Тема 4: Графічне розв'язання найпростіших задач лінійного програмування

План:

4.1 Опуклі множини

Вектор $\lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + \ldots + \lambda_m X^m$ називається **опуклою лінійною комбінацією векторів** $X^1, X^2, \ldots, X^m$, якщо коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ задовольняють умовам:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Зокрема, опуклою лінійною комбінацією двох векторів (точок) X^1 та X^2 є вектор:

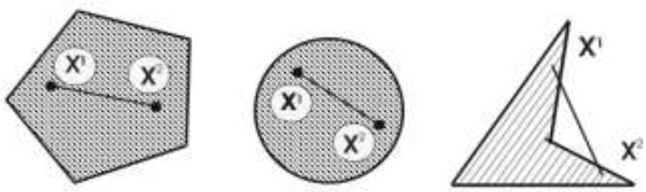
$$(1-\lambda)X^1 + \lambda X^2, \text{ де } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Множина D векторів (точок) лінійного простору R^n називається ***опуклою***, якщо разом з будь-якими його двома точками X^1 та X^2 йому належить відрізок, що з'єднує ці точки.

Аналітично умова опуклості множини $D \subset R^n$ записується наступним чином: для будь-яких $X^1 \in D$, $X^2 \in D$ будь-якого $0 \leq \lambda \leq 1$ виконується умова:

$$(1-\lambda)X^1 + \lambda X^2 \in D.$$

На рис. 4.1 зображені опуклі множини (а, б) та множина, що не є опуклою (в).



а) б) в)

Рисунок 4.1 – Приклади множин

Точка X^1 опуклої множини D називається його кутовою (крайньою) точкою, якщо вона не може бути представлена опуклою лінійною комбінацією двох інших точок цієї множини (не є внутрішньою точкою ні для якого відрізка, кінці якого належать множині D).

Наприклад, крайніми точками трикутника є його вершини, крайніми точками кола - точки окружності, яка його обмежує.

Однак не всяка опукла множина має крайні точки. Пряма, площина, напівплощина, простір, напівпростір кутових точок не мають.

***Опуклим багатогранником* (*багатокутником на площині*)** називається замкнена обмежена опукла множина, що має кінцеве число крайніх (кутових) точок.

Будь-яка точка опуклого багатогранника може бути представлена як опукла лінійна комбінація його вершин (крайніх точок).

4.2 Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо на площині x_1Ox_2 *сумісну* систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1\ ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m . \end{cases} \tag{4.1}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Сукупність цих точок (розв'язків) називають ***багатокутником розв'язків***, або ***областю допустимих планів*** (***розв'язків***) задачі лінійного програмування. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

Якщо в системі обмежень (4.1) буде три змінних, то спільну частину називають ***багатогранником розв'язків***. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

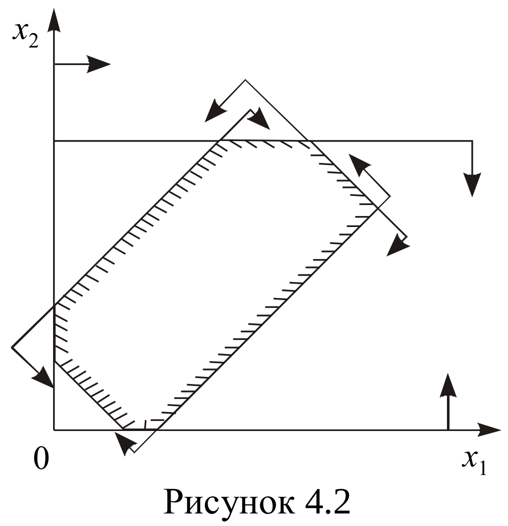


Рисунок 4.2

Нехай в системі обмежень (4.1) кількість змінних більше трьох: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n-вимірному просторі - опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Цільову функцію

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

в n-вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сімейство паралельних гіперплоскостей, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z.

Приклад. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю та цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукрові буряки не менше 5 га. Показники вирощування цих культур представлені в таблиці.

Показник (з розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукровий буряк	Наявний ресурс
Витрати праці, людино-днів	5	25	270
Витрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн.	0,7	1	—

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Позначимо:

x_1 – площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 – площа посіву цукрового буряка, га.

Тоді математична модель задачі набуде вигляду:

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2$$

при умовах:

$$x_1 + x_2 \le 20;$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270;$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80;$$

$$x_2 \ge 5;$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Побудуємо множину (область) допустимих розв'язків задачі (рис. 4.3)

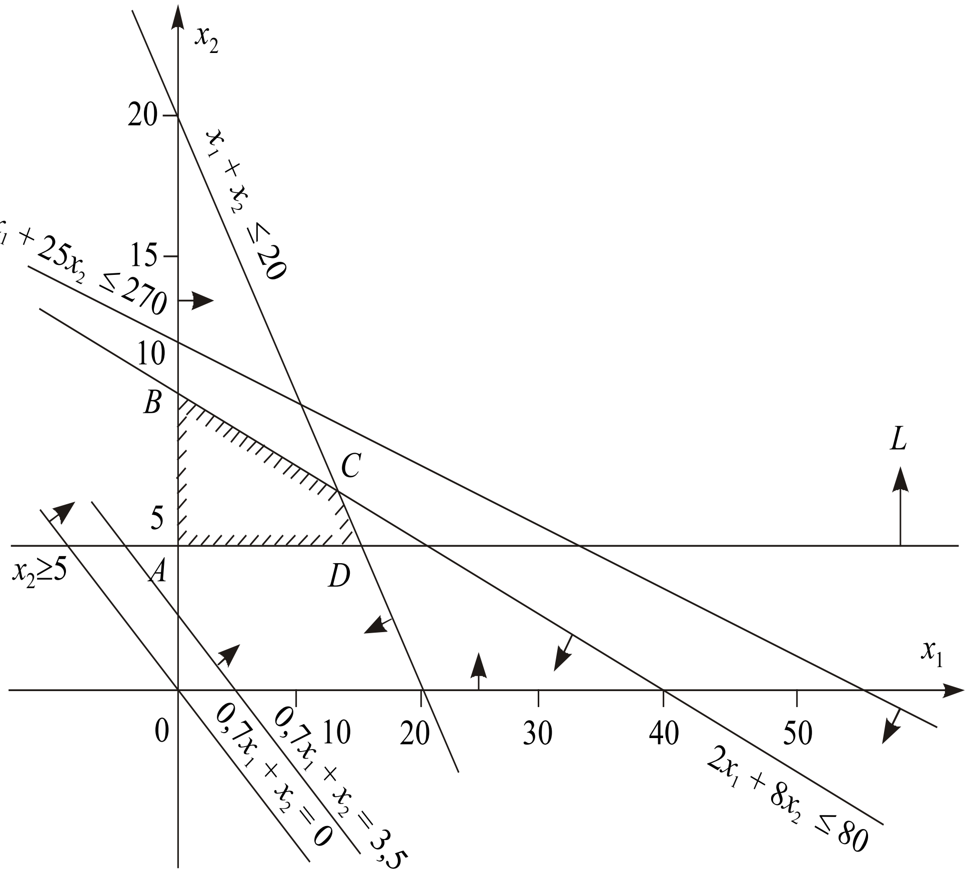


Рисунок 4.3 – Множина (область) допустимих розв'язків задачі

4.3 Основні властивості розв'язків ЗЛП

Теорема 1. Множина всіх планів (розв'язків) задачі лінійного програмування є опуклою.

Теорема 2. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план (розв'язок), то екстремальне значення цільова функція приймає в одній з вершин багатогранника розв'язків. Якщо цільова функція приймає екстремальне значення більш ніж в однієї вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, яка є лінійною комбінацією таких вершин.

Теорема 3. Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ $(k \le n)$ в розкладанні $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$ є лінійно незалежною та $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = A_0$, де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Теорема 4. Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладанні $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots$ $\ldots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$, відповідні позитивним x_j, є лінійно незалежними.

Наслідок 1. Оскільки вектори $A_1, A_2, ..., A_n$ мають розмірність m, то кутова точка багатокутника розв'язків має не більше ніж m додатних компонентів $x_i > 0 \ (i = \overline{1, m})$.

Наслідок 2. Кожній кутовій точці багатокутника розв'язків відповідає $k \le m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, ..., A_n$.

З наведених властивостей можна зробити наступний висновок: якщо цільова функція ЗЛП обмежена на багатограннику розв'язків, то:

1) існує така кутова точка багатогранника розв'язків, в якій лінійна цільова функція досягає свого оптимального значення;
2) кожен опорний план (розв’язок) відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків.

Тому для розв'язання ЗЛП необхідно досліджувати тільки кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

4.4 Графічний метод розв'язання ЗЛП з двома змінними (при $n = 2$)

Розглянемо графічний метод розв'язання ЗЛП в стандартній формі з двома змінними ($n = 2$), тобто задачі виду:

знайти вектор $(x_1, x_2)^T$, що задовольняє системі обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0,$$

для якого функція цілі $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ досягає максимуму.

Графічний метод розв'язання ЗЛП умовно можна розбити на два етапи:

1. Побудова області допустимих розв'язків (ОДР) ЗЛП.

2. Знаходження серед усіх точок ОДР такої точки $\left(x_1^*, x_2^*\right)^T$, в якій цільова функція Z приймає максимальне значення.

Перейдемо до розгляду цих етапів.

ЕТАП 1

Геометрична інтерпретація множини розв'язків лінійної нерівності

Розглянемо нерівність:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b.$$

Відомо, що точки, координати яких задовольняють рівнянню $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, лежать на прямій. Назвемо цю пряму граничною. Гранична пряма розбиває площину на дві півплощини. Координати точок одній півплощині задовольняють вихідній нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 \le b,$ а іншої півплощини – нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 \ge b.$ Отже, геометричною інтерпретацією множини розв'язків лінійної нерівності є напівплощина, що лежить по одну сторону від граничної прямої, включаючи пряму.

Щоб визначити шукану півплощину, потрібно взяти будь-яку точку, що не належить граничній прямій, і перевірити, чи задовольняють її координати даній нерівності.

Якщо координати взятої точки задовольняють даній нерівності, то шуканою є та півплощина, якій ця точка належить, в іншому випадку – інша півплощина.

***Приклад* 1.** Геометричною інтерпретацією розв'язків нерівності $2x_1 + 3x_2 \le 6$ є півплощина, зображена на рис. 4.4 стрілками. Покажемо це.

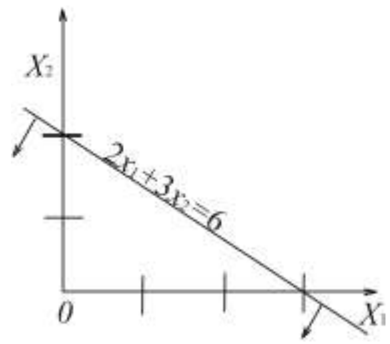


Рисунок 4.4 – Геометрична інтерпретація розв'язків лінійної нерівності

Перш за все в нерівності $2x_1 + 3x_2 \le 6$ замінимо знак нерівності на знак точної рівності та побудуємо відповідну пряму $2x_1 + 3x_2 = 6$. Ця пряма ділить площину на дві півплощини. Оскільки точка O (0,0) задовольняє нерівності $2x_1 + 3x_2 \le 6$, то областю розв’язання даної нерівності є півплощина, якій належить ця точка.

Геометрична інтерпретація множини розв'язків системи лінійних нерівностей

Нехай дана система лінійних нерівностей з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases}$$

Кожне обмеження вигляду $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$ або $x_j \ge 0\ (j = 1,2)$ геометрично визначає півплощину, отже, множина допустимих розв'язків X являє собою перетин кінцевого числа півплощин, тобто якщо $X \ne \varnothing$, то X є або багатокутником, або багатокутною множиною.

Отже, спільна частина (перетин) всіх півплощин, які відповідають усім нерівностям, буде являти собою ОДР системи лінійних нерівностей.

Можливі випадки області допустимих розв'язків

На рис. 4.5 представлені можливі ситуації, коли область допустимих розв'язків ЗЛП являє собою:

– опуклий багатокутник (*а*),

– необмежену опуклу багатокутну область (*б*),

– єдину точку (*в*),

– порожню множину (*г*),

– пряму лінію (*д*),

– промінь (*е*),

– відрізок (*ж*).

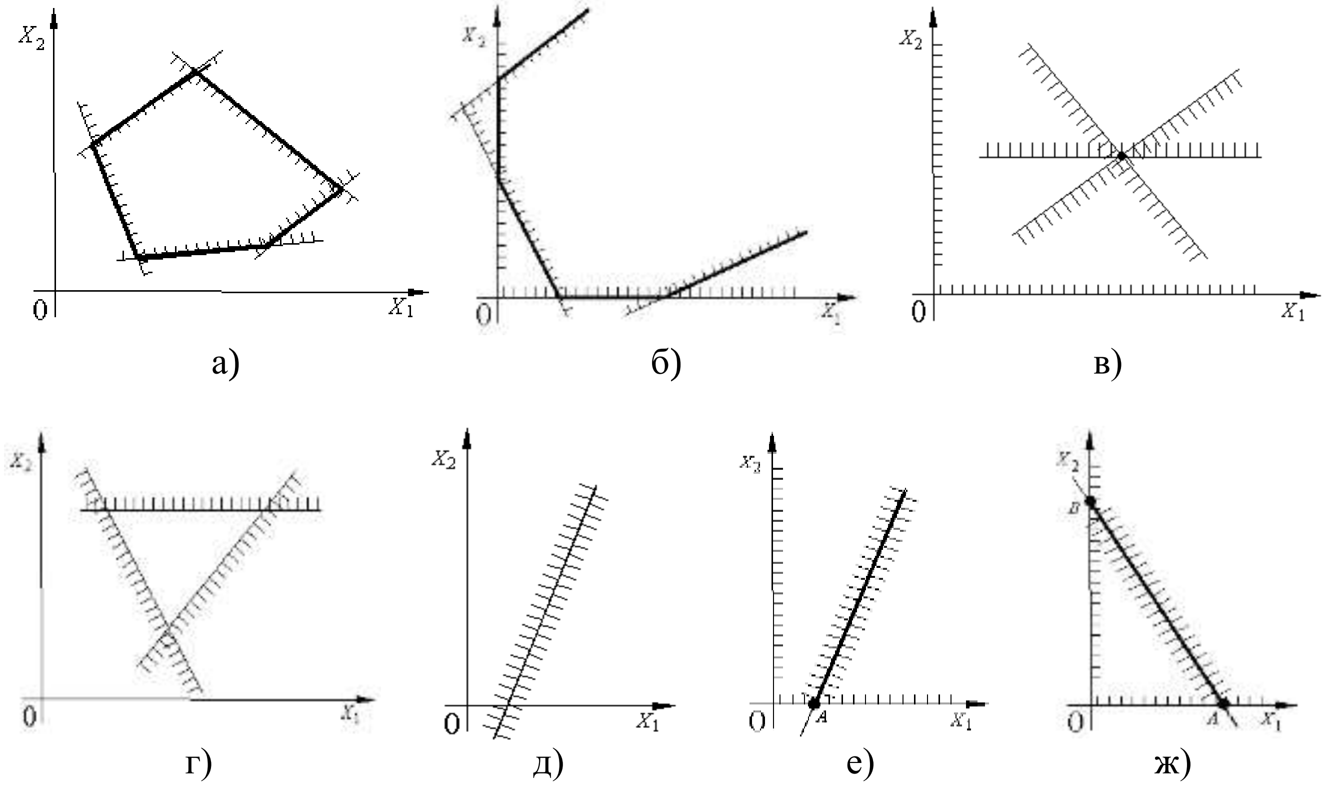


Рисунок 4.5 – Можливі випадки ОДР

***Приклад* 2.** Побудувати ОДР системи лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + \ x_2 \ge 2, \\ x_1 \qquad\quad \le 4, \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання

У нерівностях системи та умовах невід'ємності змінних ($x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$)знаки нерівностей замінимо на знаки рівностей:

$$3x_1 + 5x_2 = 15, \tag{4.2}$$

$$2x_1 + \ x_2 = 2 \quad , \tag{4.3}$$

$$x_1 = 4 \quad , \tag{4.4}$$

$$x_1 = 0 \qquad (\text{ось } 0X_2), \tag{4.5}$$

$$x_2 = 0 \qquad (\text{ось } 0X_1). \tag{4.6}$$

Побудуємо отримані прямі, знайдемо відповідні нерівностям півплощини та їх перетин.

Отже, ОДР системи лінійних нерівностей є опуклий багатокутник *ABCDE* (рис. 4.6).

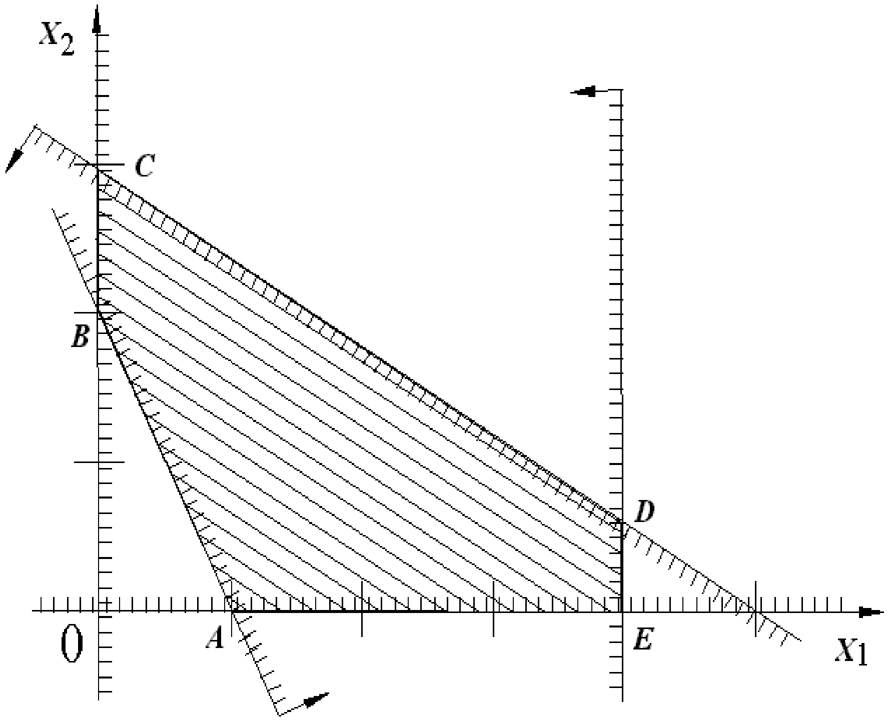
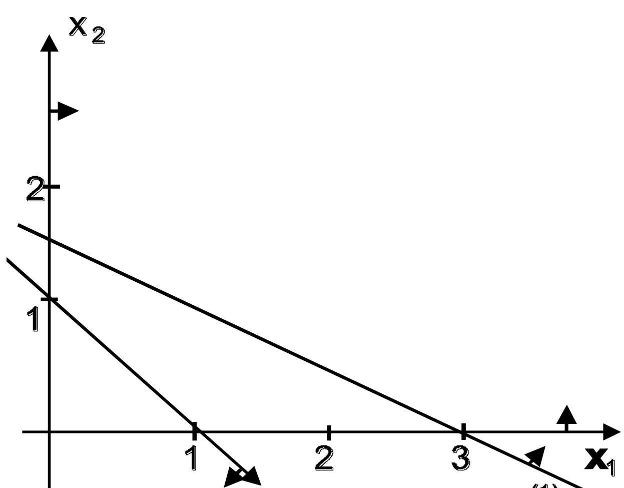


Рисунок 4.6 – Область допустимих розв'язків системи лінійних нерівностей

***Приклад* 3.** Побудувати на площині в системі координат x_1Ox_2 множину X допустимих розв'язків наступних систем лінійних нерівностей з двома змінними.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ \geq \ 3 \ , \\ x_1 + \quad x_2 \ \leq 1 \ , \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \end{cases}$

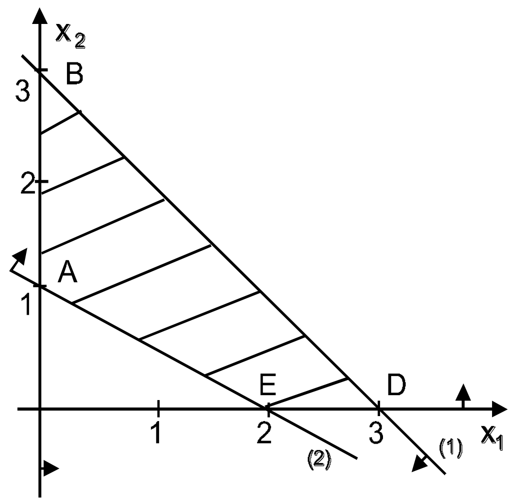
Множина X допустимих розв'язків



Висновок:
ОДР – множина $X = \varnothing$.

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$

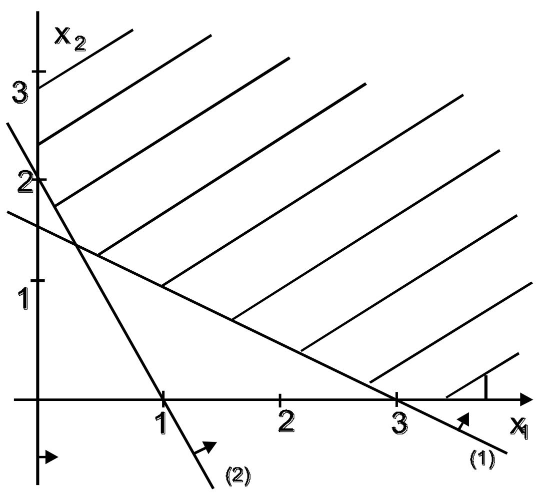
Множина X допустимих розв'язків



Висновок:
ОДР – множина X – багатокутник ABDE.

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$

Множина X допустимих розв'язків



Висновок:
ОДР – множина X – багатокутна множина.

ЕТАП 2

Тепер припустимо, що ОДР знайдена. Перейдемо до наступного етапу графічного методу розв'язання ЗЛП. Покажемо, як серед усіх точок ОДР знайти таку точку, в якій функція цілі має максимальне значення. Для цього розглянемо функцію цілі:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2.$$

З курсу вищої математики відомо, що рівняння $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ при фіксованому значенні Z визначає пряму, а при зміні значення Z – сімейство паралельних прямих. Для всіх точок, що лежать на одній з прямих, функція Z приймає одне і те саме значення, тому зазначені прямі називаються ***лініями рівня*** для функції Z.

Вектор $\bar{c} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial X_2} \right\}$ називається ***градієнтом*** функції *Z*. Він є перпендикулярним лініям рівня та показує напрямок найбільшого зростання функції *Z*. Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial z}{\partial X_2} = c_2$, то $\overline{grad\ Z} = \{c_1; c_2\}$.

Зобразимо на одному графіку ОДР, градієнт та одну з ліній рівня (наприклад, $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$) та будемо переміщувати лінію рівня по ОДР паралельно самій собі в напрямку вектора $\overline{grad\ Z}$ до тих пір, поки вона не пройде через останню (крайню) її спільну точку з ОДР. Координати цієї точки і є оптимальним розв’язком даної задачі. Будемо позначати оптимальний розв'язок через X^*, а координати оптимального розв'язку (плану) через x_1^*, x_2^*. Для їх знаходження необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь, які відповідають прямим, що перетинаються в точці оптимуму. Підставивши координати x_1^* та x_2^* в функцію цілі *Z*, отримуємо $Z_{\max} = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*$.

Нехай, наприклад, опуклий багатокутник *ABMCD* є ОДР, а $\overline{grad\ Z} = \vec{N}$ розташований так, як зображено на рис. 4.7. Тоді *Z* приймає максимальне значення в точці *M*.

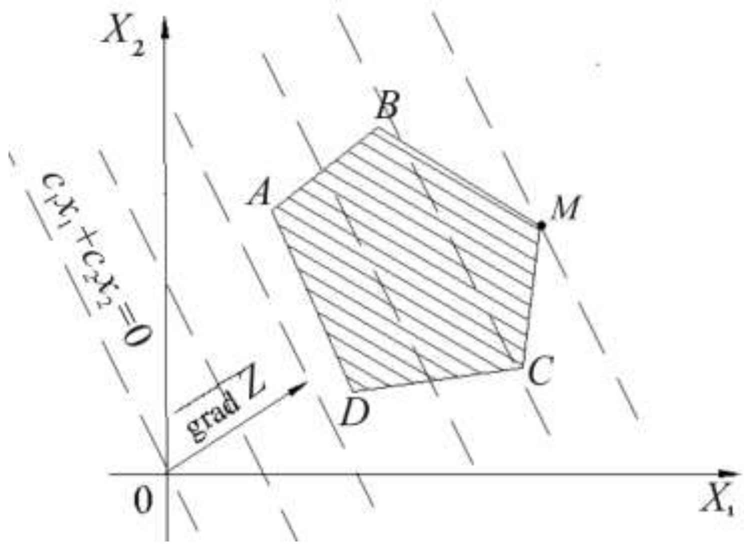


Рисунок 4.7 – Функція *Z* приймає максимальне значення в точці *M*

Отже, геометрична інтерпретація задач лінійного програмування дозволяє зробити наступні висновки:

– множина X допустимих розв'язків задачі може бути: порожнім, опуклим та обмеженим (*багатогранник*), опуклим та необмеженим (*багатогранна множина*);

– цільова функція задачі або є необмеженою на множині X, або досягає свого екстремального значення хоча б в одній вершині множини X.

Так, при використанні графічного методу для розв'язання ЗЛП можливі наступні випадки:

1. Цільова функція приймає максимальне значення в єдиній вершині *A* багатокутника розв'язків (рис. 4.8).

2. Максимальне значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка *AB* (рис. 4.9). Тоді ЗЛП має альтернативні оптимальні плани. Такий випадок відповідає ситуації множини розв’язків.

3. ЗЛП не має оптимальних планів: якщо цільова функція не обмежена зверху (рис. 4.10) або система обмежень задачі несумісна (рис. 4.11).

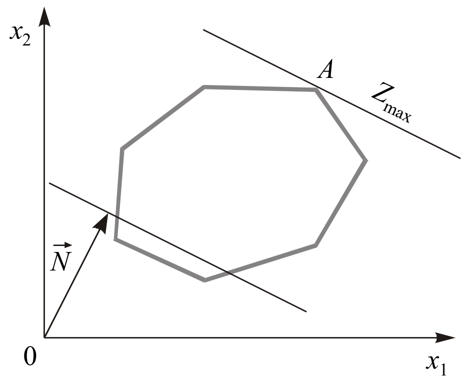


Рис. 4.8

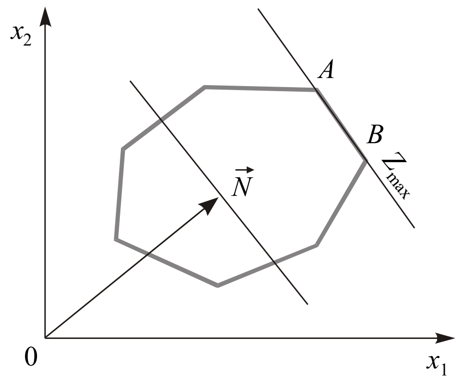


Рис. 4.9

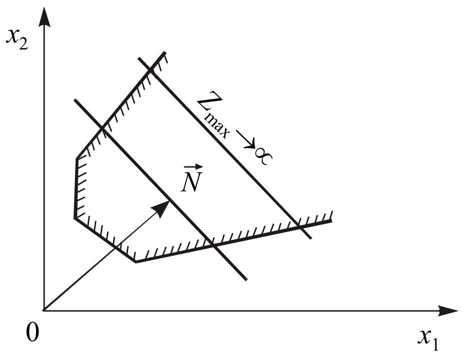


Рис. 4.10

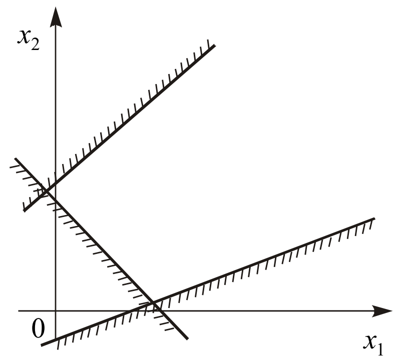


Рис. 4.11

4. ЗЛП має оптимальний план при необмеженій області допустимих розв'язків (рис. 4.12 та 4.13). На рис. 4.12 в точці *B* маємо максимум, на рис. 4.13 в точці *A* – мінімум, на рис. 4.14 зображено, як у випадку необмеженої області допустимих планів цільова функція може приймати максимальне або мінімальне значення в будь-якій точці променя.

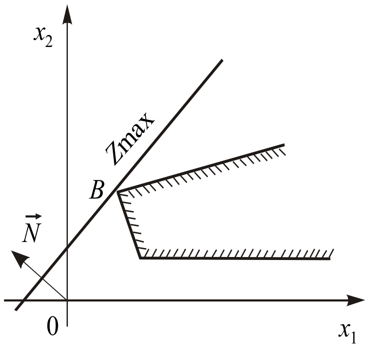


Рис. 4.12

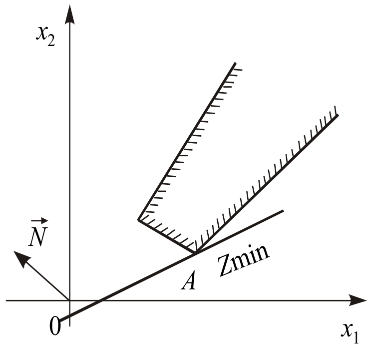


Рис. 4.13

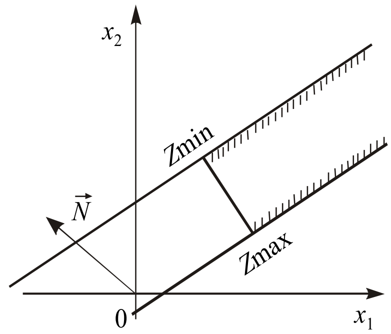


Рис. 4.14

Сформулюємо **алгоритм графічного методу розв'язання ЗЛП**

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min) \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2\{\le, =, \ge\}b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2\{\le, =, \ge\}b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2\{\le, =, \ge\}b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2\{\le, =, \ge\}b_m. \end{cases} \tag{4.8}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \tag{4.9}$$

припускаючи, що система (4.8) за умов (4.9) є сумісною і багатокутник її розв'язків є обмеженим.

Алгоритм графічного методу складається з наступних кроків:

1) Будуємо прямі, рівняння яких отримуємо заміною в обмеженнях задачі (4.8) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2) Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3) Знаходимо багатокутник розв'язків ЗЛП.
4) Будуємо вектор $\overline{grad\, Z} = \{c_1; c_2\}$, який задає напрям зростання значення цільової функції задачі.
5) Будуємо лінію рівня – пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярну до вектора $\overline{grad\, Z}$.
6) Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в напрямку вектора $\overline{grad\, Z}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямку (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.
7) Визначаємо координати точки, в якій цільова функція досягає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

***Приклад* 4.** Фірма випускає продукцію двох видів: *A* і *B*, використовуючи два види взаємозамінного обладнання. Фонд часу роботи обладнання обмежений відповідно величинами 120 і 260 год. У таблиці наведені норми витрат часу на виготовлення одиниці продукції кожного виду:

Вид продукції / Вид обладнання	Норми витрат часу, год.		Фонд часу, год.
	A	*B*	
1	2	4	120
2	4	2	260

Відомий план випуску продукції *A* і *B*, що становить відповідно 50 і 70 одиниць (перевиконання плану не передбачається).

Визначити, скільки одиниць продукції *A* і *B* має бути випущено з використанням обладнання першого та другого виду, щоб сумарні витрати на виконання плану були мінімальними.

Розв'язання

Позначимо через x_{ij} кількість продукції *j*-го виду $\left(j=\overline{1,2}\right)$, яка випускається на *i*-му обладнанні $\left(i=\overline{1,2}\right)$.

Умови задачі запишемо у вигляді таблиці:

Вид продукції / Вид обладнання	*A*	*B*	Фонд часу
1	2 x_{11}	4 x_{12}	120
2	4 x_{21}	2 x_{22}	260
План	50	70	

Побудуємо математичну модель задачі. Цільова функція описує витрати часу, пов'язані з випуском всієї продукції:

$$Z = 2x_{11} + 4x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22}.$$

Обмеження по фонду робочого часу:

$$\begin{cases} 2x_{11} + 4x_{12} \le 120, \\ 4x_{11} + 2x_{22} \le 260. \end{cases}$$

Обмеження по необхідності виконання плану:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 50, \\ x_{12} + x_{22} = 70. \end{cases}$$

Беручи також до уваги умови невід'ємності змінних, отримаємо математичну модель:

$$Z = 2x_{11} + 4x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22} \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_{11} + 4x_{12} \le 120, \\ 4x_{11} + 2x_{22} \le 260, \\ x_{11} + x_{21} = 50, \\ x_{12} + x_{22} = 70, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \left(i=\overline{1,2};\ j=\overline{1,2}\right).$$

Щоб розв'язувати задачу графічним методом, перш за все запишемо модель в стандартній формі.

Для цього виразимо x_{11} та x_{12} з останніх двох обмежень $x_{11} = 50 - x_{21}$, $x_{12} = 70 - x_{22}$ і підставимо їх у обмеження-нерівності і цільову функцію. В результаті перетворень отримаємо:

$$z = 2x_{21} - 2x_{22} + 380 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_{21} - 2x_{22} \le -130, \\ -2x_{21} + x_{22} \le 30, \\ x_{21} \le 50, \\ x_{22} \le 70, \end{cases}$$

$$x_{21} \ge 0, \quad x_{22} \ge 0.$$

Побудувавши відповідні до даних обмежень-нерівностей граничні прямі

$$x_{21} + 2x_{22} = 130, \qquad -2x_{21} + x_{22} = 30, \qquad x_{21} = 50, x_{22} = 70,$$

визначимо півплощини, в яких виконуються відповідні нерівності. Загальною частиною всіх півплощин (з урахуванням $x_{21} \ge 0, x_{22} \ge 0$) є багатокутник $ABCD$ (рис. 4.8).

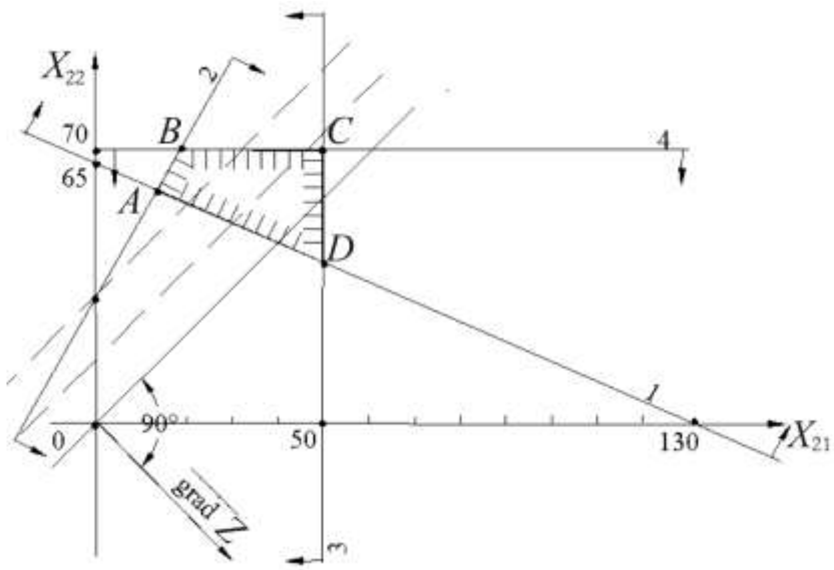


Рисунок 4.8 – Цільова функція досягає мінімального значення в точці B

Далі побудуємо вектор $\overline{grad\ Z} = (2,-2)$. Оскільки нас цікавить тільки напрямок цього вектора, ми можемо взяти його довільної довжини.

Перпендикулярно до цього вектору проводимо лінію рівня через початок координат та, переміщуючи її по області $ABCD$ в напрямку антіградієнта, отримуємо точку B, в якій цільова функція досягає мінімуму.

Для знаходження координат цієї точки розв'яжемо систему, складену з рівнянь граничних прямих AB та BC:

$$\begin{cases} -2x_{21}+x_{22}=30, \\ \qquad\qquad x_{22}=70. \end{cases}$$

Отримаємо $x_{22}=70$, $x_{21}=20$.

Координати x_{11} та x_{12} знайдемо з співвідношень:

$$x_{11}=50-x_{11}=30,$$

$$x_{12}=70-x_{22}=0.$$

Отже, шуканий оптимальний план

$$X^*=\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 20 & 70 \end{pmatrix}.$$

При цьому мінімальне значення цільової функції

$$Z_{\min}=2\cdot 20-2\cdot 70+380=280\,.$$

Виходячи з умов задачі, можна дати інтерпретацію отриманого розв'язку: перший вид обладнання використовується для випуску продукції *A* в кількості 30 одиниць, продукція *B* на першому виді обладнання не виготовляється. На другому виді обладнання виготовляється 20 одиниць продукції *A* і 70 одиниць продукції *B*. При цьому витрати на випуск продукції будуть мінімальними і складуть 280 умовних одиниць.

4.5 Графічний метод для ЗЛП *n*-мірного простору при $n>3$

Нехай кількість змінних n, число обмежень m. Тоді $n-m=2$, тобто дві з n змінних, наприклад, x_1 та x_2, вільні. Отже, інші m базисних змінних можна знайти з $m=n-2$ рівнянь виду

$$\begin{cases} x_3=\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\beta_3; \\ x_4=\alpha_{41}x_1+\alpha_{42}x_2+\beta_4; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\beta_n. \end{cases}$$

Оскільки $x_i\ge 0$ $(i=\overline{1,n})$, то

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,$$

$$\begin{cases} x_3=\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\beta_3\ge 0; \\ x_4=\alpha_{41}x_1+\alpha_{42}x_2+\beta_4\ge 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\beta_n\ge 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Прийнявши величину x_3 рівною нулю, отримаємо рівняння

$$\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\beta_3=0\,.$$

Для такої прямої $x_3 = 0$, відзначимо ту півплощину $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$, де $x_3 > 0$. Аналогічно, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$;...; $x_n = 0$. Спільна частина площини в x_1Ox_2 – багатокутник допустимих розв'язків.

Необхідно знайти максимальне значення функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Підставивши x_3, x_4, x_5, ... ; x_n з (4.10) цільову функцію, отримаємо Z, виражену через дві вільні змінні x_1 та x_2:

$$Z = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2,$$

де γ_0 — вільний член.

Далі знаходження оптимального плану здійснюється за алгоритмом для випадку двох змінних.

***Приклад* 5.** Розв'язати графічним методом ЗЛП вигляду

$$\min F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5; \\ x_1 + x_2 - x_5 = -4; \\ x_2 + x_6 = 5; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,7}).$$

Розв'язання

Для заданої системи обмежень маємо: n = 7 — кількість змінних, а m = 5 — кількість обмежень задачі. Тоді отримуємо 2 вільні змінні x_1 та x_2.

Виразимо через x_1 та x_2 всі базисні змінні:

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4. \quad (4.11)$$

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4, \quad (4.12)$$

$$x_6 = -x_2 + 5. \quad (4.13)$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1;$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6.$$

Далі по алгоритму беремо x_1 = 0 та x_2 = 0 — координатні осі; інші граничні прямі знаходимо, взявши x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0.

Багатокутник допустимих розв'язків зображений на рис. 4.9.

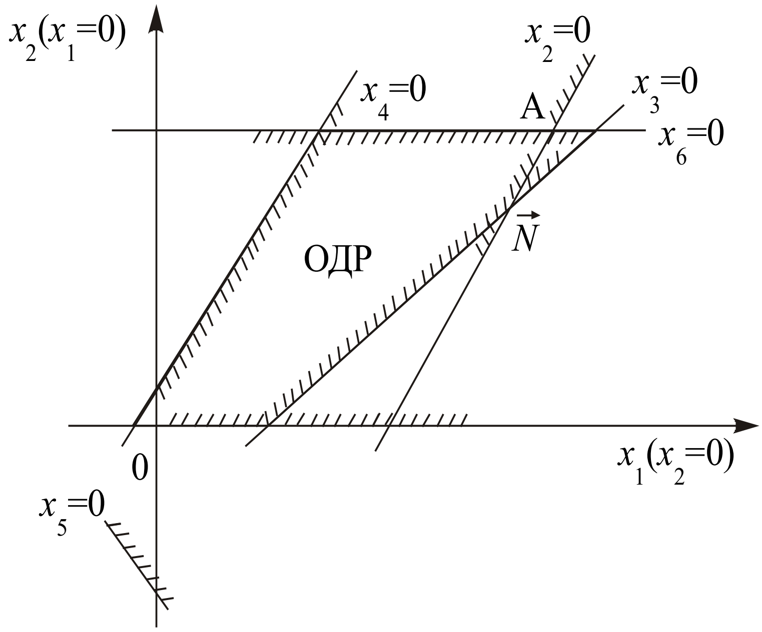


Рис. 4.9

Знайдемо вид цільової функції, вираженої через x_1 та x_2: $Z = -5x_1 - 2x_2 - 12$.

Відкидаючи вільний член, маємо: $Z' = -5x_1 - 2x_2$.

Будуємо вектор $\overline{grad\ Z} = \vec{N}$ (–5, –2) та лінію рівня – перпендикулярну пряму Z'. Пересуваючи пряму Z' в напрямку, протилежному $\overline{grad\ Z} = \vec{N}$ (потрібно знайти мінімальне значення Z), отримаємо точку мінімуму – A (рис. 4.10).

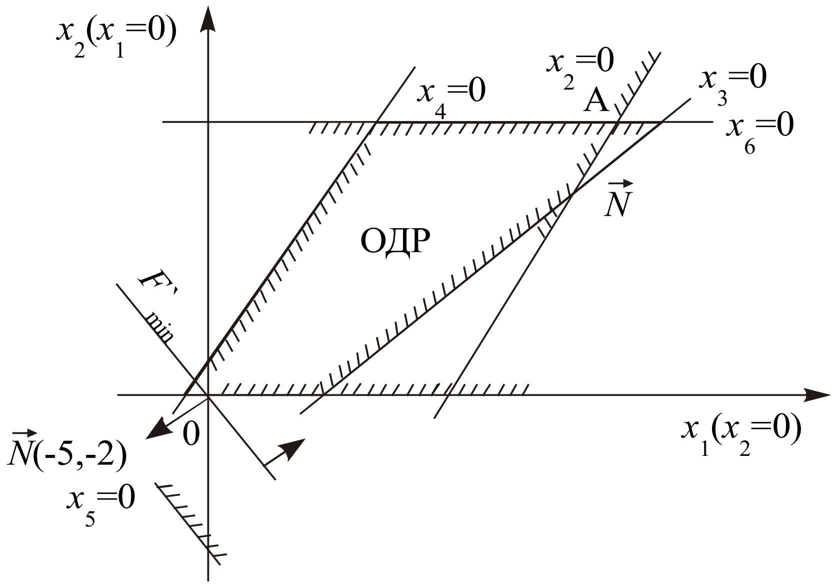


Рис. 4.10

В точці A перетинаються дві граничні прямі: $x_6 = 0$ та $x_7 = 0$.

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 - 1/2\, x_2 + 6 = 0. \end{cases} \qquad x_1^* = 8{,}5;\ x_2^* = 5.$$

Звідси $x_3^* = 0{,}5;\ x_4^* = 16{,}5;\ x_5^* = 17{,}5;\ x_6^* = 0;\ x_7^* = 0$.

Підстановкою значень x_1^* та x_2^* в лінійну функцію Z отримуємо мінімальне значення цільової функції: $Z = -5 \cdot 8{,}5 - 2 \cdot 5 - 12 = -64{,}5$.

§4.6 Питання для самоконтролю за темою

1. Що таке випукла лінійна комбінація? У якому випадку та яким чином вона застосовується при розв'язанні задач лінійного програмування?
2. Що називається кутовими точками? Як вони використовуються при застосуванні графічного методу розв'язання ЗЛП?
3. Що називається опуклою множиною? Наведіть приклади.
4. Наведіть графічну інтерпретацію ЗЛП.
5. Сформулюйте основні вимоги до застосування графічного методу розв'язання ЗЛП.
6. Яким чином будується множина (багатокутник) розв'язків задачі?
7. Яким чином будується вектор-градієнт? Для чого він використовується у графічному методі?
8. Що таке лінія рівня? Яким чином знаходиться її рівняння? Яким чином здійснюється паралельний переніс лінії рівня у графічному методі?
9. Наведіть приклад множини допустимих розв'язків задачі, коли вона являє собою пусту множину.
10. Сформулюйте алгоритм розв'язання ЗЛП графічним методом для випадку $n = 2$ змінних задачі.
11. Яким чином та в якому випадку графічний метод використовується для випадку, коли у задачі $n \geq 3$ змінних?
12. У якому випадку у задачі не буде розв'язків? Як це побачити із графічного зображення ЗЛП?
13. Яким чином при розв'язанні ЗЛП графічним методом визначається, що оптимальний розв'язок існує та являє собою множину розв'язків? Як його описувати?
14. Сформулюйте основні теореми, на які спирається графічний метод.