
Тема 1: Основні поняття і визначення методів оптимізації та дослідження операцій. Класифікація задач оптимізації та дослідження операцій

План:

- 1.1. Вступ. Методи оптимізації та дослідження операцій.
- 1.2. Операція. Ефективність операції.
- 1.3. Математична модель операції.
 - 1.3.1 Визначення границь об'єкта дослідження.
 - 1.3.2 Вибір керованих змінних.
 - 1.3.3 Область допустимих розв'язків.
 - 1.3.4 Функція цілі.
 - 1.3.5 Формулювання задачі дослідження операції.
- 1.4. Класифікація задач дослідження операцій.
- 1.5. Питання для самоконтролю за темою.

§1.1 Вступ. Методи оптимізації та дослідження операцій

«Методи оптимізації» – це дисципліна, що вивчає екстремальні (оптимізаційні) задачі.

Основна проблема:

- існування розв'язків оптимізаційних задач,
- необхідні та достатні ознаки оптимальності,
- розробка чисельних (точних та наближених) методів розв'язання екстремальних задач.

Методи оптимізації є математичним апаратом (інструментарієм) розв'язання задач вибору з деякої сукупності розв'язків поставленої задачі одного (або кількох) розв'язків, що задовольняють заданому критерію оптимальності.

Отже, «Методи оптимізації» – невід'ємна частина «**Дослідження операцій**» – дисципліни, що вивчає математичні моделі задач прийняття рішень. Тому областю застосування даної дисципліни є математичні моделі економічних, технічних, соціальних та інших задач прийняття рішень.

Сутність методів оптимізації полягає в тому, щоб, виходячи з наявності певних ресурсів, обрати такий спосіб їх використання (розподілу), при якому буде забезпечено максимум або мінімум потрібного показника.

Такі методи можна застосовувати лише до задач, при розв'язанні яких оптимальний результат досягається лише у вигляді чітко сформульованих цілей та при цілком певних обмеженнях, які зазвичай впливають з наявних засобів (виробничих потужностей, сировини, трудових ресурсів і т.д.). До умов задачі зазвичай входить деяка математично сформульована система взаємозалежних чинників, ресурси і умови, що обмежують характер їх використання.

§1.2 Операція. Ефективність операції

Під дослідженням операції (ДО) в даному курсі розуміється комплексна математична дисципліна, що займається побудовою, аналізом і використанням математичних моделей прийняття оптимальних (найкращих в якомусь сенсі) рішень.

Об'єктом вивчення ДО є операції.

Операцією будемо називати будь-який захід (або систему дій), об'єднаний єдиним задумом і спрямований на досягнення певної мети.

Предметом ДО є дослідження зазначених операцій за допомогою математичних методів їх моделювання з метою обґрунтування прийнятих рішень з організації оптимального керування цими операціями.

В якості прикладу операціями можуть служити:

1. Організація обчислювальної мережі з заданої кількості ПК, що забезпечує зберігання та обробку з найменшим часом доступу заданих обсягів інформації.
2. Розрахунок оптимальної траєкторії польоту ракети, що показує, наприклад, як керувати польотом ракети домагаючись мінімальної витрати палива.
3. Розподіл певних типів ресурсів, які відповідають сукупності вимог і забезпечують отримання найбільшого прибутку.
4. Складання системи перевезень, що забезпечують постачання ряду пунктів певного типу товарами з найменшими транспортними витратами.
5. Розподіл обмежених ресурсів в державі з метою зменшення соціальної напруги в суспільстві.

Подібних прикладів можна навести дуже багато.

Операція завжди є **керуваним** заходом, тобто таким, що залежить від вибору тим чи іншим способом деяких параметрів, які характеризують її організацію.

Будь-який певний набір залежних від нас параметрів будемо називати **розв'язком**.

Оптимальними називаються розв'язки, які є найкращими за тими чи іншими критеріями (правилами, за якими відбираються засоби досягнення мети).

Основним завданням ДО є попереднє кількісне (а іноді якісне) обґрунтування оптимального розв'язку.

Причому, як правило, приймає рішення не дослідник операції, який лише готує інформацію для вирішення, а **«особа (або група осіб), що приймає рішення»** (ОПР). При цьому виборі ОПР може враховувати крім рекомендацій математичного розрахунку, ще й міркування, що не знайшли відображення в розрахунку.

Термін *особа, яка приймає рішення* позначає групу осіб, яка розробляє узгоджені вимоги до допустимих рішень та виробленню критеріїв оптимальності. Будь-яке рішення для операції завжди узгоджується з **«інформаційним станом особи, що приймає рішення»**, тобто зі змістовним уявленням про можливі і доцільні дії в умовах, що склалися. Отже, дослідження операцій не ставить собі завданням повну автоматизацію прийняття рішень, яка повністю виключає людський фактор.

Поряд з основним завданням – обґрунтуванням оптимальних рішень – до області дослідження операцій відносяться й інші завдання:

- порівняльне оцінювання різних варіантів організації операцій; оцінювання впливу на результат операції різних параметрів (елементів розв'язків і заданих умов);
- дослідження елементів керованої системи, змінювання значень яких може особливо сильно змінити результат операції.

Поряд з цим, кожна операція має бути організована і проведена *ефективно*.

При цьому, під **ефективністю операції** розуміється ступінь її пристосованості до виконання завдання, що стоїть перед нею.

Ефективність операції та порівняння за ефективністю різноманітно організованих операцій проводиться за допомогою чисельного критерію оцінки – **функції цілі (цільової функції)**. Конкретний вид функції цілі залежить від специфіки досліджуваної операції та її цільової спрямованості.

Отже, для проведення дослідження операції необхідно за змістовною постановкою створити математичну модель, задати функцію цілі та обрати або розробити метод розв'язання поставленої таким чином задачі дослідження операцій.

§1.3 Математична модель операції

Для застосування кількісних методів дослідження необхідно побудувати математичну модель, адекватну до розглядуваного явища.

Математичною моделлю називається опис за допомогою математичних символів і дій найбільш суттєвих сторін досліджуваного процесу та їх взаємозв'язків з точки зору отримання бажаного результату. При цьому невраховані в математичній моделі чинники не повинні суттєво впливати на остаточний результат.

Чим вдаліше побудована математична модель, тим краще вона відображає характерні риси досліджуваної операції, тим успішнішими і кориснішими будуть отримані результати.

Процес побудови моделі називається *математичним моделюванням*.

Загальних підходів побудови математичних моделей не існує, однак процес математичного моделювання можна розбити на наступні основні етапи.

§1.3.1 Визначення границь об'єкта дослідження

Необхідність такого етапу диктується неможливістю обліку і вичерпного опису всіх сторін більшості реальних систем. Виділивши основні змінні, параметри і обмеження, слід наближено представити систему як деяку ізольовану частину реального світу і спростити його структуру, наклавши обмеження на границі зміни величин, що входять в математичну модель.

Якщо початкові границі об'єкта обрані не зовсім вірно, то аналізуючи їх вплив на математичну модель і отримані результати, можна їх розширити або звужити.

У практиці дослідження операцій слід, наскільки це можливо, спрощувати процеси, що підлягають дослідженню, розділяючи складні системи на простіші підсистеми, якщо це вплине на остаточний результат в допустимих межах.

§1.3.2 Вибір керованих змінних

На цьому етапі створення математичної моделі необхідно провести відмінність між величинами, значення яких можна змінювати (варіювати) та вибирати їх значення з деякої області з метою досягнення екстремуму функції цілі, і величинами, які є фіксованими або визначаються зовнішніми факторами.

Варіювані (змінювані) величини, що впливають на значення функції цілі, називаються *керованими змінними*.

Знаходження значень керованих змінних, яким відповідає екстремальне значення функції цілі, і є оптимальним розв'язком задачі дослідження операцій.

Зауважимо, що одні й ті ж величини, в залежності від обраних границь об'єкта дослідження та рівня адекватності моделі, можуть бути керованими чи ні.

§1.3.3 Область допустимих розв'язків

При створенні математичної моделі на область зміни керованих змінних, як правило, накладаються обмеження, пов'язані з реальними відповідностями змінних соціальним, фізичним, технічним або економічним характеристикам.

У математичній моделі ці обмеження записуються у вигляді сукупності нерівностей і рівностей або вказуються множини, яким мають належати значення керованих змінних.

Елементи множини, що задовольняють відповідним обмеженням, утворюють *область допустимих розв'язків* $U(x)$ відповідної задачі.

§1.3.4 Функція цілі

Обов'язковою складовою частиною математичної моделі є критерій ефективності, мінімального або максимального значенню якого відповідає розв'язок задачі дослідження операцій.

Такий критерій повністю визначається обраними значеннями керованих змінних з області допустимих розв'язків та називається *функцією цілі* (або *цільовою функцією*).

У конкретних задачах дослідження операцій цільовою функцією може бути час обробки інформації в комп'ютерній мережі, споживана енергія в технологічному процесі, прибуток в банківській справі, калорійність дієти і т.п.

Вибір функції цілі є далеко неочевидним. В залежності від конкретної ситуації з багатьох критеріїв обирають основний, нехтуючи іншими, або будують комплексний критерій, тобто цільову функцію, яка включає в себе з розумно обраними ваговими коефіцієнтами критерії, які відповідають різним цілям.

§1.3.5 Формулювання задачі дослідження операції

Об'єднуючи все сказане про побудову математичної моделі, задачу дослідження операцій можна в досить загальному вигляді сформулювати наступним чином:

||| знайти екстремум (мінімум або максимум) функції цілі з урахуванням обмежень на керовані змінні.

Під *мінімізацією* (*максимізацією*) *функції цілі* $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що залежить від n змінних x_1, x_2, \dots, x_n на заданій множині допустимих розв'язків U n -мірного простору R^n будемо розуміти визначення хоча б однієї точки $x^* \in R^n$, в якій $f(\vec{x})$ досягає свого екстремуму, та подальше обчислення $f(x^*)$.

Символічно це можна записати як

$$f(\vec{x}) \rightarrow \min(\max), \vec{x} \in U,$$

де $f(x)$ – цільова функція; U – множина допустимих розв'язків задачі.

Зауважимо, що задача мінімізації перетворюється в задачу максимізації, якщо функцію цілі помножити на (-1) .

Відштовхуючись від вищесказаного, для будь-яких задач дослідження операцій характерні три наступні моменти:

- 1) наявність системи взаємозалежних чинників;
- 2) строго певний критерій оцінки оптимальності (ефективності);
- 3) точне формулювання умов, що обмежують використання наявних ресурсів або факторів.

З урахуванням цього, з багатьох можливих варіантів обирається альтернативна комбінація, що відповідає всім умовам, введеним в задачу, та забезпечує мінімальне або максимальне значення обраного критерію оптимальності (ефективності). Розв'язок задачі досягається застосуванням певної математичної процедури, яка полягає в послідовному наближенні раціональних варіантів, відповідних обраної комбінації чинників, до єдиного оптимального плану.

Отже, **оптимізаційною є задача**, яка полягає у виборі серед деякої множини U допустимих розв'язків (тобто таких, що допускаються обставинами справи) тих розв'язків \vec{x} , які в тому чи іншому сенсі можна кваліфікувати як оптимальні. При цьому допустимість кожного розв'язку розуміється в значенні можливості його фактичного існування, а оптимальність – в значенні його доцільності.

§1.4 Класифікація задач дослідження операцій

Задачі дослідження операцій (в тому числі й математичні моделі задач дослідження операцій) мають досить різноманітний, з точки зору математичних методів, вигляд.

Для того, щоб виробити однаковий підхід до їх розв'язання, необхідно їх класифікувати:

а) **класифікація за структурою інформаційного стану особи, що приймає рішення (ОПР).**

- якщо ОПР приймає до уваги єдиний можливий стан об'єкта дослідження, то така задача називається **детермінованою**;
- якщо ж ОПР може розглядати деяку сукупність станів об'єкта дослідження, то така задача є **стохастичною** (або **задачею прийняття рішення в умовах ризику**) при відомих апріорних ймовірностях перебування об'єкта в кожному стані.

При відсутності такої інформації задача є **невизначеною (задача прийняття рішення в умовах невизначеності)**;

б) класифікація задач дослідження операцій за видом інформаційного стану особи, що приймає рішення (ОПР):

- *Статичною* називається задача дослідження операцій, якщо при її розв'язанні не змінюється інформаційний стан ОПР. У цьому випадку розв'язання реалізується за один етап.
- Якщо в процесі прийняття рішення інформаційний стан ОПР змінюється, то задачу називають *динамічною*. У цьому випадку застосовується багатоетапна процедура прийняття рішення.
- Якщо процедура розв'язання є неперервним у часі процесом, то задача відноситься до теорії оптимального керування;

в) класифікація задач за виглядом критерію оптимальності і типом обмежень.

Задачі дослідження операцій можуть мати різні критерії оптимальності, в тому числі й неформалізовані.

Якщо критерій оптимальності і система обмежень виражені у вигляді математичних співвідношень (функції цілі і області допустимих розв'язків), то задачу дослідження операцій часто називають *задачею математичного програмування*. Термін *математичне програмування* вживається в тому сенсі, що розв'язок задачі дає програму (план) досягнення найкращих результатів в даній операції.

До задач математичного програмування в свою чергу відносять:

- *задачі лінійного програмування* – задачі, у яких функція цілі і система обмежень виражаються через лінійні співвідношення.
- *задачі квадратичного програмування* – задачі, у яких функція цілі є квадратичною, а система обмежень виражається через лінійні співвідношення.
- *задачі нелінійного програмування* – задачі, у яких порушується вимога лінійності, тобто у яких хоча б одна з функцій цілі й системи обмежень є нелінійною.
- *задачі цілочисельного (лінійного або нелінійного) програмування* – задачі, у яких вводиться умова, що координати шуканої точки x є тільки цілими числами;
- *задачі опуклого програмування* – задачі, у яких область U допустимих розв'язків – опукла множина, а функція цілі $f(x)$ – опукла функція.
- *задачі дискретного програмування* – задачі, у яких множина U допустимих розв'язків має кінцеве число точок.

§1.5 Питання для самоконтролю за темою

1. Що називається операцією? Наведіть приклади операції.
2. Що розуміється під керованими змінними?
3. Якою величиною оцінюється ефективність операції?
4. Чим характеризується особа, що приймає рішення?
5. Що являє собою інформаційний стан особи, що приймає рішення.
6. Що називається математичною моделлю операції?
7. Охарактеризуйте етапи побудови математичної моделі операції.
8. Що таке цільова функція задачі?
9. Що таке область допустимих розв'язків задачі? Яким чином вона визначається?
10. Чим відрізняються між собою поняття «розв'язок задачі», «допустимий розв'язок задачі» та «оптимальний розв'язок задачі»?
11. Наведіть класифікацію та стисло характеристику задач дослідження операцій за структурою інформаційного стану особи, що приймає рішення.
12. Наведіть класифікацію та стисло характеристику задач дослідження операцій за видом інформаційного стану особи, що приймає рішення.
13. Що таке задача математичного програмування?
14. Наведіть класифікацію задач математичного програмування.