Лабораторна робота № 4

Розв’язання задач системного аналізу в умовах конфлікту

Загальні відомості

Мета роботи: Навчитися знаходити раціональні рішення в умовах невизначеності, викликаної конфліктом інтересів.

План виконання

1. Вивчити теоретичну частину.

2. Отримати завдання викладача.

3. Виконати завдання 1:

    3.1. Визначити за заданою матрицею платежів нижню та верхню ціни гри. Визначити, чи існує у грі рівновага у чистих стратегіях?

    3.2. Привести задачу теорії матричних ігор до задачі лінійного програмування.

    3.3. Розв’язати задачу лінійного програмування за допомогою пакета MS Excel. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії для кожного з гравців.

4. Скласти звіт з лабораторної роботи. Звіт повинен мати таку структуру:

    4.1. Титульний лист, який повинен містити таку інформацію:

        4.1.1. Назва університету та кафедри, відповідальної за дисципліну;

        4.1.2. Заголовок - номер та назва лабораторної роботи;

        4.1.3. Підзаголовок - номер варіанта та номери завдань;

        4.1.4. ПІБ та номер групи студента;

        4.1.5. «м. Запоріжжя, 2022 рік»;

    4.2. Звіт про рішення завдання 1, що містить таке інформаційне наповнення:

        4.2.1. Формулювання індивідуального завдання;

        4.2.2. Розв'язання задачі пошуку мінімальної та максимальної цін гри, пошуку точки рівноваги у чистих стратегіях;

        4.2.3. Знімки екрана монітора, що містять табличну модель задачі лінійного програмування;

        4.2.4. Розв’язання задачі пошуку ціни гри у змішаних стратегіях гравців, пошуку ймовірностей використання стратегій;

        4.2.5. Знайдений розв’язок та висновки;

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Ситуації, пов'язані з прийняттям рішень, у яких два або більше розумні супротивники мають конфліктуючі цілі, розглядаються в теорії ігор. Саме слово "гра" застосовується для позначення деякого набору правил та угод, що становлять даний вид гри, наприклад: футбол, карткова гра, шахи. Ці ситуації прийняття рішень відрізняються від розглянутих раніше, де природа не переслідувала будь-яких цілей та, отже, не розглядалася у ролі суперника.

Загальні поняття матричних ігор

У грі зацікавлені сторони називаються гравцями, кожен з них яких має кілька варіантів вибору (не менше двох, інакше він фактично не бере участі у грі, оскільки заздалегідь відомо, що він почне). В економіці модель поведінки осіб у вигляді гри виникає, наприклад, при спробі декількох фірм завоювати найбільше вигідне місце на конкурентному ринку, або, наприклад, за бажання кількох осіб (кампаній) розділити деяку кількість продукту (ресурсу, фінансових коштів) між собою так, щоб кожному дісталося якомога більше. Гравцями у конфліктних економічних ситуаціях, моделюються у вигляді гри, є виробничі та невиробничі фірми, банки, окремі люди та інші економічні агенти У військових додатках модель гри використовується, наприклад, для найкращого вибору коштів (з наявних або потенційно можливих) ураження військових цілей противника або захисту від нападу.

Для ігор характерна невизначеність результату. Причини або джерела невизначеності відносяться до трьох груп:

1. Комбінаторні джерела (наприклад, гра шахи);

2. Випадкові фактори (наприклад ігри кістки, карткові ігри, де випадковий розклад);

3. Невизначеність має стратегічне походження: гравець не знає, якого способу дій дотримується його противник. Тут невизначеність походить від іншої особи. Далі розглядатимемо ігрові моделі конфліктів, у яких беруть участь два супротивники, кожен з яких має кінцеве число варіантів вибору рішень. З кожною парою рішень пов'язаний платіж, який один із гравців виплачує іншому (тобто виграш одного гравця дорівнює програшу іншого). Такі ігри прийнято називати кінцевими іграми двох осіб із нульовою сумою.

У грі беруть участь два гравці: *A* та *B*. У розпорядженні кожного гравця є безліч варіантів вибору стратегий. Нехай $\{ a_1, a_2,..., a_n \}$ - множина стратегій гравця *A*, $\{ b_1 , b_2 ,..., b_m \}$ - множина стратегій гравця *B*. З кожною парою стратегій пов'язаний платіж, який один із гравців виплачує іншому. Тобто, коли гравець *A* вибирає стратегію a_i (свою *i*-ю стратегію), а гравець *B* – стратегію b_j , то результатом такого вибору стає платіж, який залежить від обраних гравцями стратегій. Оскільки стратегій кінцеве число, то платежі утворюють матрицю розмірності *n* x *m*, яка називається матрицею платежів (або матрицею ігри). Рядки цієї матриці відповідають стратегіям гравця *A*, а стовпці - стратегіям гравця *B*.

Зведенння матричної гри до задачі лінійного програмування. Нехай є матрична гра з матрицею $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Позначимо:

$p^* = (p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m) -$ оптимальна змішана стратегія гравця А;

$q^* = (q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n) -$ оптимальна змішана стратегія гравця В.

Стратегія p^* гравця А гарантує йому виграш (за теоремою 3), не менший ціни гри V, незалежно від вибору стратегії B_j гравцем В.

Це можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq V, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \quad p_i \geq 0. \tag{2}$$

Аналогічно, стратегія q^* гравця В гарантує йому програш, не більший ціни гри V, незалежно від вибору стратегії A_i гравцем А, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq V, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1, \quad q_j \geq 0. \tag{4}$$

Оскільки елементи платіжної матриці відповідно до теореми 5 можна завжди зробити позитивними, то і ціна гри $V > 0$.

Перетворимо системи (1) і (3), розділивши обидві частини кожного нерівності на додатне число V:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij} p_i}{V} \geq 1, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} q_j}{V} \leq 1, \quad i = \overline{1,m},$$

Введемо нові позначення

$$\begin{cases} \dfrac{p_i}{V} = x_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ \dfrac{q_j}{V} = y_j, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

при підстановці яких в (1)-(4) отримуємо 2 системи:

а) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1,n}, & (5) \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{1}{V}, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}. & (6) \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1, \quad i = \overline{1,m}, & (7) \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{V}, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. & (8) \end{cases}$$

У разі а) перший гравець прагне знайти такі значення x_i та, отже, p_i, щоб ціна гри V була максимальною. Тому рішення першої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень p_i $(i=\overline{1,m})$, при яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min .$$

Аналогічно, у випадку б) другий гравець прагне знайти такі значення y_j та, отже, q_j, щоб ціна гри V була найменшою. Тому рішення другої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень q_j, при яких

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to \max .$$

Отже, фактично в (6) і (8) ми отримуємо цільові функції відповідно для систем (5) і (7):

а) $$f(x)=x_1+x_2+\ldots+x_m=\frac{1}{V}\to\min , \tag{9}$$

б) $$f(y)=y_1+y_2+\ldots+y_n=\frac{1}{V}\to\max . \tag{10}$$

Таким чином, ми отримали двоїсті одна одній задачі лінійного програмування:

а) $$f(x)=x_1+x_2+\ldots+x_m=\frac{1}{V}\to\min ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1, \quad j=\overline{1,n}, \tag{11}$$

$$x_i \ge 0$$

б) $$f(y)=y_1+y_2+\ldots+y_n=\frac{1}{V}\to\max .$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le 1, \quad i=\overline{1,m}, \tag{12}$$

$$y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Розв'язавши пару взаємо двоїстих симетричних задач (11) та (12), знайдемо

$$V=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}; \qquad p_i=V\cdot x_i^* \ \left(i=\overline{1,m}\right), \quad q_j=V\cdot y_j^* \ \left(j=\overline{1,n}\right),$$

за допомогою яких визначаємо рішення гри

$$\left(p^*,q^*,V\right)=\left(\left(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_m\right),\left(q_1,\ldots,q_j,\ldots,q_n\right),V\right).$$

Приклад зведенння матричної гри до задачі лінійного програмування.

Знайти рішення гри, яка визначається матрицею

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Перевіримо гру на наявність сідлової точки:

$$\alpha_i=\min_j a_{ij}$$

$$A=\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}3 & 4 & 3\end{matrix} & \end{array} \Rightarrow \alpha=\max_i \alpha_i=1$$

$$\beta_j=\max_i a_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta=\min_j \beta_j=3$$

Отже, $\alpha\le V\le\beta$, тобто $1\le V\le 3$.

Оскільки $\alpha\ne\beta$, то рішення гри потрібно шукати в змішаних стратегіях.

Складемо задачі лінійного програмування (ЗЛП) для кожного гравця:

для гравця А:

$$f(x)=x_1+x_2\to\min,$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2\ge 1\\ x_1+4x_2\ge 1\\ 2x_1+3x_2\ge 1\\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0\end{cases}$$

для гравця В:

$$f(y)=y_1+y_2+y_3\to\max,$$

$$\begin{cases}3y_1+y_2+2y_3\le 1\\ y_1+4y_2+3y_3\le 1\\ y_1\ge 0,\ \ y_2\ge 0,\ \ y_3\ge 0\end{cases}$$

Приведемо їх до канонічного вигляду:

$$f(x)=x_1+x_2\to\min$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=1\\ x_1+4x_2-x_4=1\\ 2x_1+3x_2-x_5=1\\ x_i\ge 0,\ \ i=\overline{1,5}\end{cases}$$

$$f(y)=y_1+y_2+y_3\to\max$$

$$\begin{cases}3y_1+y_2+2y_3+y_4=1\\ y_1+4y_2+3y_3+y_5=1\\ y_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,5}\end{cases}$$

При приведенні до канонічної формі з'являються додаткові змінні x_3, x_4, x_5, y_4, y_5. Для встановлення взаємозв'язків між ними подумки впишемо їх у вихідну матрицю:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}\quad \begin{matrix} y_4 & 0\\ 0 & y_5\end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_3 & 0 & 0\\ 0 & x_4 & 0\\ 0 & 0 & x_5\end{matrix}$$

Встановлюючи взаємозв'язки між змінними прямої та двоїстої до неї задачі, отримаємо наступні:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3\end{matrix}$$

Знаючи взаємозв'язки між змінними, достатньо розв'язати одну з задач. Наприклад, розв'язуємо задачу з *y*-ками.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося симплекс-методом.

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_4	0	1	3	1	2	1	0
y_5	0	1	1	4	3	0	1
ЦФ		0	-1	-1	-1	0	0

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_1	1	1/3	1	1/3	2/3	1/3	0
y_5	0	2/3	0	11/3	7/3	-1/3	1
ЦФ		1/3	0	-2/3	-1/3	1/3	0

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_1	1	3/11	1	0	5/11	4/11	-1/11
y_2	1	2/11	0	1	7/11	-1/11	3/11
ЦФ		5/11	0	0	1/11	3/11	2/11

Таким чином, отримали оптимальний план:

$$y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*\right) = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0, 0\right)$$

$$f\left(y^*\right) = \frac{5}{11}$$

Відповідно до встановлених зв'язків між додатковими змінними, маємо:

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right) = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0, \frac{1}{11}\right)$$

$$f\left(x^*\right)=\frac{5}{11}$$

Тоді знаходимо:

$$V=\frac{1}{f\left(x^*\right)}=\frac{1}{f\left(y^*\right)}=\frac{11}{5};$$

$$p_i=V\cdot x_i^*\ \left(i=\overline{1,2}\right),\qquad q_j=V\cdot y_j^*\ \left(j=\overline{1,3}\right),$$

$$\begin{cases} p_1=\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{11}=\frac{3}{5} \\ p_2=\frac{11}{5}\cdot\frac{2}{11}=\frac{2}{5} \end{cases}\qquad \begin{cases} q_1=\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{11}=\frac{3}{5} \\ q_2=\frac{11}{5}\cdot\frac{2}{11}=\frac{2}{5} \\ q_3=\frac{11}{5}\cdot 0=0 \end{cases}$$

Тоді: $p^*=\left(p_1,p_2\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$, $q^*=\left(q_1,q_2,q_3\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right)$.

Відповідь: Рішення гри з матрицею А: $\left(p^*,q^*,V\right)=\left(\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right),\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right),\frac{11}{5}\right)$

<u>Приклад:</u> Знайти рішення гри, яка визначається матрицею.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Щоб не мати справу з матрицею, в якій є від'ємні елементи, скористаємося теоремою 5: додамо до кожного елементу матриці число 5 та отримаємо матрицю виду

$$A'=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ціна гри отриманої матриці відповідно до теореми 5 збільшиться на 5 одиниць (тобто $V'=V+5$), а оптимальні змішані стратегії $p*$ та $q*$ залишаться незмінними.

Перевіримо гру на наявність сідлової точки:

$$\alpha_i=\min_j a_{ij}$$

$$A'=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix} \\ \hline 9 \quad 9 \quad 11 \end{array}\left|\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha=\max_i \alpha_i=2$$

$$\beta_j=\max_i a_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \min_j \beta_j = 9$$

Отже, $\alpha \le V \le \beta$, тобто $2 \le V \le 9$.

Оскільки $\alpha \ne \beta$, то рішення гри потрібно шукати в змішаних стратегіях.

Складемо задачі лінійного програмування (ЗЛП) для кожного гравця:

для гравця А:

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \ge 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \ge 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

для гравця В:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \le 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \le 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0,\ \ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Приводимо їх до канонічного вигляду:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_5 = 1 \\ 9x_1 + 11x_3 - x_6 = 1 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,6} \end{cases}$$

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 + y_4 = 1 \\ 2y_1 + 9y_2 + y_5 = 1 \\ 9y_1 + 11y_3 + y_6 = 1 \\ y_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

При приведенні до канонічної формі з'являються додаткові змінні $x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$. Для встановлення взаємозв'язків між ними подумки впишемо їх у вихідну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_4 & 0 & 0 \\ 0 & y_5 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_4 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_6 \end{matrix}$$

Встановлюючи взаємозв'язки між змінними прямої та двоїстої до неї задачі, отримаємо наступні:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}$$

Знаючи взаємозв'язки між змінними, достатньо розв'язати одну з задач. Наприклад, розв'язуємо задачу з *y*-ками.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося симплекс-методом.

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_4	0	1	7	2	9	1	0	0
y_5	0	1	2	9	0	0	1	0
y_6	0	1	9	0	11	0	0	1
ЦФ		0	-1	-1	-1	0	0	0

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_4	0	2/9	0	2	4/9	1	0	-7/9
y_5	0	7/9	0	9	-22/9	0	1	-2/9
y_1	1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9
ЦФ		1/9	0	-1	2/9	0	0	1/9

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	-59/81
y_4	0	4/81	0	0	80/81	1	-2/9	-2/81
y_2	1	7/81	0	1	-22/81	0	1/9	1/9
y_1	1	1/9	1	0	11/9	0	0	1
ЦФ		16/81	0	0	-4/81	0	1/9	7/81

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_3	1	1/20	0	0	1	81/80	-9/40	-59/80
y_2	1	1/10	0	1	0	11/40	1/20	-9/40
y_1	1	1/20	1	0	0	-99/80	11/40	81/80
ЦФ		1/5	0	0	0	1/20	1/10	1/20

Таким чином, отримали оптимальний план:

$$y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*\right) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0, 0, 0\right)$$

$$f\left(y^*\right) = \frac{1}{5}$$

Відповідно до встановлених зв'язків між додатковими змінними, маємо:

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*\right) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0, 0, 0\right)$$

$$f\left(x^*\right) = \frac{1}{5}$$

Тоді знаходимо:

$$V' = \frac{1}{f\left(x^*\right)} = \frac{1}{f\left(y^*\right)} = 5;$$

$$p_i = V' \cdot x_i^* \ \left(i = \overline{1,3}\right), \qquad q_j = V' \cdot y_j^* \ \left(j = \overline{1,3}\right),$$

$$\begin{cases} p_1 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \\ p_2 = 5 \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2} \\ p_3 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \\ q_2 = 5 \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2} \\ q_3 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Тоді: $p^* = (p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $q^* = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Отже, рішення гри з матрицею A':

$$\left(p^*, q^*, V'\right) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), 5\right)$$

Відповідь: Рішення гри з матрицею A (у якій $V = V' - 5$):

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), 0\right)$$

Завдання до лабораторної роботи №4:

1.Розв‘язати матричну гру з платіжною матрицею *A* методом зведенням до задач лінійного програмування

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & k & 3 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

(*k*—номер студента у журналі).

Розробіть програмний продукт, який дозволяє отримувати розв’язки задач теорії ігор із застосуванням методики зведення матричної гри до задачі лінійного програмування. Проведіть аналіз отриманих результатів.