ферхюльстом була запропонована модель динаміки популяції у вигляді нелінійного диференціального рівняння із квадратичною нелінійністю

$$\dot{x}(t) = \xi x(t) - \beta x^2(t),$$

де коефіцієнт  $\beta > 0$  визначав інтенсивність впливу *саморегуляції* на швидкість зростання чисельності популяції. Величина  $\beta x^2$  була членом, прямо пропорційним кількості зустрічей особин між собою.

Розділивши змінні в диференціальному рівнянні, отримуємо

$$\frac{dx}{x(\xi - \beta x)} = dt$$

або

$$\frac{1}{\xi} \frac{dx}{x} + \frac{\beta}{\xi} \frac{dx}{\xi - \beta x} = dt \Rightarrow \frac{1}{\xi} \ln x - \frac{1}{\xi} \ln |\xi - \beta x| = \frac{1}{\xi} \ln C + t,$$
$$\frac{1}{\xi} \ln \left| \frac{x}{\xi - \beta x} \right| = t + \frac{1}{\xi} \ln C \Rightarrow \frac{x}{\xi - \beta x} = C e^{\xi t}.$$

Звідси загальний розв'язок має вигляд

$$x(t) = \frac{\xi x_0 e^{\xi(t-t_0)}}{\xi - \beta x_0 [1 - e^{\xi(t-t_0)}]},$$

причому  $x(t) \rightarrow \xi/\beta$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Є багато експериментальних даних, що підтверджують цю модель. Однією з модифікацій моделі Ферхюльста є модель М. Розенцвейга

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \left[ 1 - \frac{x^q(t)}{b} \right], 0 < q < 1.$$

У цій моделі постулюється, що внутрішня популяційна конкуренція за великих значень слабша ніж раніше, але сильніша ніж за малих значень.

У моделі А. Д. Базикіна

$$\dot{x}(t) = \frac{rx^2(t)}{N + x(t)} - qx^2(t), \quad r, N, q > 0$$

започатковано спробу врахувати (для одновимірного випадку) наявність у популяції статеві структури, а саме: за малої чисельності популяції (при  $x(t) \ll N$ ) швидкість народжуваності пропорційна квадрату чисельності (кількості зустрічей особин), а за великої ( $x(t) > N$ ) – швидкість розмноження близька до  $rx(t)$ .

У загальному випадку методологія побудови моделей була такою. Вважалося, що швидкість народження в популяції пропорційна кількості особин, і моделі мали вигляд

$$\dot{x}(t) = K[x(t)]x(t),$$

де функція  $K(x)$  – коефіцієнт народжуваності, що задовольняє умови:

1)  $K(x)$  – диференційована майже в усіх точках  $x \in (0, +\infty)$  функція.

2) Існує інтервал, в якому  $K(x) > 0$ . Якщо такого інтервалу немає, тобто  $K(x) < 0$ , то  $x(t) \rightarrow 0$  і популяція вироджується.

3) Існує  $N > 0$  таке, що при  $x > N$  буде  $K(x) < 0$ , тобто чисельність популяції обмежена.

У подальших модифікаціях ураховувалися такі фактори:

1) Характеристика структур, зокрема, вікова. Розглядалася динаміка популяцій, поділених на вікові класи, динаміка популяцій із генетичною, статевою та іншими структурами.

2) У модель уводили додаткові змінні, що описували динаміку захворювань особин залежно від пори року.

3) Уводився фактор запізнення, обумовлений часом статевого дозрівання й періодичністю часу розмноження. Зокрема, Г. Хатчисон описував модель диференціальним рівнянням із запізненням

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)x(t - \tau), \tau > 0;$$

одна з модифікацій моделі В. Вольтерра зображувалась інтегральним рівнянням

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x^2(t) - \int_0^t x(s)f(s - \tau)ds.$$

### 5.3. Дискретні моделі популяції

Одним із класів моделей, що широко використовуються, є моделі, побудовані на основі рекурентних співвідношень. Однак слід зазначити, що в динаміці популяцій дискретність ураховують тільки при народженні (період розмноження у тварин), оскільки процес загибелі має неперервний характер.

Досить загальну дискретну модель динаміки популяцій можна описати рівнянням

$$x(k+1) = K[x(k)]x(k).$$

Якщо коефіцієнт народжуваності  $K(x) = \frac{a}{1+bx}$ , то модель називається *моделлю Скеллама*:

$$x(k+1) = \frac{a}{1+bx(k)} x(k).$$

Якщо  $K(x) = a(1-x)$ ,  $x_0 \in [0,1]$ , то маємо *логістичну модель*:

$$x(k+1) = ax(k)(1-x(k)).$$

Для опису динаміки чисельності риб П. Моран і Р. Ріккер застосували залежність

$$x(k+1) = Ae^{-\alpha x(k)} x(k), \alpha > 0.$$

У загальному випадку дискретна динамічна модель, що використовується в задачах моделювання динаміки популяцій, має вигляд

$$x(k+1) = K[x(k)], k = 0, 1, 2, \dots,$$

де функція  $K(x)$  задовольняє такі умови:

1)  $K(0) = 0$ , тобто якщо немає особин, то немає збільшення популяцій.

2) При  $x > 0$  буде  $0 \leq K(x) < \infty$ . Це забезпечує невід'ємність чисельності популяції.

3) Існує стала  $k > 0$  така, що при  $x > k$  виконується  $K(x) < x$ . Ця умова забезпечує обмеженість чисельності популяції в усі моменти часу.

Розглянемо скалярне різницеве рівняння

$$x(k+1) = F[x(k)], k = 0, 1, 2, \dots$$

Наведемо деякі відомості з теорії різницевого рівнянь. Послідовність  $x(0), x(1), \dots$ , одержана за допомогою різницевого рівняння, називається *траєкторією* руху. Значення  $x(k) \equiv \bar{x}$ , що є розв'язками рівняння

$$x = F(x),$$

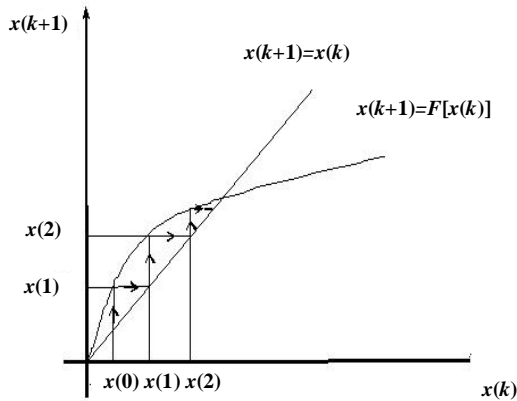
називаються *особливими точками* (стаціонарними розв'язками). Траєкторія, для якої за довільних  $m = 0, 1, \dots$  і фіксованого  $N > 0$  виконується  $x(m) = x(m+N)$ , називається *циклом* довжиною  $N$  (періодичною траєкторією).

Одним з апаратів дослідження скалярного рівняння

$$x(k+1) = F[x(k)], k = 0, 1, 2, \dots$$



є драбина Лемерея. На площині  $x(k), x(k+1)$  зображують два графіки (рис.5.1).



**Рис. 5.1**

Драбина Лемерея є послідовністю відображень

$$x(0) \rightarrow F[x(0)] = x_1 \rightarrow F[x(1)] = x_2 \rightarrow F[x(2)] = x_3 \dots$$

Очевидно, що точки перетину бісектриси першого координатного кута й функції  $F(x)$  будуть стаціонарними. Якщо у стаціонарній точці виконується умова  $\bar{x} : |F'(\bar{x})| > 1$ , то точка нестійка; якщо  $|F'(\bar{x})| < 1$ , то – стійка.

Цикл довжиною  $N = 2$  визначається з розв'язку рівняння

$$F(F(x)) = x,$$

а цикл довільної довжини  $N$  – з розв'язку рівняння

$$F(F \dots (F(x) \dots)) = x.$$

Наявність циклів різної величини та їх співвідношення у скалярному різницевому рівнянні ілюструє така теорема.

*Теорема (А. Н. Шарковського).* Для неперервного відображення прямої на себе справедливий ланцюг співвідношень

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow \dots \rightarrow 3 \cdot 2 \rightarrow 5 \cdot 2 \rightarrow 7 \cdot 2 \rightarrow 9 \cdot 2 \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow 3 \cdot 2^2 \rightarrow 5 \cdot 2^2 \rightarrow 7 \cdot 2^2 \rightarrow 9 \cdot 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^1 \rightarrow 1$$

З теореми випливає: якщо у відображень немає циклів довжиною 2, то циклів немає зовсім. Якщо ж є цикл довжиною 3, то

існують і всі перераховані далі цикли (цикл із періодом 3 породжує хаос).

Якщо математична модель, тобто функція  $F$ , залежить від деякого параметра, тобто має вигляд  $F(x, \alpha)$ , а параметр  $\alpha$  змінюється, то за деяких значень відбувається різка зміна фазового портрета (змінюється кількість точок спокою, циклів, їхня стійкість) – біфуркація динамічної системи. Наочне зображення біфуркацій дає біфуркаційна діаграма, тобто діаграма, що ілюструє появу біфуркаційних процесів.

Для прикладу розглянемо різницеве рівняння

$$x(k+1) = \frac{Ax(k)}{(1+x(k)) \exp\left\{-\frac{Bx(k)}{1+x(k)}\right\}}, \quad B=20, 0 < A < 10.$$

Неважко обчислити, що при  $0 < A < 1$  існує лише одна стійка точка спокою  $\bar{x}=0$ . При  $A=1$  вона переходить у нестійкий стан рівноваги, потім – знов у стійкий тощо.

Для різницевої моделі Скеллама

$$x(k+1) = \frac{ax(k)}{1+bx(k)}, \quad k=0,1,2,\dots, a>0, b>0,$$

де  $a$  – параметр, що характеризує максимальну плідність особин за низької чисельності популяції,  $a/b$  – максимально можлива чисельність, рівняння  $x = F(x)$ , що визначає точки спокою, має два розв'язки:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \frac{a-1}{b}.$$

Якщо  $a < 1$ , то точка  $\bar{x}_1 = 0$  є єдиною стаціонарною точкою ( $x > 0$ ).

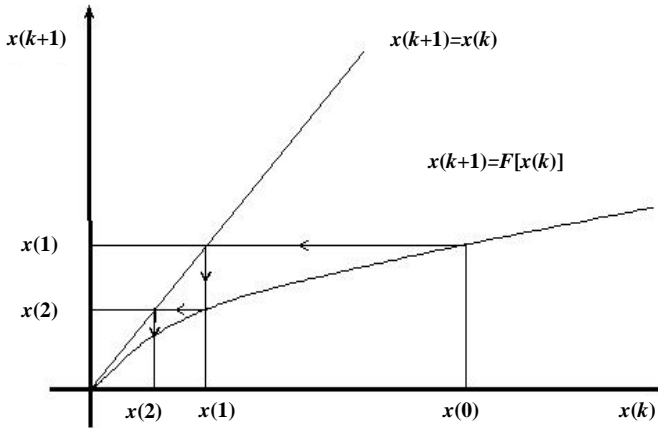


Рис. 5.2

Драбина Лемерея (рис.5.2) показує, що  $\bar{x} = 0$  – асимптотично стійкий стан рівноваги, тобто популяція вимирає. При переході через біфуркаційне значення  $a = 1$  з'являється ще один стаціонарний стан, причому  $F'(\bar{x}) = \frac{1}{a} < 1$ . Таким чином, стаціонарна точка  $\bar{x}_1 = 0$  стає нестійкою, а  $\bar{x}_2 = \frac{a-1}{b}$  – стійкою.

Перевіримо умову існування циклу 2. Розв'яжемо рівняння

$$F(F(x)) = \left( \frac{a \left( \frac{ax}{1+bx} \right)}{1+b \left( \frac{ax}{1+bx} \right)} \right) = x.$$

Маємо

$$\frac{a^2 x}{1+bx} = x \left[ 1+b \left( \frac{ax}{1+bx} \right) \right], \quad \frac{a^2 x - abx^2}{1+bx} = x, \quad x \neq 0, \quad x \neq \frac{a-1}{b},$$

$$a^2 - abx = 1+bx,$$

$$a^2 - 1 = (a+1)bx, \quad x = \frac{a^2 - 1}{b(a+1)} = \frac{a-1}{b}.$$

Таким чином, рівняння має лише два розв'язки, що є *стаціонарними точками*. Це означає, що періодичних траєкторій із періодом 2 немає (рис.5.3).

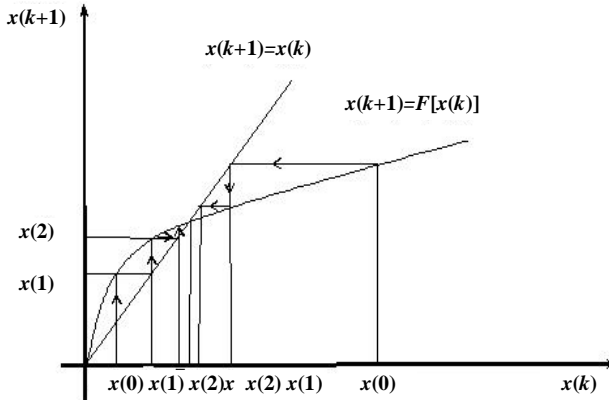


Рис. 5.3

Дискретну логістичну модель

$$x(k+1) = ax(k)(1-x(k)), x(0) \in [0,1]$$

вважають дискретним аналогом моделі Ферхюльста

$$\dot{x}(t) = x(t)(\xi - \beta x(t)).$$

Якщо  $a < 1$ , то графік  $F(x)$  розташований нижче бісектриси й популяція вироджується. При  $a > 1$  з'являється стаціонарний стан  $\bar{x} = \frac{a-1}{a}$ , стійкий при  $0 < a < 3$ . Дійсно,

$$|F'(\bar{x})| = \left| a(1-2\bar{x}) \Big|_{\bar{x} = \frac{a-1}{a}} = |2-a| < 1 \text{ при } 1 < a < 3.$$

Якщо значення параметра  $a$  перебільшує 3, то стаціонарна точка  $\bar{x}$  втрачає стійкість і народжується стійкий цикл довжиною 2. Подальше збільшення величини параметра приводить до біфуркацій подвоєння циклів. Нарешті, з'являються цикли всіх довжин, і виникає хаос.

#### 5.4. Двовимірні моделі

Розглянемо моделі співіснування двох типів (*Лотки – Вольтерра*).

1) Модель "Два види, що борються за спільну їжу".

Припустимо, що існують два види, які харчуються однаковою їжею. За кількості їжі, достатньої для повного задоволення обох видів, існують сталі додатні коефіцієнти приросту  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ . Якщо обидва види мешкають на обмеженій території, то при зростанні  $N_1$  та  $N_2$  (чисельності видів) кількість їжі буде зменшуватися. Це призводить до зменшення значень коефіцієнтів приросту. Нехай  $F(N_1, N_2)$  – кількість їжі, що поїдається в одиницю часу. Функція  $F(N_1, N_2)$  задовольняє умови

$$F(0, 0) = 0, \lim_{N_1 \rightarrow \infty} F(N_1, N_2) = \infty, \lim_{N_2 \rightarrow \infty} F(N_1, N_2) = \infty.$$

У цьому випадку за коефіцієнти приросту можна брати

$$k_1 = \xi_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2), k_2 = \xi_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2),$$

де  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$  – сталі, що визначають потребу в їжі для кожного з видів. Звідси одержуємо систему диференціальних рівнянь, що описують розвиток видів:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = [\xi_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)]N_1, \\ \dot{N}_2 = [\xi_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)]N_2. \end{cases}$$

Перепишемо її у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \ln N_1 = \xi_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2), \\ \frac{d}{dt} \ln N_2 = \xi_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2). \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння друге, одержимо

$$\gamma_2 \frac{d \ln |N_1|}{dt} - \gamma_1 \frac{d \ln |N_2|}{dt} = \xi_1 \gamma_2 - \xi_2 \gamma_1.$$

Проінтегруємо отримане рівняння

$$\frac{N_1^{\gamma_2}(t)}{N_2^{\gamma_1}(t)} = \frac{N_1^{\gamma_2}(t_0)}{N_2^{\gamma_1}(t_0)} e^{(\xi_1 \gamma_2 - \xi_2 \gamma_1)(t - t_0)}.$$

Дослідимо випадки:

а) Нехай  $\xi_1\gamma_2 - \xi_2\gamma_1 = 0$ , тобто  $\xi_1/\gamma_1 = \xi_2/\gamma_2$ . Тоді

$$\frac{N_1^{\gamma_2}(t)}{N_2^{\gamma_1}(t)} = \frac{N_1^{\gamma_2}(t_0)}{N_2^{\gamma_1}(t_0)} = \text{const}, \text{ тобто за пропорційності коефіцієнтів}$$

приросту  $\xi_1$  та  $\xi_2$  потреби в їжі  $\gamma_1, \gamma_2$  спостерігається сукупна динамічна рівновага й приросту популяції немає.

б) Нехай  $\xi_1/\gamma_1 \neq \xi_2/\gamma_2$  і, для визначеності,  $\xi_1/\gamma_1 > \xi_2/\gamma_2$ .

$$\text{Тоді } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_1^{\gamma_2}(t)}{N_2^{\gamma_1}(t)} = +\infty.$$

З реальних міркувань  $N_1(t)$  – обмежена величина. Тому  $N_2(t) \rightarrow 0$ . Таким чином, вид, для якого  $\xi_1/\gamma_2$  має менше значення, вимирає.

Через досить великий проміжок часу чисельністю другого виду можна знехтувати. Тоді диференціальне рівняння динаміки першого виду матиме вигляд

$$\frac{dN_1}{dt} = [\xi_1 - \gamma_1 F(N_1, 0)]N_1.$$

Проінтегрувавши його, одержимо

$$\int_{N_1^0}^{N_1} \frac{dN_1}{N_1[\xi_1 - \gamma_1 F(N_1, 0)]} = t - t_0.$$

Нехай  $N_1^* > 0$  – найменший корінь рівняння

$$\xi_1 - \gamma_1 F(N_1, 0) = 0,$$

причому  $N_1^0 < N_1^*, t > t^*$ , де  $N_1^* = N_1(t^*)$ . Тоді буде справедливим співвідношення

$$F(N_1, 0) - F(N_1^*, 0) \approx F'_{N_1}(N_1^*, 0)(N_1 - N_1^*).$$

Звідси

$$\begin{aligned} \xi_1 - \gamma_1 F(N_1, 0) &\approx \xi_1 - \gamma_1 \left[ \frac{\xi_1}{\gamma_1} + F'_{N_1}(N_1^*, 0)(N_1 - N_1^*) \right] = \\ &= -\gamma_1 F'_{N_1}(N_1^*, 0)(N_1 - N_1^*). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
t - t_0 &= \int_{N_0}^{N_1} \frac{dN_1}{-\gamma_1 F'_{N_1}(N_1^*, 0)(N_1 - N_1^*)N_1} = \\
&= -\frac{1}{\gamma_1 F'_{N_1}(N_1^*, 0)N_1^*} \ln \left[ \frac{N_1 - N_1^*}{N_1} \right] \frac{N_1}{N_1^0} = \\
&= -\frac{1}{\gamma_1 F'_{N_1}(N_1^*, 0)N_1^*} \ln \left[ \frac{N_1^0}{N_1} \cdot \frac{N_1 - N_1^*}{N_1^0 - N_1^*} \right].
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{N_1(t) - N_1^*}{N_1(t)} = \frac{N_1^0 - N_1^*}{N_1^0} e^{-\gamma_1 F'_{N_1}(N_1^*, 0)N_1^*(t-t_0)},$$

тобто

$$N_1(t) = \frac{N_1^* N_1^0 e^{\gamma_1 N_1^* F'_{N_1}(N_1^*, 0)(t-t_0)}}{N_1^* + N_1^0 \left[ e^{\gamma_1 N_1^* F'_{N_1}(N_1^*, 0)(t-t_0)} - 1 \right]}.$$

Таким чином, кількість індивідів першого типу при  $t \rightarrow +\infty$  прагне до скінченної границі  $N_1(t) \rightarrow N_1^*$ , а  $N_2(t) \rightarrow 0$ .

Розглянемо окремий випадок. Нехай функція  $F(N_1, N_2)$  має вигляд

$$F(N_1, N_2) = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Тоді, починаючи з моменту  $t = t_0$ , величина  $N_1$  змінюється за законом

$$\frac{dN_1}{dt} = (\xi_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1) N_1.$$

Звідси

$$t - t_0 = \int_{N_1^0}^{N_1} \frac{dN_1}{(\xi_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1) N_1}.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$t - t_0 = -\frac{1}{\xi_1} \ln \left[ \frac{N_1^0}{N_1} \cdot \frac{\lambda_1 \gamma_1 N_1 - \xi_1}{\lambda_1 \gamma_1 N_1^0 - \xi_1} \right].$$

Звідси

$$\frac{\lambda_1 \gamma_1 N_1(t) - \xi_1}{N_1(t)} = \frac{\lambda_1 \gamma_1 N_1^0 - \xi_1}{N_1^0} e^{-\xi_1(t-t_0)}.$$

Розв'язавши рівняння відносно  $N_1(t)$ , маємо

$$N_1(t) = \frac{\xi_1 N_1^0 e^{\xi_1(t-t_0)}}{\xi_1 + \lambda_1 \gamma_1 N_1^0 (e^{\xi_1(t-t_0)} - 1)},$$

причому

$$\lim N_1(t) = \frac{\xi_1}{\lambda_1 \gamma_1} < N_1^0.$$

2) Розглянемо випадок, коли є два види, з яких один харчується іншим (модель типу "хижак-жертва").

Нехай у середовищі є жертва, в якій коефіцієнт приросту дорівнює  $\xi_1 > 0$ , і хижак, що харчується жертвою. Коефіцієнт приросту хижака дорівнює  $-\xi_2$ ,  $\xi_2 > 0$ . Коли два такі види існують в обмеженому середовищі, то перший зростає тим повільніше, чим більше існує індивідів другого виду, а другий – тим швидше, чим більше кількість індивідів першого виду. Тому за коефіцієнти приросту можна брати

$$k_1 = \xi_1 - \gamma_1 N_2, \quad k_2 = -\xi_2 + \gamma_2 N_1, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0.$$

Це приводить до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\xi_1 - \gamma_1 N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = -(\xi_2 - \gamma_2 N_1) N_2. \end{cases}$$

Позначимо для зручності  $\xi_1 = \lambda_1, -\xi_2 = \lambda_2, -\gamma_1 = \mu_1, \gamma_2 = \mu_2$  і перепишемо систему в універсальному вигляді

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\lambda_1 + \mu_1 N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = (\lambda_2 + \mu_2 N_1) N_2. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на  $\mu_2$ , а друге – на  $\mu_1$  і віднімемо від першого рівняння друге:



$$\mu_2 \frac{dN_1}{dt} - \mu_1 \frac{dN_2}{dt} = \mu_2 \lambda_1 N_1 - \mu_1 \lambda_2 N_2.$$

Помноживши перше рівняння на  $\lambda_2/N_1$ , а друге – на  $\lambda_1/N_2$ , віднімаємо від другого перше:

$$\frac{\lambda_1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} - \frac{\lambda_2}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 \mu_2 N_1 - \lambda_2 \mu_1 N_2.$$

Оскільки праві частини рівні, то рівні й ліві. Одержуємо

$$\mu_2 \frac{dN_1}{dt} - \mu_1 \frac{dN_2}{dt} = \frac{\lambda_1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} - \frac{\lambda_2}{N_1} \frac{dN_1}{dt}.$$

Інтегруючи, маємо  $\mu_2 N_1 - \mu_1 N_2 = \lambda_1 \ln|N_2| - \lambda_2 \ln|N_1| + C$ . Звідси  $N_1(t)^{\lambda_2} e^{\mu_2 N_1(t)} = C \cdot N_2^{\lambda_1}(t) e^{\mu_1 N_2(t)}$ ,  $C = \text{const}$ .

Вивчимо розташування отриманих кривих на площині  $(N_1, N_2)$ . Повернувшись до вихідних значень параметрів, одержимо

$$\lambda_1 = \xi_1 > 0, \lambda_2 = -\xi_2 < 0, \mu_1 = -\gamma_1 < 0, \mu_2 = \gamma_2 > 0$$

$$N_1(t)^{-\xi_2} e^{\gamma_2 N_1(t)} = C N_2^{\xi_1}(t) e^{-\gamma_1 N_2(t)}.$$

Проведемо дві допоміжні криві:

$$L_1 : y = N_1^{-\xi_2}(t) e^{\gamma_2 N_1(t)}, \quad L_2 : x = N_2^{\xi_1}(t) e^{-\gamma_1 N_2(t)}$$

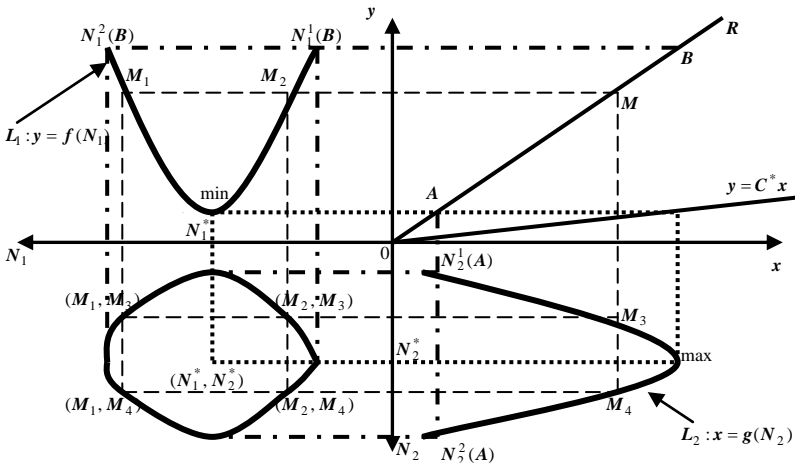


Рис. 5.4

Розв'язок рівняння визначається із співвідношення  $y = Cx$ .

Побудуємо на площині дві криві. Криві  $L_1 : y = N_1^{-\xi_2} e^{\gamma_2 N_1}$  та  $L_2 : x = N_2^{\xi_1} e^{-\gamma_1 N_2}$  мають екстремальні значення  $N_1^*$  і  $N_2^*$ , що, відповідно, дорівнюють

$$y' = \left[ -\xi_2 N_1^{-\xi_2-1} + \gamma_2 N_1^{-\xi_2} \right] e^{\gamma_2 N_1} = 0 \Rightarrow N_1^* = \frac{\xi_2}{\gamma_2};$$

$$x' = \left[ \xi_1 N_2^{\xi_1-1} - \gamma_1 N_2^{\xi_1} \right] e^{-\gamma_1 N_2} = 0 \Rightarrow N_2^* = \frac{\xi_1}{\gamma_1}.$$

При  $N_1 = N_1^*$  функція  $y = f(N_1)$  має мінімум і  $f(N_1) \xrightarrow{N_1 \rightarrow 0} +\infty, f(N_1) \xrightarrow{N_1 \rightarrow +\infty} +\infty$ . При  $N_2 = N_2^*$  функція  $x = g(N_2)$  має максимум і, відповідно,  $g(N_2) \xrightarrow{N_2 \rightarrow 0} 0, g(N_2) \xrightarrow{N_2 \rightarrow +\infty} 0$ . Точці  $(N_1^*, N_2^*)$  відповідає пряма

$AB$  із коефіцієнтом  $C^* = N_1^*/N_2^*$ .

Нехай пряма  $OR$  має кут нахилу до осі  $Ox$ , більший ніж  $C^*$ , тобто лежить вище  $y = C^* x$ , і точки  $A$  та  $B$  є перетинами прямої  $OR$  із дотичними  $f(N_1)$  та  $f(N_2)$  у точках екстремуму. Візьмемо довільну точку  $M$ , що лежить між  $A$  та  $B$ . Їй відповідають дві точки на кривій  $y = f(N_1)$  ( $M_1$  та  $M_2$ ) і дві – на кривій  $y = g(N_2)$  ( $M_3$  та  $M_4$ ). Проводячи через ці точки паралельні прямі, одержуємо у площині  $N_1$  та  $N_2$  чотири точки, яким відповідає одна точка  $M$  на прямій  $OR$ . Це точки

$$(M_1, M_3), (M_2, M_3), (M_1, M_4), (M_2, M_4).$$

Екстремальним значенням точок  $A$  та  $B$  відповідають точки

$$A: (N_1^*, N_2^1(A)), (N_1^*, N_2^2(A)), B: (N_1^1(B), N_2^*), (N_1^2(B), N_2^*).$$

Отже, при русі вздовж  $A < M < B$  маємо замкнену криву.

У результаті отримали сім'ю замкнених навколо особливої точки  $(N_1^*, N_2^*)$  кривих. При  $C \rightarrow C^*$  криві стягуються в точку.

## 5.5. Модель популяції Леслі

При вивченні екологічних процесів широкого вжитку набули математичні моделі різних типів – як неперервні, так і дискретні. Розглянемо дискретну модель вікової структури популяції – модель Леслі.

### 5.5.1. Лінійна стаціонарна дискретна модель Леслі. Методологія побудови моделі

Існують багато різноманітних математичних моделей динаміки популяцій, однак більшість із них описують тільки загальну кількість популяцій. Особливістю моделі Леслі є те, що вона враховує вікову структуру.

У життєвому циклі кожного виду можна виділити кілька стадій розвитку (комахи) або вікових ступенів (кількість років від народження у ссавців), тому популяції поділяють на кілька вікових груп. Спосіб розбиття популяції на групи визначається біологічними особливостями виду та специфікою задачі, на чому й заснована модель Леслі.

Розіб'ємо популяцію на кілька вікових класів  $i = \overline{1, n}$ . Нехай  $x_i(k)$  – кількість особин вікового класу  $i$  в момент часу  $k$ . Час  $k$  визначає дискретні моменти, що збігаються з моментами переходу з одної вікової групи в наступну.

Зміна структури популяції в часі складається з таких процесів. У момент часу  $k = 1, 2, \dots$  відбувається перехід популяції вікового класу  $i$  у віковий клас  $i + 1$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , причому частина популяції вмирає, а переходить лише  $p_i x_i(k)$ ,  $0 < p_i < 1$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Популяція вікового класу  $i = n$  вмирає повністю. Популяція новонародженого вікового класу  $i = \overline{1}$  складається із суми особин, що народились у кожному з  $i = \overline{2, n}$  класів із коефіцієнтами народжуваності  $f_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Отже,  $f_i$  – це середня кількість нащадків, яких народжує одна особина віком  $i$  за одиницю часу. За своєю суттю всі параметри  $f_i$  є невід’ємними величинами, а  $f_i = 0$  тоді й тільки тоді, коли відповідний  $i$ -й віковий клас не залишає нащадків. Тоді чисельність особин наймолодшого віку в момент часу  $(k+1)$  визначається виразом

$$x_1(k+1) = \sum_{i=1}^n f_i x_i(k).$$

Функцію переходу з вікової групи  $i$  до вікової групи  $i+1$ ,  $i = \overline{2, n}$  опишемо лінійною функцією

$$x_i(k+1) = p_{i-1} x_{i-1}(k), \quad i = \overline{2, n},$$

де коефіцієнти  $p_i$ ,  $0 \leq p_i \leq 1$  визначають частку особин віком  $i$ , що дожили до наступного року. При побудові моделі не враховуємо вплив середовища й загальної кількості популяції на народжуваність і смертність.

Кількісний розподіл популяції за віковими групами в кожному момент часу визначається вектор-стовпчиком

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T.$$

Рівняння можна записати у векторно-матричному вигляді

$$x(k+1) = Lx(k),$$

де квадратна матриця  $L$  розмірністю  $n \times n$  має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця  $L$  називається матрицею Леслі.

### 5.5.2. Дослідження стійкості лінійної моделі Леслі

Розглянемо лінійну дискретну модель Леслі. Нехай система стаціонарна, тобто коефіцієнти народжуваності  $f_i$  й коефіцієн-

ти  $p_i$ , що визначають частку особин, які перейшли до іншої вікової групи, сталі для всіх вікових груп,  $i = \overline{1, N}$ . Знайдемо стан рівноваги автономної лінійної дискретної моделі Леслі.

Уведемо позначення:

$$R_0 = f_1 + f_2 p_1 + f_3 p_1 p_2 + \dots + f_n p_1 p_2 \dots p_{n-1}.$$

Має місце твердження: система лінійних різницевих рівнянь має єдиний стан рівноваги  $x(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  тоді й тільки тоді, коли  $R_0 \neq 1$ . Якщо ж  $R_0 = 1$ , то стан рівноваги зображується променем

$$l = (\xi, p_1 \xi, p_1 p_2 \xi, \dots, p_1 p_2 \dots p_{n-1} \xi), \quad 0 \leq \xi < +\infty.$$

Стаціонарний стан рівноваги  $x(k) = x^*$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  різницевої системи визначається розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь

$$(L - I)x^* = 0,$$

а однорідна система алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок  $x^* = 0$  тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю. Розкривши його, маємо

$$\det(L - I) = (-1)^{n-1} [f_1 - 1 + p_1 f_2 + p_1 p_2 f_3 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n] = (-1)^{n-1} [R_0 - 1].$$

Таким чином, система має єдиний розв'язок  $x(k) = 0$  тоді й тільки тоді, коли  $R_0 \neq 1$ . Оскільки визначник, складений з останніх  $(n-1)$  рядків і останніх  $(n-1)$  стовпців, завжди відмінний від нуля, то

$$\text{rank}(L - I) = n - 1,$$

і розв'язок (додатний) системи має вигляд

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = p_1 \xi, \quad x_3 = p_1 p_2 \xi, \dots, \quad x_n = p_1 p_2 \dots p_{n-1} \xi, \quad \xi \geq 0.$$

Дослідимо особливу стійкість променя у випадку  $R_0 = 1$  і нульовий стан рівноваги – у випадку  $R_0 \neq 1$ . Має місце твердження.

**Твердження 5.1.** Нехай  $R_0 = 1$ . Тоді особливий промінь є асимптотично стійкою множиною.

Для доведення розглянемо характеристичне рівняння системи

$$\det(L - \lambda I) = 0.$$

Як і для попереднього випадку, отримуємо

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I) &= \begin{vmatrix} f_1 - \lambda & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{n-1} (f_1 - \lambda) \lambda^{n-1} + (-1) p_1 \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_2 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Продовжуючи процес, отримаємо

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I) &= \\ &= (-1)^n [\lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - p_1 f_2 \lambda^{n-2} - p_1 p_2 f_3 \lambda^{n-3} - \dots - p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n]. \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння лінійної системи Леслі має вигляд

$$\lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - p_1 f_2 \lambda^{n-2} - p_1 p_2 f_3 \lambda^{n-3} - \dots - p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n = 0.$$

За умовою  $R_0 = 1$ ,  $R_0 = f_1 + p_1 f_2 + p_1 p_2 f_3 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1} f_n$ . Тому, як легко перевірити, рівняння має один корінь  $\lambda_1 = 1$ , тобто випадок критичний. Незважаючи на це, стан рівноваги  $x(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  є стійким, а промінь – асимптотично стійкою множиною.

**Твердження 5.2.** Нехай  $R_0 \neq 1$ . Тоді для асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги  $x(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  необхідно й достатньо, щоб  $R_0 < 1$ .

Звідси маємо:

1. Якщо  $R_0 \neq 1$ , то існує єдина особлива точка спокою  $x(k) \equiv 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , асимптотично стійка при  $R_0 < 1$  і нестійка при  $R_0 > 1$ .

2. Якщо  $R_0 = 1$ , то існує промінь особливих точок, стійкий за Ляпуновим.

3. Значення параметрів системи, за яких  $R_0 = 1$  називається біфуркаційним.

### 5.3. Нелінійна модель популяції Леслі

Модифікуємо лінійну модель динаміки популяції Леслі, записану у векторно-матричному вигляді. Для визначення впливу густоти популяції на її плодючість уведемо величину, що є зваженим розміром популяції

$$w(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$

Тут  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  – сталі, що відображають вплив віку на швидкість зростання популяції. Припустимо, що густина популяції впливає на плодючість лінійно й залежність від неї у всіх класів однакова. Тоді плодючість середнього індивіда  $f_i$  класу ( $i = \overline{1, n}$ ) опишемо функцією

$$f_i = \tilde{a} \tilde{f}_i g[w(x)],$$

де  $\tilde{f}_i$  – максимальна величина відтворення середнього індивіда, що належить до певного вікового класу,  $g[w]$  – залежність падіння народжуваності від густоти,  $a$  – імовірність виживання індивідів першого вікового класу до моменту переходу до другого класу.

На функцію  $g[w]$  зазвичай накладають умови:

1)  $g[w]$  – неперервно диференційована при  $0 \leq w < +\infty$  функція, що монотонно спадає;

2)  $g[w]$  задовольняє умови

$$g : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1], \quad g(0) = 1, \quad \lim_{w \rightarrow +\infty} g[w] = 0.$$

Можливі такі варіанти вибору функцій, що задовольняють ці умови:

$$\text{а) } g[w] = \frac{1}{1+cw}, \quad c > 0;$$

$$\text{б) } g[w] = \frac{1}{1+(cw)^\alpha}, \quad c > 0, \quad \alpha > 0;$$

$$\text{в) } g[w] = e^{-\alpha w}, \quad \alpha > 0;$$

$$\text{г) } g[w] = \frac{1+c}{1+ce^{\alpha w}}, \quad c > 0, \quad \alpha > 0.$$

Матриця  $L$  системи має вигляд

$$L[w(x(k))] = \begin{bmatrix} \tilde{a}f_1 g[w(x)] & \tilde{a}f_2 g[w(x)] & \cdots & \tilde{a}f_{n-1} g[w(x)] & \tilde{a}f_n g[w(x)] \\ p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{N-1} & 0 \end{bmatrix}$$

і система квазілінійна:

$$x(k+1) = L[w(x(k))]x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

#### 5.4. Обчислення й дослідження точок спокою

Знайдемо стаціонарні розв'язки квазілінійної системи. Позначимо

$$R_f = \tilde{f}_1 + p_1 \tilde{f}_2 + p_1 p_2 \tilde{f}_3 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1} \tilde{f}_n.$$

**Твердження 5.4.1.** Нехай функція  $g[w]$  визначена й неперервно диференційована при  $0 \leq w < +\infty$ , монотонно спадає й задовольняє умови

$$g : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1], \quad g(0) = 1, \quad \lim_{w \rightarrow +\infty} g[w] = 0.$$

1. Якщо параметри системи такі, що

$$1 - R_f > 0,$$



то єдиним станом рівноваги є початок координат  $x(k) \equiv 0$ ,  
 $k = 0, 1, 2, \dots$

2. Якщо параметри системи такі, що

$$1 - R_f = 0,$$

то система також має єдиний стан рівноваги  $x^* = 0$ .

3. Якщо параметри системи такі, що

$$1 - R_f < 0,$$

то існують два стани рівноваги:  $x(k) \equiv 0$ ,  $x(k) = x^*$ ,

$$(x^*)^T = \left( \frac{w^*}{R_\alpha}, p_1 \frac{w^*}{R_\alpha}, p_1 p_2 \frac{w^*}{R_\alpha}, \dots, p_1 p_2 \dots p_{n-1} \frac{w^*}{R_\alpha} \right),$$

$$R_\alpha = \alpha_1 + p_1 \alpha_2 + p_1 p_2 \alpha_3 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1} \alpha_n,$$

$w^*$  – корінь рівняння

$$ag[w]R_f = 1.$$

Значення параметрів системи, за яких  $1 - aR_f = 0$ , називаються біфуркаційними, тобто критичними для роздвоєння стану рівноваги системи.

Дослідимо кожний стан рівноваги. Для нелінійних систем одним з універсальних методів дослідження станів рівноваги є паралельне перенесення точки спокою в початок координат, тобто отримання рівнянь збурення й лінеаризація системи в околі точки спокою. Якщо порядок нелінійних членів вище першого, то їх можна відкинути й робити висновок про асимптотичну стійкість на підставі системи лінійного наближення.

Зробимо заміну

$$x(k) = y(k) + x^*$$

( $x^*$  може бути початком координат) і перепишемо вихідну квазілінійну систему:

$$\begin{cases} y_1(k+1) + x_1^* = ag[w^* + w(y(k))] \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(y_i(k) + x_i^*), \\ y_j(k+1) + x_j^* = p_{j-1}(y_{j-1}(k) + x_{j-1}^*), \quad j = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Тут  $w^*$  – розв’язок рівняння

$$ag[w]R_f = 1, \quad w(y(k)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(k).$$

Оскільки  $(x^*)^T = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  є розв’язком системи, то після підстановки отримаємо

$$\begin{cases} y_1(k+1) = ag[w^* + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(k)] \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(y_i(k) + x_i^*) - x_1^*, \\ y_j(k+1) = p_{j-1} y_{j-1}(k), \quad j = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Лінеаризуємо цю систему в точці  $y(k) \equiv 0$  і одержимо систему рівнянь збурень

$$\begin{cases} y_1(k+1) = a \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha_i \frac{dg[w^*]}{dw} \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i x_j^* + g[w^*] \tilde{f}_i \right\} y_i, \\ y_j(k+1) = p_{j-1} y_{j-1}(k), \quad j = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Зокрема, якщо лінеаризація здійснена в нульовій точці, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} y_1(k+1) = a \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i y_i(k), \\ y_j(k+1) = p_{j-1} y_{j-1}(k), \quad j = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Позначимо

$$\frac{df_i(x^*)}{dy_i} = a \left\{ \alpha \left[ \frac{dg[w^*]}{dw} \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j x_j^* \right] + g[w^*] \tilde{f}_i \right\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді лінеаризована система набуде вигляду

$$y(k+1) = L[x^*]y(k),$$

де

$$L[x^*] = \begin{bmatrix} \frac{df_1(x^*)}{dy_1} & \frac{df_2(x^*)}{dy_2} & \dots & \frac{df_{n-1}(x^*)}{dy_{n-1}} & \frac{df_n(x^*)}{dy_n} \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Знов розглянемо перераховані три випадки.

1. Нехай параметри системи такі, що

$$1 - aR_f > 0.$$

Тоді стан рівноваги  $x(k) \equiv 0$  асимптотично стійкий.

2. Нехай параметри системи такі, що виконується нерівність

$$1 - aR_f = 0.$$

У цьому випадку система також має один стан рівноваги  $x(k) \equiv 0$ . Проте випадок критичний, і для висновку про стійкість (нестійкість) стану рівноваги лінійного наближення недостатньо.

3. Нехай параметри системи такі, що виконується нерівність

$$1 - aR_f < 0.$$

У цьому випадку виникають два стани рівноваги:  $x(k) \equiv 0$  та  $x(k) = x^*$ , тобто стан рівноваги  $x^* = 0$  роздвоюється. Причому нульовий стан рівноваги буде нестійким, а інший –  $x(k) \equiv x^*$  – асимптотично стійким.

## 6. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ХІМІЧНІЙ КІНЕТИЦІ

### 6.1. Математичні принципи складання моделей

Хімічна кінетика – це наука про швидкості хімічних перетворень. Первинні дані експериментів є набором концентрацій хімічних компонент реакуючої системи за різних значень часу. За отриманими даними будують залежності концентрації від часу. Після обчислювально побудованих кривих переходять до виведення рівнянь, що визначають залежності між координатами. Зазвичай використовують два підходи.

1. Виведення диференціальних рівнянь швидкості реакції як функції концентрації, тобто

$$\text{Швидкість} = \text{Функція (Концентрація)}, \text{ або } V = -\frac{d}{dt}[A].$$

Знак “–” означає, що у процесі реакції концентрація зменшується.

2. Виведення інтегральних рівнянь зміни концентрації як функції часу:

$$\text{Концентрація} = \text{Функція (Час)}.$$

Часто рівняння швидкості можна виразити залежністю

$$V = k[A]^\alpha [B]^\beta \dots,$$

де  $V$  – швидкість реакції,  $A, B$  – величини, від зміни яких залежить швидкість,  $\alpha, \beta$  – парціальні порядки реакції,  $k$  – сталі швидкості.

На практиці часто користуються методом ізоляції окремих компонентів. Метод полягає в тому, що компоненти беруть у великій кількості, за якої їх концентрація не змінюється та їх вплив можна включити в коефіцієнт  $k$  :

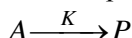
$$V = k'[A]^\alpha.$$

Більшість складних хімічних реакцій можна уявити як комбінації елементарних реакцій. Зазвичай застосовують такі комбінації:

1. Паралельні реакції: кожен реагент піддається перетворенню двома або кількома шляхами одночасно.
2. Послідовні реакції: продукт, отриманий на одній стадії, є реагентом на іншій.
3. Зворотні реакції: дві стадії реакції протилежного напрямку відбуваються одночасно.

## 6.2. Проста реакція першого порядку

Схема простої реакції першого порядку



ілюструє припущення: швидкість пропорційно залежить від концентрації, що описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt}[A] = -k[A].$$

Таким чином, швидкість спадання концентрації описується лінійним диференціальним рівнянням, розв'язок якого має вигляд

$$[A] = [A_0]e^{-kt},$$

де  $[A_0]$  – початкова концентрація, тобто  $[A_0] = [A(0)]$ . Відповідно

$$\frac{d}{dt}[P] = k[A], \quad [A] = [A_0] - [P]$$

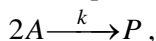
– рівняння зміни концентрації іншого (отриманого) продукту.

Звідси залежність між концентрацією початкового продукту й продукту, що виходить, –

$$[P] = [A_0](1 - e^{-kt}).$$

## 6.3. Проста реакція другого порядку

**Тип 1.** Схема простої реакції першого порядку має вигляд



тобто із двох частинок (молекул) першої речовини утворюється одна частинка (молекула) другої. Оскільки при кожному елементарному акті віддаляються дві молекули  $A$ , то

$$\frac{d}{dt}[A] = -k[A]^2.$$

Маємо диференціальне рівняння зі змінними, що розділяються. Після їх розділення отримуємо рівняння

$$\frac{d[A]}{[A]^2} = -kdt.$$

Проінтегрувавши, одержимо

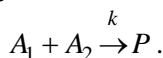
$$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A_0]} = kt.$$

Звідси

$$[A] = \frac{[A_0]}{1 + [A_0]kt}.$$

Функціональна залежність має вигляд гіперболи.

**Тип 2.** У реакції беруть участь не один, а два реагенти:



Розглянемо два випадки.

1. Початкові концентрації реагентів однакові, тобто  $[A_{10}] = [A_{20}]$ . У цьому випадку реакції відбуваються одночасно й незалежно. Отримуємо попередній випадок з однаковими залежностями:

$$[A_1] = \frac{[A_{10}]}{1 + [A_{10}]kt}, \quad [A_2] = \frac{[A_{20}]}{1 + [A_{20}]kt}.$$

2. Один із реагентів береться в надлишку, тому його концентрація практично не змінюється. Нехай  $[A_{20}] \gg [A_{10}]$ . Тоді рівняння швидкості зміни концентрації реагенту практично лишається таким самим. Рівняння швидкості перебігу реакції

$$\frac{d[P]}{dt} = k([A_{10}] - [P])([A_{20}] - [P])$$

можна переписати у вигляді

$$\frac{d[P]}{dt} = k_{ef}([A_{10}] - [P]), \quad k_{ef} = k[A_{20}].$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{d[P]}{dt} + k_{ef} [P] = k_{ef} [A_{10}].$$

Його розв'язком буде

$$[P] = Ce^{-k_{ef}t} + [A_{10}].$$

Оскільки початковими даними є  $[P]_{t=0} = [A_{10}]$ , то остаточно розв'язок має вигляд

$$[P] = [A_{10}] \left(1 - e^{-k_{ef}t}\right).$$

3. Початкові концентрації реагентів не однакові, але близькі, тобто  $[A_{10}] \approx [A_{20}]$  і, наприклад,  $[A_{10}] < [A_{20}]$ . У цьому випадку рівняння швидкості перебігу реакції має вигляд

$$\frac{d[P]}{dt} = k([A_{10}] - [P])([A_{20}] - [P]).$$

Розділимо змінні та отримаємо

$$\frac{d[P]}{([A_{10}] - [P])([A_{20}] - [P])} = k dt.$$

Проінтегруємо останній вираз:

$$\int_{[P_0]}^{[P]} \frac{d[P]}{([A_{10}] - [P])([A_{20}] - [P])} = kt.$$

Розіб'ємо інтеграл на два (метод невизначених коефіцієнтів) і обчислимо їх:

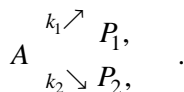
$$\frac{1}{[A_{10}] - [A_{20}]} \ln \left\{ \frac{[A_{10}] - [P]}{[A_{20}] - [P]} \times \frac{[A_{20}] - [P_0]}{[A_{10}] - [P_0]} \right\} = kt.$$

Розв'язавши отриманий вираз відносно невідомої  $[P]$ , остаточно маємо

$$[P] = \frac{[A_{10}]([A_{20}] - [P_0]) - [A_{20}]([A_{10}] - [P_0])e^{k([A_{10}] - [A_{20})t}}{([A_{20}] - [P_0]) - ([A_{10}] - [P_0])e^{k([A_{10}] - [A_{20})t}}.$$

#### 6.4. Дві паралельні реакції першого порядку

Схема перебігу реакції має вигляд



Складемо диференціальні рівняння, що описують динаміку реагентів і продуктів:

$$\frac{d[A]}{dt} = -(k_1 + k_2)[A], \quad \frac{d[P_1]}{dt} = k_1[A], \quad \frac{d[P_2]}{dt} = k_2[A].$$

Отримали систему трьох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати систему можна класичними методами (напр., матричним). Для цього треба розв'язати характеристичне рівняння та знайти власні числа і власні вектори.

Ураховуючи спеціальний вигляд матриці, можна виконати такі дії. Перше рівняння є лінійним однорідним першого порядку зі сталим коефіцієнтом і має розв'язок

$$[A] = [A_0] e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Підставимо отриманий вираз у друге рівняння:

$$\frac{d[P_1]}{dt} = k_1 [A_0] e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Проінтегруємо останній вираз:

$$[P_1] = \frac{k_1}{k_1 + k_2} [A_0] \left(1 - e^{-(k_1 + k_2)t}\right).$$

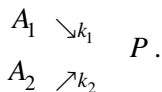
Аналогічно для другого рівняння

$$[P_2] = \frac{k_2}{k_1 + k_2} [A_0] \left(1 - e^{-(k_1 + k_2)t}\right).$$



## 6.5. Дві паралельні реакції першого порядку із загальним продуктом

Схема перебігу реакції



Диференціальні рівняння, що описують динаміку реагентів і продуктів:

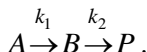
$$\frac{d[A_1]}{dt} = -k_1[A_1], \quad \frac{d[A_2]}{dt} = -k_2[A_2].$$

Розв'язуючи кожне з рівнянь окремо, отримуємо

$$[A_1] = [A_{10}]e^{-k_1 t}, \quad [A_2] = [A_{20}]e^{-k_2 t}.$$

## 6.6. Послідовність двох реакцій першого порядку

Реагент  $A$  перетворюється на продукт  $B$ , а той, у свою чергу, – на кінцевий продукт  $P$ . Схема перебігу реакції



Розглянемо випадки.

1. Нехай  $k_1 \gg k_2$ . Тоді перша стадія реакції завершується до того, як починається друга, і кожну з реакцій можна розглядати окремо.

2. Нехай  $k_1 \ll k_2$ . Тоді друга реакція дуже швидко йде за першою. Звідси маємо  $[B] \ll [A]$  і  $[B] \ll [P]$ . Рівняння матеріального балансу

$$[A_0] = [A] + [B] + [P]$$

спрощується до рівняння

$$[A_0] = [A] + [P].$$

Продиференціювавши, отримаємо

$$\frac{d[A]}{dt} + \frac{d[B]}{dt} + \frac{d[P]}{dt} = 0, \quad \frac{d[A]}{dt} + \frac{d[P]}{dt} = 0.$$

Звідси

$$\frac{d[B]}{dt} = 0,$$

тобто концентрація речовини  $[B]$  незмінна відносно змін  $[A]$  та  $[P]$ .

3. Нехай  $k_1 \approx k_2$ , але вони не рівні. Диференціальні рівняння

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A], \quad \frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B], \quad \frac{d[P]}{dt} = k_2[B]$$

описують динаміку реагентів і продуктів. Перепишемо їх у вигляді системи лінійних однорідних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \\ P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ P \end{pmatrix}.$$

Інтегруємо систему послідовно зверху вниз. Розв'язок першого рівняння

$$[A] = [A_0]e^{-k_1 t}.$$

Підставивши отриманий вираз у друге рівняння, отримаємо

$$\frac{d[B]}{dt} = -k_2[B] + k_1[A_0]e^{-k_1 t}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння складається із загального розв'язку однорідного й частинного розв'язку неоднорідного рівнянь, тобто

$$[B] = ce^{-k_2 t} + [B_{\text{част.}}], \quad [B_{\text{част.}}] = Ne^{-k_1 t}.$$

Після підстановки  $[B_{\text{част.}}]$  у друге рівняння маємо

$$-k_1 Ne^{-k_1 t} = -k_2 Ne^{-k_1 t} + k_1 [A_0]e^{-k_1 t}.$$

Звідси

$$N = \frac{k_1}{k_2 - k_1} [A_0],$$

і загальний розв'язок другого рівняння

$$[B] = ce^{-k_2 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} [A_0]e^{-k_1 t}.$$

Підставивши початкові умови  $[B]_{t=0} = 0$ , отримаємо

$$c = -\frac{k_1}{k_2 - k_1} [A_0].$$

Остаточний розв'язок другого рівняння

$$[B] = \frac{k_1}{k_2 - k_1} [A_0] (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Використовуючи рівняння матеріального балансу

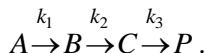
$$\frac{d}{dt} ([A] + [B] + [P]) = 0 \Rightarrow [A] + [B] + [P] = [A_0],$$

отримаємо розв'язок третього рівняння

$$\begin{aligned} [P] &= [A_0] \left\{ 1 - e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \right\} = \\ &= [A_0] \left\{ 1 - \frac{1}{k_2 - k_1} (k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}) \right\}. \end{aligned}$$

### 6.7. Послідовність трьох реакцій першого порядку

Реагент  $A$  перетворюється на продукт  $B$ , а той, у свою чергу, – на реагент  $C$  і далі – на кінцевий продукт  $P$ . Схема перебігу реакції



Математичну модель опишемо системою чотирьох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -k_1 [A], \quad \frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] - k_2 [B], \quad \frac{d[C]}{dt} = k_2 [B] - k_3 [C], \\ \frac{d[P]}{dt} &= k_3 [C], \end{aligned}$$

або, у векторно-матричному вигляді, –

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \\ [P] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \\ [P] \end{pmatrix}.$$

Розв'язок першого рівняння

$$[A] = [A_0]e^{-k_1 t}.$$

За аналогією з попередньою реакцією розв'язок другого рівняння запишемо у вигляді

$$[B] = \frac{k_1}{k_2 - k_1} [A_0] (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Підставимо отриманий вираз у третє рівняння:

$$\frac{d[C]}{dt} = -k_3 [C] + \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} [A_0] (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння складається із загального розв'язку однорідного й частинного розв'язку неоднорідного рівнянь, тобто

$$[C] = ce^{-k_3 t} + [C_{\text{част.}}], \quad [C_{\text{част.}}] = N_1 e^{-k_1 t} + N_2 e^{-k_2 t}.$$

Після підстановки  $[C_{\text{част.}}]$  у друге рівняння маємо

$$\begin{aligned} & -k_1 N_1 e^{-k_1 t} - k_2 N_2 e^{-k_2 t} = \\ & = -k_3 [N_1 e^{-k_1 t} + N_2 e^{-k_2 t}] + \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} [A_0] (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}). \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових експонентах, отримаємо

$$-k_1 N_1 = -k_3 N_1 + \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} [A_0], \quad -k_2 N_2 = -k_3 N_2 - \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} [A_0].$$

Звідси

$$N_1 = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} [A_0], \quad N_2 = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} [A_0].$$

Частковий розв'язок:

$$[C_{\text{част.}}] = \frac{k_1 k_2}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)} [A_0] e^{-k_1 t} + \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} [A_0] e^{-k_2 t}.$$

Таким чином, маємо

$$[C] = c e^{-k_3 t} + \frac{k_1 k_2}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)} [A_0] e^{-k_1 t} + \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} [A_0] e^{-k_2 t}.$$

Для знаходження сталої  $c$  використаємо початкові умови

$$[C] \Big|_{t=0} = 0.$$

Отримаємо

$$c + \frac{k_1 k_2}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)} [A_0] + \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} [A_0] = 0.$$

Звідси

$$c = \frac{k_1 k_2}{(k_1 - k_2)} [A_0] \left\{ \frac{1}{k_2 - k_3} - \frac{1}{k_1 - k_3} \right\} = \frac{k_1 k_2}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} [A_0]$$

та

$$[C] = k_1 k_2 \left\{ \frac{e^{-k_1 t}}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)} + \frac{e^{k_2 t}}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} + \frac{e^{-k_3 t}}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} \right\} [A_0].$$

З рівняння матеріального балансу

$$[A] + [B] + [C] + [P] = [A_0]$$

отримаємо

$$[A_0] e^{-k_1 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} [A_0] (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) + k_1 k_2 \times$$

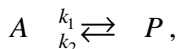
$$\times \left\{ \frac{e^{-k_1 t}}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)} + \frac{e^{k_2 t}}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} + \frac{e^{-k_3 t}}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} \right\} [A_0] + [P] = [A_0].$$

Звідси

$$[P] = \left\{ 1 - e^{-k_1 t} - k_1 \frac{e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1} - k_1 k_2 \left[ \frac{e^{-k_1 t}}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)} + \frac{e^{-k_2 t}}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} + \frac{e^{-k_3 t}}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} \right] \right\} [A_0].$$

### 6.8. Обернена реакція першого порядку

Реагент  $A$  перетворюється на продукт  $P$ , а той, у свою чергу, – на реагент  $k_2$ . Схема перебігу реакції



$k_1$  та  $k_2$  – відповідно сталі швидкості прямої та оберненої реакцій. Математичну модель реакцій опишемо системою двох диференціальних рівнянь

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A] + k_2[P], \quad \frac{d[P]}{dt} = k_1[A] - k_2[P].$$

Запишемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} [A] \\ [P] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [A] \\ [P] \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему матричним методом. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\det \begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & k_2 \\ k_1 & -k_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda = 0.$$

Звідси власними числами є  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -(k_1 + k_2)$ . Відповідно власними векторами є:

$$\text{а) } \lambda_1 = 0 : -k_1\alpha_1 + k_2\beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = k_2, \beta_1 = k_1;$$

$$\text{б) } \lambda_2 = -(k_1 + k_2) : k_1\alpha_2 + k_1\beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1, \beta_2 = -1.$$

Загальний розв'язок системи

$$\begin{pmatrix} [A] \\ [P] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & 1 \\ k_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(k_1+k_2)t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & e^{-(k_1+k_2)t} \\ k_1 & -e^{-(k_1+k_2)t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Для визначення сталих  $c_1$ ,  $c_2$  підставимо початкові умови

$$[A]_{t=0} = [A_0], [P]_{t=0} = 0 \text{ та отримаємо}$$

$$c_1k_2 + c_2 = [A_0], c_1k_1 - c_2 = 0.$$

Розв'язавши систему, маємо

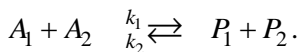
$$c_1 = \frac{1}{k_1 + k_2} [A_0], c_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} [A_0].$$

Остаточний розв'язок системи:

$$[A] = \frac{[A_0]}{k_1 + k_2} [k_2 + k_1 e^{-(k_1+k_2)t}], [P] = \frac{k_1 [A_0]}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1+k_2)t}].$$

## 6.9. Обернена реакція другого порядку

Є два реагенти,  $A_1$  та  $A_2$ , що перетворюються на продукти  $P_1$  та  $P_2$  зі швидкістю  $k_1$ , які, у свою чергу, знов перетворюються на реагенти  $A_1$  та  $A_2$  зі швидкістю  $k_2$ . Схема перебігу реакції



Математичну модель реакцій опишемо системою двох нелінійних диференціальних рівнянь із квадратичною правою частиною

$$\begin{aligned} \frac{d[A_1]}{dt} &= -k_1 [A_1][A_2] + k_2 [P_1][P_2], \\ \frac{d[A_2]}{dt} &= -k_1 [A_1][A_2] + k_2 [P_1][P_2]. \end{aligned}$$

Записана у такому вигляді система некоректна, тому накладемо деякі обмеження (припущення). Нехай початкові умови реагентів  $[A_{10}]$ ,  $[A_{20}]$  однакові. Тоді можна вважати, що процеси перебігають також одночасно й однаково:

$$[A_1] = [A_2] = [A], \quad [A_{10}] = [A_{20}] = [A_0].$$

Диференціальні рівняння збігаються:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A]^2 + k_2[P]^2, \quad [P] = [A_0] - [A].$$

Після підстановки отримуємо

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A]^2 + k_2([A_0] - [A])^2,$$

або

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1 \left\{ [A]^2 - \frac{k_2}{k_1} ([A_0] - [A])^2 \right\}.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо

$$\int_{[A_0]}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]^2 - k([A_0] - [A])^2} = -k_1 t, \quad k = \frac{k_2}{k_1}.$$

Перетворимо

$$\begin{aligned} I &= \int_{[A_0]}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]^2 - k([A_0] - [A])^2} = \\ &= \int_{[A_0]}^{[A]} \frac{d[A]}{\left[ (1 + \sqrt{k})[A] - \sqrt{k}[A_0] \right] \left[ (1 - \sqrt{k})[A] + \sqrt{k}[A_0] \right]} = \\ &= N_1 \int_{[A_0]}^{[A]} \frac{d[A]}{(1 + \sqrt{k})[A] - \sqrt{k}[A_0]} + N_2 \int_{[A_0]}^{[A]} \frac{d[A]}{(1 - \sqrt{k})[A] + \sqrt{k}[A_0]}, \end{aligned}$$

де  $N_1 = \frac{1 + \sqrt{k}}{2\sqrt{k}[A_0]}$ ,  $N_2 = -\frac{1 - \sqrt{k}}{2\sqrt{k}[A_0]}$ . Далі маємо



$$\begin{aligned}
I &= \frac{N_1}{1+\sqrt{k}} \ln \left[ \frac{(1+\sqrt{k})[A] - \sqrt{k}[A_0]}{(1+\sqrt{k})[A_0] - \sqrt{k}[A_0]} \right] + \\
&+ \frac{N_2}{1-\sqrt{k}} \ln \left[ \frac{(1-\sqrt{k})[A] + \sqrt{k}[A_0]}{(1-\sqrt{k})[A_0] + \sqrt{k}[A_0]} \right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{k}[A_0]} \ln \left[ \frac{(1+\sqrt{k})[A] - \sqrt{k}[A_0]}{(1-k)[A_0] + \sqrt{k}[A_0]} \right] = -k_1 t.
\end{aligned}$$

Звідси остаточно отримуємо

$$[A] = \frac{1 + e^{-2\sqrt{k_1 k_2}[A_0]t}}{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) - (\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2})e^{-2\sqrt{k_1 k_2}[A_0]t}} \sqrt{k_2} [A_0].$$

При  $t \rightarrow +\infty$  буде виконуватись

$$[A] \rightarrow \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} [A_0], \quad [P] \rightarrow \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} [A_0].$$

## Д О Д А Т О К

### СЕМІНАРСЬКІ ЗАНЯТТЯ

Згідно з навчальним планом на семінарські заняття виділено 18 год. Умовно теми занять можна поділити на шість груп. Окреслимо головні питання й задачі, рекомендовані до розгляду в аудиторії, і вкажемо теми з посиланнями на першоджерела, запропоновані для самостійної роботи й доповідей (рефератів), необхідні для успішної підготовки до іспиту з даної дисципліни.

#### Заняття 1. Тема: Складання рівнянь руху

Одним з основних принципів складання рівнянь руху динамічних систем є *принцип Гамільтона* – інтегральний принцип механіки. Розглядаючи його, матимемо на увазі тільки системи з геометричними *голономними зв'язками*. В. Гамільтон установив цей принцип для консервативних, а М. В. Остроградський – для неконсервативних систем [16]. Сформулюємо його. Нехай система перебуває в початковому стані  $x(t_0) = x_0$ . За відсутності зовнішніх сил вона буде переходити у стан  $x(t_1) = x_1$  за траєкторією  $x_0(t)$ , уздовж якої інтеграл руху

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t)) dt$$

набуває мінімального значення. Тут функція  $L(t, x(t), x'(t))$  називається функцією Лагранжа. З теорії *варіаційного числення* відомо: коли інтеграл набуває мінімального значення на кривій  $x_0(t)$ , то варіація функціонала на цій кривій дорівнює нулю, тобто

$$\delta I[x_0(t)] = 0.$$

Варіація має вигляд

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L_x(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x(t), x'(t)) \right\} \delta x(t) dt.$$

Як впливає з *основної лемі варіаційного числення* [28], інтеграл дорівнює нулю при довільній  $\delta x(t)$  тоді й тільки тоді, коли  $x_0(t)$  задовольняє рівняння Ейлера

$$L_x(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x(t), x'(t)) = 0.$$

Таким чином, якщо інтеграл набуває мінімального значення на кривій  $x_0(t)$ , то вона задовольняє *рівняння Ейлера – Лагранжа* та крайові умови  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$ .

**Принцип Гамільтона – Остроградського.** Дійсний рух системи з голономними зв'язками відрізняється від інших кінематично можливих рухів тим, що для нього *варіація дії за Гамільтоном – Остроградським, визначена для довільного проміжку часу, дорівнює нулю.*

Інколи цей принцип називають принципом стаціонарної дії.

Із принципу Гамільтона – Остроградського можна отримати рівняння руху, а з рівнянь руху – принцип Гамільтона – Остроградського. Звідси можна також отримати канонічні рівняння Гамільтона.

**Завдання 1.1.** На якій кривій може досягати екстремуму функціонал

$$I[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (x')^2 - (x)^2 \right) dt, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1?$$

*Розв'язання.* Функція Лагранжа  $L(t, x, x') = (x')^2 - (x)^2$ . Звідси  $L_x = -2x$ ,  $L_{x'} = 2x'$ , і рівняння Ейлера – Лагранжа має вигляд

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0 \Rightarrow -2x - \frac{d}{dt}(2x') = 0 \Rightarrow x'' + x = 0.$$

Його загальним розв'язком буде  $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ . Підставивши крайові умови  $x(0) = 0$ ,  $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , одержимо  $x_0(t) = \sin t$ .

**Завдання 1.2.** Знайти криві, підозрілі на екстремум:

$$\text{а) } I[x(t)] = \int_0^1 \left( (x')^2 + 12tx \right) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1;$$

$$\text{б) } I[x(t)] = \int_{-1}^0 \left( 12tx - (x')^2 \right) dt, \quad x(-1) = 1, \quad x(0) = 0;$$

$$\text{в) } I[x(t)] = \int_1^2 \left( (x')^2 + 2xx' + x^2 \right) dt, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 0;$$

$$\text{г) } I[x(t)] = \int_0^1 \sqrt{x(1+(x')^2)} dt, \quad x(0) = x(1) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{д) } I[x(t)] = \int_0^1 x(x')^2 dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = \sqrt[3]{4};$$

$$\text{е) } I[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 4x \cos t + (x')^2 - x^2 \right) dt, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$\text{є) } I[x(t)] = \int_0^1 \left( (x')^2 - x^2 - x \right) e^{2t} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = e^{-1};$$

$$\text{ж) } I[x(t)] = \int_{-1}^1 \left( (x')^2 - 2tx \right) dt, \quad x(-1) = -1, \quad x(1) = 1.$$

Нехай функція Лагранжа залежить від кількох функцій однієї змінної та функціонал має вигляд

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)) dt,$$

де  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – незалежні, двічі неперервно диференційовані функції, що задовольняють крайові умови

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad x_n(t_0) = x_n^0,$$

$$x_1(t_1) = x_1^1, \quad x_2(t_1) = x_2^1, \quad x_n(t_1) = x_n^1.$$

Якщо функціонал досягає екстремуму на кривих  $x_1^0(t)$ ,  $x_2^0(t), \dots, x_n^0(t)$ , то він задовольняє систему рівнянь Ейлера – Лагранжа

$$L_{x_i}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - \frac{d}{dt} L_{x'_i}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 0,$$

$i = \overline{1, n}$  і відповідні крайові умови.

**Завдання 1.3.** На яких кривих може досягати екстремуму функціонал:

$$\text{а) } I[x(t), y(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (x')^2 + (y')^2 + 2xy \right) dt, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

$$\text{б) } I[x(t), y(t)] = \int_{-1}^1 \left( 2tx - (x')^2 + \frac{1}{3}(y')^3 \right) dt, \quad x(1) = 0, \quad y(1) = 1,$$

$$x(-1) = 2, \quad y(-1) = -1;$$

$$\text{в) } I[x(t), y(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( 2y - 4x^2 + (x')^2 - (y')^2 \right) dt, \quad x(0) = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$\text{г) } I[x(t), y(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (x')^2 + (y')^2 - 2xy \right) dt, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1?$$

Нехай функція Лагранжа залежить від похідних вищого порядку, тобто функціонал має вигляд

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) dt,$$

де  $x(t)$  –  $2n$  разів неперервно диференційована крива, що задовольняє крайові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

$$x(t_1) = x_1, \quad x'(t_1) = x'_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_1) = x_1^{(n-1)}.$$

Тоді, якщо функціонал досягає екстремуму на кривій  $x_0(t)$ , то крива задовольняє диференціальне рівняння Ейлера – Лагранжа – Пуассона

$$L_x(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} L_{x^{(n)}}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

і відповідні крайові умови.

**Завдання 1.4.** Знайти криву, підозрілу на екстремум:

а)  $I[x(t)] = \int_0^1 (1 + (x'')^2) dt, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = 1$

$x'(1) = 1;$

б)  $I[x(t)] = \int_0^1 (x^2 + 2(x')^2 + (x'')^2) dt, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$

$x(1) = 0, \quad x'(1) = -sh1;$

в)  $I[x(t)] = \int_{-1}^0 (240x - (x^{(3)})^2) dt, \quad x(-1) = 1, \quad x'(-1) = -4, 5,$

$x''(-1) = 16, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 0;$

$$r) \quad I[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (x'')^2 - x^2 + t^2 \right) dt, \quad x(0) = 1, \quad x'(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad x'(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

**Завдання 1.5.** Записати рівняння руху матеріальної точки масою  $m$  у потенціальному силовому полі.

**Завдання 1.6.** Знайти функцію Гамільтона і скласти канонічні рівняння для математичного маятника завдовжки  $l$  і масою  $m$ , точка підвісу якого виконує рух по колу радіусом  $R$  у вертикальній площині зі сталою швидкістю  $v_0$  [16].

## Заняття 2. Тема: Моделі руху матеріальної точки й системи точок

**Завдання 2.1.** Знайти функцію Лагранжа та скласти рівняння коливань подвійного плоского маятника, що перебуває в однорідному полі тяжіння [13, № 1, с. 21].

**Завдання 2.2.** Є плоский маятник масою  $m_2$ , точка підвісу якого (з масою  $m_1$  у ній) може виконувати рух по горизонтальній прямій. Знайти функцію Лагранжа та скласти рівняння коливань [13, № 2, с. 22].

**Завдання 2.3.** Скласти рівняння руху сферичного маятника – матеріальної точки  $m$ , що рухається внутрішньою поверхнею сфери радіусом  $R$  у полі тяжіння [13, № 1, с. 49].

**Завдання 2.4.** Скласти рівняння руху двох матеріальних точок, з'єднаних стрижнем [7, с. 28–30].

**Завдання 2.5.** Скласти рівняння руху горизонтальної рейки навколо вертикальної осі [7, с. 90].

**Завдання 2.6.** Скласти рівняння руху стрижня, по якому пове комаха [24, с. 149].

**Завдання 2.7.** Скласти рівняння руху конуса по абсолютно шорсткуватій похилій площині [24, с. 149–151].

**Завдання 2.8.** Скласти рівняння руху стрижня в обертовій рамці [24, с. 151–152].

**Завдання 2.9.** Скласти рівняння руху диска по колу іншого обертового диска [24, с. 153].

**Завдання 2.10.** За допомогою рівнянь Лагранжа другого роду для консервативних систем скласти рівняння руху подвійного математичного маятника. Маси тягарів  $M_1$  та  $M_2$  дорівнюють відповідно  $m_1$  та  $m_2$ , а довжини стрижнів –  $l_1$  та  $l_2$  [16, пр. 2, с. 356–357].

**Завдання 2.11.** Для гіроскопа в карданному підвісі, який встановлено на рухомому об'єкті та з яким пов'язана система координат  $Ox, Oy$ , знайти таблицю напрямних косинусів між осями об'єкта та осями, зв'язаними з осями гіроскопа [16, пр. 2, с. 131–132].

**Завдання 2.12.** Скласти рівняння руху зв'язаної системи твердих тіл в однорідних координатах. Прикладом такої системи є маніпуляційні роботи, гіроскопічні прилади тощо [16, с. 366–368].

### **Заняття 3. Тема: Рівняння руху твердого тіла**

**Завдання 3.1.** Скласти рівняння руху снаряда за відсутності опору середовища [18, с. 46–47].

**Завдання 3.2.** Скласти модель руху ракети у вільному просторі [18, с. 55–58].

**Завдання 3.3.** Вивести рівняння другого закону Кеплера (закон руху планет) [18, с. 62–69].

**Завдання 3.4.** Скласти рівняння першого й третього законів Кеплера [18, с. 69–71].

**Завдання 3.5.** Скласти рівняння руху комети, що прямує до Сонця [18, с. 71–73].

**Завдання 3.6.** Супутник рухається по коловій орбіті на висоті  $h$  від поверхні Землі. Яку додаткову швидкість потрібно надати супутникові, щоб він перейшов на параболічну орбіту? [16, пр. 1. с. 196–197].

**Завдання 3.7.** На яку висоту  $h$  потрібно запустити супутник по коловій орбіті, щоб період обертання дорівнював періоду обертання Землі навколо своєї осі (24 год)? [16, пр. 2. с. 197].



**Завдання 3.8.** Метеорит, що перебуває під впливом земного тяжіння, зі стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з висоти  $h$ . Якою була б швидкість метеорита, коли він досягне поверхні Землі, за відсутності земної атмосфери? Радіус Землі  $R = 6400$  км. [8, зад. 1.1.6, с. 25–27].

**Завдання 3.9.** Дати формулювання принципу віртуальних переміщень. Сформулювати принцип Деламбера. Навести приклади рівноваги системи тіл [7, с. 30–39].

#### **Заняття 4. Тема: Математичні моделі динаміки систем із розподіленими параметрами**

**Завдання 4.1.** Скласти рівняння подовжніх коливань газу в трубці. Уміщений у циліндричну трубку ідеальний газ виконує малі подовжні коливання. Плоскі паралельні перетини, що складаються з часток газу, які не деформуються, і всі частки газу рухаються паралельно осі циліндра. Скласти рівняння для щільності газу  $\rho$ , тиску  $p$ , потенціалу  $\phi$ , швидкості  $v$ , зсуву  $u$  часток газу у випадку, коли частки трубки:

а) закриті твердими непроникними перетинками;

б) відкриті;

в) закриті поршниками з малою масою, якою можна знехтувати, насадженими на пружинки з коефіцієнтом твердості  $\nu$  за наявності ковзання без тертя всередині трубки [3, № 4, с. 13].

**Завдання 4.2.** Скласти рівняння руху рідини в каналі. У неглибокому горизонтальному каналі довжиною  $l$  із прямокутним поперечним перерізом міститься вода, глибина якої вимірюється від вільної спокійної поверхні й дорівнює  $h$ . Кінці каналу закриті плоскими твердими перегородками, перпендикулярними до його твірних. При невеликих збуреннях вільної поверхні в каналі виникає хвильовий рух води, при якому поперечні перерізи, що складаються з рідких частинок, у цілому отримують зсув  $\xi(x, t)$  уздовж осі  $Ox$ , а висота перерізів одержить відхилення  $\eta(x, t)$  від висоти  $h$  вільної спокійної поверхні води. Нехай відомі початкові значення  $\xi(x, t)$  та  $\eta(x, t)$  при  $t = 0$ . Скласти рівняння руху [3, № 7, с. 14].

**Завдання 4.3.** Скласти рівняння електричних коливань у проводах. Скласти рівняння зміни сили й напруги змінного струму, що проходить уздовж тонкого проводу з неперервно розподіленим за довжиною омичним опором  $R$ , ємністю  $C$ , самоіндукцією  $L$  і витокком  $G$ , якщо один кінець проводу заземлений, а до іншого прикладена е.р.с.  $E(t)$  і задані початковий струм  $i(x,0) = f(x)$  та початкова напруга  $v(x,0) = F(x)$  [3, № 19, с. 16].

**Завдання 4.4.** Одержати рівняння руху шару в'язкої рідини між двома паралельними площинами, якщо одна з них у момент часу  $t = 0$  починає рухатися паралельно іншій із заданою швидкістю, що має постійний напрямок. Дією сили ваги знехтувати [3, № 10, с. 49].

**Завдання 4.5.** Вивести рівняння поширення плоских електромагнітних хвиль у провідному середовищі (середовище називається провідним, якщо струмами зсуву можна знехтувати порівняно зі струмами провідності) [3, № 11, с. 46].

**Завдання 4.6.** Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії:

- 1) у спокійному однорідному ізотропному середовищі;
- 2) в однорідному ізотропному середовищі, що рухається із заданою швидкістю вздовж осі  $Ox$  [3, № 2, с. 68].

**Завдання 4.7.** Записати рівняння Ейлера для ідеальної рідини [21, с. 131–132].

## **Заняття 5. Тема: Моделювання динаміки суцільного середовища**

**Завдання 5.1.** Вивести рівняння електростатики. Показати, що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона із правою частиною, пропорційною об'ємній щільності зарядів [3, № 3, с. 68].

**Завдання 5.2.** Вивести рівняння магнітостатики. Показати, що потенціал стаціонарного магнітного поля за відсутності електричних струмів задовольняє рівняння Лапласа [3, № 4, с. 68].

**Завдання 5.3.** Змоделювати поле постійного електричного струму. Переконатися, що потенціал електричного поля постій-

ного електричного струму задовольняє рівняння Лапласа. Розглянути випадки:

1) на заземленій ідеально провідній поверхні;

2) на границі з діелектриком [3, № 5, с. 68].

**Завдання 5.4.** Скласти рівняння потенціального руху нестисливої рідини. Показати, що потенціал швидкостей стаціонарного потоку нестисливої рідини задовольняє рівняння Лапласа [3, № 6, с. 68].

**Завдання 5.5.** Скласти рівняння коливання стрижня [8, с. 141–145].

**Завдання 5.6.** Скласти рівняння, що описує процес сорбції [23, с. 163–166].

**Завдання 5.7.** Скласти рівняння Ейнштейна – Колмогорова [23, с. 261–264].

**Завдання 5.8.** Скласти рівняння електромагнітного поля [23, с. 435–439].

## **Заняття 6. Тема: Математичні моделі в динаміці популяцій**

**Завдання 6.1.** Скласти й дослідити модифіковане рівняння Вольтерра типу "хижак-жертва" [22, с. 33–37].

**Завдання 6.2.** Розглянути моделі співіснування кількох видів, що їдять один одного [6, с. 46–52].

**Завдання 6.3.** Дослідити вплив післядії в моделях Вольтерра [6, с. 164–168, 182–193].

**Завдання 6.4.** Дослідити модель парної кількості видів, що їдять один одного [6, с. 52–67].

**Завдання 6.5.** Дослідити модель непарної кількості видів, що їдять один одного [6, с. 67–78].

**Завдання 6.6.** Змоделювати популяцію зеленої падаличної мухи з урахуванням післядії [22, с. 55–59, 61–64].

## **Заняття 7. Тема: Математичне моделювання в біології**

**Завдання 7.1.** Скласти й дослідити найпростішу модель ліганд-рецепторної взаємодії. Вивести рівняння Ленгмюра [4, с. 17–20].

**Завдання 7.2.** Розглянути математичну модель ліганд-рецепторної взаємодії при зв'язуванні рецептором кількох типів лігандів [4, с. 22–25].

**Завдання 7.3.** Дослідити математичну модель скорочення м'язів [4, с. 57–58].

**Завдання 7.4.** Скласти й дослідити математичну модель "паразит-хазяїн" Нікольса – Бейлі [4, с. 67–70].

**Завдання 7.5.** Розв'язати задачу математичної теорії поширення епідемій [22, с. 28–33].

## **Заняття 8. Тема: Математичне моделювання в хімічній кінетиці та біохімії**

**Завдання 8.1.** У результаті хімічної реакції між речовинами  $A_1$  та  $A_2$  утворюється речовина  $B$ . Установити залежність кількості речовини  $B$  від часу, якщо на початку реакції кількість речовин  $A_1$  та  $A_2$  становила відповідно  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ . [8, зад. 1.5.1, с. 44–45].

**Завдання 8.2.** З експерименту відомо, що швидкість розповсюдження бактерій пропорційна їх кількості за достатньої кількості продукту. За який час кількість бактерій збільшиться в  $n$  разів порівняно з початковою кількістю? [8, зад. 1.6.1, с. 50].

**Завдання 8.3.** Установити, за яких умов еволюції популяція вимирає, а за яких – ні? [8, зад. 1.6.2, с. 50–51].

**Завдання 8.4.** Вивести гомогенні каталітичні реакції нульового, першого й другого порядків [27, с. 56–64].

**Завдання 8.5.** Розглянути задачу про поширення інфекційних захворювань для популяції, що складається з  $N$  особин, розділених на три групи з відповідними ознаками. [8, зад. 1.6.5, с. 55–60].

## **Заняття 9. Тема: Моделювання соціальних і економічних процесів**

**Завдання 9.1.** Задача про попит і пропозицію. Нехай на ринку продається картопля. Зміна ціни на картоплю відбувається щотижня. Указати закон, за яким має змінюватися ціна на картоплю, щоб зберігалася рівновага між попитом і пропозицією. [8, зад. 1.8.2, с. 68–70].

**Завдання 9.2.** Побудувати динамічну модель ефективності реклами [1, с. 20–22].

**Завдання 9.3.** Розглянути динамічні моделі бойових дій (модель Ланчестера) [1, с. 35–43].

## Л і т е р а т у р а

1. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М., 1987.
2. Бондарь, А. Г. Математическое моделирование в химической технологии / А. Г. Бондарь. – К., 1973.
3. Будақ, Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будақ, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М., 1972.
4. Введение в теорию рецепторов / С. Г. Галактионов, В. П. Голубович, М. Д. Шендерович, А. А. Ахрем. – Минск, 1986.
5. Верлань, А. Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А. Ф. Верлань, С. С. Москалюк. – К., 1988.
6. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М., 1976.
7. Гантмахер, Ф. Р. Лекции по аналитической механике / Ф. Р. Гантмахер. – М., 1966.
8. Диференціальні моделі. Стійкість / А. М. Самойленко, С. Д. Борисенко, Дж. Матараццо та ін. – К., 2000.
9. Занг, В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.-Б. Занг. – М., 1999.
10. Зельдович, Я. Б. Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М., 1972.
11. Кафаров, В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. – М., 1991.
12. Краснощеков, П. С. Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – М., 1983.
13. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М., 1988.
14. Мышкис, А. Д. Элементы теории математических моделей / А. Д. Мышкис. – М., 2007.
15. Недорезов, Л. В. Курс лекций по математической экологии / Л. В. Недорезов. – Новосибирск, 1997.

16. Павловський, М. А. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – К., 2002.
17. Поляк, Л. С. Вариационные принципы механики / Л. С. Поляк. – М., 1960.
18. Призва, Г. Й. Диференціальні рівняння та їх застосування / Г. Й. Призва. – К., 1978.
19. Рыбин, И. А. Лекции по биофизике / И. А. Рыбин. – Свердловск, 1990.
20. Самарский, А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М., 2001.
21. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М., 1970. – Т. 1, 2.
22. Смит, Дж. Модели в экологии / Дж. Смит. – М., 1976.
23. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М., 1972.
24. Уиттекер, Е. Т. Аналитическая динамика / Е. Т. Уиттекер. – М.; Л., 1937.
25. Федоткин, У. М. Математическое моделирование технологических процессов. Теория реакторов, рециркуляции и погранслоя / У. М. Федоткин, У. Ю. Бурлей, Н. А. Рюмшин. – К., 2003.
26. Хусаїнов, Д. Я. Моделювання динамічних систем / Д. Я. Хусаїнов, І. І. Харченко, А. В. Шатирко. – К., 2004.
27. Шмид, Р. Неформальная кинетика / Р. Шмид, В. Н. Сапунов. – М., 1985.
28. Эльсгольц, Л. С. Математические основы теории управляемых систем / Л. С. Эльсгольц, Л. С. Гноенский, Г. А. Каменский. – М., 1969.

## З М І С Т

|   |           |
|---|-----------|
| ПЕРЕДМОВА.....  | 2         |
| ВСТУП.....  | 3         |
| <b>1.МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ<br/>ПРОЦЕСІВ.....</b>         | <b>6</b>  |
| 1.1. Поняття моделі. Математична модель.....                          | 6         |
| 1.2. Процес математичного моделювання.....                            | 8         |
| 1.3. Основні вимоги до математичної моделі.....                       | 10        |
| 1.4. Види математичних моделей та методологія<br>конструювання.....   | 12        |
| <b>2. МОДЕЛІ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА<br/>СИСТЕМИ ТОЧОК.....</b>    | <b>17</b> |
| 2.1. Складання рівнянь руху. Принцип найменшої дії.....               | 17        |
| 2.2. Основні властивості функції Лагранжа.....                        | 19        |
| 2.3. Інерціальна система відліку.....                                 | 20        |
| 2.4. Функція Лагранжа вільної матеріальної точки.....                 | 21        |
| 2.5. Функція Лагранжа системи взаємодіючих<br>матеріальних точок..... | 22        |
| 2.6. Закони збереження.....   | 25        |
| 2.6.1. Закон збереження енергії.....                                  | 25        |
| 2.6.2. Закон збереження імпульсу.....                                 | 27        |
| 2.6.3. Закон збереження сил.....                                      | 28        |
| 2.6.4. Закон збереження моменту імпульсу.....                         | 28        |
| 2.7. Рівняння Гамільтона.....   | 30        |
| 2.8. Закони руху планет.....  | 32        |
| 2.8.1. Виведення залежності для потенціальної енергії.....            | 32        |
| 2.8.2. "Задача двох тіл".....   | 34        |
| 2.8.3. Другий закон Кеплера.....                                      | 36        |
| 2.8.4. Закон всесвітнього тяжіння.....                                | 36        |
| 2.8.5. Перший закон Кеплера.....                                      | 37        |
| 2.8.5. Задача "трьох тіл".....  | 39        |
| 2.8.6. Обмежена задача трьох тіл.....                                 | 41        |



|  |            |
|--|------------|
| <b>3. РІВНЯННЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА .....</b>  | <b>43</b>  |
| 3.1. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла.....  | 43         |
| 3.2. Момент імпульсу руху твердого тіла .....  | 46         |
| 3.3. Рівняння руху твердого тіла .....   | 47         |
| 3.4. Рівняння Ейлера .....   | 49         |
| 3.5. Кути Ейлера.....  | 51         |
| <br>   |            |
| <b>4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ СИСТЕМ З<br/>РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....</b>  | <b>55</b>  |
| 4.1. Рівняння нерозривності суцільного середовища.....   | 55         |
| 4.2. Рівняння динаміки ідеальної рідини .....  | 60         |
| 4.3. Плоскі течії.....   | 67         |
| 4.4. Обтікання кругового циліндра .....  | 69         |
| 4.5. Рівняння газової динаміки.....  | 71         |
| 4.6. Закон збереження енергії в газах .....  | 71         |
| 4.7. Математичний апарат, використовуваний при<br>моделюванні систем, пов'язаних із твердими тілами,<br>рідинами, газами ..... | 73         |
| <br>   |            |
| <b>5. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ДИНАМІЦІ<br/>ПОПУЛЯЦІЙ .....</b>  | <b>75</b>  |
| 5.1. Основні положення моделювання динаміки<br>популяцій.....  | 75         |
| 5.2. Найпростіші моделі динаміки популяцій.....  | 76         |
| 5.3. Дискретні моделі популяції .....  | 78         |
| 5.4. Двовимірні моделі.....  | 83         |
| 5.5. Модель популяції Леслі.....   | 90         |
| 5.5.1. Лінійна стаціонарна дискретна модель Леслі.<br>Методологія побудови моделі .....  | 90         |
| 5.5.2. Дослідження стійкості лінійної моделі Леслі.....  | 92         |
| 5.3. Нелінійна модель популяції Леслі.....   | 94         |
| 5.4. Обчислення та дослідження точок спокою.....   | 96         |
| <br>   |            |
| <b>6. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ХІМІЧНІЙ<br/>КІНЕТИЦІ .....</b>  | <b>100</b> |
| 6.1. Математичні принципи складання моделей.....   | 100        |
| 6.2. Проста реакція першого порядку.....   | 101        |

|  |     |
|--|-----|
| 6.3. Проста реакція другого порядку.....                                   | 101 |
| 6.4. Дві паралельні реакції першого порядку.....                           | 104 |
| 6.5. Дві паралельні реакції першого порядку із<br>загальним продуктом..... | 105 |
| 6.6. Послідовність двох реакцій першого порядку .....                      | 105 |
| 6.7. Послідовність трьох реакцій першого порядку .....                     | 107 |
| 6.8. Оборнена реакція першого порядку.....                                 | 110 |
| 6.9. Оборнена реакція другого порядку .....                                | 111 |
| <br>   |     |
| ДОДАТОК.....   | 114 |
| СЕМІНАРСЬКІ ЗАНЯТТЯ .....  | 114 |
| <br>   |     |
| Література.....  | 126 |
| <br>   |     |
| ЗМІСТ .....  | 128 |



***Хусаїнов Денис Як'євич***

Доктор фізико-математичних наук,  
професор кафедри МСС ф-ту кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка

***Наукові інтереси :***

проблеми стійкості, керованості та оптимізації динамічних систем, що описуються диференціальними, різницевиими та функціонально-диференціальними рівняннями.

***dkh@unicyb.kiev.ua***



***Харченко Ігор Іванович***

Кандидат технічних наук, доцент кафедри МСС ф-ту кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка

***Наукові інтереси:***

Чисельні методи розв'язування оптимізаційних задач для пучків траєкторій, моделювання динаміки заряджених частинок у прискорювачах, розвиток чисельних методів структурно-параметричної оптимізації для негладких систем керування

***ihar@unicyb.kiev.ua.***



***Шатирко Андрій Володимирович***

канд. фіз-мат. наук, старший науковий співробітник НДІ моделювання та оптимізації ф-ту кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка.

***Наукові інтереси:*** дослідження проблем якісного аналізу, стійкості, керування, оптимізації складних динамічних систем в умовах невизначеності, що описуються в термінах диференціальних, функціонально-диференціальних, різницевих рівнянь з відхиленням аргументу на основі застосування апарату методів Ляпунова.

***a\_shatyрко@univ.kiev.ua***

