Тема 3. Повторні незалежні випробування.

3.1 Формула Бернуллі

Розглянемо задачу про багаторазове повторення випробування, у результаті якого може з’явитися або не з’явитися деяка подія A. Потрібно знайти ймовірність того, що у серії з n випробувань подія A настане m разів.

Якщо ймовірність настання події A у кожному випробуванні не залежить від результатів других випробувань, то такі випробування називають незалежними відносно цієї події. Якщо незалежні випробування здійснюються у однакових умовах, то ймовірність настання події A у цих випробуваннях є сталою.

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може настати з сталою ймовірністю p, або не настати з відповідною ймовірністю $q = 1 - p$. Розглянемо подію $B_m =$ {подія A у n випробуваннях настала m разів}. Позначимо A_i, $i = 1, 2, ..., n$, появу події A у i-ому випробуванні. Тоді $P(A_i) = p$, $P(\overline{A_i}) = 1 - p = q$, $i = 1, 2, ..., n$. Подія A може настати m разів у кожній з комбінацій результатів випробувань, що мають вигляд $A_1 A_2 ... A_m \overline{A_{m+1}} ... \overline{A_n}$. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій, ймовірність кожної такої комбінації дорівнює $p^m \cdot q^{n-m}$. Подія B_m є сумою всіх таких комбінацій. Їхня загальна кількість дорівнює кількості способів вибору з n випробувань m випробувань, у яких подія A настала, тобто C_n^m. Тому ймовірність настання події A у серії з n випробувань m разів визначається за формулою:

$$P(B_m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{3.1}$$

Формулу (3.1) називають формулою Бернуллі, а випробування, що повторюються та задовольняють умовам незалежності та сталості ймовірності настання у кожному з них події A, називають випробуваннями за схемою Бернуллі.

Події B_m, $m = 0,\ 1,\ ...,\ \mathrm{n}$, є несумісними та утворюють повну групу подій, тому $\sum_{m=0}^{n} P(B_m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1$. Дійсно, вираз $\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$ у цій рівності є розвиненням $(p+q)^n$ за формулою бінома Ньютона.

Приклад 3.1. Прилад складається з 10 блоків, ймовірність безвідмовної роботи кожного з яких дорівнює 0,8. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що відмовлять 2 блоки.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{відмова блока}\}$. Тоді, за умовою задачі. $P(A) = p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\bar{A}) = q = 1 - p = 0{,}2$. За формулою Бернуллі (3.1) при значеннях $n = 10$, $m = 2$, знаходимо шукану ймовірність:

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^{10-2} = \frac{10!}{2!8!} \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^8 \approx 0{,}302.$$

Зауважимо, що ймовірність настання події A у серії з n випробувань за схемою Бернуллі хоча б один раз доцільно визначати за формулою

$$P = 1 - q^n . \tag{3.2}$$

3.2 Найімовірніше число появ події при випробуваннях за схемою Бернуллі

Знайдемо число m_0 появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ появи події A m_0 разів є найбільшою (найімовірніше число появи події A).

Зі збільшенням кількості m появи події A у серії з n незалежних випробувань ймовірність $P_n(m)$ зростає до деякого значення $m = m_0$, а потім спадає. Число m_0 називають найімовірнішим числом появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Знайдемо це число.

Для m_0 повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} P_n(m_0) \ge P_n(m_0+1); \\ P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1). \end{cases} \tag{3.3}$$

З першої з цих нерівностей випливає, що $C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0+1} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1}$. Звідси знаходимо наступну послідовність нерівностей:

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} \ge \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} \cdot \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{q}{n-m_0} \ge \frac{p}{m_0+1} \Leftrightarrow (1-p)(m_0+1) \ge$$

$$\ge p(n-m_0) \Leftrightarrow m_0 \ge np + p - 1 \Leftrightarrow m_0 \ge np - q.$$

Виконаємо аналогічні перетворення для другої з нерівностей (3.3):

$$P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1) \Leftrightarrow C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \ge$$

$$\ge \frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \Leftrightarrow \frac{p}{m_0} \ge \frac{q}{n-m_0+1} \Leftrightarrow (n-m_0+1)p \ge m_0(1-p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_0 \le (n+1)p.$$

Таким чином, отримали нерівність:

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{3.4}$$

З нерівності (3.4) визначають найімовірніше число m_0 появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі враховуючи при цьому, що m_0 є цілим невід'ємним числом.

Приклад 3.2. Підприємство виготовляє 85 % всієї продукції вищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів вищого сорту у партії з 150 виробів.

Розв'язання. Маємо $n = 150$, $p = 0{,}85$, $q = 0{,}15$. Визначимо найімовірніше число виробів вищого сорту m_0 з нерівності (3.4):

$$np - q \le m_0 \le np + p \Leftrightarrow 150 \cdot 0{,}85 - 0{,}15 \le m_0 \le 150 \cdot 0{,}85 + 0{,}85,$$

тобто $127{,}35 \le m_0 \le 128{,}35$. Оскільки m_0 є цілим числом, то $m_0 = 128$ виробів.

3.3 Локальна теорема Муавра – Лапласа

При обчисленні ймовірності $P_n(m)$ настання події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі m разів безпосередньо використовувати формулу Бернуллі при великих значеннях n досить важко. У таких випадках доцільним є використання локальної асимптотичної теореми Муавра – Лапласа.

Теорема (локальна теорема Муавра – Лапласа). Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні є сталою та відмінною від нуля та одиниці, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, де $P_n(m)$ – ймовірність настання події A у серії з n незалежних випробувань m разів, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Локальна теорема стверджує, що при великих значеннях n ймовірність $P_n(m)$ може бути наближено обчислена за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{3.5}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса, таблиця значень якої наводиться у підручниках з теорії ймовірностей та математичної статистики, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Доведення. Нехай $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, тоді $m = np + x\sqrt{npq}$, $n - m = np - x\sqrt{npq}$. З цих рівностей отримуємо: $\frac{m}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}$, $\frac{n-m}{nq} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$. При досить великих значеннях n $(n \to \infty)$ $m \approx np$, $n - m \approx nq$. Далі скористаємось формулою Стірлінга

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot e^{-k}, \tag{3.6}$$

яка має місце при $k \to \infty$.

Підставляючи (3.6) у формулу Бернуллі, отримуємо:

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}\approx\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m\cdot e^{-m}\sqrt{2\pi(n-m)}\cdot(n-m)^{n-m}e^{-n+m}}p^m q^{n-m}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\cdot\left(\frac{m}{np}\right)^{-m}\left(\frac{n-m}{nq}\right)^{-(n-m)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-m}\times$$

$$\times\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-(n-m)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\cdot\alpha,$$

де $\alpha=\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-m}\times\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-(n-m)}$. При $n\to\infty$ маємо:

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\approx\sqrt{\frac{n}{np\cdot nq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

З'ясуємо поведінку величини α при $n\to\infty$. Знайдемо $\ln\alpha$:

$$\ln\alpha=-m\cdot\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)-(n-m)\cdot\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \quad (3.7)$$

Використовуючи розвинення у ряд Маклорена функції $\ln(1+t)$ та обмежившись двома першими членами цього ряду, з врахуванням рівностей $m=np+x\sqrt{npq}$, $n-m=np-x\sqrt{npq}$, отримаємо наближений вираз для $\ln\alpha$:

$$\ln\alpha=-\left(np+x\sqrt{npq}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}\frac{qx^2}{np}\right)-\left(np-x\sqrt{npq}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}\frac{px^2}{nq}\right).$$

Після елементарних спрощень останній вираз набуває вигляду

$$\ln\alpha=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}-\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)x^3.$$

При $n\to\infty$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\alpha=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}-\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)x^3\right)=-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\alpha=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, що й треба було довести.

При обчисленні значень функції Гауса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ потрібно враховувати, що вона є парною: $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Крім того, при розв'язанні задач можна прийняти, що при $|x|\geq 4$ $\varphi(x)\approx 0$.

Приклад 3.3. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться у серії з 400 випробувань 80 разів, якщо ймовірність її настання у одному випробуванні $p=0,2$.

Розв'язання. Оскільки кількість випробувань $n=400$ є досить великою, то можна використати локальну теорему Муавра – Лапласа. За умовою $m=80$, $p=0,2$. Тоді $q=1-p=1-0,2=0,8$, $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=0$. За таблицею значень функції Гауса знаходимо $\varphi(x)=\varphi(0)=0,3989$. Шукана ймовірність $P_{400}(80)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}=\frac{0,3989}{8}\approx 0,0499$.

3.4. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Розглянемо задачу знаходження ймовірності настання у серії з n випробувань деякої події A не менше k_1 та не більше k_2 разів. Далі будемо позначати таку ймовірність $P_n(k_1,k_2)$. При великих значеннях n для розв'язування цієї задачі використовують <u>інтегральну асимптотичну теорему Муавра – Лапласа.</u>

<u>**Теорема (інтегральна теорема Муавра – Лапласа).**</u> Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні є сталою та відмінною від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(k_1,k_2)$ того, що ця подія настане у серії з n випробувань від k_1 до k_2 разів ($k_1\leq m\leq k_2$) можна наближено знайти за асимптотичною формулою

$$P_n\left(k_1,k_2\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \qquad (3.8)$$

де $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Формулу (3.8) можна записати також у вигляді:

$$P_n\left(k_1,k_2\right)\approx\Phi\left(x_2\right)-\Phi\left(x_1\right), \qquad (3.9)$$

де $\Phi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – <u>функція Лапласа</u>.

<u>**Доведення.**</u> Ймовірність того, що у результаті n випробувань подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів можна знайти, використовуючи формулу Бернуллі (3.1) та формулу додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P_n\left(k_1,k_2\right)=\sum_{m=k_1}^{k_2}P_n\left(m\right). \qquad (3.10)$$

Згідно з локальною теоремою Муавра – Лапласа при великих значеннях n $P_n\left(m\right)\approx\dfrac{\varphi\left(t_m\right)}{\sqrt{npq}}$, де $t_m=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$. Тому рівність (3.10) у цьому випадку можна записати у вигляді:

$$P_n\left(k_1,k_2\right)\approx\sum_{m=k_1}^{k_2}\varphi\left(t_m\right)\cdot\Delta t_m, \qquad (3.11)$$

де $\Delta t_m=t_{m+1}-t_m=\dfrac{m+1-np}{\sqrt{npq}}-\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$, $\varphi\left(t\right)$ – функція Гауса.

Права частина рівності (3.11) є інтегральною сумою для інтеграла $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, тому при $n\to\infty$ отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}P_n\left(k_1,k_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

звідки випливає, що при великих значеннях n виконується наближена рівність (3.8). Теорему доведено.

Оскільки розроблені детальні таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, на практиці інтегральну теорему Муавра – Лапласа використовують у вигляді (3.9). При цьому використовуються наступні властивості функції Лапласа.

1. $\Phi(x)$ є непарною функцією: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

2. $\Phi(0)=0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=0,5$ (на практиці вважають, що при $x\geq 4$ $\Phi(x)\approx 0,5$).

Розглянемо приклад застосування інтегральної теореми Муавра – Лапласа.

Приклад 3.4. Ймовірність того, що виготовлена деталь не пройде контроль якості, дорівнює 0,2. За зміну було виготовлено 400 деталей. Знайти ймовірність того, що від 70 до 100 деталей не пройдуть контроль якості..

Розв'язання. Оскільки маємо велику кількість випробувань $n=400$, то для розв'язування даної задачі доцільно застосувати інтегральну теорему Муавра – Лапласа, згідно з якою шукана ймовірність $P_{400}(70,100)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$. Маємо $p=0,2$, $q=1-p=1-0,2=0,8$, $k_1=70$, $k_2=100$.

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25,\quad x_2=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,5.$$

За таблицею значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо: $\Phi(2,5)=0,4938$, $\Phi(-1,25)=-\Phi(1,25)=-0,3944$. За формулою (3.9) отримуємо:

$$P_{400}(70,100)\approx\Phi(2,5)+\Phi(1,25)=0,4938+0,3944=0,8882.$$

3.5 Формула Пуассона

Точність асимптотичних формул для великої кількості n незалежних випробувань, визначених у локальній та інтегральній теоремах Муавра – Лапласа, знижується, якщо ймовірність p настання події при одному випробуванні близька до нуля або до одиниці. При великих значеннях n для ефективного застосування цих формул необхідним є виконання умови $npq > 10$. Якщо $npq \le 10$, а величина p або q не перевищує 0,01, то для наближеного обчислення ймовірності появи випадкової події m разів у серії з n незалежних випробувань використовують асимптотичну формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{3.12}$$

де $a = np$.

Доведемо формулу (3.12). Оскільки $a = np$, то $p = \frac{a}{n}$, $q = 1 - p = 1 - \frac{a}{n}$. Запишемо формулу Бернуллі (3.1) у наступному вигляді:

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{m!} \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m}. \tag{3.13}$$

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m)$, вважаючи m та a сталими величинами. З врахуванням того, що

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{n^m} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right),$$

а також рівності $\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-m}$ отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-m} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n.$$

Перші дві границі у правій частині цієї рівності дорівнюють одиниці, тому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \tag{3.14}$$

З рівності (3.14) випливає формула Пуассона (3.12).

Приклад 3.5. Завод відвантажив споживачеві 4000 якісних виробів. Ймовірність того, що окремий виріб буде пошкоджено на шляху до споживача, дорівнює 0,0005. Знайти ймовірність того, що до споживача дійде не більше трьох пошкоджених виробів.

Розв’язання. Маємо $n = 4000$, $p = 0{,}0005$, $q = 0{,}9995$. Оскільки $p < 0{,}01$, а величина $npq = 1{,}999 < 10$ для наближеного розв’язання даної задачі доцільно використати формулу Пуассона (3.12). Шукана ймовірність події $B = \{$якісну деталь було визнано якісною$\}$, $P(B) = P_{4000}(0) + P_{4000}(1) + P_{4000}(2) + P_{4000}(3)$. Оскільки $np = 4000 \cdot 0{,}0005 = 2 = m$, то формула Пуассона у нашому випадку набуває вигляду $P_{4000}(m) = \frac{2^m}{m!} e^{-2}$. Послідовно підставляючи сюди значення $m = 0$, 1, 2, 3, знаходимо:

$$P(B) = e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right) \approx 0{,}857 .$$

3.6. Ймовірність відхилення відносної частоти настання події від її ймовірності у незалежних випробуваннях.

Нехай m – число настання події A при здійсненні достатньо великої кількості n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі, p – стала ймовірність настання цієї події у одному випробуванні. Якщо $k_1 \le m \le k_2$, то $\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, де $q = 1 - p$.

Нехай $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Запишемо інтегральну теорему Муавра – Лапласа у вигляді:

$$P\left(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt . \qquad (3.15)$$

Знайдемо ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\nu = \frac{m}{n}$ настання події A у серії з n незалежних випробувань від її ймовірності p за абсолютною величиною не перевищить заданого числа $\varepsilon > 0$, тобто знайдемо ймовірність виконання нерівності

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon. \tag{3.16}$$

З нерівності (3.16) випливає, що $-n\varepsilon \le m-np \le n\varepsilon$. Звідси знаходимо:

$$-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \Leftrightarrow -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

З (3.15) випливає, що при великих значеннях n

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Оскільки $\frac{m}{n}=\nu$, то при великих n ймовірність виконання нерівності $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ або $|\nu-p|<\varepsilon$ визначається за наближеною формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{3.17}$$

Приклад 3.6. Ймовірність того, що виготовлена на заводі деталь є нестандартною, $p=0,1$. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відхилення відносної частоти ν появи нестандартної деталі від її ймовірності за абсолютною величиною не перевищить 0,03.

Розв'язання. За умовою $p=0,1$, $\varepsilon=0,03$. Використаємо нерівність (3.17). При $n=400$ маємо:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,03\cdot\sqrt{\frac{400}{0,1\cdot 0,9}} = 2.$$

Тоді $P\left(|\nu-0,1|\le 0,03\right) \approx 2\Phi(2) = 2\cdot 0,4772 = 0,9544$.

3.7. Схема випробувань Пуассона. Твірна функція.

Послідовність незалежних випробувань, у яких умова сталості ймовірності настання події A у окремому випробуванні не виконується, називають послідовністю випробувань за схемою Пуассона. Ця схема є узагальненням схеми Бернуллі.

Якщо ймовірність настання події A змінюється від випробування до випробування, то ймовірність $P_n(k)$ настання цієї події у n випробуваннях k разів дорівнює:

$$P_n(k) = p_1 p_2 ... p_k q_{k+1} q_{k+2} ... q_n + q_1 p_2 ... p_k p_{k+1} q_{k+2} ... q_n + ... + q_1 q_2 ... q_{n-k} p_{n-k+1} ... p_n .$$

Тут p_i – ймовірність настання події A у i-ому випробуванні, $q_i = 1 - p_i$ – ймовірність того, що подія A не з’явиться.

При обчисленні ймовірностей можливого числа настання події A у n незалежних випробуваннях за схемою Пуассона використовують твірну функцію:

$$\varphi_n(x) = (q_1 + p_1 x) \cdot (q_2 + p_2 x) \cdot ... \cdot (q_n + p_n x) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i x). \tag{3.18}$$

Після множення біномів у виразі для твірної функції (3.18) та зведення подібних доданків коефіцієнт при x^k дорівнює ймовірності $P_n(k)$:

$$\varphi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i x) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) x^k . \tag{3.19}$$

При $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$, $q_1 = q_2 = ... = q_n = q$ отримаємо схему Бернуллі, для якої твірна функція $\varphi_n(x) = (q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^k p^{n-k} x^{n-k}$. Враховуючи відому властивість біноміальних коефіцієнтів $C_n^k = C_n^{n-k}$ після заміни $m = n - k$ отримаємо $\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} x^m$, тобто для схеми Бернуллі отримуємо відому вже нам формулу: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Приклад 3.7. На заводі у кінці зміни на контроль надходять чотири партії однотипних деталей, що відрізняються лише якістю. Ймовірність того, що деталь з першої партії є якісною, $p_1 = 0{,}8$, для другої партії ця ймовірність $p_2 = 0{,}7$, для третьої – $p_3 = 0{,}9$, для четвертої – $p_4 = 0{,}95$. Контролер відбирає з кожної партії для перевірки по одній деталі. Знайти ймовірність того, що виготовлені за зміну деталі будуть прийняті контролером, якщо для цього необхідна наявність серед відібраних деталей не менш ніж трьох якісних.

Розв'язання. У даній задачі розглядається послідовність з чотирьох випробувань за схемою Пуассона. Запишемо твірну функцію (3.19):

$$\varphi_4(x) = (0,2+0,8x)(0,3+0,7x)(0,1+0,9x)(0,05+0,95x).$$

Розкривши дужки, після зведення подібних доданків отримуємо:

$$\varphi_4(x) = 0,0003+0,0103x+0,1073x^2+0,4033x^3+0,4788x^4.$$

Звідси знаходимо значення ймовірностей $P_4(0)=0,0003$, $P_4(1)=0,0103$, $P_4(2)=0,1073$, $P_4(3)=0,4033$, $P_4(4)=0,4788$, Для перевірки вірності обчислень знайдемо суму ймовірностей $P_4(k)$, $k=\overline{0,4}$. Вона повинна дорівнювати одиниці. Маємо:

$$\sum_{k=0}^{4} P_4(k) = 0,0003+0,0103+0,1073+0,4033+0,4788 = 1.$$

Нехай подія $B=\{$серед відібраних деталей не менше трьох – якісні$\}$. Тоді ймовірність цієї події:

$$P(B) = P_4(3)+P_4(4) = 0,4033+0,4788 = 0,8821.$$