Тема 5: Базисні та опорні розв’язки задачі лінійного програмування. Розв’язання ЗЛП методом перебору базисних розв’язків. Симплекс-метод розв’язання задач лінійного програмування

План:

5.1 Базисні та опорні розв'язки ЗЛП. Розв'язання ЗЛП шляхом перебору базисних розв'язків.
5.2 Симплекс-метод розв’язання ЗЛП із природним базисом.
  5.2.1 Загальна схема і сутність симплекс-методу.
  5.2.2 Характеристика основних етапів симплекс-методу.
  5.2.3 Приклади розв'язання ЗЛП симплекс-методом.
5.3 Симплекс-метод розв’язання ЗЛП із штучним базисом. М-задача.
5.4 Питання для самоконтролю за темою.

5.1 Базисні та опорні розв'язки ЗЛП. Розв'язання ЗЛП шляхом перебору базисних розв'язків

Розглянемо ЗЛП в канонічній формі:

$$Z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \to \max.$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{mn}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

Припустимо, що число лінійно незалежних рівнянь системи обмежень дорівнює m $(m < n)$, тобто ранг системи* $r = m$. Методом Жордана-Гауса приведемо систему до базисного вигляду (змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ відповідають стовпцям одиничної матриці, що виділена у матриці системи обмежень):

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 ; \\ \qquad x_2 \qquad + \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_m + \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m , \end{cases}$$

де $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{m+1,n}\right)$ – сталі коефіцієнти, отримувані в результаті перетворень над системою обмежень методом Жордана-Гауса.

Розв'язуючи отриману систему відносно m змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$, отримаємо **загальний розв'язок** вихідної системи рівнянь:

* ***Рангом матриці*** є найбільший з порядків мінорів цієї матриці, відмінних від нуля.

$$\begin{cases} x_1 = \bar{b}_1 - \left(\bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n\right); \\ x_2 = \bar{b}_2 - \left(\bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \bar{b}_m - \left(\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n\right). \end{cases}$$

Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$, відносно яких розв’язана система лінійних рівнянь (тобто коли кожна із змінних входить тільки в одне рівняння з коефіцієнтом +1), називаються **базисними змінними**. Число базисних змінних дорівнює рангу системи. Решта всіх змінних $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ називаються **вільними**.

Надаючи певні значення кожній з вільних змінних $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, які стоять в правих частинах рівності загального розв'язку системи, та обчислюючи значення базисних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (виражених через вільні змінні), будемо отримувати різні **частинні розв'язки** системи обмежень.

Якщо в загальному розв'язку системи вільним змінним $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ надати нульові значення, то отриманий частинний розв'язок буде називатися **базисним**. Очевидно, базисний розв'язок системи має вигляд:

$$\mathrm{X}_{баз} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_{m,} \underbrace{0,\ldots,0}_{n-m}).$$

Кожному розбиттю на базисні та вільні змінні відповідає один базисний розв'язок.

Кількість же способів розбиття (число базисних розв'язків) не перевищує величини

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

де n – кількість змінних системи лінійних рівнянь; r – ранг матриці системи.

Базисний розв'язок називається **виродженим**, якщо число його ненульових компонент менше m, в іншому випадку (якщо число його ненульових компонент дорівнює m) воно називається **невиродженим**.

Базисні розв'язки системи обмежень ЗЛП, у яких значення всіх базисних змінних є невід'ємними, називають **опорними розв'язками (опорними планами)**.

Отже:

1) якщо $\bar{b}_1 \geq 0, \ldots, \bar{b}_m \geq 0,$ то відповідний базисний розв'язок є опорним розв'язком ЗЛП;
2) число додатних координат опорного плану не може перевищувати m.

Кожний з опорних планів визначається системою m лінійно незалежних векторів, що містяться в даній системі з n векторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Кожному опорному розв'язку системи лінійних обмежень ЗЛП відповідають координати кутових точок області визначення функції цілі, та навпаки, кожній кутовий точці області визначення функції цілі відповідає опорний розв'язок системи лінійних обмежень задачі.

Справедлива наступна ***теорема про відповідність опорного плану вершині багатогранника допустимих планів***.

***Теорема* 5.1**: Вектор X є опорним планом ЗЛП тоді і тільки тоді, коли X – вершина багатогранника допустимих планів.

Отже, якщо розв'язок ЗЛП існує, то він досягається хоча б в одній вершині (опорному плані) багатогранника допустимих розв'язків, отже, пошук оптимального розв'язку необхідно здійснювати серед вершин (кутових точок) багатогранника (опорних розв'язків).

Опорний розв'язок (план), що доставляє екстремум цільовій функції, називається **оптимальним розв'язком (планом) ЗЛП**.

Розв'язання ЗЛП шляхом перебору базисних розв'язків

Оптимальний розв'язок ЗЛП можна знайти шляхом перебору всіх базисних розв'язків системи обмежень ЗЛП.

При цьому, для застосування методу перебору базисних розв'язків, система обмежень має бути зведена до канонічного вигляду та, крім того, у кожному рівнянні системи обмежень має бути виділена одна базисна змінна.

Послідовність перебору базисних розв'язків, коли кожен наступний розв'язок відрізняється від попереднього тільки однією базисною змінною, називають **правильною послідовністю**. Завжди можна побудувати правильну послідовність базисних розв'язків. Наприклад, якщо число змінних системи лінійних рівнянь $n = 4$, а ранг матриці системи $r = 2$, то правильну послідовність базисних розв'язків можна умовно записати як

$$0011\,,\quad 0101\,,\quad 1001\,,\quad 1010\,,\quad 0110\,,\quad 1100.$$

Такі переходи від одного базисного розв'язку до іншого базисного розв'язку називають **перетвореннями одноразового заміщення**. Назва перетворення пов'язане з тим, що в базис вводиться одна з вільних змінних, в той час як одна з існуючих базисних змінних стає вільною. Отже, введена в базис вільна змінна *заміщає* в базисі одну з змінних.

Після визначення всіх базисних розв'язків з них вибираються опорні розв'язки (плани). Різних опорних розв'язків системи обмежень – кінцеве число. Тому розв'язок ЗЛП в канонічній формі шукається перебором опорних розв'язків та вибором серед них такого, для якого значення цільової функції є екстремальним.

Отже, для знаходження оптимального розв'язку ЗЛП серед опорних розв'язків системи обмежень ЗЛП обирається розв'язок, при якому досягається максимум (або мінімум) функції цілі.

***Приклад* 5.1.** Знайти всі опорні розв'язки (плани) та шляхом їх перебору визначити оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування

$$Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 300 \\ x_1 + x_2 \le 150 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язання

1. Приведемо ЗЛП до канонічного виду шляхом введення змінних x_3 та x_4:

$$Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 300 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases}$$

2. В отриманій системі обмежень $m < n$ ($m = 2 -$ кількість рівнянь, $n = 4 -$ кількість невідомих). Ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ отриманої системи обмежень збігається з кількістю її рівнянь, тобто $rang\,|A| = m = 2$. Отже, система обмежень канонічної ЗЛП має $m = 2$ базисні змінні. Решта змінних – вільні.

3. Знайдемо всі базисні розв'язки системи обмежень канонічної ЗЛП

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 300\,; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 150\,. \end{cases}$$

Загальна кількість базисних розв'язків складе не більше шести, оскільки

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2)} = 6\,.$$

Щоб знайти ці базисні розв'язки, перерахуємо всі базиси, утворені стовпцями A_1, A_2, A_3, A_4 матриці обмежень $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$B_1 = \{A_1, A_2\}$; $B_2 = \{A_1, A_3\}$; $B_3 = \{A_1, A_4\}$;

$B_4 = \{A_2, A_3\}$; $B_5 = \{A_2, A_4\}$; $B_6 = \{A_3, A_4\}$.

Для побудови першого базисного розв'язку оберемо один з базисів, наприклад, $B_1 = \{A_1, A_2\}$, та прирівняємо нулю вільні (небазисні) змінні x_3, x_4. Тоді базисні змінні x_1, x_2 визначаються з системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 300\,; \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$ у вигляді $\begin{cases} x_1 = 75\,; \\ x_2 = 75\,. \end{cases}$ Отже, маємо перший базисний розв'язок $x^{(1)} = (75, 75, 0, 0)$.

Далі розглянемо базис $B_2 = \{A_1, A_3\}$. Беручи за базисні змінні x_1, x_3 та прирівнюючи нулю вільні змінні x_2, x_4, з системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_3 = 300\,; \\ x_1 = 150 \end{cases}$ визначаємо базисні змінні x_1, x_3 у вигляді $\begin{cases} x_1 = 150\,; \\ x_3 = 150\,. \end{cases}$ Таким чином, маємо базисний розв'язок $x^{(2)} = (150, 0, 150, 0)$.

Щоб знайти інші базисні розв'язки, проводимо «заміщення» однієї базисної змінної на іншу до тих пір, поки не знайдемо всі базисні розв'язки системи.

В результаті отримаємо всі шість базисних розв'язків:

$$x^{(1)} = (75, 75, 0, 0); \qquad x^{(2)} = (150, 0, 150, 0); \qquad x^{(3)} = (300, 0, 0, -150);$$
$$x^{(4)} = (0, 150, -150, 0); \qquad x^{(5)} = (0, 100, 0, 50); \qquad x^{(6)} = (0, 0, 300, 150).$$

4. Знайдемо всі опорні плани канонічної ЗЛП. Для цього проаналізуємо вид отриманих базисних розв'язків.

Розв'язки $x^{(3)} = (300, 0, 0, -150)$ та $x^{(4)} = (0, 150, -150, 0)$ містять від'ємні компоненти, і, отже, не є опорними.

Компоненти ж інших базисних розв'язків є невід'ємними. Отже, серед усіх базисних розв'язків маємо чотири опорних розв'язків (плану):

$$x^{(1)} = (75, 75, 0, 0); \qquad x^{(2)} = (150, 0, 150, 0);$$
$$x^{(5)} = (0, 100, 0, 50); \qquad x^{(6)} = (0, 0, 300, 150).$$

5. Побудуємо область допустимих розв'язків задачі (рис. 5.1) та визначимо значення цільової функції $Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ в кожній з кутових точок її області визначення, які відповідають отриманим опорним планам.

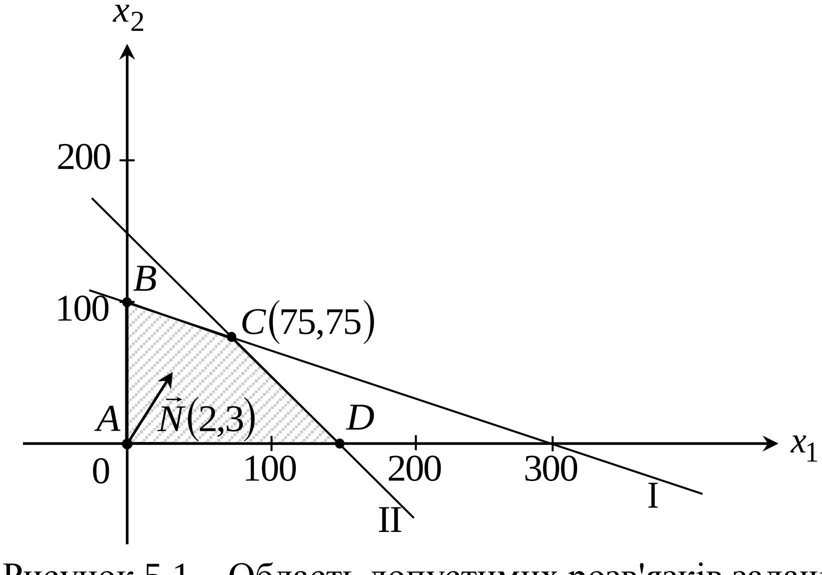


Рисунок 5.1 – Область допустимих розв'язків задачі:
I – пряма $x_1 + 3x_2 = 300$; II – пряма $x_1 + x_2 = 150$

На рис. 5.1 знайденим опорним планам відповідають відповідно наступні кутові точки та значення цільової функції $Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ в цих точках:

$$x^{(1)}: \quad C(75,\ 75) \quad \text{и} \quad Z(75,\ 75) = 375;$$
$$x^{(2)}: \quad D(150,\ 0) \quad \text{и} \quad Z(150,\ 0) = 300;$$
$$x^{(5)}: \quad B(0, 100) \quad \text{и} \quad Z(0, 100) = 300;$$
$$x^{(6)}: \quad A(0,\ 0) \quad \text{и} \quad Z(0,\ 0) = 0.$$

6. Знайдемо оптимальний розв'язок задачі. Відомо, що оптимальний розв'язок міститься серед опорних планів. Причому в якості оптимального розв'язку обирається той опорний план, який доставляє цільовій функції екстремальне значення.

Оскільки в даному прикладі розв'язується задача максимізації цільової функції, то, отже, серед всіх знайдених опорних планів оберемо той план, який доставляє максимум функції цілі.

Оскільки максимальне значення, що дорівнює 375, цільова функція $Z(x_1, x_2)$ досягає на опорному плані $x^{(1)} = (75, 75, 0, 0)$, то, отже, оптимальний розв'язок розглянутої ЗЛП буде наступним: $x_1 = 75$, $x_2 = 75$.

Для простих задач, де число змінних є невеликим, такий метод (прямий перебір) може досить швидко привести до оптимального розв'язку.

Однак на практиці часто зустрічаються задачі, в яких число змінних (та накладених умов) є дуже великим, порядку сотень і навіть тисяч. Для таких задач простий перебір стає практично неможливим: занадто велике число опорних планів системи обмежень задачі. Так, наприклад, ЗЛП з матрицею системи обмежень розмірності 4×10 ($m = 4$ та $n = 10$) містить $C_{10}^4 = 210$ опорних планів. Тому для розв'язання подібних задач необхідно мати схему, що дозволяє здійснювати упорядкований перехід від одного опорного плану до іншого.

Розроблені в теорії лінійного програмування обчислювальні методи («симплекс-метод», «двоїстий симплекс-метод» та інші) дозволяють знаходити оптимальний розв'язок цілеспрямованим перебором, з постійним наближенням до розв'язку. Оптимальний розв'язок ЗЛП цими методами можна знайти шляхом перебору не всіх, а тільки частини опорних розв'язків. Для цього необхідно кожний опорний розв'язок перевіряти на оптимальність і перехід від одного опорного розв'язку здійснювати таким чином, щоб значення цільової функції збільшувалася в задачі на максимум або зменшувалася в задачі на мінімум. Таким чином, зазначені методи дозволяють істотно скоротити кількість планів, обраних для перевірки на оптимальність.

5.2 Симплекс-метод розв’язання ЗЛП із природним базисом

5.2.1 Загальна схема і сутність симплекс-методу

Серед універсальних методів розв'язання задач лінійного програмування (ЗЛП) найбільш поширено симплексний метод (або симплекс-метод*), розроблений в 1947-49 рр. американським вченим Дж. Данцигом, який може бути застосований для розв'язання задачі як вручну, так і на ЕОМ.

Симплекс-метод заснований на наступних властивостях ЗЛП:

1. Множина всіх планів ЗЛП є опуклою.
2. Цільова функція ЗЛП досягає свого максимального (мінімального) значення в кутовій точці багатогранника розв'язків (в його вершині). Якщо цільова функція приймає своє оптимальне значення більш ніж в одній кутовій точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих точок.
3. Кожній кутовій точці багатогранника розв'язків відповідає опорний план ЗЛП.

Сутність методу полягає в послідовному пересуванні по базисам опорних планів задачі, тобто в послідовному поліпшенні планів задачі за певним критерієм до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний розв'язок (див. рис. 5.2).

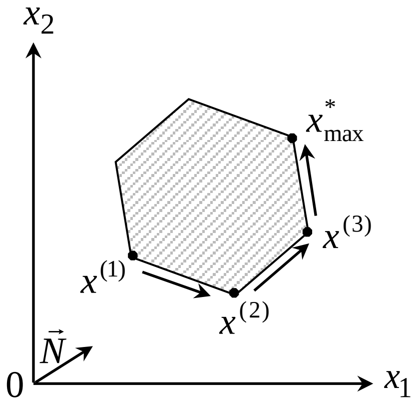


Рисунок 5.2

З геометричної точки зору, в загальному вигляді, коли в ЗЛП беруть участь n невідомих, можна сказати, що область допустимих розв'язків, що задається системою обмежуючих умов, представляється опуклим многогранником в n-вимірному просторі та оптимальне значення цільової функції досягається в одній

* *Симплексом* (з лат. означає «найпростіший») називається геометричне місце точок, які відповідають умовам $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,n})$. При малій розмірності симплексом є точка (0-мірний симплекс), відрізок (1-мірний симплекс), трикутник (2-мірний симплекс), тетраедр (3-мірний симплекс).

або декількох вершинах (кутових точках) багатогранника. Це дозволяє обмежити пошук оптимального розв'язку ЗЛП вершинами цього багатогранника.

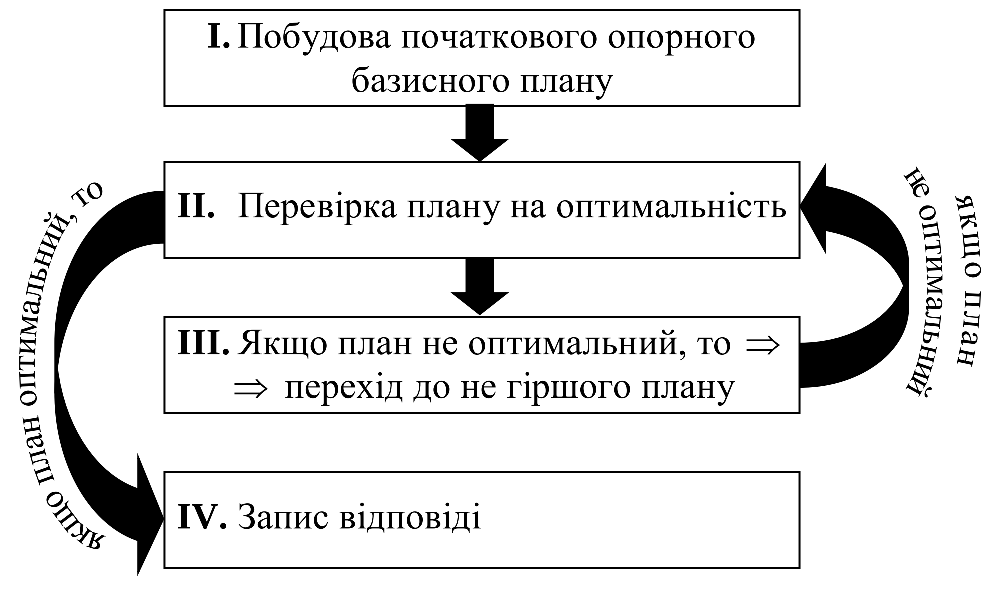
Отже, в основу симплекс-методу покладено ідею розгляду тільки крайніх точок (вершин) багатогранника, а не вся нескінченна множина його точок.

Симплекс-метод включає в себе визначення однієї з вершин багатогранника (початкового опорного плану задачі), упорядкований перебір вершин багатогранника (опорних планів задачі), при якому на кожному кроці здійснюється наближення до оптимального розв'язку. При цьому рух до оптимальних вершин здійснюється по сусідніх вершинах багатогранника. Так, згідно з рис. 5.2, перехід від початкового опорного базисного плану $x^{(1)}$ до оптимального $x^*_{\max}$ здійснюється за схемою $x^{(1)} \to x^{(2)} \to x^{(3)} \to x^*_{\max}$. При цьому забороняється перехід виду $x^{(2)} \to x^{(1)} \to x^*_{\max}$.

Розв'язання ЗЛП симплекс-методом, таким чином, починається з розглядів однієї з вершин багатогранника допустимих розв'язків. Якщо досліджувана вершина не відповідає максимуму (мінімуму), то переходять до сусідньої, збільшуючи значення функції цілі при розв'язанні задачі на максимум та зменшуючи при розв'язанні задачі на мінімум. Таким чином, перехід від однієї вершини до іншої покращує значення функції цілі.

Цей метод є універсальним, застосовним до будь-якої ЗЛП в канонічній формі з будь-якою кількістю змінних й обмежень.

Схема симплекс-методу із природним базисом:



З представленої схеми методу видно, що при симплексному методі виконуються обчислювальні процедури (ітерації) одного і того ж типу в певній послідовності до тих пір, поки не буде отримано оптимальний план задачі або стане ясно, що його не існує.

5.2.2 Характеристика основних етапів симплекс-методу

<u>**1 етап:**</u> ***Побудова початкового опорного базисного плану***.

Даний етап включає:

а) приведення обмежень до канонічного вигляду;
б) приведення обмежень до переважного вигляду.

Будемо говорити, що система обмежень має канонічний вигляд, якщо кожне з її обмежень має переважний вигляд.

Кажуть, що обмеження має переважний вигляд, якщо при невід'ємній правій частині воно містить змінну з коефіцієнтом, що дорівнює «+1», а в усі інші обмеження ця змінна входить з коефіцієнтом, що дорівнює «0».

Наприклад:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 2\,; \\ 6x_1 + x_3 + 9x_4 = 5\,. \end{cases}$$

Відповідна змінна в обмеженні називається **переважною (базисною) змінною**.

Для того, щоб отримати обмеження задачі в переважному вигляді, матрицю системи обмежень ЗЛП за допомогою еквівалентних перетворень призводять до матриці з виділеною в неї квазіодиничної матриці.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

квазіодинична матриця

Далі визначається початковий опорний розв'язок (план). Для цього змінні розбивають на дві групи – базисні і вільні.

Ознакою можливості побудови початкового опорного плану служить наявність в кожному обмеженні-рівності з невід'ємною правою частиною базисної змінної.

В якості базисних змінних слід обрати змінні, кожна з яких входить тільки в одне з рівнянь системи обмежень. Вільними змінними в цьому випадку будуть решта всіх змінних системи.

Отже, зведення до переважного вигляду системи обмежень (виділення квазіодиничної матриці) означає, що у розв’язуваній ЗЛП існує природний базис – в кожному з отримуваних рівнянь системи обмежень існує базисна змінна.

Нехай ЗЛП приведена до канонічного вигляду та всі рівняння системи обмежень мають свою базисну змінну. Прирівнявши базисні змінні до відповідних правих частин обмежень, а інші змінні до нуля, отримаємо базисний розв'язок задачі. Якщо цей розв'язок буде містити невід'ємні компоненти, то, отже, він буде опорним.

***Приклад* 5.2.** Знайти початковий опорний план (базисний розв'язок) для ЗЛП в стандартній формі:

$$Z(X) = 2x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 16\,; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \ge -4\,; \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 0\,; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\quad j \ge \overline{1,4}\,.$$

Розв'язання

Змінимо знаки другого та третього нерівностей на протилежні, помноживши кожне з них на (-1). Система обмежень тепер буде такою:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 16\,; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4\,; \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 \le 0\,. \end{cases}$$

У кожному обмеження зліва додамо невід'ємну змінну x_5, x_6, x_7, відповідно запишемо канонічний вигляд задачі:

$$Z(X) = 2x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 16\,; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 4\,; \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 + x_7 = 0\,; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\,,\quad j = \overline{1,7}\,.$$

Кожна зі змінних x_5, x_6, x_7 входить тільки в одне з рівнянь системи обмежень. Отже, матриця отриманої системи обмежень містить квазіодиничну матрицю, а, значить, система обмежень має переважний вигляд.

Змінні x_5, x_6, x_7 – базисні. Прирівнюємо їх до правих частин обмежень: $x_5 = 16$; $x_6 = 4$; $x_7 = 0$. Решта всіх змінних – вільні, прирівнюємо їх до нуля: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Запишемо тепер базисний розв'язок:

$$x_{баз} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 16, 4, 0).$$

Оскільки всі його компоненти є невід'ємними, то воно є і опорним. Таким чином, маємо початковий опорний план задачі:

$$x^{(1)} = (0, 0, 0, 0, 16, 4, 0).$$

<u>2 етап:</u> ***Критерії оптимальності опорного базисного плану*.**

Нехай ЗЛП приведена до переважного вигляду:

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \overset{\text{бз}}{x_i} + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij} \overset{\text{вз}}{x_j} = b_i\ , \quad i=\overline{1,m}\ ; \\ x_j \ge 0\ , \quad j=\overline{1,n}\ , \end{cases} \tag{5.2}$$

де бз – базисні змінні, вз – вільні змінні.

Виразимо базисні змінні (бз) через вільні змінні (вз) та обмеження (5.2), тобто

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}\ x_j\ , \quad i=\overline{1,m}, \tag{5.3}$$

та підставимо їх у вираз (5.1) для цільової функції:

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}\ x_j \right) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}\ x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i b_i}_{\Delta_0} - \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \right)}_{\Delta_j} \cdot x_j \tag{5.4}$$

Якщо в отриманому виразі (5.4) введемо оцінки:

$\Delta_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i b_i -$ оцінка цільової функції,

$\Delta_j = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j -$ оцінки вільних змінних цільової функції,

то, відповідно до них, цільова функція (5.4) набуде вигляду

$$Z(X) = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j\ . \tag{5.5}$$

В опорному плані вільні змінні x_j $\left(j=\overline{m+1,n}\right)$ дорівнюють нулю, а базисні змінні дорівнюють правим частинам обмежень. Тоді з виразу (5.5) випливає, що для опорного плану

$$Z(X)=\Delta_0 .$$

Критерієм оптимальності опорного плану при розв'язанні *задач на мінімум* є умова, що всі оцінки вільних змінних мають бути недодатними:

$$\Delta_j \le 0 \ \left(j=\overline{m+1,n}\right).$$

Це випливає з того, що при переході від одного опорного плану до іншого будь-яка вільна змінна стає базисною, тобто змінює своє значення з нульового на додатне.

Тому, якщо існує хоча б одна $\Delta_j > 0$ $\left(j \in \{m+1,\dots,n\}\right)$, то, зробивши цю змінну базисною, можна зменшити значення цільової функції на величину $\Delta_j x_j > 0$.

Аналогічно, ***при розв'язанні задач на максимум*** **критерієм оптимальності плану** є умова:

$$\Delta_j \ge 0 \ \left(j=\overline{m+1,n}\right).$$

При цьому, якщо існує хоча б одна $\Delta_j < 0$ $\left(j \in \{m+1,\dots,n\}\right)$, то, зробивши цю змінну базисною, можна збільшити значення цільової функції на величину $\Delta_j x_j < 0$.

Зауважимо, що якщо існує $\Delta_j = 0$ $\left(j=\overline{m+1,n}\right)$ в оптимальному плані, то це означає, що задача має нескінченну множину розв'язків:

$$x^* \to x^{*(1)}$$

$$Z\left(x^*\right)= Z\left(x^{*(1)}\right)^{\infty}.$$

***Приклад* 5.3:** Розв'язати симплекс-методом наступну ЗЛП:

$$Z(X)=50x_1+40x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 20 \,, \\ 8x_1+5x_2 \le 40 \,, \\ 5x_1+6x_2 \le 30 \,, \\ x_1 \ge 0 \,, \ \ x_2 \ge 0 \,. \end{cases}$$

Розв'язання:

Приведемо вихідну ЗЛП до канонічного вигляду:

$$Z_1(X) = -50x_1 - 40x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + \overset{\text{бз}}{x_3} = 20, \\ 8x_1 + 5x_2 + \overset{\text{бз}}{x_4} = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 + \overset{\text{бз}}{x_5} = 30, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases} \longleftarrow$$

Система має переважний вигляд

Для отриманої задачі маємо:

$$x^{(1)} = \left(\underbrace{\overbrace{0}^{x_1}, \overbrace{0}^{x_2}}_{\text{вз}}, \underbrace{\overbrace{20}^{x_3}, \overbrace{40}^{x_4}, \overbrace{30}^{x_5}}_{\text{бз}} \right)$$ – початковий опорний базисний план.

Для зручності розв'язання ЗЛП використовується табличний симплекс-метод, тобто використовуються таблиці. Для початку запишемо загальний вигляд такої таблиці (див. табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Бз	Вз	B	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
			c_1	$\dots$	c_j	$\dots$	c_n
x_1	c_1	b_1	a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	c_i	b_i	a_{i1}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	c_m	b_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}
оцінки цільової функції		Δ_0	Δ_1	$\dots$	Δ_j	$\dots$	Δ_n

У таблиці 5.1. позначено:

Бз – базисні змінні;
Вз – коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;
B – стовпець вільних членів;
$c_1 \dots c_j \dots c_n$ – рядок коефіцієнтів цільової функції;
a_{ij} – коефіцієнти при змінних в обмеженнях;
$A_j = (a_{1j} \quad \dots \quad a_{mj})^T$, $j = \overline{1,n}$ – i-й стовпець матриці A обмежень,
$\Delta_0 = \text{Вз} \cdot B$ – значення функції цілі, що відповідає побудованому початковому плану;
$\Delta_0 = \text{Вз} \cdot A_j - c_j$ – оцінки вільних змінних цільової функції.

Складемо первісну таблицю для нашого прикладу (див. табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			-50	-40	0	0	0
x_3	0	20	2	5	1	0	0
x_4	0	40	8	5	0	1	0
x_5	0	30	5	6	0	0	1
Цільова функція		0	50	40	0	0	0

У табл. 5.2 оцінки цільової функції розраховуються наступним чином:

$$\Delta_0 = \text{Вз} \cdot B = 0 \cdot 20 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 30 = 0;$$
$$\Delta_1 = \text{Вз} \cdot A_1 - c_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 5 - (-50) = 50;$$
$$\Delta_2 = \text{Вз} \cdot A_2 - c_2 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 - (-40) = 40;$$
$$\Delta_3 = \text{Вз} \cdot A_3 - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$
$$\Delta_4 = \text{Вз} \cdot A_4 - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$
$$\Delta_5 = \text{Вз} \cdot A_5 - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0;$$

Оскільки $\Delta_1 = 50 > 0$ та $\Delta_2 = 40 > 0$, то, отже, план $x^{(1)}$ не є оптимальним, оскільки, відповідно до критерію оптимальності базисного плану при розв'язанні задач на мінімум має виконуватися умова, що всі оцінки вільних змінних повинні бути недодатними: $\Delta_j \le 0$.

В цьому випадку $Z\left(x^{(1)}\right) = 0 = \Delta_0$.

<u>3 етап:</u> ***Перетворення опорного базисного плану***.

<u>Сутність перетворення:</u> Якщо критерії оптимальності не виконуються, то потрібно перейти до не гіршого опорного плану (кутовій точці), тобто виключити з базису деяку базисну змінну та ввести замість неї нову з числа вільних змінних.

При цьому:

– вільна змінна, яку будемо вводити в базис, відповідає так званому **розв'язуючому стовпцю**.
– базисна змінна, що виводиться з базису, буде відповідати **розв'язуючому рядку**.
– на перетині розв'язуючого стовпця та розв'язуючого рядка знаходиться так званий **розв'язуючий елемент**.

<u>Етапи перетворення опорного базисного плану</u>:

1) Вибір розв'язуючого стовпця j_0, що відповідає вільній змінній x_{j_0}.

Змінна, яку потрібно ввести в базис, відповідає тій оцінці Δ_j, яка не задовольняє умові оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, то серед них обирають найбільшу за абсолютною величиною, тобто

$$\Delta_{j_0} = \max_{\Delta_j > 0} \Delta_j,$$

та відповідну до неї змінну вводять в базис. Стовпець з цією змінною називають **розв'язуючим**.

Для нашого прикладу маємо:

$$\Delta_{j_0} = \max_{\Delta_j > 0} \{\Delta_1, \Delta_2\} = \max_{\Delta_j > 0} \{50,40\} = 50 = \Delta_1.$$

Отже, розв'язуючий стовпець $j_0 = 1$ відповідає вільній змінній x_1, а значить, вільну змінну x_1 будемо вводити в базис.

2) Вибір розв'язуючого рядка i_0, що відповідає базисній змінній x_{i_0}.

Для визначення змінної, яку потрібно вивести з базису, поступають так: елементи стовпця В ділять тільки на додатні елементи розв'язуючого стовпця та знаходять симплексні відношення $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ij}}$. Обирають з θ_i найменше.

Таким чином, рядок i_0 відповідає такому рядку, який буде відповідати мінімуму серед відношень $\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}\right\}$ при $a_{ij_0} > 0$, тобто:

$$\theta_{i_0} = \min_{a_{ij_0} > 0} \left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\}.$$

Тоді знайдене θ_{i_0} називає ту змінну, яку потрібно ввести в базис. Відповідний рядок таблиці називається **розв'язуючим**.

Якщо порушується умова вибору розв'язуючого рядка, то в правих частинах обмежень (тобто в стовпці В) з'являються від'ємні значення. А це неприпустимо у зв'язку з вимогою невід'ємності для змінних задачі.

Для нашого прикладу маємо:

$$\theta_{i_0} = \min_{a_{ij_0} > 0} \left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \min_{a_{i1} > 0} \left\{\frac{20}{2}, \frac{40}{8}, \frac{30}{5}\right\} = \min_{a_{ij_0} > 0} \{10,5,6\} = 5 = \theta_2.$$

Отже, розв'язуючий рядок $i_0 = 2$ відповідає базисній змінній x_4, а значить, базисну змінну x_4 будемо виводити з базису.

В табл. 5.3 виділені розв'язуючий стовпець, розв'язуючий рядок та розв'язуючий елемент (заштрихований темним кольором).

Таблиця 5.3

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			-50	-40	0	0	0
x_3	0	20	2	5	1	0	0
x_4	0	40	**8**	5	0	1	0
x_5	0	30	5	6	0	0	1
Цільова функція		0	50	40	0	0	0

Розв'язуючий рядок

Розв'язуючий стовпець

3) Перехід до нового опорного плану, перетворення таблиці.

Елементи нової симплексної таблиці розраховуються наступним чином (табл. 5.4):

а) елементи нової таблиці, що відповідають елементам розв'язуючого рядка, отримуються шляхом ділення розв'язуючого рядка на розв'язуючий елемент;

б) елементи розв'язуючого стовпця замінюються нулями (крім розв'язуючого елемента, який дорівнює «1»);

Таблиця 5.4

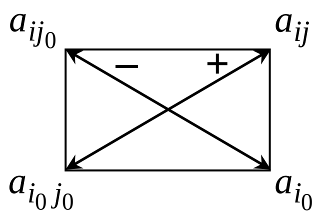
Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			-50	-40	0	0	0
x_3	0	10	0	30/8	1	2/8	0
x_1	-50	5	**1**	5/8	0	1/8	0
x_5	0	5	0	23/8	0	-5/8	1
Цільова функція		-250	0	70/8	0	-50/8	0

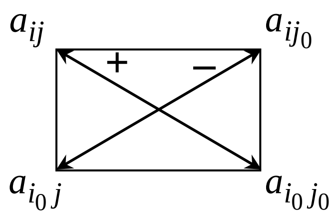
Розв'язуючий рядок

Розв'язуючий стовпець

в) всі інші елементи нової таблиці обчислюються за правилом прямокутника:

– шуканий елемент a'_{ij} за уявним прямокутником перерахування





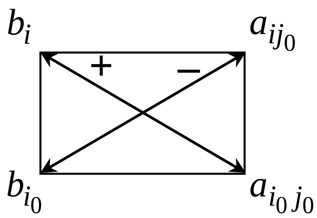
дорівнює різниці добутків елементів головної (на якій знаходиться елемент a_{ij}) та побічної діагоналей, поділеній на розв'язуючий елемент $a_{i_0 j_0}$:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{i_0 j_0} - a_{ij_0} \cdot a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad i \neq i_0, \quad j \neq j_0,$$

де a_{ij} – вихідний елемент, що підлягає перерахуванню для нової таблиці; $a_{i_0 j_0}$ – розв'язуючий елемент; a_{ij_0} – елемент, що стоїть в i-тому рядку та розв'язуючому стовпці j_0; $a_{i_0 j}$ – елемент, що стоїть в розв'язуючому рядку i_0 та j-тому стовпці.

Наприклад, $a'_{12} = \dfrac{a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}}{a_{21}} = \dfrac{5 \cdot 8 - 2 \cdot 5}{8} = \dfrac{30}{8} = 3{,}75$.

– шуканий елемент b'_i за уявним прямокутником перерахування



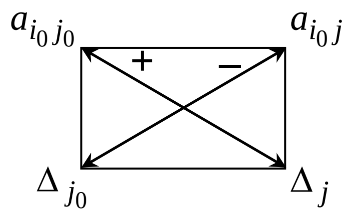
дорівнює різниці добутків елементів головної (на якій знаходиться елемент b_i) та побічної діагоналей, поділеній на розв'язуючий елемент $a_{i_0 j_0}$:

$$b'_i = \frac{b_i \cdot a_{i_0 j_0} - a_{ij_0} \cdot b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad i \neq i_0, \quad j \neq j_0,$$

де b_i – вихідний елемент, що підлягає перерахуванню для нової таблиці; b_{i_0} – елемент, що стоїть в розв'язуючому рядку i_0.

Наприклад, $b'_1 = \dfrac{b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{20 \cdot 8 - 40 \cdot 2}{8} = 10$.

– шуканий елемент Δ'_j за уявним прямокутником перерахування



дорівнює різниці добутків елементів головної (на якій знаходиться елемент Δ_j) та побічної діагоналей, поділеній на розв'язуючий елемент $a_{i_0 j_0}$:

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j \cdot a_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} \cdot a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq i_0, \quad j \neq j_0,$$

де Δ_j – вихідний елемент, що підлягає перерахуванню для нової таблиці; Δ_{j_0} – елемент, що стоїть в розв'язуючому стовпці j_0.

Наприклад, $\Delta'_2 = \dfrac{\Delta_2 \cdot a_{21} - \Delta_1 \cdot a_{22}}{a_{21}} = \dfrac{40 \cdot 8 - 50 \cdot 5}{8} = \dfrac{70}{8} = 8{,}75.$

4) Контроль обчислень.

а) отриману на кроці 3) таблицю можна перевірити за правилами обчислення оцінок за формулами:

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i, \qquad \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j;$$

б) <u>*контроль зміни функції*</u>. Значення цільової функції має поліпшуватися (при розв'язанні задачі на мінімум значення цільової функції має зменшуватися, а при розв'язанні задачі на максимум - збільшуватися).

Зауваження: при розв'язанні ЗЛП на максимум крок III алгоритму симплекс-методу не змінюється, а залишається в попередньому вигляді.

5) Визначення нового опорного плану та значення цільової функції.

Для отриманої задачі маємо:

$$x^{(2)} = \left(\underbrace{\overbrace{5}^{x_1}}_{\text{бз}}, \underbrace{\overbrace{0}^{x_2}}_{\text{вз}}, \underbrace{\overbrace{10}^{x_3}}_{\text{бз}}, \underbrace{\overbrace{0}^{x_4}}_{\text{вз}}, \underbrace{\overbrace{5}^{x_5}}_{\text{бз}} \right) \text{– новий опорний план.}$$

$$Z(x_1, x_2) = -50 \cdot 5 - 40 \cdot 0 = -250.$$

<u>4 етап:</u> ***Запис відповіді***.

1) розв'язок отриманий та він єдиний:
   а) якщо в оптимальному розв'язку всі $\Delta_j < 0$ (для задачі на мінімум), $j \in$ вз, де вз – вільні змінні;
   б) якщо в оптимальному розв'язку всі $\Delta_j > 0$, $j \in$ вз (для задачі на максимум);
2) задача має нескінченну множину розв'язків, якщо розв'язок отримано та існує така оцінка вільної змінної, яка дорівнює нулю, тобто $\Delta_j^* = 0$, $j \in$ вз;
3) задача не має розв'язків:
   а) отримано розв'язок *M*-задачі, в якій фіктивні змінні відмінні від нуля;
   б) коли цільова функція є необмеженою. Даний випадок має місце, коли отримано неоптимальний розв'язок, тобто
      – коли при розв'язанні ЗЛП на мінімум існує $\Delta_j > 0$ $(j \in \text{вз})$ та всі елементи відповідного стовпця є недодатними;
      – коли при розв'язанні ЗЛП на максимум існує $\Delta_j < 0$ $(j \in \text{вз})$ та всі елементи відповідного стовпця є невід'ємними.

5.2.3 Приклади розв'язання ЗЛП симплекс-методом

***Приклад* 5.4:** Розв'язати симплекс-методом ЗЛП:

$$Z(X) = 15x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 1200, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \le 1000, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Розв'язання

1. Перетворимо систему обмежень до канонічного вигляду. Для цього в систему обмежень введемо додаткові невід'ємні змінні x_5 та x_6:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 1200, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 1000, \end{cases}$$

В результаті вихідна модель набуде вигляду:

$$Z(X) = 15x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 20x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + \underset{\text{бп}}{x_5} = 1200 \,, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + \underset{\text{бп}}{x_6} = 1000 \,, \\ x_j \ge 0 \,, \quad j = \overline{1,6} \,. \end{cases} \longleftarrow \text{Система має переважний вигляд}$$

2. Запишемо умови задачі у вигляді симплексної таблиці:

Таблиця 5.5

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			15	5	3	20	0	0
x_5	0	1200	4	2	1	4	1	0
x_6	0	1000	1	5	3	1	0	1
Цільова функція		0	–15	–5	–3	–20	0	0

3. Знаходження початкового опорного плану.

Оскільки в табл. 5.5 в стовпці B вільних членів немає від'ємних елементів, то, значить, таблиця містить початковий опорний план.

Для його визначення припустимо вільні змінні рівними нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. При цьому базисні змінні будуть дорівнювати значенням відповідних вільних членів.

Таким чином, маємо:

$$x^{(1)} = \Bigg(\underbrace{\overbrace{0}^{x_1}, \overbrace{0}^{x_2}, \overbrace{0}^{x_3}, \overbrace{0}^{x_4}}_{\text{вз}}, \underbrace{\overbrace{1200}^{x_5}, \overbrace{1000}^{x_6}}_{\text{бз}} \Bigg)$$ – початковий опорний базисний план.

В цьому випадку $Z\left(x^{(1)}\right) = 0 = \Delta_0$.

4. Перевірка початкового опорного плану на оптимальність.

Оскільки в першій симплексній таблиці (табл. 5.5) $\Delta_1 = -15 < 0$, $\Delta_2 = -5 < 0$, $\Delta_3 = -3 < 0$, $\Delta_4 = -20 < 0$ то, отже, план $x^{(1)}$ не є оптимальним, оскільки, відповідно до критерію оптимальності базисного плану при розв'язанні задач на максимум всі оцінки вільних змінних мають бути невід'ємними: $\Delta_j \ge 0$.

Оскільки критерій оптимальності не виконується, потрібно перейти до нового не гіршого опорного плану.

5. Перетворення опорного плану:

а) Обираємо розв'язуючий стовпець – обчислюємо величину

$$\Delta_{j_0} = \max_{|\Delta_j|>0} |\Delta_j| = \max\{|-15|, |-5|, |-3|, |-20|\} = 20 = \Delta_4 .$$

Отже, розв'язуючий стовпець $j_0 = 4$ відповідає вільній змінній x_4, а значить, вільну змінну x_4 будемо вводити в базис.

б) Обираємо розв'язуючий рядок – обчислюємо величину

$$\theta_{i_0} = \min_{a_{ij_0}>0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij_0}} \right\} = \min_{a_{i4}>0} \left\{ \frac{1200}{4}, \frac{1000}{1} \right\} = \min_{a_{i4}>0} \{300, 1000\} = 300 = \theta_1$$

Отже, розв'язуючий рядок $i_0 = 1$ відповідає базисній змінній x_5, а значить, змінну x_5 будемо виводити з базису.

в) Знаходимо розв'язуючий елемент – це елемент, що стоїть на перетині розв'язуючого стовпця та розв'язуючого рядка – елемент $a_{14} = 4$.

1. Виконуючи симплексне перетворення з розв'язуючим елементом $a_{14} = 4$, прийдемо до нової таблиці:

Таблиця 5.6

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			15	5	3	20	0	0
x_4	20	300	1	1/2	1/4	1	1/4	0
x_6	0	700	0	9/2	11/4	0	–1/4	1
Цільова функція		6000	5	5	2	0	5	0

Таблиця містить новий опорний план:

$$x^{(2)} = \Bigg(\underbrace{\overbrace{0}^{x_1}, \overbrace{0}^{x_2}, \overbrace{0}^{x_3}}_{\text{вз}}, \underbrace{\overbrace{300}^{x_4}}_{\text{бз}}, \underbrace{\overbrace{0}^{x_5}}_{\text{вз}}, \underbrace{\overbrace{700}^{x_6}}_{\text{бз}} \Bigg).$$

Бачимо, що в табл. 5.6 всі $\Delta_j \geq 0$ $\left(j = \overline{1,6}\right)$, отже, отриманий опорний план $x^{(2)}$ є оптимальним, при цьому $Z\left(x^{(2)}\right) = 6000$.

Звернемося до вихідної моделі. У ній міститься 4 обмеження та цільова функція $Z(X) \to \max$.

Отже, оптимальним розв’язком вихідної задачі буде

$$X^* = (0, 0, 0, 300)^T ,$$

при цьому $Z_{\max}(X) = 6000$.

***Приклад* 5.5:** Розв'язати симплекс-методом ЗЛП:

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

та дати геометричну інтерпретацію процесу розв'язання.

Розв'язання

1. Перейдемо до задачі мінімізації. Для цього введемо в розгляд функцію $Z_1 = -Z$. Тоді $Z_1(X) = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min$.
2. Система обмежень вже приведена до переважного вигляду – в ній вже виділені базисні змінні x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \overset{\text{бз}}{x_3} = 5\,, \\ 2x_1 + x_2 + \overset{\text{бз}}{x_4} = 9\,, \\ x_1 + 2x_2 + \overset{\text{бз}}{x_5} = 7\,, \\ x_j \geq 0\,, \quad j = \overline{1,5}\,. \end{cases} \longleftarrow \text{Система має переважний вигляд}$$

3. Запишемо умови задачі у вигляді симплексної таблиці (табл. 5.7).

Таблиця 5.7

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			–2	–1	1	–1	1
x_3	1	5	1	1	1	0	0
x_4	–1	9	2	1	0	1	0
x_5	1	7	1	2	0	0	1
Цільова функція		3	2	3	0	0	0

4. Знаходження початкового опорного плану.

   Оскільки в табл. 5.7 в стовпці B вільних членів немає від'ємних елементів, то, отже, таблиця містить початковий опорний план.

   Для його визначення припустимо вільні змінні рівними нулю: $x_1 = x_2 = 0$. При цьому базисні змінні будуть дорівнювати значенням відповідних вільних членів.

Таким чином, маємо: $x^{(1)}=\left(\underbrace{\overset{x_1}{\overbrace{0}},\overset{x_2}{\overbrace{0}}}_{\text{вз}},\underbrace{\overset{x_3}{\overbrace{5}},\overset{x_4}{\overbrace{9}},\overset{x_5}{\overbrace{7}}}_{\text{бз}}\right)$ – початковий опорний базисний план. В цьому випадку $Z_1\left(x^{(1)}\right)=3=\Delta_0$.

5. Перевірка початкового опорного плану на оптимальність.

   Оскільки в першій симплексній таблиці (табл. 5.7) $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=3>0$, то, отже, план $x^{(1)}$ не є оптимальним, оскільки, відповідно до критерію оптимальності базисного плану при розв'язанні задач на мінімум всі оцінки вільних змінних мають бути недодатними: $\Delta_j\le 0$.

   Оскільки критерій оптимальності не виконується, потрібно перейти до нового опорного плану, для якого значення цільової функції зменшиться. Для цього потрібно одну з вільних змінних (x_1 або x_2) перевести в базис, а одну з базисних (x_3, або x_4, або x_5) перевести у вільні.

6. Перетворення опорного плану:

   а) Обираємо розв’язуючий стовпець – обчислюємо величину

   $$\Delta_{j_0}=\max_{\Delta_j>0}\Delta_j=\max\{2,3\}=3=\Delta_2.$$

   Отже, розв’язуючий стовпець $j_0=2$ відповідає вільній змінній x_2, а значить, вільну змінну x_2 будемо вводити в базис.

   б) Обираємо розв’язуючий рядок – обчислюємо величину

   $$\theta_{i_0}=\min_{a_{ij_0}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\}=\min_{a_{i2}>0}\left\{\frac{5}{1},\frac{9}{1},\frac{7}{2}\right\}=\min_{a_{i2}>0}\{5;9;3{,}5\}=3{,}5=\theta_3.$$

   Отже, розв’язуючий рядок $i_0=3$ відповідає базисній змінній x_5, а значить, базисну змінну x_5 будемо виводити з базису.

   в) Знаходимо розв’язуючий елемент – це елемент, що стоїть на перетині розв’язуючого стовпця та розв’язуючого рядка – елемент $a_{32}=2$.

2. Виконуючи симплексне перетворення з розв’язуючим елементом $a_{32}=2$, прийдемо до нової таблиці:

Таблиця 5.8

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			–2	–1	1	–1	1
x_3	1	3/2	1/2	0	1	0	–1/2
x_4	–1	11/2	3/2	0	0	1	–1/2
x_2	–1	7/2	1/2	1	0	0	1/2
Цільова функція		–15/2	1/2	0	0	0	–3/2

Отримана табл. 5.8 містить новий опорний план:

$$x^{(2)} = \left(0,\ \frac{7}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{11}{2},\ 0\right).$$

При цьому $Z_1\left(x^{(2)}\right) = -\frac{15}{2}$. Отже, значення функції цілі $Z_1(X)$ зменшилося від значення $Z_1(X) = 3$ до значення $Z_1(X) = -\frac{15}{2}$.

Перевіримо, чи є отриманий опорний план оптимальним. Для цього проаналізуємо отримані в табл. 5.8 оцінки $\Delta_j \geq 0$ $\left(j = \overline{1,6}\right)$. Оскільки серед цих оцінок є $\Delta_1 \geq 0$, то, отже, отриманий опорний план $x^{(2)}$ також не є оптимальним.

8. Перетворення опорного плану:

а) Обираємо розв'язуючий стовпець.

Очевидно, що тепер необхідно в базис ввести змінну x_1, яка відповідає додатній величині $\Delta_{j_0} = \Delta_1 = \frac{1}{2}$. Тоді перший стовпець $j_0 = 1$ в табл. 5.8 стає розв'язуючим.

б) Обираємо розв'язуючий рядок – знаходимо величину

$$\theta_{i_0} = \min_{a_{ij_0} > 0}\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \min_{a_{i1} > 0}\left\{\frac{3/2}{1/2}, \frac{11/2}{3/2}, \frac{7/2}{1/2}\right\} = \min_{a_{i1} > 0}\left\{3,\ \frac{11}{3},\ 7\right\} = 3 = \theta_1.$$

Отже, розв'язуючий рядок $i_0 = 1$ відповідає базисній змінній x_3, яку будемо виводити з базису.

в) Знаходимо розв'язуючий елемент – це елемент $a_{11} = \frac{1}{2}$.

9. Виконуючи симплексне перетворення з розв'язуючим елементом $a_{11} = 1/2$, прийдемо до нової таблиці.

Таблиця 5.9

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			-2	-1	1	-1	1
x_1	-2	3	1	0	2	0	-1
x_4	-1	1	0	0	-3	1	1
x_2	-1	2	0	1	-1	0	1
Цільова функція		-9	0	0	-1	0	-1

Отримана табл. 5.9 містить новий опорний план:

$$x^{(3)} = (3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0).$$

При цьому $Z_1\left(x^{(3)}\right)=-9$. Отже, значення функції цілі $Z_1(X)$ зменшилося від значення $Z_1(X)=-\frac{15}{2}$ до значення $Z_1(X)=-9$.

Отриманий опорний план, згідно табл. 5.9 є єдиним оптимальним планом задачі, оскільки всі $\Delta_j \geq 0$ $\left(j=\overline{1,6}\right)$. При цьому $Z_{1\min}(X)=-9$.

Отже, розв’язком вихідної задачі є:

$$X^*=(3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0),\ \text{а}\ Z_{\max}(X)=-Z_{1\min}(X)=9.$$

10. Дамо геометричну інтерпретацію процесу знаходження розв'язку. Для цього перш за все перейдемо від канонічної форми моделі ЗЛП

$$Z(X)=2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ 2x_1+x_2+x_4=9, \\ x_1+2x_2+x_5=7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,5}$$

до стандартної форми моделі даної задачі. Це неважко зробити, оскільки система обмежень задачі вже приведена до одиничного базису (переважного вигляду).

Виразимо з системи обмежень базисні змінні через вільні:

$$x_3=5-x_1-x_2 \geq 0,$$
$$x_4=9-2x_1-x_2 \geq 0,$$
$$x_5=7-x_1-2x_2 \geq 0,$$

та, підставивши замість x_3, x_4, x_5 їх вирази в функцію цілі $Z(X)$, отримаємо:

$$Z(X)=-3+2x_1+3x_2 \to \max.$$

Стандартна форма моделі прийме вигляд

$$Z(X)=-3+2x_1+3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \leq 5, \\ 2x_1+x_2 \leq 9, \\ x_1+2x_2 \leq 7, \end{cases}$$

$$x_{1,}\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язок задачі можна знайти, використовуючи геометричну інтерпретацію розв'язку ЗЛП, наведену на рис. 5.3.

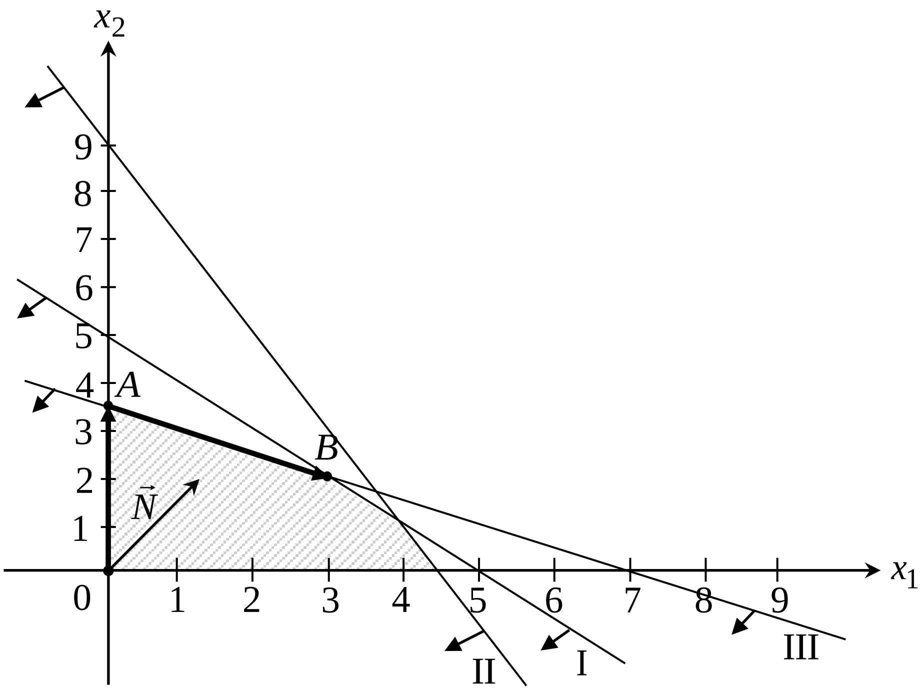


Рисунок 5.3 – Геометрична інтерпретація симплекс-методу

Вихідний опорний план $x^{(1)} = (0,\ 0,\ 5,\ 9,\ 7)$ відповідає точці $O\,(0,\ 0)$ області допустимих розв'язків (ОДР).

Після одного кроку симплекс-методу (однієї ітерації) був отриманий новий опорний план $x^{(2)} = \left(0,\ \frac{7}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{11}{2},\ 0\right)$, якому відповідає точка $A\left(0,\ \frac{7}{2}\right)$.

На рис. 5.3 перехід від одного опорного плану (вершини) до іншого опорного плану відбувається по ребру OA.

Після другої ітерації отримано план

$$x^{(3)} = X^* = (3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0),$$

який є оптимальним. Він відповідає на рис. 5.3 точці B, тобто здійснено перехід від точки A до точки B по ребру AB.

5.3 Симплекс-метод розв'язання ЗЛП із штучним базисом. М-задача

Для застосування алгоритму симплекс-методу система обмежень має бути розв'язана відносно початкового базису (мати переважний вигляд[†]), тобто має бути приведена до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \bar{b}_1 - \left(\bar{a}_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n} x_n \right); \\ x_2 = \bar{b}_2 - \left(\bar{a}_{2,m+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n} x_n \right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \bar{b}_m - \left(\bar{a}_{m,m+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn} x_n \right). \end{cases}$$

Однак в деяких задачах лінійного програмування базис вбачається не відразу.

У цьому випадку (для знаходження початкового опорного базисного розв'язку (плану) задачі лінійного програмування) використовується **метод штучного базису**.

Даний метод полягає в застосуванні правил симплекс-методу до спеціальної задачі лінійного програмування. Вона отримується з вихідної задачі лінійного програмування, записаної в канонічній формі, шляхом додавання до лівих частин рівнянь системи обмежень, які не мають переважного вигляду, «штучних» змінних. Ці змінні вводяться з таким розрахунком, щоб отримана система рівнянь мала повний одиничний базис, якому відповідав би опорний план нової системи обмежень.

В цільову функцію змінні ω_i вводять з коефіцієнтом, що дорівнює «M» (при розв'язанні задачі на мінімум), або з коефіцієнтом, що дорівнює «$-M$» (при розв'язанні задачі на максимум), де M – досить велике додатне число, яке має зміст штрафу за введення штучних змінних.

Складена таким чином задача називається ***M*-задачею лінійного програмування**. Вона завжди має переважний вигляд.

Розглянемо правило побудови такої задачі.

[†] Обмеження ЗЛП має ***переважний вигляд***, якщо при невід'ємній правій частині $(b_i \geq 0)$ його ліва частина містить змінну з коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, а в інші обмеження ця змінна входить з коефіцієнтом, що дорівнює нулю.

Відповідна змінна в обмеженні називається ***переважною (базисною) змінною***.

Нехай вихідна задача лінійного програмування дана в канонічному вигляді та праві частини її системи обмежень є невід'ємними:

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i \geq 0 \quad (i=1,..,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}),$$

причому жодне з обмежень не має переважної змінної та, отже, не має переважного вигляду.

У такому випадку для пошуку початкового опорного плану вихідної ЗЛП будується допоміжна задача – так звана ***М*-задача лінійного програмування** – в наступному вигляді:

$$\overline{Z}(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j -(+)\sum_{i=1}^{m} M\omega_i \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \omega_i = b_i, \qquad b_i \geq 0 \qquad (i=1,..,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}), \quad \omega_i \geq 0, \ (i=1,..,m).$$

Отримана таким чином *М*-задача має переважний вигляд. Її початковий опорний план має вигляд

$$x_{опт}=(\underbrace{0;0;...;0;}_{n}b_1;b_2;...;b_m)\,.$$

***Зауваження*:** Якщо деякі з рівнянь системи обмежень вихідної ЗЛП мають переважний вигляд, то в них не слід вводити штучні змінні.

Справедлива наступна теорема**.**

Теорема 5.2 (*про зв'язок розв'язків вихідної ЗЛП та М-задачі*):

Нехай $\left(x_1^*,\ldots,x_n^*,\omega_1\ldots,\omega_n\right)$ – оптимальний розв’язок *М*-задачі.

1) Якщо $\omega_1^*=\ldots=\omega_n^*=0$, то вектор $\left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)$ є розв’язком вихідної задачі.

2) Якщо ж хоча б одна зі «штучних» змінних в розв'язку *М*-задачі не дорівнює нулю, то вихідна ЗЛП не має розв'язку, причому в поганому сенсі, оскільки система обмежень задачі несумісна.

В процесі розв'язання *M*-задачі слід викреслювати з симплекс-таблиці «штучні» змінні ω_i по мірі їх виходу з базису. При застосуванні до цієї задачі симплекс-методу оцінки Δ_j тепер будуть залежати від коефіцієнта «*M*». Для порівняння оцінок потрібно пам'ятати, що *M* – досить велике додатне число, тому з базису будуть виводитися в першу чергу штучні змінні.

Якщо все «штучні» змінні вийшли з базису, то отримуємо вихідну задачу лінійного програмування. Якщо оптимальний розв'язок *M*-задачі містить хоча б одну «штучну» змінну або *M*-задача нерозв'язна, то вихідна задача лінійного програмування також нерозв'язна.

Реалізацію методу штучного базису розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 5.6. Розв'язати ЗЛП для цільової функції

$$\mathrm{Z} = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

з системою обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ x_3 \ge 1, \end{cases}$$

за умов невід'ємності

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Розв'язання

Вихідна ЗЛП записана в загальній формі. Приведемо її до канонічної формі, вводячи додатково в систему обмежень невід'ємні балансові змінні x_4, x_5, x_6 наступним чином:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 = 4, \\ x_3 - x_6 = 1, \end{cases}$$

Перше рівняння цієї системи обмежень має переважний вигляд, а два інших – не мають (оскільки якщо в якості базису взяти $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ та надати вільним змінним значення, що дорівнюють нулю, то змінні x_4 та x_5 приймуть від'ємні значення).

Складемо *M*-задачу лінійного програмування, для чого в ліві частини другого і третього рівнянь системи введемо невід'ємні «штучні» змінні ω_1 та ω_2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 + \omega_1 = 4, \\ x_3 - x_6 + \omega_2 = 1, \end{cases}$$

а в праву частину цільової функції додамо складові $M\omega_1$ та $M\omega_2$:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + M\omega_1 + M\omega_2 \to \min,$$

де M – досить велике додатне число.

У цій задачі базис вбачаються одразу:

$$B = \{x_4, \omega_1, \omega_2\}.$$

Початковим опорним розв’язком буде план

$$x^{(1)} = (0, 0, 0, 2, 0, 0, 4, 1).$$

Заповнимо початкову симплекс-таблицю (табл. 5.10).

Таблиця 5.10

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ω_1	ω_2
			3	2	3	0	0	0	M	M
x_4	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0
ω_1	M	4	3	8	2	0	–1	0	1	0
ω_2	M	1	0	0	1	0	0	–1	0	1
Цільова функція		5M	3M–3	8M–2	3M–3	0	–M	–M	0	0

Останній рядок табл. 5.10 містить три додатних числа: 3M−3, 8M−2 и 3M−3, отже, початковий опорний розв'язок M-задачі лінійного програмування не є оптимальним, тобто не доставляє цільовій функції мінімальне значення.

Оберемо розв’язуючий стовпець, який відповідає найбільшому додатному числу в останньому рядку. Оскільки M – досить велике додатне число, в якості розв’язуючого стовпця обираємо стовпець, який відповідає змінній x_2. Діленням вільних членів на відповідні додатні числа розв’язуючого стовпця знаходимо найменше відношення та в якості розв’язуючого рядка обираємо рядок базисної змінної ω_1, отже, «штучна» змінна ω_1 виходить з базису, а її місце займає змінна x_2. Таким чином, в наступній симплекс-таблиці (табл. 5.11) стає на одну змінну, а значить, і на один стовпець, менше. Правила складання та заповнення табл. 5.11 аналогічні стандартним правилам заповнення симплекс-таблиць, тому залишимо їх без коментарів.

Таблиця 5.11

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ω_2
			3	2	3	0	0	0	M
x_4	0	3/2	13/8	0	6/8	1	1/8	0	0
x_2	2	1/2	3/8	1	2/8	0	–1/8	0	0
ω_2	M	1	0	0	1	0	0	–1	1
Цільова функція		M+1	–9/4	0	M–5/2	0	–1/4	–M	0

Нова симплекс-таблиця (табл. 5.11) містить в останньому рядку єдине додатне число: M−5/2. В якості розв’язуючого стовпця оберемо стовпець змінної x_3 та переконаємося в тому, що в його рядках є додатні числа. Знайдемо відношення, що отримуються шляхом ділення вільних членів табл. 5.11 на відповідні додатні числа розв’язуючого стовпця. Найменшому відношенню відповідає рядок «штучної» базисної змінної ω_2. Таким чином, цей рядок є розв’язуючим.

Переходячи до складання та заповнення наступної симплекс-таблиці (табл. 5.12), замінюємо в базисі змінну ω_2 невідомою x_3. Табл. 5.12 вже не буде містити змінну ω_2, а отже, й відповідного до неї стовпця. Отже, всі «штучні» змінні вийшли з базису, тобто в табл. 5.12 ми отримали вихідну задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі.

Таблиця 5.12

Бз	Вз	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			3	2	3	0	0	0
x_4	0	3/4	13/8	0	0	1	1/8	3/4
x_2	2	1/4	3/8	1	0	0	–1/8	1/4
x_3	3	1	0	0	1	0	0	–1
Цільова функція		7/2	–9/4	0	0	0	–1/4	–5/2

В останньому рядку табл. 5.12 немає додатних чисел, отже, знайдено оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, записаної в канонічній формі:

$$x^{(3)} = x^* = \left(0, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}, 0, 0\right),$$

а відповідне значення цільової функції дорівнює $Z(x^*) = Z_{\min} = \frac{7}{2}$.

Виключаючи з остаточного розв'язку балансові змінні, отримаємо відповідь:

$$x^* = \left(0, \frac{1}{4}, 1\right), \quad Z(x^*) = Z_{\min} = \frac{7}{2}.$$

5.4 Питання для самоконтролю за темою

1. Що називається базисною змінною? Яким чином визначається базисна змінна?
2. Яким чином перевіряється, чи є отриманий розв'язок опорним?
3. Сформулюйте основні вимоги до застосування для розв'язання ЗЛП методу перебору базисних розв'язків.
4. Що таке переважний вигляд системи обмежень та яким чином система обмежень зводиться до переважного вигляду?
5. Сформулюйте алгоритм та наведіть стислу характеристику основних етапів розв'язання ЗЛП методом перебору базисних розв'язків.
6. В чому полягає основна відмінність між методом перебору базисних розв'язків та симплекс-методом?
7. Сформулюйте основні вимоги до застосування для розв'язання ЗЛП симплекс-методом із природним базисом.
8. Сформулюйте алгоритм та наведіть стислу характеристику основних етапів розв'язання ЗЛП симплекс-методом.
9. Яким чином можливе вирішення проблеми відсутності природного базису у симплекс-методі? Охарактеризуйте всі підходи до вирішення проблеми.
10. Опишіть, яким чином у симплекс-таблиці використовується правило прямокутника?
11. Яким чином у симплекс-таблиці визначається, що оптимальний розв'язок існує та являє собою множину розв'язків?
12. Яким чином за симплекс-таблицею визначається, що задача не має розв'язків?
13. У яких випадках складається *M*-задача? Охарактеризуйте ці випадки.
14. Яким чином в *M*-задачі вводиться штучний базис? Наведіть відповідь у формалізованому вигляді в тому числі.
15. У якому випадку в *M*-задачі не буде розв'язків? Як це побачити із симплекс-таблиці?