Тема 4. Дискретні випадкові величини

4.1. Поняття випадкової величини

Випадковою величиною називають величину, яка у результаті випробування приймає одне і лише одне значення, наперед невідоме, залежне лише від випадкових, не передбачуваних наперед причин.

Прикладами випадкових величин є: кількість очок, що з'являються на верхній грані грального кубика внаслідок його відкидання, час безвідмовної роботи двигуна автомобіля, кількість пострілів, які зробить стрілець до влучення у ціль, зріст людини у певному віці тощо. Випадкову величину можна розглядати як дійсну функцію, визначену на просторі елементарних подій для даного випробування. Розрізняють дискретні та неперервні випадкові величини.

Дискретною називають випадкову величину, що приймає скінченну або нескінченну зліченну множину значень.

Приклади дискретної випадкової величини: кількість дзвінків, що надходить на телефонну станцію на протязі доби, кількість бракованих деталей у партії з n деталей, кількість підкидань грального кубика до появи на верхній грані п'яти очок тощо.

Неперервною називають випадкову величину, що може приймати будь-які значення з деякого, скінченного або нескінченного інтервалу.

Кількість можливих значень неперервної випадкової величини завжди є нескінченним. Приклади неперервної випадкової величини: час безвідмовної роботи верстата, похибка вимірювання деякої величини, вага людини у певному віці тощо.

Випадкові величини позначають великими латинськими літерами – X, Y, Z,…, а їх можливі значення – відповідними малими латинськими літерами – x, y, z,…. Запис $P(X = x_1) = p_1$ означає: ймовірність того, що випадкова величина прийме значення x_1, дорівнює p_1.

4.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Функція розподілу

Нехай X – дискретна випадкова величина, що може прийняти внаслідок випробування одне з можливих значень x_1, x_2, …, x_n з відповідними ймовірностями $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$, …, $P(X = x_n) = p_n$.Події $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між її можливими значеннями та ймовірностями їх появи. Закон розподілу можна задати у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) або графічно.

При представленні закону розподілу дискретної випадкової величини у табличній формі задають таблицю, перший рядок якої містить всі можливі значення цієї випадкової величини, другий рядок – ймовірності отримання цих значень. Тут закон розподілу має наступний вигляд.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Приклад 1. Монету підкинули 3 рази. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини – кількості появ герба.

Розв’язання. Маємо серію з 3 випробувань за схемою Бернуллі. Ймовірність появи герба у одному випробуванні $p = 0,5$, $q = 1 - p = 0,5$, $n = 3$. $P(X = 0) = (0,5)^3 = 0,125$, $P(X = 1) = C_3^1 (0,5)(0,5)^2 = 3 \cdot 0,125 = 0,375$, $P(X = 2) = C_3^2 (0,5)^2 (0,5) = 0,375$, $P(X = 3) = (0,5)^3 = 0,125$.

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

Контроль: 0,125+0,375+0,375+0,125=1.

Табличну форму запису закону розподілу дискретної випадкової величини називають також рядом розподілу.

При графічному зображенні дискретної випадкової величини у прямокутній системі координат xOp вздовж вісі абсцис наносять всі можливі значення випадкової величини, а вздовж вісі ординат – ймовірності, що їм відповідають. Далі будують точки $\left(x_i,\, p_i\right)$ і з'єднують їх відрізками. Отримана фігура називається многокутником розподілу.

Закон розподілу дискретної випадкової величини може бути заданим також аналітично, у вигляді формули. Так, для дискретної випадкової величини з розглянутого прикладу аналітичний запис закону розподілу матиме вигляд: $P\left(X=k\right)=C_3^k\cdot\left(0,5\right)^3,\ k=\overline{0,3}$.

Нехай дискретна випадкова величина може приймати n значень x_1, $x_2,\ldots,$ x_n з рівними ймовірностями $\dfrac{1}{n}$. Таку величину називають розподіленою за рівномірним законом на скінченній множині з n елементів. Прикладом випадкової величини з таким законом розподілу є кількість очок, що випадуть на верхній грані грального кубика після його підкидання. Цей закон розподілу у аналітичній формі матиме вигляд:

$$P\left(X=x_k\right)=\frac{1}{n},\ k=1,\,2,\,\ldots,n.$$

Найбільш загальною формою представлення випадкової величини є функція розподілу, що використовується для представлення як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Функцією розподілу випадкової величини називають функцію $F(x)$, яка кожному значенню аргументу x ставить у відповідність ймовірність того, що дана випадкова величина прийме значення, менше за x: $F(x)=P(X<x)$.

Для дискретної випадкової величини X, яка може приймати значення x_1, x_2, …, x_n з відповідними ймовірностями p_1, p_2, …, p_n, функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)=\sum_{x_i<x} p_i \,. \tag{4.1}$$

Нерівність $x_i<x$ під знаком суми означає, що підсумовування розповсюджується на значення x_i, що є меншими за x.

Приклад 2. Побудувати функцію розподілу для дискретної випадкової величини X з прикладу 1.

Розв'язання. При $x\le 0$ маємо $F(x)=P(X<x)=0$, при $x\in(0;\ 1]$ $F(x)=P(X=0)=0{,}125$, при $x\in(1;\ 2]$ знаходимо значення $F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}125+0{,}375=0{,}5$, при $x\in(2;\ 3]$ отримуємо $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}875$, при $x>3$ функція ймовірностей $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$.

Розглянемо основні властивості функції $F(x)$ розподілу випадкової величини, що безпосередньо випливають з її означення.

1. Функція розподілу $F(x)$ приймає значення з відрізка $[0;\ 1]$, що випливає з означення цієї функції як ймовірності.
2. Функція розподілу $F(x)$ є неспадною функцією на своїй області визначення – $(-\infty;\ \infty)$. Дійсно, нехай $a\in R$, $b\in R$, $a<b$. Тоді $F(b)=F(a)+P(a\le X<b)\ge F(a)$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$. Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

4. Ймовірність потрапляння випадкової величини X у проміжок $[a;\, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$. Ця рівність випливає з рівності $F(b) = P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b) = F(a) + P(a \le X < b)$.

4.3 Біноміальний розподіл

Випадкова величина X є розподіленою за біноміальним законом (має біноміальний розподіл), якщо вона відображає число появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Ймовірність настання події A у кожному з випробувань є сталою: $P(A) = p$.

Можливими значеннями випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом, є значення $x_0 = 0$, $x \ = 1$, …, $x_n = n$. Ймовірності цих можливих значень визначаються за формулою Бернуллі:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \tag{4.2}$$

де $q = 1 - p$, $k = 0, 1, ..., n$. Формула (4.2) є аналітичною формою біноміального закону розподілу. Цей закон розподілу називають біноміальним, оскільки права частина формули (4.2) є загальним членом розвинення бінома Ньютона $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Приклад. Пристрій містить три елементи, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного елемента за гарантійний термін роботи пристрою $p = 0{,}1$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості елементів, що відмовлять за гарантійний термін роботи пристрою.

Розв'язання. Можливими значеннями випадкової величини X є $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Їх ймовірності при $p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 0{,}9$, $n = 3$ знаходимо за формулою (4.2):

$$P(X = 0) = C_3^0 \cdot (0{,}1)^0 (0{,}9)^3 = 0{,}729,\ P(X = 1) = C_3^1 \cdot (0{,}1)^1 (0{,}9)^2 = 0{,}243,$$

$P(X=2)=C_3^2\cdot(0{,}1)^2(0{,}9)^1=0{,}027$, $P(X=3)=C_3^3\cdot(0{,}1)^3(0{,}9)^0=0{,}001$.

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

4.5. Розподіл Пуассона. Найпростіший потік подій

Розглянемо послідовність подій, що відбуваються у випадкові моменти часу. Прикладами таких подій є відмова обладнання, прихід клієнта у перукарню, телефонний дзвінок тощо. Послідовність подій що настають у випадкові моменти часу, називають потоком подій.

Найпростішим (пуассонівським) потоком подій називають потік подій, що характеризується наступними властивостями:

1) стаціонарність (ймовірність настання k подій за проміжок часу t залежить лише від величин k та t;

2) відсутність післядії (ймовірність настання певного числа подій у майбутньому не залежить від числа їх настання у минулому);

3) ординарність (за нескінченно малий проміжок часу може з’явитися не більше однієї події).

Інтенсивністю потоку подій називають середнє число подій, що відбувається за одиницю часу.

Кількість k подій з найпростішого потоку, що відбувається за одиницю часу, є дискретною випадковою величиною, розподіленою за законом Пуассона. Ця випадкова величина може приймати нескінченне зліченне число значень $x_k=k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,n,\ldots$. Ймовірності того, що випадкова величина набуде цих значень, визначаються за формулою Пуассона:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!},\qquad(4.3)$$

де λ – інтенсивність потоку подій, $k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n,...$

При цьому $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda}=1$.

Якщо інтенсивність λ найпростішого потоку подій є відомою, то ймовірність настання k подій з найпростішого потоку за час t визначається за формулою:

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\qquad(4.4)$$

Приклад. Середня кількість дзвінків, що надходять на телефонну станцію за одну хвилину, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин надійдуть 4 дзвінки.

Розв'язання. За умовою, маємо $\lambda=2$, $k=4$, $t=5$. За формулою (4.4) знаходимо: $P_4(5)=\frac{(2\cdot5)^4\cdot e^{-2\cdot5}}{4!}\approx0,014$.

4.5. Геометричний та гіпергеометричний розподіли

Нехай X – дискретна випадкова величина, що дорівнює числу незалежних випробувань, які потрібно провести до настання деякої події A, причому ймовірність настання цієї події у кожному випробуванні є сталою: $P(A)=p$. Таку випадкову величину називають розподіленою за геометричним законом. Вона може приймати нескінченну кількість значень: $x_1=1$, $x_2=2,\ldots,x_n=n,\ldots$Дана випадкова величина приймає значення $X=k$ у тому випадку, коли подія A відбулася у k-му випробуванні. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій (п.2.2, теорема 2.2) ймовірність того, що випадкова величина X, розподілена за геометричним законом, прийме значення k визначається формулою

$$P(X=k)=q^{k-1}p, \tag{4.5}$$

де $q=1-p$. Дійсно, у цьому випадку у $k-1$ випробуваннях подія A не відбудеться, проте вона настане у k-му випробуванні. Формула (4.5) визначає аналітичну форму геометричного закону розподілу випадкової величини.

Приклад 1. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі $p=0,4$. Здійснюється стрільба по цілі до першого влучення. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості пострілів, зроблених для влучення у ціль. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена у п'ятому пострілі.

Розв'язання. За умовою $p=0,4$, $q=1-0,4=0,6$. $P(X=k)=(0,6)^{k-1}\cdot 0,4$. Отримали аналітичну форму шуканого закону розподілу. Ймовірність $P(X=5)$ знайдемо, підставивши у нього значення $k=5$: $P(X=5)=(0,6)^{4}\cdot 0,4=0,05184$.

Розглянемо наступну задачу. Нехай у партії з n деталей m деталей є стандартними. З цієї партії навмання відбирають k деталей. Розглянемо випадкову величину X – кількість l стандартних деталей серед k відібраних. Тоді за класичною схемою обчислення ймовірності отримуємо:

$$P(X=l)=\frac{C_m^l\cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k} \tag{4.6}$$

Розподіл дискретної випадкової величини, що визначається формулою (4.6), називають гіпергеометричним.

Приклад 2. З урни, що містить 6 білих та 4 чорних кулі, навмання виймають 3 кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа чорних куль серед вийнятих.

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена за гіпергеометричним законом. Вона може приймати значення 0, 1, 2 або 3. Знайдемо ймовірності отримання цих значень.

$$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6},\ P(X=1)=\frac{C_6^2\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2},\ P(X=2)=\frac{C_6^1\cdot C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10},$$

$$P\left(X=3\right)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}.$$

Контроль: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=1.$

Закон розподілу дискретної випадкової величини X матиме наступний вигляд.

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

4.6. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Однією з найбільш важливих числових характеристик випадкової величини є її математичне сподівання. Розглянемо дискретну випадкову величину X, що приймає свої можливі значення $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності:

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i \tag{4.7}$$

Для математичного сподівання випадкової величини X використовують позначення $M\left(X\right)$, m_x або m.

Якщо дискретна випадкова величина X може приймати нескінченне зліченне число значень, то її математичне сподівання визначається як сума ряду: $M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$.

Якщо розглядати можливі значення $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ випадкової величини X як координати точок на числовій прямій, а ймовірності $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$ – як ваги вантажів, підвішених у цих точках, то математичне сподівання $M\left(X\right)$ буде співпадати з координатою центра ваги даної системи. Цей факт відображає механічний зміст математичного сподівання випадкової величини.

Нехай здійснена велика кількість n випробувань, у яких випадкова величина X m_1 разів прийняла значення x_1, m_2 рази прийняла значення $x_2, \ldots, m_k$ разів прийняла значення x_k, причому $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. Середнє арифметичне отриманих значень випадкової величини X

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{m_k}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i .$$

Тут $w_i = \dfrac{m_i}{n}$ – відносна частота появи значення x_i, яка при достатньо великій кількості випробувань n наближено дорівнює ймовірності його появи: $w_i \approx p_i$. Таким чином, математичне сподівання випадкової величини наближено дорівнює середньому арифметичному її значень, отриманих у результаті великої кількості випробувань. Виходячи з цього, математичне сподівання випадкової величини називають також її очікуваним середнім значенням.

Приклад 1. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X, що приймає значення $x_1 = -1$ з ймовірністю $p_1 = 0{,}3$, $x_2 = 0$ з ймовірністю $p_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$ з ймовірністю $p_3 = 0{,}2$.

Розв'язання. За формулою (4.7) отримаємо:

$M\left(X\right) = \left(-1\right) \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 = -0{,}1.$

Приклад 2. Знайти математичне сподівання випадкової величини X з біноміальним законом розподілу.

Розв'язання. Випадкова величина X може набувати значень $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, де n – кількість випробувань, що здійснюються за схемою Бернуллі. Ймовірності $p_i = P\left(X = i\right)$ знаходимо за формулою Бернуллі, згідно з якою $p_i = C_n^i p^i q^{n-i}$, де p – ймовірність появи події у одному випробуванні, $q = 1 - p$. За формулою (4.7) знаходимо, що $M\left(X\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} i \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}$. Для обчислення цієї суми знайдемо похідну за параметром p від обох частин рівності $\left(p+q\right)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i p^i q^{n-i}$. Отримаємо $n\left(p+q\right)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n}i\cdot C_n^i\cdot p^{i-1}\cdot q^{n-i}$. Помноживши обидві частини цієї рівності на p, з врахуванням того, що $p+q=1$, знаходимо:

$$np=\sum_{i=0}^{n}i\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}=M\left(X\right).$$

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини X з біноміальним законом розподілу $M\left(X\right)=np$.

Приклад 3. Знайти математичне сподівання для випадкової величини X з розподілом Пуассона.

Розв'язання. Для даного розподілу можливі значення випадкової величини X $x_k=k$, $k=1,\,2,\,...,\,n,...$ Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення x_k, $p_k=P\left(X=k\right)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$, де λ – параметр розподілу, що дорівнює інтенсивності потоку подій. Математичне сподівання цієї випадкової величини

$$M\left(X\right)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k p_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{\left(k-1\right)!}\right)\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda}=e^{\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda}=\lambda.$$

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона $M\left(X\right)=\lambda$.

Приклад 4. Знайти математичне сподівання випадкової величини X з геометричним законом розподілу.

Розв'язання. Ця випадкова величина набуває можливих значень $x_k=k$, $k=1,\ 2,\ \ldots$. $p_k=P\left(X=k\right)=q^{k-1}p$, де p – ймовірність появи події у одному випробуванні, $q=1-p$. Математичне сподівання $M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_k p_k$. Підставивши сюди значення x_k та p_k, знаходимо:

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}\cdot p=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}.$$

Оскільки $0 < q < 1$, то за формулою нескінченно спадної геометричної прогресії $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$. Диференціюючи цю рівність за параметром q, отримаємо $\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$. Тоді $M(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$.

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за геометричним законом, $M(X) = \frac{1}{p}$.

4.7. Добуток та сума незалежних випадкових величин

Означення 1. <u>Добутком сталої величини C на дискретну випадкову величину</u> X називають дискретну випадкову величину $Y = CX$, можливі значення якої дорівнюють добуткам сталої C на можливі значення величини X, а їх ймовірності дорівнюють ймовірностям відповідних можливих значень випадкової величини X.

Означення 2. Дві випадкові величини називають <u>незалежними</u>, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, якого значення набула інша величина.

Означення 3. <u>Добутком незалежних випадкових величин</u> X та Y називають випадкову величину XY, можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення величини X на кожне можливе значення величини Y, а ймовірності можливих значень добутку XY дорівнюють добуткам ймовірностей можливих значень співмножників.

Приклад 1. Знайти закон розподілу випадкової величини XY, якщо незалежні випадкові величини X та Y задані своїми законами розподілу.

x_i	0	1	2		y_j	1	2	3
p_i	0,4	0,5	0,1		p_j	0,3	0,2	0,5

Розв'язання. Випадкова величина X може приймати можливі значення x_i з відповідними ймовірностями p_i, величина Y може приймати можливі значення y_j з ймовірностями p_j. Нехай $XY = Z$. Випадкова величина Z приймає можливі значення $x_i y_j$ з ймовірностями $p_i p_j$. Можливими значеннями Z є $z_1 = 0$ (при $X = 0$, $Y = 1 \vee Y = 2 \vee Y = 3$), $z_2 = 1$ (при $X = 1 \wedge Y = 1$), $z_3 = 2$ (при $(X = 1 \wedge Y = 2) \vee (X = 2 \wedge Y = 1)$), $z_4 = 3$ (при $X = 1 \wedge Y = 3$), $z_5 = 4$ (при $X = 2 \wedge Y = 2$), $z_6 = 6$ (при $X = 2 \wedge Y = 3$). Знайдемо ймовірності набуття випадковою величиною Z цих значень. $P(Z = z_1) = 0,4(0,3 + 0,2 + 0,5) = 0,4$, для $z_2 = 1$ $P(Z = z_2) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$, при значенні $z_3 = 2$ отримуємо $P(Z = z_3) = 0,5 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,13$, для $z_4 = 3$ $P(Z = z_4) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$, при $z_5 = 4$ маємо $P(Z = z_4) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$, при $z_6 = 6$ $P(Z = z_6) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05$.

Таким чином, отримали закон розподілу випадкової величини Z, який наведемо у наступній таблиці.

z_k	0	1	2	3	4	6
p_k	0,4	0,15	0,13	0,25	0,02	0,05

Контроль: 0,4+0,15+0,13+0,25+0,02+0,05=1.

Означення 4. Сумою випадкових величин X та Y називають випадкову величину $Z = X + Y$, можливі значення якої дорівнюють сумам кожного можливого значення величини X та кожного можливого значення величини Y. Ймовірності можливих значень величини $Z = X + Y$ для незалежних X та Y дорівнюють добуткам ймовірностей відповідних доданків, для залежних X та Y – добуткам ймовірності одного з доданків на умовну ймовірність другого відносно першого.

Приклад 2. Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$ для незалежних випадкових величин X та Y з попереднього прикладу.

Розв'язання. Знайдемо всі можливі значення випадкової величини $Z = X + Y$ та ймовірності їх отримання. $z_1 = 0 + 1 = 1$, $z_2 = 0 + 2 = 1 + 1 = 2$, $z_3 = 0 + 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$, $z_4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$, $z_5 = 2 + 3 = 5$.

$P(Z = 1) = P(X = 0) \cdot P(X = 1) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$,

$P(Z = 2) = P(X = 0) \cdot P(Y = 2) + P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,23$,

$P(Z = 3) = P(X = 0) \cdot P(Y = 3) + P(X = 1) \cdot P(Y = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 1) =$

$= 0,4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,33$,

$P(Z = 4) = P(X = 1) \cdot P(X = 3) + P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,27$,

$P(Z = 5) = P(X = 2) \cdot P(Y = 3) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05$.

Закон розподілу випадкової величини Z має наступний вигляд.

z_i	1	2	3	4	5
p_i	0,12	0,23	0,33	0,27	0,05

Контроль: 0,12+0,23+0,33+0,27+0,05=1.

4.9. Властивості математичного сподівання

З означення математичного сподівання дискретної випадкової величини випливають його основні властивості.

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює цій сталій: $M(C) = C$.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(CX) = C \cdot M(X)$, $C - const$.

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M\left(XY\right)=M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)$.

4.10. Дисперсія дискретної випадкової величини

У більшості випадків математичне сподівання не може у достатній мірі характеризувати випадкову величину. Для оцінки відхилень її можливих значень від математичного сподівання використовують дисперсію та середнє квадратичне (стандартне) відхилення.

Нехай дискретна випадкова величина X може приймати свої можливі значення x_i з відповідними ймовірностями p_i, $i=1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{n}$. Відхилення можливих значень x_i випадкової величини X від її математичного сподівання можна оцінити за допомогою різниць $x_i-M\left(X\right)$, проте середнє значення цих різниць для будь-якої випадкової величини дорівнює нулю: $M\left(X-M\left(X\right)\right)=M\left(X\right)+M\left(-M\left(X\right)\right)=M\left(X\right)-M\left(X\right)=0$. Тому замість відхилень $x_i-M\left(X\right)$ розглядають їхні квадрати $\left(x_i-M\left(X\right)\right)^2$. Їх можна охарактеризувати як значення випадкової величини $\left(X-M\left(X\right)\right)^2$, які вона приймає з тими ж ймовірностями, що й випадкова величина X значення x_i.

Означення 1. Дисперсією дискретної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D\left(X\right)=M\left(X-M\left(X\right)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M\left(X\right)\right)^2\cdot p_i\,. \tag{4.8}$$

Для позначення дисперсії поряд з $D\left(X\right)$ використовують також символи σ_x^2 або σ^2.

Означення 2. Середнім квадратичним або стандартним відхиленням дискретної випадкової величини X називають квадратний корінь з її дисперсії:

$$\sigma_x=\sigma=\sqrt{D\left(X\right)}\,. \tag{4.9}$$

На практиці для обчислення дисперсії часто використовують формулу, більш зручну, ніж (4.8). За означенням дисперсії маємо:

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2=M\left(X^2-2X\cdot M(X)+\left(M(X)\right)^2\right)=M\left(X^2\right)-$$

$$-2M(X)\cdot M(X)+M\left(\left(M(X)\right)^2\right)=M\left(X^2\right)-2\left(M(X)\right)^2+\left(M(X)\right)^2=$$

$$=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Таким чином, <u>дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї випадкової величини та квадратом її математичного сподівання</u>:

$$\sigma_x^2=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\right)^2. \qquad (4.10)$$

Приклад. Випадкова величина X приймає значення $x_1=1$ з ймовірністю $p_1=0,2$, $x_2=2$ з ймовірністю $p_2=0,6$, $x_3=3$ з ймовірністю $p_3=0,2$. Знайти її дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв’язання. Для знаходження дисперсії заданої випадкової величини використаємо формулу (4.10), згідно з якою отримуємо:

$$\sigma_x^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\right)^2=1^2\cdot 0,2+2^2\cdot 0,6+3^2\cdot 0,2-\left(1\cdot 0,2+2\cdot 0,6+3\cdot 0,2\right)^2=$$

$$=0,4.$$

Середнє квадратичне відхилення знаходимо за формулою (4.9):

$$\sigma_x=\sqrt{0,4}\approx 0,63.$$

4.11. Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю.

Доведення. Нехай C – стала величина. За означенням дисперсії маємо: $D(C)=M\left(C-M(C)\right)^2=M\left(C-C\right)^2=M(0)=0$.

2. Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата: $D(cX)=c^2D(X)$.

Доведення.

$$D(cX)=M\left(cX-M(cX)\right)^2=M\left(cX-cM(X)\right)^2=M\left(c^2\left(X-M(X)\right)^2\right).$$

Виносячи сталий множник c^2 за знак математичного сподівання, отримаємо: $D(cX)=c^2M\left(X-M(X)\right)^2=c^2D(X)$.

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює їх сумі дисперсій.

Доведення. Оскільки дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням її квадрата та квадратом її математичного сподівання, то $D(X+Y)=M\left((X+Y)^2\right)-\left(M(X+Y)\right)^2$. Математичне сподівання квадрата $(X+Y)^2$: $M\left((X+Y)^2\right)=M\left(X^2\right)+2M(XY)+M\left(Y^2\right)$.

Квадрат математичного сподівання:

$$\left(M(X+Y)\right)^2=\left(M(X)+M(Y)\right)^2=\left(M(X)\right)^2+2M(X)M(Y)+\left(M(Y)\right)^2.$$

$$D(X+Y)=\left[M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2\right]+\left[M\left(Y^2\right)-\left(M(Y)\right)^2\right]=D(X)+D(Y).$$

Наслідок 1. Дисперсія суми кількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

Наслідок 2. Дисперсія суми сталої та випадкової величин дорівнює дисперсії випадкової величини.

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

Доведення.

$$D(X-Y)=D\left(X+(-Y)\right)=D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y).$$

Теорема. Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, дорівнює добутку числа випробувань n на ймовірності p та q настання та ненастання події A у одному випробуванні: $D(X)=npq$.

Доведення. Нехай випадкова величина X – це кількість появ події A у n незалежних випробуваннях, тобто це випадкова величина, розподілена за біноміальним законом. Загальна кількість появ події A у n незалежних випробуваннях дорівнює сумі появ цієї події у кожному з випробувань: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i – кількість появ події A у i-му випробуванні. Випадкова величина X_i може приймати значення 1 з ймовірністю p, або значення 0 з ймовірністю q. $M\left(X_i\right)=p$, тоді дисперсія X_i:

$$D\left(X_i\right)=M\left(X_i^2\right)-\left(M\left(X_i\right)\right)^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

$$D(X)=D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} pq=npq. \qquad (4.11)$$

4.12 Початкові та центральні моменти дискретної випадкової величини. Асиметрія та ексцес

Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин – математичного сподівання та дисперсії, є поняття моментів цих величин.

Означення 1. Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання випадкової величини X^k:

$$\nu_k=M\left(X^k\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i. \qquad (4.12)$$

Означення 2. Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання випадкової величини $\left(X-M\left(X\right)\right)^k$:

$$\mu_k=M\left(X-M\left(X\right)\right)^k=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M\left(X\right)\right)^k p_i. \qquad (4.13)$$

Центральний момент третього порядку μ_3 характеризує асиметрію розподілу випадкової величини X. Коефіцієнт асиметрії обчислюють за формулою:

$$A_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \qquad (4.14)$$

Центральний момент четвертого порядку характеризує гостровершинність багатокутника розподілу випадкової величини X. Для такої характеристики використовують показник, який називають <u>ексцесом</u>:

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \qquad (4.15)$$

Числовими характеристиками випадкової величини є також її мода та медіана.

<u>Означення 3.</u> <u>Модою</u> дискретної випадкової величини називають її найбільш ймовірне значення.

Зустрічаються одномодальні та багатомодальні розподіли.

<u>Означення 4</u>. <u>Медіаною</u> випадкової величини X називають її значення Me, при якому $P(X < Me) = P(X > Me)$.

Медіану звичайно обчислюють для неперервних випадкових величин.