Змістовий модуль 4. Імітаційне моделювання складних систем

Тема 5. Моделювання випадкових величин

5.1 Сутність імітаційного моделювання. Метод Монте-Карло

Для дослідження поведінки реальних систем широко застосовують статистичне або імітаційне моделювання Застосування методів імітаційного моделювання дозволяє отримати інформацію про поведінку системи шляхом створення її комп'ютеризованої моделі. Статистичне моделювання дозволяє оцінити функціональні характеристики системи, що є об'єктом моделювання. Воно застосовується у різних галузях науки та техніки. Прикладами задач, що розв'язують з допомогою статистичного моделювання, є наступні задачі.

1) Обчислення кратних інтегралів;
2) Обчислення констант;
3) Обернення матриць;
4) Дослідження процесів дифузії;
5) Проектування систем масового обслуговування, зв'язку, управління запасами;
6) Аналіз хімічних процесів;
7) Оцінка поведінки споживачів, визначення цін, прогнозування діяльності підприємств;
8) Дослідження динаміки демографічних процесів, впливу екології на здоров'я людини;
9) Задачі біології та медицини;
10) Дослідження військової стратегії та тактики.

Сутність статистичного моделювання полягає у імітації випадкових величин та випадкових процесів та ґрунтується на використанні випадкових вибірок. Замість аналітичного описання складної системи тут використовують імітацію випадкового процесу з використанням випадкових чисел. У результаті кожного разу отримуємо нову, відмінну від попередньої, реалізацію випадкового процесу. Ці реалізації можна використати як статистичні дані. Потрібні характеристики системи отримуємо у результаті їх обробки методами математичної статистики.

Найпростішою формою методу статистичного моделювання є метод Монте-Карло. Розглянемо сутність цього методу на простому прикладі обчислення площі круга, обмеженого колом, рівняння якого має вигляд:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25.$$

Спочатку помістимо цей круг у квадрат зі стороною, що дорівнює діаметру круга, тобто 10 одиниць. Сторони квадрату дотикаються до кола. Нехай при киданні точки навмання у квадрат потрапляння у точки з різними координатами, розташованими всередині квадрату, є рівноймовірними подіями.

Нехай вибірка складається з n спостережень за точками квадрата, m з яких потрапили у круг. Тоді відношення площі круга до площі квадрату можна наближено оцінити як відношення $\frac{m}{n}$.

Координати x та y точок квадрату розглядаються як рівномірно розподілені випадкові величини з щільностями розподілу ймовірностей

$$f(x)=\frac{1}{10}, -4 \le x \le 6; \quad f(y)=\frac{1}{10}, -3 \le y \le 7.$$

Поза вказаними проміжками щільності розподілу ймовірностей дорівнюють нулю.

Нехай R_1 та R_2 – різні випадкові числа з відрізку $[0;1]$. Тоді координати (x,y) точок квадрату можна виразити через ці випадкові числа у наступному вигляді:

$$x=-4+\big(6-(-4)\big)R_1=-4+10R_1,$$

$$y=-3+\big(7-(-3)\big)R_2=-3+10R_2.$$

У таблиці 5.1 наведено невеликий список випадкових чисел з відрізку $[0;1]$.

Використовуючи наведені вище формули, ми генеруємо випадково розподілені точки (x', y') квадрата для кожної пари випадкових чисел (R_1, R_2). Отримана точка (x', y') потрапляє всередину круга, якщо

$$(x'-1)^2+(y'-2)^2 \le 25.$$

Таблиця 5.1. Випадкові числа

0,0589	0,3529	0,5869	0,3455	0,7900	0,6307
0,6733	0,3646	0,1281	0,4871	0,7698	0,2346
0,4799	0,7676	0,2867	0,8111	0,2871	0,4220
0,9486	0,8931	0,8216	0,8912	0,9534	0,6991
0,6139	0,3919	0,8261	0,4291	0,1394	0,9475
0,5933	0,7876	0,3866	0,2302	0,9025	0,3428
0,9341	0,5199	0,7125	0,5954	0,1605	0,6037
0,1782	0,6358	0,2108	0,5423	0,3567	0,2569
0,3473	0,7422	0,3575	0,4208	0,3070	0,0546
0,5644	0,8954	0,2926	0,6975	0,5513	0,0305

Наприклад, якщо $R_1 = 0,0589$ та $R_2 = 0,6733$, отримуємо:

$$x' = -4 + 10R_1 = -4 + 10 \cdot 0,0589 = -3,411,$$
$$y' = -3 + 10R_2 = -3 + 10 \cdot 0,6733 = 3,733.$$

Оскільки величина $(-3,411-1)^2 + (3,733-2)^2 = 22,46 < 25$, то точка (x', y') потрапляє всередину круга.

Оцінка площі круга покращується зі збільшенням кількості *n* генерованих точок (обсягу вибірки). Підвищити точність обчислення площі можна, здійснюючи її оцінку при *n* спостереженнях *N* разів, і прийнявши за наближене значення площі круга середню арифметичну *N* отриманих результатів. Точність цього наближення для площі круга збільшується зі збільшенням обсягу *n* вибірки.

Результати експерименту, пов'язаного з імітаційним моделюванням, необхідно отримати у вигляді довірчого інтервалу, що характеризує величину відхилення наближеного значення показника від його точного значення.

Нехай *A* – точне значення показника, що обчислюється, $\overline{A}$ та $\tilde{\sigma}^2$ – його середнє значення та вибіркова дисперсія при *N* спостереженнях. Тоді довірчий інтервал для А при довірчій ймовірності $1-\alpha$ має вигляд:

$$\overline{A} - \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}, N-1} \le A \le \overline{A} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}.$$

Тут $t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$ – точка *t* -розподілу Стьюдента, що відповідає рівню значимості α та кількості ступенів вільності *N*-1.

У розглянутому вище прикладі про площу круга при *n*=10000, *N*=10, $\overline{A} = 78,57 \text{ см}^2$, $\tilde{\sigma} = 0,47 \text{ см}^2$ при $\alpha = 0,05$ довірчий інтервал для оцінки точного значення площі становить $78,23 \le A \le 78,9$. Зазначимо. що точне значення площі цього круга, округлене до 0,01, становить 78,54 см^2.

Отже, сутність методу Монте-Карло полягає у наступному. Для знаходження значення *a* деякої величини вибирають випадкову величину *X*, математичне сподівання якої *M(X)=a*. Здійснюють *n* випробувань, у результаті яких отримують *n* можливих значень *X*, далі обчислюють їх середню арифметичну $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ За оцінку наближеного значення a^* числа *a* вибирають $\overline{x}$. Метод Монте-Карло називають також методом статистичних випробувань. Теорія цього методу визначає, як найбільш доцільно визначити випадкову величину *X*, як знайти її можливі значення та оцінити похибку методу.

5.2 Оцінка похибки методу Монте-Карло

Нехай для отримання оцінки a^* математичного сподівання a випадкової величини X було здійснено n незалежних випробувань (тобто розіграно n можливих значень X) і з їх результатами була знайдена вибіркова середня $\overline{x}$, прийнята у якості оцінки математичного сподівання, тобто $a^* = \overline{x}$. Розглянемо задачу знаходження верхньої межі δ похибки такої оцінки з заданою ймовірністю (надійністю) γ:

$$P\left(\left|\overline{x} - a\right| \le \delta\right) = \gamma . \tag{5.1}$$

Тут маємо визначити точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковою середньою з допомогою довірчих інтервалів. Ця задача розглядається у математичній статистиці. Використаємо отримані там результати, а саме розглянемо три можливі випадки.

1. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу і її середнє квадратичне відхилення σ відоме. У цьому випадку з надійністю γ верхня межа похибки

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5.2}$$

де n – кількість випробувань (розіграних значень X), t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, для якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, σ – відоме середнє квадратичне відхилення X.

Приклад 5.1. З надійністю $\gamma = 0{,}95$ знайти верхню межу похибки δ, якщо для оцінки математичного сподівання випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0{,}5$, було розіграно 100 можливих значень X.

Розв'язання. Маємо n=100, $\sigma = 0{,}5$, $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо t=1,96. Отже, за формулою (4.1) верхня межа похибки $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}098$.

2. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом, її середнє квадратичне відхилення невідоме. У цьому випадку з надійністю γ верхня межа похибки визначається за формулою

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}. \tag{5.3}$$

У формулі (4.3*)* n – кількість випробувань, s – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}. \qquad (5.4)$$

Значення t_γ знаходять за статистичною таблицею значень цього показника.

Приклад 5.2. З надійністю $\gamma = 0{,}95$ знайти верхню межу похибки δ, якщо для оцінки математичного сподівання величини X, розподіленої за нормальним законом, було розіграно 100 її можливих значень і за ними знайдено виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення s=0,5.

Розв'язання. За умовою, n=100, s=0,5. Використавши статистичну таблицю значень t_γ, знаходимо, що при $\gamma = 0{,}95$, n=100 $t_\gamma = 1{,}984$. Отже, $\delta = \frac{1{,}984 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}099$.

3. Випадкова величина X розподілена за законом, що відрізняється від нормального. У цьому випадку при достатньо великій кількості випробувань $(n > 30)$ з надійністю, що наближено дорівнює γ, верхню межу похибки δ можна обчислити за формулою (5.2), якщо середнє квадратичне відхилення випадкової величини X відоме.

Якщо величина σ є невідомою, то у формулу (5.2) замість нього можна підставити його оцінку s, або використати формулу (5.3). Зі зростанням n різниця між результатами, отриманими за цими формулами зменшується, оскільки при $n \to \infty$ розподіл Стьюдента наближається до нормального розподілу.

Для того, щоб знайти найменше число випробувань, яке забезпечить наперед задану верхню межу похибки δ, потрібно виразити n з формул (5.2) або (5.3). Отримаємо:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} \text{ (формула (5.2))},$$
$$n = \frac{t_\gamma^2 \cdot s^2}{\delta^2} \text{ (формула (5.3))}. \qquad (5.5)$$

5.3 Генерування випадкових чисел

Нехай R – неперервна випадкова величина, розподілена рівномірно у інтервалі (0; 1).

Випадковими числами називають можливі значення r неперервної випадкової величини R, розподіленої рівномірно у інтервалі (0; 1).

Для випадкової величини, що має рівномірний розподіл на $[a; b]$, щільність розподілу має вигляд:

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, r\in[a;b],\\ 0, r\notin[a;b].\end{cases}$$

Математичне сподівання цієї випадкової величини $m_r=\dfrac{a+b}{2}$, а її дисперсія $\sigma_r^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ймовірність потрапляння рівномірно розподіленої випадкової величини у деякий інтервал $[\alpha;\beta]$, що міститься всередині $[a;b]$, дорівнює $\beta-\alpha$, тобто довжині цього інтервалу. Цю властивість використовують як необхідну та достатню умову того, що випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку $[a;b]$.

Генерування значень рівномірно розподіленої випадкової величини *R* можна здійснювати, використавши наступне перетворення:

$$R=z_1\cdot 2^{-1}+z_2\cdot 2^{-2}+...+z_k\cdot 2^{-k}+... \ , \qquad (5.6)$$

де z_k – реалізація випадкової величини *Z*, яка з рівною ймовірністю *p*=0,5 може набувати значення 0 або 1.

Випадкова величина *R* може мати нескінченну кількість реалізацій. Але при запису числа у комп'ютері використовують скінченну кількість двійкових розрядів. Тому кількість значень випадкової величини *R*, які можна використовувати при моделюванні, також буде скінченною. Максимальна кількість випадкових чисел, що записують за допомогою *k* двійкових розрядів і які не збігаються одне з одним, дорівнює 2^k. Із сукупності чисел 0, 1,2,…, 2^k-1 можна отримати такі значення дискретної випадкової величини *R*:

$$r_i=\frac{i}{2^k-1}, i=0,1,2,...,2^k-1. \qquad (5.7)$$

Їх ймовірності дорівнюють $p_i=\dfrac{1}{2^k}$. Розподіл такої випадкової величини є квазірівномірним.

Для генерування рівномірно розподілених послідовностей випадкових чисел застосовують табличний, фізичний та програмний способи. У першому випадку використовують таблиці випадкових чисел, отриманих за допомогою фізичного або програмного генератора випадкових чисел. Такі таблиці можуть містити більш ніж мільйон випадкових чисел. Таблиці здебільшого використовують при ручних розрахунках.

При фізичній генерації випадкових чисел можна використовувати довільний випадковий фізичний процес. Найчастіше користуються джерелами

радіоактивного випромінювання або власними шумами електронних ламп. У першому випадку задається деякий проміжок часу Δt, потім підраховується кількість частинок, випромінених за цей проміжок часу. Значення r_i знаходять за формулою (5.6). При цьому вибирають $z_i = 0$, якщо k непарне, $z_i = 1$ для парного k. Проміжок Δt повинен бути достатньо великим, щоб ймовірності отримання парних та непарних значень k були рівними.

При використанні програмного методу генерування випадкових чисел значення i+1-го випадкового числа визначають, використовуючи значення i-го числа за рекурентною формулою $r_{i+1} = f\left(r_i\right)$. Завдяки цьому числа, що отримуються у такий спосіб, не є дійсно випадковими, їх називають псевдовипадковими. Функція f повинна бути достатньо складною для того, щоб взаємозв'язок сусідніх елементів послідовності r_i та r_{i+1} не впливав на результати. Існує багато алгоритмів отримання псевдовипадкових чисел. Розглянемо два з них: алгоритм Неймана та метод лишків.

При застосуванні *алгоритму Неймана* вибирають число r_k, що є m – розрядним двійковим числом та задовольняє умові $0 < r_k < 1$ та має вигляд:

$$r_k = \varepsilon_1 \cdot 2^{-1} + \varepsilon_2 \cdot 2^{-2} + ... + \varepsilon_m \cdot 2^{-m}. \tag{5.8}$$

Квадрат цього числа має вигляд:

$$r_k^2 = \delta_1 \cdot 2^{-1} + \delta_2 \cdot 2^{-2} + ... + \delta_{2m} \cdot 2^{-2m}. \tag{5.9}$$

Будемо вважати m парним числом (така умова завжди виконується для сучасних комп'ютерів). Наступне псевдовипадкове число r_{k+1} отримаємо, використовуючи коефіцієнти середніх членів суми (5.9), за формулою:

$$r_{k+1} = f\left(r_k\right) = \delta_{\frac{m}{2}+1} \cdot 2^{-1} + \delta_{\frac{m}{2}+2} \cdot 2^{-2} + ... + \delta_{\frac{3m}{2}} \cdot 2^{-m}. \tag{5.10}$$

Отримана за таким алгоритмом послідовність псевдовипадкових чисел за своїми властивостями є близькою до рівномірної випадкової послідовності. Проте кількість малих чисел, що генеруються за алгоритмом Неймана, є дещо вищою, ніж це має бути для рівномірної випадкової послідовності.

При застосуванні *методу лишків* для отримання рівномірної послідовності псевдовипадкових чисел використовують рекурентне співвідношення $r_{k+1} = \left\{M \cdot r_k\right\}$. Тут хвилястими дужками позначено дробову частину числа. Початковим значенням послідовності випадкових чисел можна обрати 2^{-m}, де m – кількість двійкових розрядів комірки комп'ютера. Число M має бути достатньо великим цілим числом. Рекомендується використовувати $M = 5^{2p+1}$, де p є максимальним з цілих чисел, для яких виконується умова $5^{2p+1} < 2^m$.

5.4. Моделювання дискретних випадкових величин

Нехай потрібно розіграти дискретну випадкову величину *X*, тобто отримати послідовність її можливих значень $x_1, x_2, ..., x_n$, якщо відомий закон розподілу *X*:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Нехай R – рівномірно розподілена у інтервалі (0;1) випадкова величина, $r_1, r_{2,}, ...$ – її можливі значення, тобто випадкові числа.

Розіб'ємо інтервал $0 < R < 1$ на осі *Or* точками з координатами $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, ..., p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_{n-1}$ на *n* інтервалів $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Довжини цих інтервалів відповідно дорівнюють:

$$\Delta_1 = p_1, \Delta_2 = (p_1 + p_2) - p_1 = p_2, ..., \Delta_n = 1 - (p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}) = p_n.$$

Для вказаних інтервалів $\Delta_i = p_i, i = 1, 2, ..., n$.

Виконується наступна теорема.

Теорема 5.1. Якщо кожному випадковому числу $r_j \ (0 < r_j < 1)$, що потрапило у інтервал Δ_i, поставити у відповідність можливе значення x_i, а таких інтервалів *n*, то отримуємо випадкову величину *X*

Доведення. Оскільки при потраплянні випадкового числа у проміжок Δ_i величина, що моделюється, набуває значення x_i, а таких інтервалів *n*, то ця величина набуває тих же значень, що й *X*, тобто $x_1, x_2, ..., x_n$. Ймовірність потрапляння випадкової величини R у інтервал Δ_i дорівнює його довжині p_i, тому закон розподілу розіграної випадкової величини співпадає з законом розподілу випадкової величини *X*.

Отже, для того, щоб розіграти дискретну випадкову величину *X*, потрібно:

1) розбити інтервал (0; 1) на *n* інтервалів: $\Delta_1 = (0; p_1), \Delta_2 = (p_1; p_1 + p_2), ...,$ $\Delta_n = (p_1 + p_2 + ... p_{n-1}; 1)$;
2) вибрати випадкове число r_j;
3) якщо число r_j потрапило у інтервал Δ_i, то випадкова величина, що моделюється, набуває значення x_i.

Приклад 5.3. Змоделювати 8 значень дискретної випадкової величини *X*, закон розподілу якої поданий таблицею:

X	3	11	24
p	0,25	0,16	0,59

Розв'язання. Розіб'ємо проміжок (0;1) точками з координатами 0,25; 0,26+0,16=0,41 на три інтервали: $\Delta_1=(0;0,25)$, $\Delta_2=(0,25;0,41)$, $\Delta_3=(0,41;1)$. Виберемо з таблиці випадкових чисел 8 чисел, наприклад, 0,1; 0,37; 0,08; 0,99; 0,12; 0,66; 0,31; 0,85. Число 0,1 потрапляє у інтервал Δ_1, йому відповідає число 3, 0,37 належить Δ_2, йому відповідає 11, 0,08 належить Δ_1, йому відповідає 3, 0,99 належить Δ_3, йому відповідає 24. Продовжуючи встановлювати відповідність таким способом, отримуємо послідовність чисел, що є значеннями випадкової величини X у 8 випробуваннях: 3, 11, 3, 24, 3, 24, 11, 24.

Розігрування подій можна звести до розігрування дискретної випадкової величини.

Нехай потрібно розіграти випробування, у кожному з яких подія А з'являється з ймовірністю р, відповідно вона не з'являється з ймовірністю $q=1-p$.

Розглянемо дискретну випадкову величину Х, що приймає значення 1 з ймовірністю р, та значення 0 з ймовірністю $q=1-p$. Будемо вважати, що подія А з'явилася, якщо $X = 1$, вона не з'явилася, якщо $X = 0$. Розіграємо дискретну випадкову величину Х. Проміжок (0;1) поділимо точкою p на проміжки: $\Delta_1=(0;p)$ та $\Delta_2=(p;1)$. Далі вибираємо випадкове число r_j. Якщо воно потрапляє у Δ_1, то подія A з'явилася, потрапляє у Δ_2 – не з'явилася.

Отже, щоб розіграти випробування, у кожному з яких ймовірність події A дорівнює p, потрібно вибрати випадкове число r_j. Якщо $r_j < p$, то подія A з'явилась.

Розігрування повної групи n несумісних подій $A_1, A_2,\ldots, A_n$, ймовірності яких відповідно дорівнюють $p_1, p_2,..., p_n$ зводиться до розігрування дискретної випадкової величини X, з наведеним нижче законом розподілу.

X	1	2	…	n
p	p_1	p_2	⋯	p_n

Тут досить вважати, що коли у випробуванні величина X набула значення $x_i = i$, $i=1, 2,...,n$, то з'явилася подія A_i.

Приклад 5.4. Задано ймовірності чотирьох подій, що утворюють повну групу:

$$p_1=p(A_1)=0,19;\ p_2=p(A_2)=0,21;\ p_3=p(A_3)=0,34;\ \ p_4=p(A_4)=0,26.$$

Змоделювати 5 випробувань, у кожному з яких з'являється одна з подій $A_i, i = 1,2,3,4.$

Розв'язання. Побудуємо закон розподілу випадкової величини X за заданими ймовірностями подій:

X	1	2	3	4
p	0,19	0,21	0,34	0,26

Розіграємо цю випадкову величину. Для цього розіб'ємо проміжок (0; 1) на чотири проміжки:

$\Delta_1 = (0;0,19); \Delta_2 = (0,19;0,4); \Delta_3 = (0,4;0,74); \Delta_4 = (0,74;1).$

Виберемо з таблиці навмання 5 випадкових чисел, наприклад, 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73.

Маємо:

$$0,66 \in \Delta_3; 0,31 \in \Delta_2; 0,85 \in \Delta_4; 0,63 \in \Delta_3; 0,73 \in \Delta_3.$$

Отже, послідовність подій має вигляд: A_3, A_2, A_4, A_3, A_3.

Приклад 5.5. Події A та B незалежні та сумісні. Потрібно змоделювати 6 випробувань, у кожному з яких ймовірність події A дорівнює 0,6, а події B – 0,2.

Розв'язання. Можливі 4 наслідки випробувань:

$$A_1 = AB, A_2 = A\overline{B}, A_3 = \overline{A}B, A_4 = \overline{A}\overline{B}.$$

Знайдемо ймовірності цих наслідків.

$P(A_1) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12; P(A_2) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48; P(A_3) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08;$

$P(A_4) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32.$

Задача зводиться до розігрування повної групи подій A_1, A_2, A_3, A_4. Будуємо допоміжну випадкову величину X з законом розподілу:

X	1	2	3	4
p	0,12	0,48	0,08	0,32

Будуємо інтервали:

$$\Delta_1 = (0;0,12); \Delta_2 = (0,12;0,6); \Delta_3 = (0,6;0,68); \Delta_4 = (0,68;1).$$

Виберемо навмання 6 випадкових чисел: 0,45; 0,65; 0,06; 0,59; 0,33; 0,70. Отримаємо послідовність інтервалів, що відповідають цим випадковим числам: $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_2, \Delta_4$. Відповідна послідовність подій має вигляд:

$$A\overline{B}, \overline{A}B, AB, A\overline{B}, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}.$$

5.5. Моделювання неперервних випадкових величин

Нехай необхідно отримати послідовність $x_i, i = 1,2,...,n$ можливих значень неперервної випадкової величини *X*, знаючи її функцію розподілу *F(x)*.

Теорема. Якщо r_i – випадкове число, то можливе значення x_i неперервної випадкової величини *X* з заданою функцією розподілу *F(x)*, що відповідає r_i, є коренем рівняння $F(x_i) = r_i$.

Доведення. Нехай вибрано випадкове число $r_i \in (0;1)$. Функція розподілу *F(x)* монотонно зростає на всій своїй області визначення, монотонно змінюючись від 0 до 1, тому рівняння $F(x_i) = r_i$ має єдиний корінь x_i. Доведемо, що він є значенням випадкової величини *X*. Для цього покажемо, що ймовірність потрапляння цієї величини (позначимо її поки що ξ) у інтервал $(c; d)$, що належить множині можливих значень *X*, дорівнює:

$$P(c < \xi < d) = F(d) - F(c).$$

З монотонності *F(x)* випливає, що

$$c < x_i < d \Leftrightarrow F(c) < r_i < F(d).$$

Отже, отримуємо:

$$\xi \in (c; d) \Leftrightarrow R \in (F(c); F(d)) \Rightarrow P(c < \xi < d) = P(F(c) < R < F(d)).$$

Оскільки *R* розподілена рівномірно на (0;1), то виконується рівність

$$P(F(c) < R < F(d)) = F(d) - F(c).$$

Отже, $P(c < \xi < d) = F(d) - F(c)$, тобто випадкова величина ξ дорівнює випадковій величині X з функцією розподілу *F(x)*.

Отже, для того, щоб знайти можливі значення x_i випадкової величини *X*, потрібно вибрати випадкове число r_i та знайти x_i, розв'язавши рівняння $F(x_i) = r_i$.

Приклад 5.6. Отримати три можливі значення неперервної випадкової величини X, розподіленої рівномірно на (2;10).

Розв'язання. Функція розподілу неперервної випадкової величини X, розподіленої рівномірно на $(a; b)$, має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

Отже, отримуємо рівняння

$$\frac{x_i - a}{b - a} = r_i \Rightarrow x_i = a + (b - a) r_i.$$

Підставивши у отриманий вираз для x_i значення $a = 2, b = 10$, маємо формулу $x_i = 2 + 8r_i$.

Виберемо три випадкових числа, наприклад, $r_1 = 0{,}11; r_2 = 0{,}17; r_3 = 0{,}66$. Знаходимо числа x_i, що відповідають цим випадковим числам:

$$x_1 = 2 + 8 \cdot 0{,}11 = 2{,}88; x_2 = 2 + 8 \cdot 0{,}17 = 3{,}36; x_3 = 2 + 8 \cdot 0{,}66 = 7{,}28.$$

Приклад 5.7. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим функцією розподілу:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \lambda > 0$$

Знайти формулу для моделювання можливих значень x_i випадкової величини X з допомогою випадкових чисел

Розв'язання. З рівняння $F(x_i) = r_i$ отримуємо, що $1 - e^{-\lambda x_i} = r_i$. З цього рівняння знаходимо, що $x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)$. Оскільки випадкове число $r_i \in (0;1)$, то $1 - r_i \in (0;1)$ і також є випадковим числом, тому для знаходження x_i також можна використати формулу $x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i$.

Якщо відома щільність $f(x)$ розподілу ймовірностей випадкової величини X, то з рівності $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ випливає, що можливі значення x_i можна отримати, розв'язавши рівняння $\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i$.

Приклад 5.8. Задано щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\left(1 - \frac{\lambda x}{2}\right), x \in \left(0; \frac{2}{\lambda}\right) \\ 0,\ x \notin \left(0; \frac{2}{\lambda}\right). \end{cases}$$

Знайти формулу для отримання можливих значень цієї випадкової величини.

Розв'язання. Для отримання можливих значень випадкової величини з заданою щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ розв'яжемо рівняння $\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i$.

Отримуємо:

$$\int_0^{x_i} \lambda\left(1 - \frac{\lambda x}{2}\right)dx = r_i \Leftrightarrow \lambda\left(x_i - \frac{\lambda x_i^2}{4}\right) = r_i$$

Це квадратне рівняння відносно невідомої x_i:

$$\lambda^2 x_i^2 - 4\lambda x_i + 4r_i = 0.$$

Його корені $x_{i,1} = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1 - r_i^2}\right)$, $x_{i,2} = \frac{2}{\lambda}\left(1 + \sqrt{1 - r_i^2}\right)$. Оскільки $x_{i,2} > \frac{2}{\lambda}$, то $x_i = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1 - r_i^2}\right)$.

Нехай функцію розподілу неперервної випадкової величини X, що моделюється з допомогою випадкових чисел, можна подати у вигляді:

$$F(x) = C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x),$$

де сталі $C_1 > 0, C_2 > 0$, $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – функції розподілу випадкових величин X_1 та X_2. Оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x) = 1$, то $C_1 + C_2 = 1$.

Розглянемо допоміжну випадкову величину *Z*, що має наступний закон розподілу.

Z	1	2
P	C_1	C_2

Для цієї випадкової величини $P(Z = 1) = C_1, P(Z = 2) = C_2 = 1 - C_1$.

Виберемо два незалежних випадкові числа r_1 та r_2. По числу r_1 розіграємо можливі значення випадкової величини *Z*. Якщо $Z = 1$, то значення x_i знаходять, розв'язуючи рівняння $F_1(x_i) = r_2$. Якщо ж $Z = 2$, то значення x_i знаходять, розв'язуючи рівняння $F_2(x_i) = r_2$.

Покажемо, що при такому виборі x_i отримаємо значення випадкової величини з функцією розподілу $F(x)$. Нехай подія $A - X<x$, подія $B_1 - Z = 1$, подія $B_2 - Z = 2$. Тоді за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A).$$

Знайдемо ймовірності, що використовуються у останній формулі:

$$P(B_1) = C_1, P(B_2) = C_2, \; P_{B_1}(A) = P_{B_1}(X < x) = F_1(x),$$

$$P_{B_2}(A) = P_{B_2}(X < x) = F_2(x).$$

Отже, за формулою повної ймовірності отримуємо:

$$P(A) = P(X < x) = C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x).$$

Метод суперпозиції можна розповсюдити також на випадок, коли функція розподілу $F(x)$ є лінійною комбінацією *n* функцій розподілу:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}C_iF_i(x).$$

Приклад 5.9. Знайти формулу для моделювання випадкової величини X, заданої своєю функцією розподілу $F(x)=1-0,25\left(e^{-2x}+3e^{-x}\right), x>0.$

Розв'язання. Представимо функцію розподілу у вигляді:

$$F(x)=0,25\left(1-e^{-2x}\right)+0,75\left(1-e^{-x}\right)=C_1F_1(x)+C_2F_2(x).$$

Закон розподілу допоміжної випадкової величини Z подаємо у вигляді таблиці:

Z	1	2
P	0,25	0,75

Виберемо незалежні випадкові числа r_1 та r_2. Розіграємо Z за випадковим числом r_1. Для цього побудуємо інтервали $\Delta_1=(0;0,25)$ та $\Delta_2=(0,25;1)$. Якщо $r_1<0,25$, то $Z=1$, якщо $r_1\in\Delta_2$, то $Z=2$. Отже, при $r_1<0,25$ $F(x_i)=F_1(x_i)=1-e^{-2x_i}=r_2$, звідки $x_i=-\frac{1}{2}\ln(1-r_2)$ або $x_i=-\frac{1}{2}\ln(r_2)$. При $r_1\in(0,25;1)$ $F(x_i)=F_2(x_i)=1-e^{-x_i}=r_2$. Звідси знаходимо: $x_i=-\ln(1-r_2)$ або $x_i=-\ln(r_2)$. Отже, отримали:

$$x_i=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln r_2, r_1\in(0;0,25),\\ -\ln r_2, r_1\in(0,25;1).\end{cases}$$

Якщо випадкова величина R розподілена рівномірно у інтервалі (0;1), то її математичне сподівання та дисперсія відповідно дорівнюють: $M(R)=\frac{1}{2}, D(R)=\frac{1}{12}.$

Складемо суму п незалежних, розподілених рівномірно на (0;1) випадкових величин R_j, $j=1,2,...,n$.

Пронормуємо цю випадкову величину, попередньо знайшовши її математичне сподівання та дисперсію. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, тому

$$M\left(\sum_{j=1}^{N}R_j\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}=\frac{n}{2}.$$

Оскільки дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій окремих доданків, то маємо:

$$D\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \sum_{j=1}^{n} D\left(R_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{12} = \frac{n}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення відповідно дорівнює $\sigma_\Sigma = \sqrt{\frac{n}{12}}$.

Нормована сума розглянутих випадкових чисел має вигляд:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} R_j - M\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right)}{\sigma_\Sigma} = \frac{\sum_{j=1}^{n} R_j - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}.$$

З центральної граничної теореми випливає, що при $n \to \infty$ розподіл цієї нормованої випадкової величини прямує до нормального розподілу з параметрами $a = 0$ та $\sigma = 1$. При скінченному *n* розподіл є наближено нормальним. Зокрема, при *n*=12 отримуємо достатньо зручне наближення для значення нормально розподіленої випадкової величини:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} R_j - 6.$$

Отже, щоб змоделювати можливе значення x_i нормально розподіленої випадкової величини X з параметрами a=0 та $\sigma = 1$, потрібно скласти 12 незалежних випадкових чисел і з отриманої суми відняти 6.

Якщо потрібно змоделювати можливе значення z_i нормально розподіленої випадкової величини Z з математичним сподіванням a та стандартним відхиленням σ, то, розігравши за вказаним вище правилом можливе значення x_i, можливе значення z_i за формулою:

$$z_i = \sigma \cdot x_i + a,$$

оскільки $x_i = \frac{z_i - a}{\sigma}$.

Тема 6. Моделювання об’єктів та процесів з використанням імітаційного підходу

6.1 Застосування імітаційного моделювання для проектування систем масового обслуговування

Розглянемо особливості застосування методу Монте-Карло до проєктування систем масового обслуговування. Розглянемо спочатку основні поняття теорії масового обслуговування.

Послідовність подій, що з’являються у випадкові моменти часу, називають *потоком подій.* Прикладами потоку подій є надходження викликів до «Швидкої допомоги», прихід клієнтів у перукарню, послідовність відмов елементів приладу тощо.

До основних властивостей потоків подій відносять стаціонарність, відсутність післядії та ординарність. Властивість *стаціонарності* полягає у тому, що ймовірність появи k подій на будь-якому проміжку часу залежить лише від числа k та тривалості t проміжку часу. Властивість *ординарності* означає, що за нескінченно малий проміжок часу може з’явитися не більше однієї події. *Відсутність післядії* означає взаємну незалежність поява певного числа подій у проміжки часу, що не перетинаються між собою. Потік подій, що має властивості стаціонарності, ординарності та відсутності після дії називають *найпростішим* або *пуассонівським потоком*.

Інтенсивністю λ *потоку подій* називають середню кількість подій, що з’являються за одиницю часу. Ймовірність появи k подій у найпростішого потоку за час t визначають за *формулою Пуассона*:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \qquad (6.1)$$

Розглянемо систему масового обслуговування, що складається з N каналів з відмовами (заявка покидає таку систему, якщо всі канали виявляться зайнятими). На неї надходить найпростіший потік заявок. Відома щільність розподілу інтервалу часу τ між двома послідовними заявками:

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau},\ \lambda > 0,\ \tau > 0. \qquad (6.2)$$

Щільність (6.2) – щільність для показникового закону розподілу.

Кожна заявка надходить до першого каналу обслуговування. Якщо він вільний, то він обслуговує заявку, інакше заявка надходить на другий канал та обслуговується ним, якщо він вільний, інакше переодить до третього каналу і так далі. Якщо всі канали виявляться зайнятими, заявка отримує відмову.

Здійснюється підрахунок кількості виконаних заявок та кількості відмов.

Нехай потрібно знайти математичне сподівання кількості виконаних заявок та кількості відмов за певний час T. Для розв'язання цієї задачі виконують n випробувань, кожне тривалістю T. У кожному випробуванні визначається кількість виконаних заявок та кількість відмов.

Нехай t_0 – тривалість обслуговування каналом заявки, t_i – момент звільнення i-го каналу, T_k – момент надходження k-ої заявки, τ_k – проміжок часу між надходженнями k-ої та k+1-ої заявок, $T_{k+1} = T_k + \tau_k$ – момент надходження k+1-ої заявки, n – кількість випробувань.

Нехай перша заявка надійшла у момент часу $T_1 = 0$, коли всі канали вільні. Вона надходить до першого каналу і обслуговується ним за час t_0.

Змоделюємо момент T_2 надходження другої заявки. Для цього виберемо випадкове число r_1 та розіграємо значення τ_1, враховуючи показниковий закон розподілу випадкової величини з щільністю $f(\tau)$. Для цього випадку отримуємо:

$$\tau_1 = -\frac{\ln r_1}{\lambda}. \tag{6.3}$$

Отже, друга заявка надійде у момент часу $T_2 = T_1 + \tau_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1$. Якщо виявиться, що $t_1 \le T_2$, тобто друга заявка надійшла після того, як звільнився перший канал, то він задовольняє другу заявку і у лічильник виконаних заявок додається одиниця. Якщо $t_1 > T_2$, то перший канал зайнятий і заявка надходить до другого каналу і виконується ним, оскільки розрахунок почався з припущенням, що всі канали вільні. У лічильник виконаних заявок додається одиниця.

Якщо у деякий момент часу всі канали виявилися зайнятими, то заявка отримує відмову і у лічильник відмов додається одиниця.

Випробування закінчується, якщо чергова заявка надійде у момент часу, що перевищує момент закінчення випробування, тобто, якщо $T_{k+1} > T$.

У результаті і-го випробування у лічильниках виявиться $n_{1,i}$ виконаних заявок та $n_{2,i}$ відмов. Оцінками математичних сподівань виконаних заявок та відмов є вибіркові середні:

$$\overline{n}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{1,i}}{n}, \overline{n}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{2,i}}{n}. \tag{6.4}$$

Для знаходження найменшої кількості випробувань, яка з надійністю γ забезпечує задану верхню межу похибки δ, використовують формулу:

$$n = \frac{z^2 \sigma^2}{\delta^2}. \tag{6.5}$$

Тут значення параметра z визначають з рівності $\Phi(z)=\frac{\gamma}{2}, \sigma=\frac{1}{\lambda}$.

6.2 Застосування методу Монте-Карло до обчислення визначених інтегралів

Розглянемо один зі способів обчислення визначених інтегралів за допомогою імітаційного моделювання – метод осереднення підінтегральної функції.

Нехай потрібно наближено обчислити визначений інтеграл

$$I=\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{6.6}$$

Розглянемо випадкову величину X, розподілену рівномірно на інтервалі інтегрування $(a;b)$ з щільністю

$$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a), & x\in(a;b), \\ 0, & x\notin(a;b). \end{cases}$$

Тоді математичне сподівання функції випадкової величини X

$$M(\varphi(x))=\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{6.7}$$

Звідси знаходимо:

$$\int_a^b \varphi(x)dx=(b-a)M(\varphi(x)). \tag{6.8}$$

Замінимо математичне сподівання $M(\varphi(x))$ його оцінкою – вибірковою середньою і отримаємо наближене значення інтегралу у вигляді:

$$I^*=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i), \tag{6.9}$$

де x_i – можливі значення випадкової величини X, $x_i=a+(b-a)r_i$, r_i – випадкові числа.