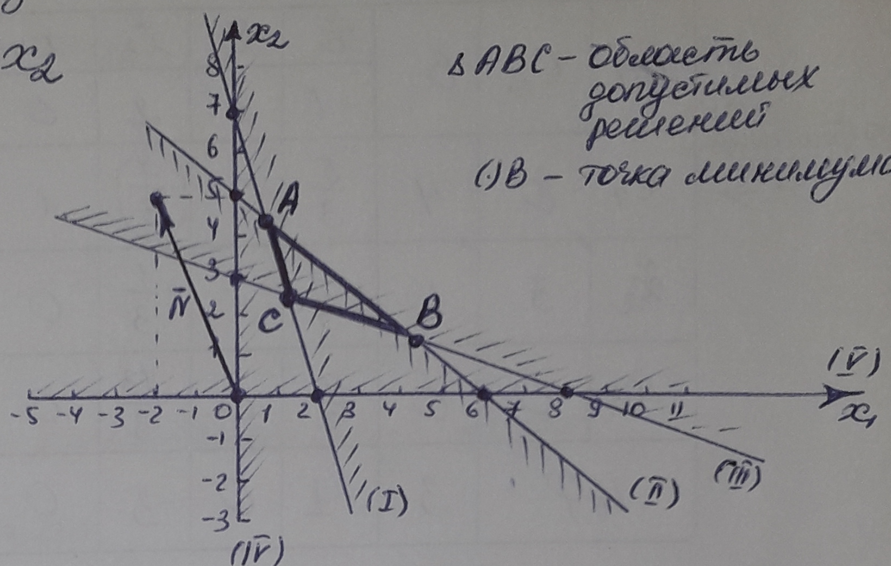
1. Найти графическим методом оптимальный план ЗЛП:

$$Z_{min} = -2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 & (I) \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 & (II) \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24 & (III) \\ x_1 \geq 0 & (IV) \\ x_2 \geq 0 & (V) \end{cases}$$

$grad = \vec{N} = (-2; 5)$



(·)B – точка минимума.

Найдём координаты (·)B. Т.к. (·)B есть точка пересечения прямых (II) и (III), то $\Rightarrow$ получим систему:

$$\begin{array}{l}(II): \\ (III):\end{array} \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 30 \\ 3x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(30 - 6x_2) = 6 - \frac{6}{5}x_2 \\ 3(6 - \frac{6}{5}x_2) + 8x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - \frac{6}{5}x_2 \\ 18 - \frac{18}{5}x_2 + \frac{40}{5}x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - \frac{6}{5}x_2 \\ \frac{22}{5}x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - \frac{6}{5} \cdot \frac{15}{11} = \frac{66}{11} - \frac{18}{11} = \frac{48}{11} \\ x_2 = \frac{30}{22} = \frac{15}{11} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{48}{11}, \frac{15}{11}\right).$$

Найдём значение целевой функции, достигающей в (·)B минимума:

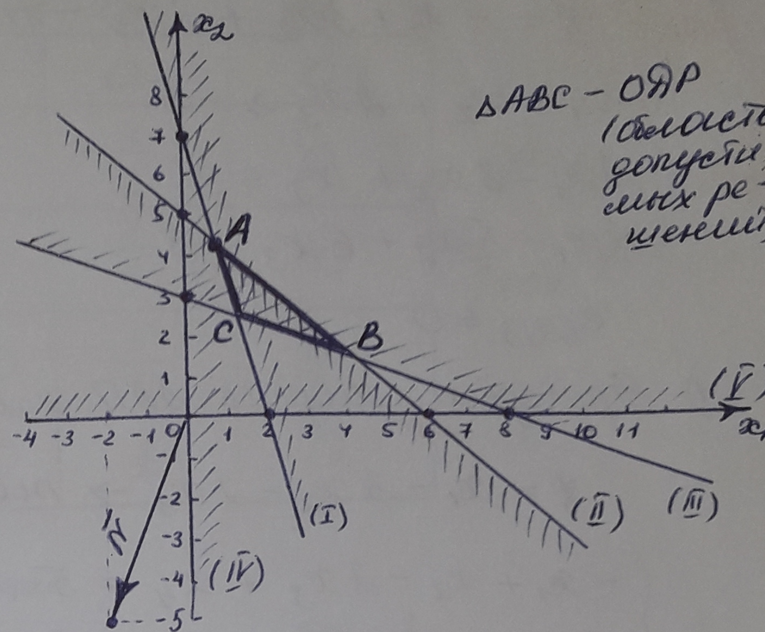
$$Z_{min}\left(\frac{48}{11}, \frac{15}{11}\right) = -2 \cdot \frac{48}{11} + 5 \cdot \frac{15}{11} = -\frac{96}{11} + \frac{75}{11} = -\frac{21}{11}.$$

Ответ: $x^* = \left(\frac{48}{11}, \frac{15}{11}\right)$, $Z_{min} = -\frac{21}{11}$.

1. Найти графическим методом оптимальный план ЗЛП:

$$Z_{min} = -2x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 & (\mathrm{I}) \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 & (\mathrm{II}) \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24 & (\mathrm{III}) \\ x_1 \geq 0 & (\mathrm{IV}) \\ x_2 \geq 0 & (\mathrm{V}) \end{cases}$$



ΔABC – ОДР (область допустимых решений).

$grad = \bar{N}(-2;-5)$

(·)A – точка минимума.

Найдём координаты (·)A, т.к. (·)A есть точка пересечения прямых (I) и (II), то => система уравнений примет вид:

$$\begin{matrix} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II}: \end{matrix}\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = 14 - 7x_1 \\ 5x_1 + 3(14 - 7x_1) = 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = 14 - 7x_1 \\ 5x_1 - 21x_1 = 30 - 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(14 - 7x_1) \\ -16x_1 = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\left(14 - \frac{7 \cdot 3}{4}\right) = \frac{35}{8} \\ x_1 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{4}; \frac{35}{8}\right).$$

Найдём значение целевой функции, достигающей в (·)A минимального значения:

$$Z_{min}\left(\frac{3}{4}; \frac{35}{8}\right) = -2 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{35}{8} = \frac{175}{8} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{163}{8}.$$

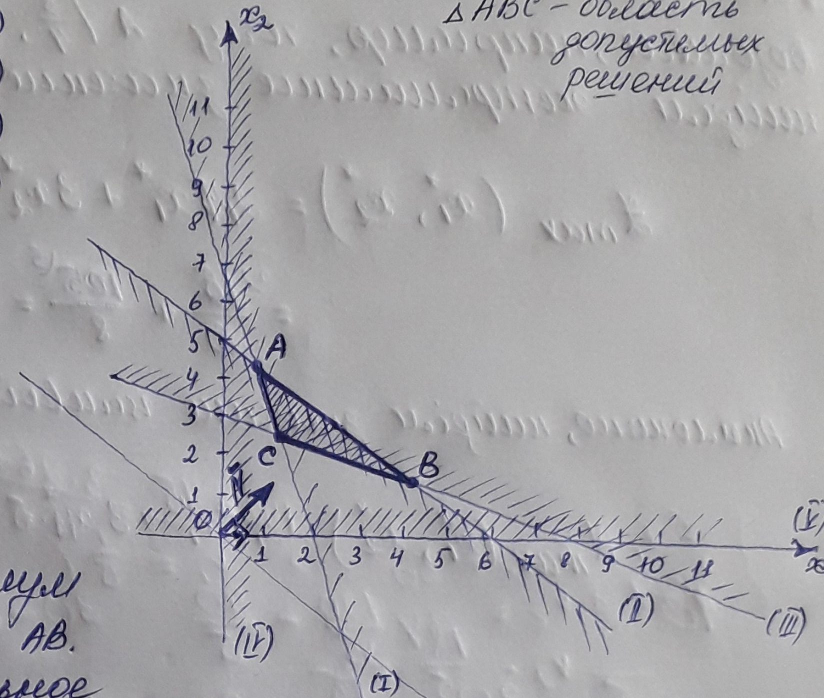
Ответ: $Z_{min} = \frac{163}{8}$; $x^* = \left(\frac{3}{4}; \frac{35}{8}\right)$.

3. Найти графическим методом оптимальный план ЗЛП:

$$Z_{max} = 2{,}5\,x_1 + 3\,x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 & (I) \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 & (II) \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24 & (III) \\ x_1 \geq 0 & (IV) \\ x_2 \geq 0 & (V) \end{cases}$$

ΔABC – область допустимых решений



grad = $\bar{N}$ (2,5; 3).

При решении ЗЛП на максимум решение попадает на грань AB. Это означает, что оптимальное решение сосредоточено на всём отрезке AB вместе с его крайними точками.

Чтобы выписать это решение, используется понятие выпуклой линейной комбинации.

Необходимо найти координаты точек A и B.

В общем случае $A(x_1^A, x_2^A)$; $B(x_1^B, x_2^B)$.

Для примера найдены координаты:

$$A\left(\frac{3}{4}; \frac{35}{8}\right); \quad B\left(\frac{48}{11}; \frac{15}{11}\right).$$

Тогда выпуклая линейная комбинация записывается следующим образом:

$$\left(\lambda x_1^A + (1-\lambda)x_1^B; \quad \lambda x_2^A + (1-\lambda)x_2^B\right) =$$

$$= \left(\lambda \cdot \frac{3}{4} + (1-\lambda)\frac{48}{11}; \quad \lambda \cdot \frac{35}{8} + (1-\lambda) \cdot \frac{15}{11}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\lambda - \frac{48}{11}\lambda + \frac{48}{11}; \quad \frac{35}{8}\lambda - \frac{15}{11}\lambda + \frac{15}{11}\right) = \left(-\frac{159}{44}\lambda + \frac{48}{11}; \frac{265}{88}\lambda + \frac{15}{11}\right).$$

При этом $0 \leq \lambda \leq 1$.

Таким образом, данная ситуация описывает ситуацию множества решений. Оптимальное решение достигается на всём отрезке AB, где каждая точка определяется координатами $\left(-\frac{159}{44}\lambda + \frac{48}{11}; \frac{265}{88}\lambda + \frac{15}{11}\right)$, при $0 \leq \lambda \leq 1$.

Значение целевой функции на отрезке AB определяется по любой точке отрезка и является одинаковым для всех точек.

Возьмём, например, точку $A\left(\frac{3}{4}; \frac{35}{8}\right)$. Для этой точки найдём экстремальное значение целевой функции:

$$Z_{max}(x_1^*, x_2^*) = 2{,}5x_1^* + 3x_2^* = 2{,}5 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{35}{8} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 35}{8} =$$

$$= \frac{15}{8} + \frac{105}{8} = \frac{120}{8} = 15.$$

Аналогично, найдём значение целевой функции для $B\left(\frac{48}{11}; \frac{15}{11}\right)$:

$$Z_{max}(x_1^*, x_2^*) = 2{,}5x_1^* + 3x_2^* = \frac{5}{2} \cdot \frac{48}{11} + 3 \cdot \frac{15}{11} \overset{(2}{=} \frac{240+90}{22} = \frac{330}{22} = 15.$$