<u>Тема 2:</u> Математичне та лінійне програмування: загальне поняття та постановка задач. Побудова моделей задач лінійного програмування

План:

2.1. Поняття математичного та лінійного програмування.
2.2. Постановки загальних задач математичного програмування (ЗМП) та лінійного програмування (ЗЛП).
2.3. Побудова моделей задач лінійного програмування. Формулювання математичної задачі.
2.4. Приклади типових задач лінійного програмування.
    2.4.1. Задача оптимального виробничого планування (задача про використання ресурсів).
    2.4.2. Задача про суміші (задача складання раціону, задача про дієту).
    2.4.3. Задача про розкрій матеріалу.
    2.4.4. Задача про використання потужностей (задача про завантаження обладнання).
    2.4.5. Транспортна задача.
2.5. Питання для самоконтролю за темою.

§ 2.1 Поняття математичного та лінійного програмування (ЛП)

Лінійне програмування є одним з перших і найбільш докладно вивчених розділів **математичного програмування** – розділу математики, що займається розробкою методів відшукання екстремальних значень функції, на аргументи якої накладені обмеження.

Методи математичного програмування використовуються в економічних, організаційних, військових та ін. системах для розв'язання так званих розподільних задач. **Розподільні задачі (РЗ)** виникають у випадку, коли наявних ресурсів не вистачає для виконання ефективним чином кожної з намічених робіт та необхідно найкращим чином розподілити ресурси по роботах відповідно до обраного критерію оптимальності.

При цьому широкий клас практичних задач може бути сформульований у вигляді лінійних задач оптимізації, характерною рисою яких є лінійність цільових функцій та обмежень. В цьому випадку мають справу з лінійним програмуванням, застосовуваним для побудови математичних моделей тих процесів, в основу яких може бути покладена гіпотеза лінійного представлення реального світу: економічних задач, задач керування і планування, оптимального розміщення обладнання тощо.

Лінійне програмування (ЛП) – це розділ математичного програмування, застосовуваний при розробці методів відшукання екстремуму (максимуму або мінімуму) лінійних функцій декількох змінних при лінійних додаткових обмеженнях, що накладаються на змінні.

При цьому необхідно розуміти, що:

- функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вважається ***лінійною функцією*** тоді і тільки тоді, коли для деякої множини констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$ виконується співвідношення $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$.

  ► *Наприклад,* $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ *є лінійною функцією змінних* x_1 *та* x_2, *в той час як функція* $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ *є нелінійною.*

- для будь-якої лінійної функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та будь-якого числа b нерівності $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b$ та $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge b$ є ***лінійними нерівностями***.

  ► *Наприклад, нерівності* $2x_1 + 3x_2 \le 3$ *та* $2x_1 + x_2 \ge 3$ *є лінійними, а нерівність* $x_1^2 x_2 \ge 3$ *– нелінійною.*

Задачами лінійного програмування називаються задачі, в яких лінійні як цільова функція, так і обмеження у вигляді рівностей і нерівностей.

Стисло задачу ЛП можна сформулювати наступним чином:

> знайти вектор значень змінних, що доставляють екстремум лінійній цільовій функції при m обмеженнях у вигляді лінійних рівностей або нерівностей.

До числа задач ЛП можна віднести наступні:

- задачі раціонального використання сировини і матеріалів;
- задачі оптимізації розкрою;
- задачі оптимізації виробничої програми підприємств;
- задачі оптимального розміщення і концентрації виробництва;
- задачі складання оптимального плану перевезень, роботи транспорту;
- задачі керування виробничими запасами;
- і багато інших задач, які належать сфері оптимального планування.

За типом розв'язуваних задач методи ЛП поділяються на універсальні і спеціальні. За допомогою *універсальних методів* можуть розв'язуватися будь-які задачі лінійного програмування. *Спеціальні методи* враховують особливості моделі задачі, її цільової функції і системи обмежень.

Особливістю задач ЛП є те, що екстремуму цільова функція досягає на границі області допустимих розв'язків. Класичні ж методи диференціального обчислення пов'язані зі знаходженням екстремумів функції у внутрішній точці області допустимих значень. Звідси – необхідність розробки нових методів.

§ 2.2 Постановки загальних задач математичного програмування (ЗМП) та лінійного програмування (ЗЛП)

Розглянемо задачу лінійного програмування як окремий випадок задачі математичного програмування.

Загальна задача математичного програмування формулюється наступним чином:

знайти змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задачі, які забезпечують екстремум цільової функції

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\ (\min)$$

та задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,l\,, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (\ge) 0\,, \quad i = l+1, l+2, \ldots, m\,. \end{cases}$$

Якщо цільова функція і система обмежень є лінійними, то задача математичного програмування називається **задачею лінійного програмування (ЗЛП)**.

Отже, **задача лінійного програмування** – це задача оптимізації лінійної функції в області, що задається лінійними обмеженнями.

Сформулюємо **загальну ЗЛП**.

Нехай дана система m лінійних рівнянь і нерівностей з n змінними (*система обмежень*):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

та лінійна функція (*цільова функція*)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{2}$$

Необхідно знайти такий розв'язок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системи (1), при якому лінійна функція $Z(x)$ приймає екстремальне (максимальне або мінімальне) значення.

Виходячи зі змісту змінних x_j, розв'язок необхідно шукати серед невід'ємних чисел

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

В (1)-(3) позначено: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – коефіцієнти при цільовій функції, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – коефіцієнти при обмеженнях, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – вільні члени при обмеженнях. Всі вони є відомими числами (заданими). Невідомими є змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Сукупність системи обмежень (1), (3) та цільової функції (2) називається **математичною моделлю ЗЛП**.

Систему обмежень (1) називають ***функціональними обмеженнями ЗЛП***, а обмеження $x_j \geq 0$ – ***прямими***.

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що задовольняє умовам задачі (1), називається **планом (розв'язком)**. Якщо всі компоненти $x_j \geq 0$ для $j = \overline{1,n}$, то розв'язок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають **допустимим розв'язком (планом) задачі**. Множина всіх допустимих розв'язків ЗЛП називається **допустимою областю** та позначується через X .

Допустимий розв'язок $x^* \in X$, який доставляє максимум (мінімум) цільовій функції (2), називається **оптимальним розв'язком (планом) задачі**. Множина всіх оптимальних розв'язків ЗЛП називається **оптимальною областю** і позначається через X^*.

Задача (1)-(3) є розв'язною, якщо $X \neq \varnothing$, $X^* \neq \varnothing$.

В іншому випадку розрізняють ***два типи нерозв'язності***:

– <u>нерозв'язність 1 типу</u>: множина допустимих розв'язків є порожнім, тобто $X = \varnothing$;

– <u>нерозв'язність 2 типу</u>: цільова функція є необмеженою на множині допустимих розв'язків, тобто $X \neq \varnothing$, $X^* = \varnothing$.

Отже, ЗЛП є окремим випадком задачі математичного програмування. Саме ж ***лінійне програмування*** – розділ математичного програмування, що застосовується при розробці методів відшукання екстремуму (максимуму або мінімуму) лінійних функцій декількох змінних при лінійних обмеженнях, накладених на змінні.

Методи лінійного програмування можуть широко застосовуватися на промислових об'єктах при оптимізації виробничої програми, асортиментному завантаженні обладнання, плануванні вантажопотоків, складанні оптимальних сумішей, розв'язанні розкрійних, виробничо-транспортних задач, виборі ресурсозберігаючих технологій і т.д.

§2.3 Побудова моделей задач лінійного програмування. Формулювання математичної задачі

Формулювання математичної задачі полягає у побудові математичної моделі досліджуваного реального процесу (об'єкта), тобто в його математичному описі.

Математичною моделлю досліджуваної задачі називається сукупність математичних співвідношень, що описують розглядуваний процес.

Для складання математичної моделі необхідно:

1) обрати змінні задачі;
2) скласти систему обмежень;
3) задати цільову функцію.

Змінними задачі називаються величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які повністю характеризують досліджуваний процес. Їх звичайно записують у вигляді вектору $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Системою обмежень задачі називається сукупність рівнянь та нерівностей, яким задовольняють змінні задачі та які випливають з обмеженості ресурсів чи інших умов, наприклад, умови позитивності змінних. У загальному випадку вони мають вигляд

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & i = 1,2,\ldots,l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (\ge) 0, & i = l+1, l+2, \ldots, m. \end{cases}$$

Цільовою функцією задачі називають функцію $Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ змінних задач, яка характеризує якість виконання задачі, екстремум якої потрібно знайти. Цільова функція є показником ефективності або критерієм оптимальності.

З урахуванням наведеної схеми складання математичної моделі досліджуваної задачі, **математичні моделі загальних задач математичного та лінійного програмування** формулюються наступним чином:

– *математична модель загальної задачі математичного програмування*:

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{pmatrix} 0, \quad i = 1,2,\ldots,m; \end{cases}$$

– *математична модель загальної задачі лінійного програмування*:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \begin{pmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{pmatrix} b_i, \quad i = \overline{1, m}; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n};$$

або (в більш розгорнутому вигляді)

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max\,(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \begin{pmatrix}\ge\\ \le\\ =\end{pmatrix} b_1\,, \quad i=\overline{1,m}\,; \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n \begin{pmatrix}\ge\\ \le\\ =\end{pmatrix} b_2\,, \quad i=\overline{1,m}\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n \begin{pmatrix}\ge\\ \le\\ =\end{pmatrix} b_m\,, \quad i=\overline{1,m}\,; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}\,.$$

***<u>Примітка</u>*:** Позначення $\max\,(\min)$ показує, що цільова функція може досягати або максимального, або мінімального значень, в залежності від постановки математичної задачі за досліджуваним об'єктом.

Позначення $\begin{pmatrix}\ge\\ \le\\ =\end{pmatrix}$ визначає, що, в залежності від умов функціонування об'єкта дослідження, в математичній моделі може обиратись один з наведених знаків.

§2.4 Приклади типових задач лінійного програмування

Розглянемо приклади змістових постановок типових задач лінійного програмування та побудуємо математичні моделі для їх формалізації.

§2.4.1 Задача оптимального виробничого планування (задача про використання ресурсів)

Для виготовлення n видів продукції $P_1,\ldots,P_n$ використовуються m видів сировини $S_1,\ldots,S_m$, запаси якої є обмеженими та складають відповідно $b_1,\ldots,b_m$ одиниць. Відомо, що на виробництво одиниці продукції P_j $(j=\overline{1,n})$ використовуються a_{ij} одиниць сировини S_i $(i=\overline{1,m})$, а прибуток від реалізації одиниці продукції P_j $(j=\overline{1,n})$ складає c_j $(j=\overline{1,n})$ грош. од.

Потрібно визначити план виробництва, який дозволяє при наявних ресурсах отримати максимальний прибуток від реалізації продукції.

Насамперед, запишемо умови змістової постановки задачі компактно у вигляді таблиці:

Вид продукції / Вид сировини	P_1	...	P_j	...	P_n	Запас сировини
S_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...	...
S_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грош. од.	c_1	...	c_j	...	c_n	

Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через x_j $(j=\overline{1,n})$ заплановану до випуску кількість продукції P_j $(j=\overline{1,n})$, а через $Z(x_1,\ldots,x_n)$ – прибуток підприємства від реалізації всієї продукції.

Тоді *планом виробництва* буде вектор $X=(x_1,\ldots,x_n)$, який показує, яку кількість продукції кожного виду буде вироблено. Змінні $x_1,\ldots,x_n$ – керовані змінні.

Цільова функція задачі (критерій оптимальності) – максимізувати прибуток:

$$\mathrm{Z}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max\,.$$

Сумарні витрати сировини S_i $(i=\overline{1,m})$ складають:

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\,.$$

В силу обмеженості сировини S_i величиною b_i отримуємо систему обмежень:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \quad (i = \overline{1,m}).$$

На змінні x_j має бути накладена умова невід'ємності $x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n})$, тобто продукція P_j може або випускатися $(x_j > 0)$, або не випускатися $(x_j = 0)$.

Отже, математична модель прийме вигляду

$$Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

§2.4.2 Задача про суміші (задача складання раціону, задача про дієту)

Задача визначення оптимального складу суміші виникає тоді, коли з наявних видів сировини шляхом їх змішування необхідно отримати кінцевий продукт із заданими властивостями. До цієї групи задач відносяться, наприклад, задачі отримання сумішей для різних марок бензину в нафтопереробній промисловості, сумішей для отримання бетону в будівництві, задачі про вибір дієти, складання кормового раціону в тваринництві та ін. При цьому потрібно, щоб вартість такої суміші була мінімальною.

Нехай маємо m видів сировини, запаси якої складають відповідно $d_1, \ldots, d_m$ одиниць. З цієї сировини необхідно скласти суміш, містить n речовин, які визначають технічні характеристики суміші. Відомими є величини a_{ij} $(i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n})$, які визначають кількість j-ої речовини в одиниці i-го виду сировини, вартість якої дорівнює c_i $(i = \overline{1,m})$ грош. од., а також величини b_j $(j = \overline{1,n})$ – найменші допустимі кількості j-ої речовини у суміші.

Необхідно отримати суміш із заданими властивостями при найменших витратах на вихідні сировинні матеріали.

Для складання математичної моделі задачі запишемо умови задачі у вигляді таблиці:

Вид речовини / Вид сировини	1	...	j	...	n	Обсяг сировини	Вартість сировини
1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	d_1	c_1
…	...	...	...	...	...	...	...
i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	d_i	c_i
…	...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	d_m	c_m
Мінімальна кількість речовини у суміші, од.	b_1	...	b_j	...	b_n		

Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через x_i $(i = \overline{1,m})$ кількість сировини i-го виду, яка входить до складу суміші.

Мета задачі (цільова функція) – мінімізувати сумарні витрати на сировину:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \min .$$

Система обмежень включає в себе обмеження за технічними характеристиками:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{i1}x_i + \cdots + a_{m1}x_m \ge b_1, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{1j}x_1 + \ldots + a_{ij}x_i + \ldots + a_{mj}x_m \ge b_j, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{1n}x_1 + \ldots + a_{in}x_i + \ldots + a_{mn}x_m \ge b_n, \end{cases}$$

а також обмеження за обсягом сировини, які з урахуванням невід’ємності змінних приймуть вигляд

$$0 \le x_i \le d_i \quad (i = \overline{1,m}).$$

Запишемо модель в компактній формі:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \min$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge b_j \quad (j = \overline{1,n}), \\ 0 \le x_i \le d_i \quad (i = \overline{1,m}). \end{cases}$$

§2.4.3 Задача про розкрій матеріалу

Завдання оптимального розкрою матеріалів полягає у визначенні найбільш раціонального способу розкрою наявного матеріалу (дерев'яної колоди, сталевої полоси, шкіри, тканини і т.д.), при якому буде виготовлено найбільшу кількість готових виробів у заданому асортименті або буде досягнуто найменшої кількості відходів.

Нехай на обробку поступає a одиниць сировинного матеріалу одного виду (наприклад, a дерев'яних колод однієї довжини). З нього потрібно виготовити комплекти, у кожен з яких входить n видів виробів у кількості, пропорційній кількості числам $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Мається m способів розкрою (обробки) даного матеріалу, тобто відомими є величини a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, які визначають кількість одиниць j-их виробів при i-ому способі розкрою одиниці сировинного матеріалу.

Необхідно визначити план розкрою, який забезпечує максимальну кількість комплектів.

Згідно до умов задачі маємо таблицю розкрою:

Вид виробу / Спосіб розкрою	1	...	j	...	n
1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
…	...	...	...	...	...
i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
…	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_i – кількість одиниць сировинного матеріалу, розкраюваного i-м варіантом $(i=\overline{1,m})$.

Тоді кількість виробів 1-го виду дорівнює

$$a_{11}x_1+\cdots a_{i1}x_i+\cdots+a_{m1}x_m \text{ (одиниць).}$$

Беручи до уваги умову комплектності, маємо:

$$a_{11}x_1+\cdots a_{i1}x_i+\cdots+a_{m1}x_m=b_1y,$$

де y – кількість комплектів.

Аналогічні рівності можна записати й для всіх інших видів виробів, тобто умова комплектності призводить до системи обмежень виду

$$a_{1j}x_1+\ldots+a_{ij}x_i+\ldots+a_{mj}x_m=b_jy \quad (j=\overline{1,n}).$$

Очевидно,

$$x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_m\le a$$

(на розкрій поступає a одиниць сировинного матеріалу), а також

$$x_i\ge 0 \quad (i=\overline{1,m}).$$

Мета задачі – максимізувати кількість комплектів:

$$\mathrm{Z}=y\to\max .$$

Отже, приходимо до математичної моделі задачі про розкрій:

$$Z=y\to\max ,$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=b_jy \quad (j=\overline{1,n}),\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_i\le a,\end{cases}$$

$$x_i\ge 0 \quad (i=\overline{1,m}).$$

Щоб виразити цільову функцію через змінні $x_1,\ldots,x_m$, достатньо скористатися будь-яким із співвідношень

$$y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i}{b_j} \quad (j=\overline{1,n}).$$

§2.4.4 Задача про використання потужностей (задача про завантаження обладнання)

Підприємству заданий план виробництва продукції за часом та номенклатурою: потрібно за час T випустити $n_1, n_2, \ldots, n_k$ одиниць продукції $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Продукція виробляється на верстатах $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Для кожного верстата відомими є продуктивність a_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ (тобто число одиниць продукції P_j $(j=\overline{1,n})$, яке можна виробити на верстаті S_i $(i=\overline{1,m})$) та витрати b_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ на виготовлення продукції P_j $(j=\overline{1,n})$ на верстаті S_i $(i=\overline{1,m})$ в одиницю часу.

Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто так розподілити випуск між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Складемо математичну модель сформульованої в змістовій формі задачі.

Позначимо через x_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – час, протягом якого верстат S_i $(i=\overline{1,m})$ буде зайнятий виготовленням продукції P_j $(j=\overline{1,n})$.

Оскільки час роботи кожного верстата є обмеженим і не перевищує *T*, то справедливими будуть наступні нерівності:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1k} \le T \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2k} \le T \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m12}+\ldots+x_{mk} \le T \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{21}x_{22}+\ldots+a_{m1}x_{m1}=n_1 \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+\ldots+a_{m2}x_{m2}=n_2 \\ \\ a_{1k}x_{1k}+a_{2k}x_{2k}+\ldots+a_{mk}x_{mk}=n_k \end{cases}$$

Цільова функція задачі прийме вигляду

$$Z=b_{11}x_{11}+b_{12}x_{12}+\ldots+b_{mk}x_{mk} \to \min .$$

§2.4.5 Транспортна задача

Розглянемо транспортну задачу, тобто задачу, в якій мова йдеться про раціональне перевезення деякого однорідного продукту від виробників до споживачів.

Нехай мається *m* пунктів виробництва однорідного продукту (видобуток руди у кар'єрах, виробництво автобусів, кондитерських виробів, комп'ютерів тощо) та *n* пунктів споживання цього продукту. Потужності пунктів виробництва становлять a_i $(i=\overline{1,m})$ одиниць однорідного продукту, а потреби кожного *j*-го пункту споживання дорівнюють b_j $(j=\overline{1,n})$ одиниць. Відомими є витрати c_{ij} на перевезення одиниці продукту від *i*-го постачальника до *j*-го споживача.

Необхідно скласти такий план перевезення, за яким сумарні витрати на всі перевезення були б найменшими.

Нехай пропозиція та попит співпадають, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Таку транспортну задачу називають *збалансованою (закритою)*. При цьому передбачається, що вся продукція від постачальників буде вивезена та попит кожного споживача буде задоволений.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} – кількість продукту, що перевозиться з i-го пункту виробництва до j-го пункту споживання. Тоді матриця

$$X = \left\| x_{ij} \right\| \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \text{ – } \textit{план} \text{ перевезення.}$$

Матрицю $C = \left\| c_{ij} \right\| \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ називають *матрицею витрат* (тарифів).

Внесемо вихідні дані та перевезення x_{ij} до транспортної таблиці.

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Припустимо, що транспортні витрати прямо пропорційні до кількості товару, що перевозиться. Тоді сумарні витрати виразяться цільовою функцією

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn},$$

яку необхідно мінімізувати при обмеженнях

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i$$

(весь продукт з кожного i-го $(i = \overline{1,m})$ пункту має бути вивезений повністю),

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = b_j$$

(попит кожного j-го $(j = \overline{1,n})$ споживача має бути повністю задоволений).

З умови задачі випливає, що всі

$$x_{ij} \geq 0 \quad (j = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Отже, математична модель *збалансованої транспортної задачі* має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}), \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n}), \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}).$$

Розглянемо декілька прикладів з побудови математичних моделей задач лінійного програмування за змістовою постановкою задач.

Приклад 2.1. Для виготовлення трьох видів виробів *A*, *B* та *C* використовується токарне, фрезерне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання наведено в таблиці. У ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного з типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Тип обладнання	Витрати часу (станко-години) на обробку одного виробу кожного виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (години)
	A	*B*	*C*	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грош.од.)	10	14	12	

Потрібно визначити, скільки виробів та якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язання

Припустимо, що буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 одиниць – виду *B* та x_3 одиниць – виду *C*.

Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно витратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-годин фрезерного обладнання.

Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу неспроможна перевищувати 120 годин, має виконуватися нерівність

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120.$$

Аналогічні міркування щодо можливого використання токарного, зварювального та шліфувального обладнання призведуть до наступних нерівностей:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280\ ,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240\ ,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360\ .$$

При цьому, оскільки кількість виробів не може бути від'ємною, то

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0\ .$$

Далі, якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 одиниць виробів виду *B* та x_3 одиниць виробів виду *C*, то прибуток від їх реалізації складе $Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ грош. од.

Отже, остаточно приходимо до наступної математичної моделі вихідної задачі:

$$Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120\ , \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280\ , \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240\ , \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360\ , \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,3}\right).$$

Приклад 2.2. (Задача про розкрій матеріалу).

Для виготовлення брусів довжиною 1,2 м, 3 м та 5 м у співвідношенні 2:1:3 на розпил надходить 195 дерев'яних колод довжиною 6 м кожна. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів.

Складемо модель задачі. Визначимо спочатку всі можливі способи розпилу колод, вказавши відповідне число одержуваних при цьому брусів та залишок.

Способи розпилу колод

Спосіб розпилу	**Число одержуваних брусів**			**Залишок, м**
	1,2 м	**3 м**	**5 м**	
1	5	–	–	0
2	2	1	–	0,6
3	–	2	–	0
4	–	–	1	1

Через x_i позначимо число колод, розпилюваних i-м способом, $i = \overline{1,4}$, а через y – число комплектів брусів.

Тоді математична модель задачі буде мати вигляд

$$Z = y \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195 \\ 5x_1 + 2x_2 = 2y \\ x_2 + 2x_3 = y \\ x_4 = 3y \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,4}).$$

§2.5 Питання для самоконтролю за темою

1. Що називається математичним програмуванням?
2. Що розуміється під лінійним програмуванням?
3. Чим відрізняється задача лінійного програмування від задачі математичного програмування?
4. Сформулюйте постановку та наведіть математичну модель загальної задачі математичного програмування.
5. Сформулюйте постановку та наведіть математичну модель загальної задачі лінійного програмування.
6. Які обмеження називаються функціональними?
7. Наведіть умови розв'язності задачі лінійного програмування.
8. Охарактеризуйте умови нерозв'язності задачі лінійного програмування.
9. Що описує цільова функція задачі лінійного програмування?
10. Що називаються системою обмежень задачі лінійного програмування?
11. Розкрийте поняття змінних задачі лінійного програмування?
12. Сформулюйте змістовну постановку задачі оптимального виробничого планування (задачі про використання ресурсів) та наведіть її математичну модель.
13. Сформулюйте змістовну постановку задачі лінійного програмування про суміші (про складання раціону, про дієту) та наведіть її математичну модель.
14. Сформулюйте змістовну постановку задачі лінійного програмування про розкрій матеріалу та наведіть її математичну модель.
15. Сформулюйте змістовну постановку задачі про використання потужностей (задача про завантаження обладнання) та наведіть її математичну модель.
16. Сформулюйте змістовну постановку транспортної задачі лінійного програмування та наведіть її математичну модель.