

Розділ 2. Теореми множення та додавання ймовірностей та їх наслідків

2.1. Теореми множення та додавання ймовірностей

1. Навмання підкинуто три гральні кубики. Подія A – на всіх кубиках випаде різне число очок, подія B – хоча б на одному з кубиків випаде 6 очок. Обчислити $P(B/A)$ та $P(A/B)$. (Відповідь: $P(B/A) = 0,5$, $P(A/B) = \frac{60}{91}$)
2. З урни, що містить 6 білих та 4 чорні кулі, навмання виймають по одній кулі до появи чорної кулі. Знайти ймовірність того, що доведеться здійснювати четверте виймання, якщо виймання здійснюються: а) з поверненням; б) без повернення. (Відповідь: а) 0,216; б) $\frac{1}{6}$)
3. Для сигналізації про аварію встановлено два датчики, що працюють незалежно. Ймовірність того, що при аварії датчик спрацює, для першого датчика дорівнює 0,95, для другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює лише один датчик. (Відповідь: 0,14)
4. Два стрільці одночасно стріляють по мішені. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,7, для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що влучить лише один з стрільців. (Відповідь: 0,38)
5. Ймовірність потрапляння у мішень при одному пострілі для стрільця дорівнює 0,8. Скільки йому потрібно зробити пострілів, щоб з ймовірністю, меншою, ніж 0,4, можна було очікувати, що всі постріли влучать у мішень? (Відповідь: $n \geq 5$)
6. У першій урні міститься 7 білих та 3 чорних кульки, у другій – 5 білих та 5 чорних кульок, у третій – 4 білих та 6 чорних кульок. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що серед вибраних кульок виявиться: а) лише одна біла кулька; б) дві білі кульки; в) три білі кульки; г) хоча б одна біла кулька. (Відповідь: а) 0,36; б) 0,41; в) 0,14; г) 0,91)
7. Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибране двозначне число ділиться націло: а) на 2 або на 3; б) на 2 і на 3. (Відповідь: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$)
8. Групу з 30 студентів, серед яких 10 відмінників, випадковим чином ділять на дві рівні підгрупи. Знати ймовірність того, що у кожній підгрупі буде по 5 відмінників. (Відповідь: $\frac{1001}{3335} \approx 0,3$)
9. Комплект з 20 виробів містить 40 % нестандартних. Двічі навмання з комплекту виймають по 6 виробів. Знайти ймовірність того, що після двох виймань у комплекті залишаться тільки нестандартні вироби. (Відповідь: $\frac{1}{38760}$)

10. Перший стрілець може влучити у ціль з ймовірністю 0,8, другий – з ймовірністю 0,9, третій – з ймовірністю 0,85. Знайти ймовірність того, що хоча б один з них влучить у ціль. (Відповідь: 0,997)
11. Робітник обслуговує одночасно три верстати. Ймовірність порушення робочого режиму протягом години для першого верстата дорівнює 0,1, для другого – 0,15, для третього – 0,2. Знайти ймовірність того, що: а) усі три верстати працюватимуть протягом години; б) хоча б один з них вийде з ладу. (Відповідь: а) 0,712; б) 0,329)
12. З множини цифр від 1 до 9 навмання береться одна цифра, а потім друга, причому перша не повертається. Обчислити ймовірність того, що: а) здобуте двоцифрове число виявиться непарним; б) здобуте двоцифрове число ділиться націло на 5 або на 2. (Відповідь: а) $\frac{35}{72}$; б) $\frac{5}{9}$)
13. Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що під час роботи приладу не вийде з ладу перший елемент, дорівнює 0,9. Для другого та третього елементів ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,8 та 0,7. Знайти ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийдуть: а) три елементи; б) два елементи; в) один елемент; г) всі елементи не вийдуть з ладу. (Відповідь: а) 0,006; б) 0,398; в) 0,092; г) 0,504)
14. Ймовірність безвідмовної роботи впродовж певного часу блока, що входить до системи, дорівнює 0,9. Для надійності у системі встановлено резервний блок. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи з врахуванням наявності резервного блоку. (Відповідь: 0,99)
15. Система виявлення порушень повітряного простору складається з двох радіолокаційних станцій. Ймовірність безвідмовної роботи першої станції дорівнює 0,95, другої – 0,85. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи, якщо для цього потрібна безвідмовна робота хоча б однієї станції. (Відповідь: 0,9925)
16. Для виготовлення деталі необхідно провести чотири технологічні операції. Ймовірність браку при виконанні першої технологічної операції дорівнює 0,1, для другої, третьої та четвертої операцій ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,05, 0,15 та 0,2. Знайти ймовірність того, що виготовлена деталь буде стандартною. (Відповідь: 0,5814)
17. Маємо k радіолокаційних станцій, кожна з яких за один оберт антени може виявити літаючий об'єкт з ймовірністю p незалежно від інших обертів антени та роботи інших станцій. За добу кожна станція здійснює m обертів антени. У повітрі з'явився літаючий об'єкт. Знайти ймовірність того, що на протязі доби: а) літаючий об'єкт буде виявлено хоча б один раз; б) об'єкт буде виявлено кожною станцією. (Відповідь: а) $1 - (1 - p)^{km}$; б) $(1 - (1 - p)^m)^k$)
18. Ймовірність появи випадкової події у кожному з незалежних випробувань дорівнює p . Скільки необхідно провести випробувань, щоб ймовірність

появи цієї випадкової події хоча б один раз дорівнювала p_1 ? (Відповідь:

$$n = \left\lceil \frac{\ln(1 - p_1)}{\ln(1 - p)} \right\rceil .)$$

19. При вмиканні запалення двигун автомобіля починає працювати з ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що для роботи двигуна потрібно буде ввімкнути запалення не більше двох разів. (Відповідь: 0,99)
20. В урні 4 білі та 3 чорні кульки. Два гравці по черзі виймають з урни по кульці, не повертаючи їх до урни. Виграє той гравець, який раніше витягне білу кульку. Обчислити ймовірність того, що виграє перший гравець. (Відповідь: $\frac{24}{35}$)
21. Ймовірність відмови у роботі приладу при випробуванні дорівнює 0,3. Скільки таких приладів потрібно взяти, щоб ймовірність хоча б однієї відмови дорівнювала 0,99? (Відповідь: $n \geq 13$)
22. Здійснюється 5 повторних незалежних вимірювань деякої фізичної величини. Ймовірність того, що у одному (будь-якому вимірюванні) похибка перевищить задану точність, дорівнює 0,1. Знайти ймовірності того, що: а) хоча б у 3 вимірюваннях була досягнута задана точність; б) у всіх вимірюваннях була досягнута задана точність; в) хоча б у 3 вимірюваннях поспіль була досягнута задана точність. (Відповідь: а) 0,991; б) 0,59; в) 0,744)
23. У продукції заводу брак складає 5 % від загальної кількості виробів. Для контролю відібрано 20 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них є хоча б один бракований. (Відповідь: 0,64)
24. По каналу зв'язку, що складається з передавача, ретранслятора та приймача, передають два сигнали: одиницю та нуль. Внаслідок дії перешкод сигнали можуть спотворюватися. На ділянці «передавач – ретранслятор» одиниця переходить у одиницю з ймовірністю p_1 і у нуль з ймовірністю $1 - p_1$, нуль переходить у нуль з ймовірністю q_1 і у одиницю з ймовірністю $1 - q_1$. На ділянці «ретранслятор – приймач» ймовірності вказаних подій відповідно дорівнюють p_2 , $1 - p_2$, q_2 , $1 - q_2$. Знайти ймовірність того, що кодова комбінація «10», надіслана передавачем, буде прийнята без спотворень. (Відповідь: а) $p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - q_2) + q_1 q_2 + (1 - q_1)(1 - p_2)$).
25. Для подій A та B $P(B) = 0,4$, $P(A/B) = 0,3$, $P(A/\bar{B}) = 0,2$. Знайти $P(A)$, $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(\bar{A} + \bar{B})$. (Відповідь: $P(A) = 0,24$, $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,48$, $P(\bar{A} + \bar{B}) = 0,88$)

26. Скільки разів потрібно підкинути пару гральних кубиків, щоб з ймовірністю, не меншою, ніж 0,5, з'явилась сума очок, що дорівнює 12? (Відповідь: $n \geq 25$)
27. Студент знає відповіді на 20 з 25 запитань заліку. Залік буде здано, якщо студент відповість не менше, ніж на три з чотирьох поставлених запитань. Знайти ймовірність того, що він здасть залік. (Відповідь: 0,8336)
28. Ймовірність відмови приладу після того, як він був застосованим k разів, дорівнює $p(k)$. Відомо, що при перших m застосуваннях прилад не відмовив. Знайти ймовірність того, що він відмовить при наступних n застосуваннях. (Відповідь: $\frac{p(m+n) - p(m)}{1 - p(m)}$)
29. Відрізок розділено на три рівні частини. На цей відрізок навмання ставлять три точки. Знайти ймовірність того, що на кожну з трьох частин відрізка потрапить по одній точці. Вважається, що ймовірність потрапляння точки на відрізок пропорційна його довжині і не залежить від його розташування. (Відповідь: $\frac{2}{9}$)
30. Ймовірність влучення у мішень для кожного з двох стрільців дорівнює 0,3. Вони стріляють по черзі, причому кожен повинний зробити по два постріли. Стрелець, що влучить у мішень першим, отримає приз. Знайти ймовірність того, що хтось з них отримає приз. (Відповідь: 0,76)
31. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 навмання придбаних білети виявляться виграшними. (Відповідь: $\frac{1}{495}$)

2.2. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

- У першій урні знаходяться 7 білих та 3 чорні кулі, у другій – 8 білих та 4 чорні кулі, у третій – 2 білі та 13 чорних куль. З цих урн навмання вибирають одну урну, а з неї – одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона виявиться білою. (Відповідь: 0,5)
- У першій урні знаходяться 7 білих та 3 чорні кулі, у другій – 8 білих та 4 чорні кулі, у третій – 2 білі та 13 чорних куль. З цих урн навмання вибирають одну урну, а з неї – одну кулю. Вийнята куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що вона з другої урни. (Відповідь: $\frac{4}{9}$)
- У збиральний цех надходять деталі, виготовлені на трьох верстатах – автоматах. На першому спостерігається у середньому 0,2 % браку, на

- другому – 0,1 %, на третьому брак відсутній. У цех надійшло 2000 деталей, виготовлених на першому верстаті, 3000 – на другому, 5000 – на третьому. Знайти ймовірність того, що деталь, вибрана навмання з цих деталей, виявиться бракованою. (Відповідь: 0,0007)
4. У збиральний цех надходять деталі, виготовлені на трьох верстатах – автоматах. На першому спостерігається у середньому 0,2 % браку, на другому – 0,1 %, на третьому брак відсутній. У цех надійшло 2000 деталей, виготовлених на першому верстаті, 3000 – на другому, 5000 – на третьому. Вибрана навмання деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на першому верстаті. (Відповідь: $\frac{1996}{9993} \approx 0,2$)
5. У спеціалізовану клініку надходять у середньому 50 % хворих з захворюванням *A*, 30 % – з захворюванням *B* та 20 % – з захворюванням *C*. Ймовірності повного вилікування цих захворювань відповідно дорівнюють 0,95, 0,9 та 0,85. Знайти ймовірність того, що вибраний навмання пацієнт цієї лікарні буде вилікуваний повністю. (Відповідь: 0,915)
6. У спеціалізовану клініку надходять у середньому 50 % хворих з захворюванням *A*, 30 % – з захворюванням *B* та 20 % – з захворюванням *C*. Ймовірності повного вилікування цих захворювань відповідно дорівнюють 0,95, 0,9 та 0,85. Хворий, що потрапив у цю клініку, був повністю вилікуваний. Знайти ймовірність того, що у нього було захворювання *B*. (Відповідь: $\frac{18}{61}$)
7. З першої урни, що містить 8 білих та 3 чорні кулі, навмання перекидали одну кулю у другу урну, де знаходилось 2 білі та 3 чорні кулі. Знайти ймовірність того, що навмання виїнята після перекидання з другої урни куля виявиться білою. (Відповідь: $\frac{4}{9}$)
8. З першої урни, що містить 8 білих та 3 чорні кулі, навмання перекидали одну кулю у другу урну, де знаходилось 2 білі та 3 чорні кулі. Навмання виїнята після перекидання з другої урни куля виявиться білою. Знайти ймовірність того, що з першої урни було перекидано у другу білу кулю. (Відповідь: 0,75)
9. З першої урни, що містить 5 білих та 3 чорні кулі, навмання перекидали у другу урну, що до цього містила 2 білі та 6 чорних куль, дві кулі. Після цього з другої урни навмання виїняли кулю. Знайти ймовірність того, що вона виявилась білою. (Відповідь: $\frac{13}{40}$)

- 10.3 першої урни, що містить 5 білих та 3 чорні кулі, навмання переклали у другу урну, що до цього містила 2 білі та 6 чорних куль, дві кулі. Після цього з другої урни навмання вийняли кулю. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того що з першої урни у другу було перекладено кулі різного кольору. (Відповідь: $\frac{45}{91}$)
- 11.У двох цехах виготовляється однотипна продукція. Продуктивність першого цеху є удвічі більшою, ніж другого. Вироби вищої якості складають у середньому 95 % продукції першого цеху та 90 % продукції другого цеху. З загальної продукції цих цехів навмання береться один виріб. Знайти ймовірність того, що це виріб вищої якості (Відповідь: $\frac{14}{15}$)
- 12.У двох цехах виготовляється однотипна продукція. Продуктивність першого цеху є удвічі більшою, ніж другого. Вироби вищої якості складають у середньому 95 % продукції першого цеху та 90 % продукції другого цеху. З загальної продукції цих цехів навмання береться один виріб, що виявився виробом вищої якості. Знайти ймовірність того, що він виготовлений у другому цеху. (Відповідь: $\frac{9}{28}$)
13. Легкових автомобілів біля бензоколонки проїжджає у чотири рази більше, ніж вантажних. Ймовірність того, що автомобіль, який проїздить мимо, під'їде для заправлення, для вантажних машин дорівнює 0,05, для легкових – 0,15. Знайти ймовірність того, що автомобіль, який проїде біля бензоколонки, буде заправлятися на ній. (Відповідь: 0,13)
14. Легкових автомобілів біля бензоколонки проїжджає у чотири рази більше, ніж вантажних. Ймовірність того, що автомобіль, який проїздить мимо, під'їде для заправлення, для вантажних машин дорівнює 0,05, для легкових – 0,15. Від колонки після заправлення від'їхав автомобіль. Знайти ймовірність того, що це був вантажний автомобіль. (Відповідь: $\frac{1}{13}$)
15. По каналу зв'язку передається один з сигналів: X_1 або X_2 . Сигнал X_2 передається у середньому втричі частіше, ніж сигнал X_1 . Внаслідок перешкод замість переданого сигналу X_1 приймач може зафіксувати сигнал X_2 , у середньому, у 10 % випадків, і, навпаки, замість X_2 може бути прийнятим сигнал X_1 – у 20 % випадків. Цим каналом зв'язку надійшов якийсь сигнал. Знайти ймовірність того, що приймач зафіксує сигнал X_1 . (Відповідь: 0,375)

16. По каналу зв'язку передається один з сигналів: X_1 або X_2 . Сигнал X_2 передається у середньому втричі частіше, ніж сигнал X_1 . Внаслідок перешкод замість переданого сигналу X_1 приймач може зафіксувати сигнал X_2 , у середньому, у 10 % випадків, і, навпаки, замість X_2 може бути прийнятим сигнал X_1 – у 20 % випадків. Цим каналом зв'язку надійшов якийсь сигнал. Знайти ймовірність того, що приймач зафіксує сигнал X_1 . (Відповідь: 0,6)
17. Серед спіральних галактик, що спостерігаються астрономами, 23 % належать до типу S_a , 31 % – до типу S_b , 46 % – до типу S_c . Ймовірність спалаху наднової зірки на протязі року для цих галактик складає відповідно 0,002, 0,0035 та 0,0055. Знайти ймовірність спалаху на протязі року наднової зірки. (Відповідь: 0,004075)
18. Серед спіральних галактик, що спостерігаються астрономами, 23 % належать до типу S_a , 31 % – до типу S_b , 46 % – до типу S_c . Ймовірність спалаху наднової зірки на протязі року для цих галактик складає відповідно 0,002, 0,0035 та 0,0055. У деякій спіральній галактиці спостерігався спалах наднової зірки. Знайти ймовірність того, що це галактика типу S_a . (Відповідь: 0,1129)
19. Підприємство виготовляє продукцію, 96 % якої задовольняє стандартам. Система контролю якості, що використовується цим підприємством, визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,98, а нестандартну – з ймовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, визнаний на контролі придатним, дійсно задовольняє стандартам. (Відповідь: 0,9979)
20. Ймовірність влучення у ціль для трьох стрільців відповідно дорівнюють $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ та $\frac{2}{3}$. Внаслідок одночасного пострілу цих стрільців відбулись два влучення у ціль. Що більш ймовірно: третій стрілець влучив чи промахнувся? Знайти ймовірність влучення ним у ціль. (Відповідь: більш ймовірним є влучення третього стрільця, ймовірність влучення $\frac{7}{13}$)
21. В урну, що містить n куль, опущено білу кулю. Всі можливі припущення про початкову кількість білих куль у урні є рівноможливими. З урни навмання виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона виявиться білою. (Відповідь: $\frac{n+2}{2(n+1)}$)
22. В урну, що містить n куль, опущено білу кулю. Всі можливі припущення про початкову кількість білих куль у урні є рівноможливими. З урни навмання виймають одну кулю, що виявилась білою. Яка початкова кількість білих куль у урні є найбільш ймовірною? (Відповідь: n)

23. Підкинуто два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що на першому з них випало одне очко, якщо відомо, що на другому кубіку випала кількість очок більша, ніж на першому. (Відповідь: $\frac{1}{3}$)
24. Монету підкидають доти, поки герб не випаде двічі поспіль. Знайти ймовірність того, що монету доведеться підкидати непарне число разів. (Відповідь: 0,4)
25. У деякій місцевості однакова кількість чоловіків та жінок. Відомо, що тут дальтоніками є 5 % чоловіків та 0,25 % жінок. Навмання вибраний мешканець цієї місцевості є дальтоніком. Яка ймовірність того, що це жінка? (Відповідь: $\frac{20}{21}$)
26. У кошику міститься 20 зелених та 15 червоних яблук. Навмання виймають 3 яблука з кошика та вкладають замість них 3 яблука червоного кольору. Навмання вийняли одне яблуко. Знайти ймовірність того, що воно червоне. (Відповідь: 0,4776)
27. До центру статистичних досліджень надходить інформація з трьох пунктів: з першого – 50 %, з другого – 30 %, з третього – 20 % всієї інформації. Ймовірність допущення помилки при обробці статистичних даних у першому пункті дорівнює 0,1, у другому – 0,05, у третьому – 0,15. Знайти ймовірність того, що отримана у даний момент інформація оброблена вірно. (Відповідь: 0,905)