Тема 3: Основні форми представлення моделей задач лінійного програмування

План:

3.1 Різні форми моделі ЗЛП

Залежно від особливостей системи обмежень всі постановки основної ЗЛП укладаються в **три основні форми**:

- загальну;
- стандартну (або симетричну);
- канонічну (або основну).

Якщо при завданні допустимої множини *X* використовуються нерівності та рівності, то це є ***ЗЛП в загальній формі*** або ***загальна ЗЛП***.

Якщо при завданні допустимої множини *X* використовуються тільки нерівності, то це є ***ЗЛП в стандартній*** (або **симетричній**) ***формі*** або ***стандартна (симетрична) ЗЛП***.

Якщо при завданні допустимої множини *X* використовуються тільки рівності, то це є ***ЗЛП в канонічній*** (або ***основний***) ***формі*** або ***канонічна (основна) ЗЛП***.

3.1.1 Загальна форма моделі ЗЛП

Загальна форма моделі ЗЛП характеризується наступним:

1) обмеження моделі записуються у вигляді рівностей або нерівностей з правою частиною будь-якого знака;
2) значення змінних моделі можуть бути невід'ємними, непозитивними або не мати обмеження в знаку;
3) цільова функція моделі ЗЛП може підлягати як максимізації, так й мінімізації.

Отже, *ЗЛП в загальній формі* формулюється наступним чином:

Знайти сукупність значень n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le b_{k+1}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

та умовам невід'ємності

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_s \ge 0 \quad (s \le n),$$

для яких лінійна цільова функція

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

досягає екстремуму (максимуму або мінімуму).

3.1.2 Стандартна (симетрична) форма моделі ЗЛП

Стандартна форма моделі ЗЛП характеризується наступним:

1) всі обмеження записуються у вигляді нерівностей з невід'ємною правою частиною;
2) значення всіх змінних моделі є невід'ємними;
3) цільова функція підлягає максимізації.

Отже, *ЗЛП в стандартній формі* формулюється наступним чином:

Знайти сукупність значень n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють системі нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

та умовам невід'ємності

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

для яких лінійна цільова функція

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

досягає максимуму.

ЗЛП в стандартній формі зручно розв'язувати графічним методом, якщо число змінних дорівнює двом ($n = 2$).

3.1.3 Канонічна (основна) форма моделі ЗЛП

При *канонічної формі лінійної моделі ЗЛП* мають виконуватися наступні правила:

1) всі обмеження записуються у вигляді рівностей з невід'ємною правою частиною;
4) значення всіх змінних моделі є невід'ємними;
2) цільова функція підлягає максимізації.

Отже, *ЗЛП в канонічній формі* формулюється наступним чином:

> Знайти сукупність значень n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють системі рівнянь
>
> $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \left(i = \overline{1, m}\right)$$
>
> та умовам невід'ємності
>
> $$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1, n}\right),$$
>
> для яких лінійна цільова функція
>
> $$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
>
> досягає максимуму.

Описані форми ЗЛП зручно представити в табличному вигляді (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

<table>
<tr><th>Канонічна</th><th>Стандартна</th><th>Загальна</th></tr>
<tr><td colspan="3">1) <u>Обмеження</u></td></tr>
<tr><td>Рівняння
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = \overline{1; m}$</td><td>Нерівності
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{matrix} \le \\ \ge \end{matrix} \right\} b_i$, $i = \overline{1; m}$</td><td>Рівняння та нерівності
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \right\} b_i$, $i = \overline{1; m}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2) <u>Умови невід'ємності</u></td></tr>
<tr><td>Все змінні
$x_j \ge 0$, $j = \overline{1; n}$</td><td>Все змінні
$x_j \ge 0$, $j = \overline{1; n}$</td><td>Частина змінних
$x_j \ge 0$, $j = \overline{1; s}$, $s < n$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3) <u>Цільова функція</u></td></tr>
<tr><td colspan="3">$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$</td></tr>
<tr><td>(max)</td><td>(max)</td><td>(max або min)</td></tr>
</table>

В табл. 3.1 прийняті наступні позначення:

x_j – змінні задачі;

c_j – коефіцієнти при змінних в цільовій функції;

a_{ij} – коефіцієнти при змінних в основних обмеженнях задачі;

b_i – праві частини (вільні члени) обмежень.

3.2 Форми запису моделей ЗЛП

Розглянуті форми моделей ЗЛП були представлені в розгорнутій формі. Дана форма запису моделі ЗЛП є не завжди зручною через свою громіздкість. У зв'язку з цим для спрощення запису моделі ЗЛП часто використовується матрична і векторна форми запису.

Розглянемо кожну з них детальніше.

3.2.1 Матрична форма запису моделі ЗЛП

Якщо ввести в розгляд матрицю обмежень задачі розмірності $m \times n$ виду

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

та вектори змінних моделі, вільних членів та коефіцієнтів цільової функції відповідно виду

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix},$$

то:

1) *ЗЛП в стандартній формі* прийме вигляд

$$Z = C^T X \to \max$$
$$AX \le b;$$
$$X \ge 0;$$

2) *ЗЛП в канонічній формі* прийме вигляд

$$Z = C^T X \to \max$$
$$AX = b;$$
$$X \ge 0.$$

***Приклад* 1.** Записати модель ЗЛП в стандартній формі

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \le 5; \\ 4x_1 + 2x_2 \le 1; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 \le 4; \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

в матричному вигляді.

Розв'язання

ЗЛП в матричному вигляді запишеться наступним чином:

$$Z = C^T X \rightarrow \max$$

$$AX \le b;$$

$$X \ge 0;$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Векторна форма запису моделі ЗЛП

Введемо позначення:

$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{m \times 1}$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$ – i – й стовпець матриці A обмежень задачі,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор змінних моделі,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор вільних членів,

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ – вектор коефіцієнтів цільової функції.

Тоді в векторному вигляді

1) *ЗЛП в стандартній формі* прийме вигляд

$$Z = (C, X) \to \max$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n \le b\,;$$

$$X \ge 0\,;$$

2) *ЗЛП в канонічній формі* прийме вигляд

$$Z = (C, X) \to \max$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = b\,;$$

$$X \ge 0\,;$$

***Приклад* 2.** Записати модель ЗЛП в стандартній формі

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \le 5\,; \\ 4x_1 + 2x_2 \le 1\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 \le 4\,; \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

в векторному вигляді.

Розв'язання

ЗЛП в векторному вигляді запишеться наступним чином:

$$Z = (C, X) \to \max$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 \le b\,;$$

$$X \ge 0\,;$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.3 Перехід від задачі мінімізації цільової функції до задачі максимізації

Задача мінімізації цільової функції Z легко може бути зведена до задачі максимізації функції Z_1 при тих же обмеженнях шляхом введення функції

$$Z_1 = -Z .$$

Обидві задачі мають однаковий розв'язок X^* та при цьому

$$\min Z = -\max Z_1 .$$

Проілюструємо цей факт графічно на прикладі функції однієї змінної (рис. 3.1).

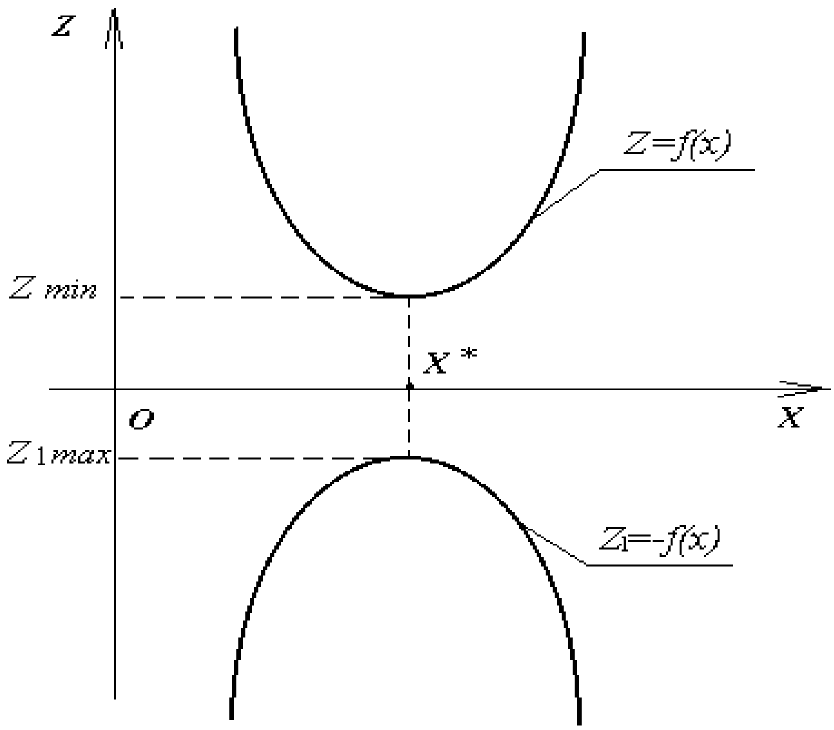

Рис. 3.1. $Z_{\min} = -Z_{1\max}$ та досягається в точці X^*

Згідно рис. 3.1, функція $Z_1 = -f(x)$ являє собою дзеркальне відображення функції $Z = f(x)$ відносно осі OX, її максимум досягається в тій самій точці X^*, що й мінімум функції $f(x)$. Вочевидь, має місце співвідношення $\min Z = -\max Z_1$.

Отже, маємо:

$$Z(X) = \min_{X \in U} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\max_{X \in U} \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right),$$

де $U -$ множина допустимих значень.

***Приклад* 3.** Перейти від задачі мінімізації цільової функції

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \le 5\,; \\ 4x_1 + 2x_2 \le 1\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 \le 4\,; \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

до задачі максимізації.

Розв'язання

Помножимо цільову функцію $Z(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3$ на (–1):

$$-Z(X) = Z_1(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_3.$$

Отже, маємо наступну задачу максимізації цільової функції:

$$Z(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \le 5\,; \\ 4x_1 + 2x_2 \le 1\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 \le 4\,; \\ x_{1,2,3} \ge 0\,. \end{cases}$$

3.4 Перехід від однієї форми моделі ЗЛП до іншої

Будь-яка ЗЛП може бути зведена до канонічної, стандартної або загальної задачі.

3.4.1 Перехід до канонічної форми моделі ЗЛП

Нехай вихідна ЗЛП задана в стандартній формі

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{3.3}$$

яку потрібно привести до канонічного вигляду, тобто з обмежень-нерівностей (з правою частиною будь-якого знака) зробити обмеження-рівності (з невід'ємною правою частиною) і накласти умови невід'ємності на всі змінні задачі.

Правила переходу до канонічної форми:

1) Для того, щоб обмеження-нерівності перетворити до рівностей, в кожне обмеження (в його ліву частину) вводиться додаткова (балансова) невід'ємна змінна

$$x_{n+i} \ge 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$$

зі знаком «+» (якщо знак нерівності «$\le$») та зі знаком «–» (якщо знак нерівності «$\ge$»).

Після цього система обмежень матиме вигляд:

– для нерівностей виду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right);$$

– для нерівностей виду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

При цьому додаткові (балансові) змінні $x_{n+i} \left(i = \overline{1,m}\right)$ вводяться в цільову функцію з коефіцієнтами, що дорівнюють нулю, тобто значення цільової функції не змінюється.

Примітка: 1. В канонічній формі рівності прийнято записувати таким чином, щоб праві частини обмежень були невід'ємними. Якщо будь-яке b_i є від'ємним, то помноживши i-е обмеження на (–1), отримаємо в правій частині додатне число. При цьому знак нерівності потрібно змінити на протилежний.

Наприклад,

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \ge b_i \quad \Rightarrow \quad -a_{i1}x_1-\ldots-a_{in}x_n \le -b_i\,;$$

2. Якщо обмеження містить знак «=», то додаткову змінну вводити не потрібно.

2) У загальному випадку в задачах лінійного програмування можуть зустрітися змінні невід'ємні, непозитивні і такі, які можуть одночасно приймати як невід'ємні, так і непозитивні значення. У цьому випадку задачу необхідно звести до таких змінних, кожна з яких підкорялася б вимозі невід'ємності.

Розглянемо, як потрібно діяти в кожному конкретному випадку.

– якщо по відношенню до деякої змінної x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ мається вимога невід'ємності, тобто $x_j \ge 0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то ця змінна ніяким перетворенням не піддається;

– якщо на деяку змінну x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ не накладено умову невід'ємності (тобто змінна x_j – вільна і може приймати будь-які значення – як непозитивні, так і невід'ємні), то вводять нові змінні $x_j^{(1)} \ge 0$, $x_j^{(2)} \ge 0$ та роблять заміну $\begin{cases} x_j = x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \\ x_j^{(1)},\ x_j^{(2)} \ge 0 \end{cases}$, в результаті якої змінна x_j виключається з задачі, а залишаються нові змінні $x_j^{(1)}$, $x_j^{(2)}$, на які вже накладено вимогу невід'ємності. Крім того, потрібно додати до системи обмежень ще обмеження $x_j^{(1)} \ge x_j^{(2)}$ з метою усунення невизначеності знаку;

– якщо по відношенню до деякої змінної x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ існує вимога $x_j \le 0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то вводять нову змінну $\bar{x}_j = -x_j$, про яку можна стверджувати, що $\bar{x}_j \ge 0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Отже, змінна x_j, на яку накладено вимогу непозитивності, замінюється змінною з протилежним знаком $\bar{x}_j$. В результаті з задачі виключається змінна x_j, а залишається змінна $\bar{x}_j$, на яку вже накладено умову позитивності.

Отже, канонічна форма моделі приймає вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{n+i} \to \max, \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{3.5}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n+m}\right). \tag{3.6}$$

<u>Теорема 3.1.</u> *Кожному розв'язку* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *нерівності* $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$ *відповідає єдиний розв'язок* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0)$ *рівняння* $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + x_{n+1} = b$ *та нерівності* $x_{n+1} \geq 0$, *і навпаки.*

З даної теореми випливає еквівалентність систем обмежень вихідної стандартної форми моделі задачі та отриманої канонічної форми. А оскільки додаткові змінні x_{n+i}^0 $(i = \overline{1,m})$ входять в цільову функцію з коефіцієнтами, що дорівнюють нулю, то значення цільових функцій (3.1) та (3.4) при відповідних допустимих розв'язках $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ та $(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ є однаковими.

Звідси випливає, що цільові функції (3.1) та (3.4) на множині відповідних допустимих розв'язків досягають екстремальних значень одночасно. Оптимальному розв'язку $\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ задачі (3.1)-(3.3) відповідає оптимальний розв'язок $\left(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*\right)$ задачі (3.4)-(3.6), тобто вихідна модель та її канонічна форма є еквівалентними.

***Приклад* 4.** При виробництві двох видів виробів (*A* і *B*) підприємство використовує 4 види ресурсів. Норми витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції, обсяг ресурсів, а також вартість реалізації одиниці продукції наведено у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів		Обсяг ресурсу
	A	*B*	
1	2	3	20
2	3	1	15
3	4	0	16
4	0	3	12
Вартість реалізації одиниці продукції	5	3	

Необхідно визначити оптимальний план виробництва продукції, що забезпечує підприємству максимальний прибуток.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі та приведемо її до канонічного вигляду.

Позначимо через $X = (x_1, x_2)^T$ план випуску продукції.

Модель задачі набуде вигляду:

$$Z = 5x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 20, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ 4x_1 \le 16, \\ 3x_2 \le 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Модель записана в стандартній формі.

Перейдемо до моделі в канонічному вигляді. Введемо балансові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, які додамо до лівих частин обмежень-нерівностей. У цільову функцію все додаткові змінні введемо з коефіцієнтами, що дорівнюють нулю. Отримаємо канонічну форму моделі ЗЛП:

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_5 = 16, \\ 3x_2 + x_6 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,6}\right).$$

Відзначимо економічний зміст додаткових змінних. Очевидно, що

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \qquad \left(i = \overline{1,4}\right),$$

тобто додаткова змінна x_{n+i} показує величину невикористаного i-го ресурсу $\left(i = \overline{1,4}\right)$.

***Приклад* 5.** Привести до канонічної форми наступну ЗЛП в загальній формі:

$$Z(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \le 5\,; \\ 4x_1 + 2x_2 \le -1\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 5\,; \\ x_{1,2} \ge 0\,. \end{cases}$$

Розв'язання

Друге обмеження системи обмежень містить в правій частині від'ємне число (-1). Помножимо друге обмеження на (-1), при цьому знак нерівності «$\ge$»зміниться на протилежний «$\le$». Задача прийме вигляд:

$$Z(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \le 5\,; \\ -4x_1 - 2x_2 \ge 1\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 5\,; \\ x_{1,2} \ge 0\,. \end{cases}$$

Для того, щоб привести обмеження-нерівності до обмежень-рівностей, в перше обмеження додамо додаткову змінну x_4, а з другого віднімемо додаткову змінну x_5. У цільову функцію все додаткові змінні введемо з коефіцієнтами, що дорівнюють нулю. Третю рівність залишимо без змін. З урахуванням всіх перетворень маємо такий вигляд задачі:

$$Z(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_4 = 5\,; \\ -4x_1 - 2x_2 - x_5 = 1\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 5\,; \\ x_{1,2,4,5} \ge 0\,. \end{cases}$$

У розглядуваній задачі на змінну x_3 не накладено умова невід'ємності (тобто змінна x_3 – вільна). Для її отримання введемо нові змінні $x_3^{(1)} \ge 0$, $x_3^{(2)} \ge 0$ та зробимо заміну $x_3 = x_3^{(1)} - x_3^{(2)}$. Крім того, додамо до системи обмежень ще обмеження $x_3^{(1)} \ge x_3^{(2)}$ з метою усунення невизначеності знаку. Підставивши заміну $x_3 = x_3^{(1)} - x_3^{(2)}$ в цільову функцію і систему обмежень-рівностей, а також додаючи до системи обмежень нерівність $x_3^{(1)} \ge x_3^{(2)}$, задача прийме наступний вигляд:

$$Z(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_3^{(1)} - x_3^{(2)} \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_4 = 5\,; \\ -4x_1 - 2x_2 - x_5 = 1\,; \\ 5x_1 + x_2 - \left(x_3^{(1)} - x_3^{(2)}\right) = 5\,; \\ x_3^{(1)} - x_3^{(2)} \ge 0\,; \\ x_{1,2,4,5} \ge 0\,,\ x_3^{(1)} \ge 0,\ x_3^{(2)} \ge 0\,. \end{cases}$$

В отриманій системі нерівностей зведемо останню нерівність $x_3^{(1)} - x_3^{(2)} \ge 0$ до рівності шляхом віднімання від її лівої частини додаткової змінної $x_6 \ge 0$. В результаті отримаємо рівність виду $x_3^{(1)} - x_3^{(2)} - x_6 = 0$.

Оскільки в канонічній формі ЗЛП цільова функція має прагнути до максимуму, перейдемо від розглянутої задачі мінімізації цільової функції до задачі максимізації. Для цього помножимо отриману на попередньому кроці цільову функцію $Z(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_3^{(1)} - x_3^{(2)}$ на (–1):

$$-Z(X) = Z_1(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3^{(1)} + x_3^{(2)}.$$

Тоді, виходячи з умови $Z(X) = \min\limits_{X \in U} Z(X) = -\max\limits_{X \in U}\left(-Z(X)\right)$, маємо наступну цільову функцію:

$$Z_1(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3^{(1)} + x_3^{(2)} \to \max\,.$$

Отже, з урахуванням всіх перетворень канонічна форма моделі ЗЛП подається в наступному вигляді:

$$Z_1(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3^{(1)} + x_3^{(2)} \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_4 = 5\,; \\ -4x_1 - 2x_2 - x_5 = 1\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = 5\,; \\ x_3^{(1)} - x_3^{(2)} - x_6 = 0\,; \\ x_{1,2,4,5,6} \ge 0\,,\ x_3^{(1)} \ge 0,\ x_3^{(2)} \ge 0\,. \end{cases}$$

Зауваження: Все замінюючі змінні можна було б ввести з новим індексом $j > n$ без індексів над відповідною змінною.

Наприклад, у нашому випадку, нові замінюючі змінні $x_3^{(1)}$ та $x_3^{(2)}$ можна замінити відповідно змінними x_7 та x_8.

Приклад 6. Привести до канонічної форми наступну ЗЛП в загальній формі:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \le 3\,; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4\,; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 2\,; \\ x_1 \ge 0\,,\; x_2 \ge 0\,. \end{cases}$$

Розв'язання

► *<u>Перший спосіб приведення до канонічної форми.</u>*

Використовуючи заміну $x_3 = x_3^{(1)} - x_3^{(2)}$, а також переходячи до обмежень-рівностей та задачі максимізації цільової функції, отримаємо канонічну форму моделі вихідної ЗЛП:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 - x_3^{(1)} + x_3^{(2)} \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3^{(1)} - 2x_3^{(2)} + x_4 = 3\,; \\ x_1 + x_2 - x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = 4\,; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3^{(1)} - 3x_3^{(2)} - x_5 = 5\,; \\ x_3^{(1)} - x_3^{(2)} - x_6 = 0\,; \\ x_1 \ge 0\,,\; x_2 \ge 0\,,\; x_3^{(1)} \ge 0\,,\; x_3^{(2)} \ge 0\,,\; x_4 \ge 0\,,\; x_5 \ge 0\,,\; x_6 \ge 0. \end{cases}$$

► *<u>Другий спосіб приведення до канонічної форми.</u>*

Даний спосіб приведення полягає в тому, що з другого рівняння знаходимо $x_3 = -4 + x_1 + x_2$, а потім виключаємо змінну з інших обмежень та цільової функції:

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 11\,; \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 14\,; \\ x_1 \ge 0\,,\; x_2 \ge 0\,. \end{cases}$$

Тоді, переходячи до обмежень-рівностей та задачі максимізації цільової функції, отримаємо канонічну форму моделі вихідної ЗЛП:

$$Z(X) = -x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 11\,; \\ 5x_1 + 4x_2 - x_5 = 14\,; \\ x_1 \ge 0\,,\; x_2 \ge 0\,,\; x_4 \ge 0\,,\; x_5 \ge 0\,. \end{cases}$$

3.4.2 Перехід від канонічної форми моделі ЗЛП до стандартної

Нехай ЗЛП задана в канонічній формі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$x_j \geq 0 \qquad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

яку потрібно привести до стандартного (симетричного) вигляду, тобто з обмежень-рівностей (з невід'ємною правою частиною) зробити обмеження-нерівності (з невід'ємною правою частиною).

Способи переходу до стандартної форми:

<u>Перший спосіб</u>

Даний спосіб призводить ЗЛП в канонічній формі до ЗЛП в стандартній формі шляхом переходу від обмежень-рівностей до нерівностей.

Так, кожне обмеження-рівність може бути замінено еквівалентною системою нерівностей

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \left(i = \overline{1, m}\right). \end{cases}$$

При цьому зауважимо, що нерівності $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ множенням обох частин на (–1) перетворюються в нерівності $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$.

<u>Другий спосіб</u>

Даний спосіб призводить ЗЛП в канонічній формі до ЗЛП в стандартній формі шляхом зменшення кількості змінних. Даний спосіб не застосовується до ЗЛП в загальній формі.

Припустимо, в системі обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

канонічної форми моделі $m < n$ та всі m рівнянь є лінійно незалежними (ранг системи* $r = m$).

---

* ***Рангом матриці*** є найбільший з порядків мінорів цієї матриці, відмінних від нуля.

В цьому випадку система має нескінченну множину розв'язків. Її можна розв'язати щодо m змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$, наприклад, методом Жордана-Гауса, якщо вектори-стовпці коефіцієнтів при цих невідомих є лінійно незалежними:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1\ ; \\ \quad x_2 \qquad + \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad x_m + \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m\ , \end{cases}$$

де $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{m+1,n}\right)$ – сталі коефіцієнти, отримувані в результаті перетворень над системою обмежень методом Жордана-Гауса.

З отриманих рівнянь знаходимо змінні $x_i = \bar{b}_i - \sum\limits_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, тобто

$$\begin{cases} x_1 = \bar{b}_1 - \left(\bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n\right); \\ x_2 = \bar{b}_2 - \left(\bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \bar{b}_m - \left(\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

В цьому випадку $x_1, x_2, \dots, x_m$ є базисними змінними, а $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – вільними змінними.

Отримані в (3.7) рівняння, разом з умовами невід'ємності $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, …, $x_n \ge 0$, можуть бути еквівалентно замінені системою нерівностей

$$\begin{cases} \bar{b}_1 - \left(\bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n\right) \ge 0\ ; \\ \bar{b}_2 - \left(\bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n\right) \ge 0\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{b}_m - \left(\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n\right) \ge 0\ , \end{cases} \tag{3.8}$$

які можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n \le \bar{b}_1\ ; \\ \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n \le \bar{b}_2\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n \le \bar{b}_m\ . \end{cases} \tag{3.9}$$

Цільову функцію також виразимо через вільні змінні, підставивши значення x_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ з рівностей (3.7) в функцію цілі.

В результаті перетворення отримаємо:

$$Z(X)=\sum_{j=m+1}^{n}\bar{c}_j x_j+\bar{Z}_0\to\max,$$

де $\bar{c}_j\ \left(j=\overline{m+1,n}\right)$ – нові коефіцієнти при змінних цільової функції, отримувані після підстановки виразів (3.7) в вихідну цільову функцію; $\bar{Z}_0$ – коефіцієнти цільової функції, що складаються з коефіцієнтів $\bar{b}_i\ \left(j=\overline{m+1,n}\right)$ системи (3.7)

Враховуючи заміну (3.8) або (3.9), а також виключивши базисні змінні з цільової функції, отримуємо стандартну форму моделі ЗЛП:

$$Z(X)=\sum_{j=m+1}^{n}\bar{c}_j x_j+\bar{Z}_0\to\max,$$

$$\sum_{j=m+1}^{n}\bar{a}_{ij}x_j\le\bar{b}_i\qquad\left(i=\overline{1,m}\right),$$

$$x_j\ge 0\qquad\left(j=\overline{m+1,n}\right).$$

Отже, після приведення до симетричної форми в ЗЛП залишилося $(n-m)$ змінних.

Приклад 7. Привести до стандартної форми наступну ЗЛП в загальній формі:

$$Z(X)=4x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5\to\min$$

$$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=3;\\-2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=4;\\x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0.\end{cases}$$

Розв'язання

► *<u>Перший спосіб приведення до стандартної форми.</u>*

Перш за все у вихідній ЗЛП від мінімізації функції $Z(X)$ перейдемо до максимізації функції $Z_1(X)=-Z(X)=-4x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5\to\max$.

Далі перше з рівнянь системи обмежень $3x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=3$ замінимо парою нерівностей

$$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5\le 3;\\3x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5\ge 3,\end{cases}$$

а друге рівняння $-2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=4$ – наступною парою нерівностей

$$\begin{cases}-2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5\le 4;\\-2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5\ge 4,\end{cases}$$

Тоді вихідну ЗЛП можна записати в стандартному вигляді:

$$Z(X) = -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \le 3\,; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \ge 3\,; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \le 4\,; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \ge 4\,; \\ x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0\,,\ x_3 \ge 0\,,\ x_4 \ge 0\,,\ x_5 \ge 0\,. \end{cases}$$

► *Другий спосіб приведення до стандартної форми.*

Зауважимо, що у вихідній системі обмежень $m < n$ ($m = 2 -$ кількість рівнянь, $n = 5 -$ кількість невідомих).

Обчислимо ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

системи обмежень.

Для цього віднімемо перший рядок з другого рядка так, що б у першому стовпчику всі елементи нижче звернулися в нуль, домножимо перший рядок при цьому на $-2/3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки в отриманій матриці кількість нульових рядків дорівнює 0, а загальна кількість рядків дорівнює 2, то ранг матриці

$$rang\,|A| = 2 - 0 = 2\,.$$

Отже, для нашої системи обмежень маємо 2 лінійно незалежні змінні. Тобто, вихідну систему обмежень можна розв'язати відносно $m = 2$ змінних.

Застосуємо метод Жордана-Гауса і виділимо перші $m = 2$ змінні x_1 та x_2.

Випишемо розширену матрицю вихідної системи обмежень:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

За допомогою елементарних перетворень над рядками приведемо дану матрицю до такого вигляду, щоб в першому та в другому стовпцях коефіцієнти при невідомих x_1 та x_2 відповідно дорівнювали 1, а решта – нулю.

В цьому випадку ланцюг перетворень буде наступним:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{до другого рядка} \\ \text{додамо перший} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок помножимо на 2} \\ \text{та додамо до другого рядка} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 18 \end{array}\right).$$

З отриманої матриці випишемо систему рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_4 = 7\,; \\ x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 18\,, \end{cases}$ звідки виразимо невідомі x_1 та x_2:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 7\,; \\ x_2 = x_3 + x_4 + x_5 + 18\,. \end{cases}$$

Отримані рівняння, разом з умовами невід'ємності $x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0$ можуть бути замінені системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 7 \geq 0\,; \\ x_2 = x_3 + x_4 + x_5 + 18 \geq 0\,; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 + 7 \geq 0\,; \\ x_3 + x_4 + x_5 + 18 \geq 0\,, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} -x_4 \leq 7\,; \\ -x_3 - x_4 - x_5 \leq 18\,. \end{cases}$$

Підставляючи в цільову функцію $Z(X) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \min$ замість x_1 та x_2 вирази $x_1 = x_4 + 7$, $x_2 = x_3 + x_4 + x_5 + 18$ отримуємо

$$Z(X) = 4\,(x_4 + 7) - (x_3 + x_4 + x_5 + 18) + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \min\,,$$

звідки

$$Z(X) = x_3 + 2x_4 + 10 \to \min\,.$$

Перейдемо від мінімізації отриманої цільової функції $Z(X)$ до максимізації функції $Z_1(X) = -Z(X) = -x_3 - 2x_4 - 10 \to \max$.

Отже, отримуємо для вихідної ЗЛП в канонічній формі еквівалентну їй ЗЛП в стандартній (симетричній) постановці:

$$Z_1(X) = -x_3 - 2x_4 - 10 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_4 \leq 7\,; \\ -x_3 - x_4 - x_5 \leq 18\,; \\ x_3 \geq 0\,,\; x_4 \geq 0\,,\; x_5 \geq 0\,. \end{cases}$$

§3.5 Питання для самоконтролю за темою

1. Чим характеризується загальна форма математичної моделі ЗЛП?
2. Сформулюйте основні вимоги до канонічної форми моделі ЗЛП.
3. Сформулюйте основні вимоги до стандартної форми моделі ЗЛП.
4. Яким чином здійснюється перехід від задачі мінімізації до задачі максимізації та навпаки – від задачі максимізації до задачі мінімізації?
5. Охарактеризуйте матричну форму запису моделей ЗЛП. Яким чином вона отримується з розгорнутої?
6. Охарактеризуйте векторну форму запису моделей ЗЛП. Яким чином вона отримується з розгорнутої?
7. Сформулюйте правила, за яким система нерівностей зводиться до системи рівностей у ЗЛП.
8. Наведіть правила, необхідні для отримання умов невід'ємності змінних ЗЛП.
9. Яким чином та з якою метою використовується виключення окремої змінної із ЗЛП?
10. Охарактеризуйте способи зведення ЗЛП в канонічній формі до ЗЛП у стандартній формі. Наведіть умови використання цих способів.