## Розділ 4. Дискретні випадкові величини

### 4.1. Поняття дискретних випадкових величин

1. Експеримент полягає у підкиданні симетричного однорідного грального кубика. Випадкова величина $X$ – кількість очок, що випали при одному підкиданні, випадкова величина $Y$ – кількість шісток при одному підкиданні. Побудувати ряд розподілу, многокутник розподілу та функцію розподілу випадкових величин $X$ та $Y$.

2. Нехай випадкова величина $\xi$ дорівнює кількості номерів, угаданих гравцем у лотереї «6 із 39». Побудувати ряд розподілу випадкової величини $\xi$ та знайти значення функції розподілу у точці $x = 3$. (Відповідь: $F(3) = 0{,}9641$)

3. Нехай $X$ – випадкова величина, що дорівнює кількості хлопчиків у сім'ї з трьома дітьми. Вважаючи народження хлопчика та дівчинки рівноймовірними подіями, знайти ряд розподілу випадкової величини $X$ та ймовірність того, що хлопчиків у сім'ї більше, ніж дівчаток. (Відповідь: 0,5)

4. Нехай $X$ – випадкова величина, що дорівнює кількості випадань грані «шість» при двоn разовому підкиданні грального кубика. Побудувати ряд розподілу та функцію розподілу цієї випадкової величини.

5. Стрілець робить по одному пострілу по чотирьом мішеням. Випадкова величина $X$ – кількість влучень. Вважаючи, що ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7, знайти ряд розподілу випадкової величини $X$ та ймовірність того, що влучень буде більше, ніж промахів. (Відповідь: 0,6517)

6. Два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,5. Знайти ряд розподілу випадкової величини $X$ – кількість влучень у мішень, а також ймовірність того, що кількість влучень дорівнюватиме кількості промахів. (Відповідь: 0,5)

7. Студент підкидає монету до першої появи герба. Випадкова величина $X$ – кількість підкидань. Знайти її ряд розподілу. Чому дорівнює ймовірність того, що студенту доведеться виконати більше 10 підкидань? (Відповідь: $1/1024$)

8. Гральний кубик підкидають до першої появи п'ятірки. Знайти ряд розподілу випадкової величини $X$ – кількості підкидань та найімовірнішу кількість підкидань. (Відповідь: 1)

9. Студент вивчив 10 білетів з 25 та намагається скласти іспит. Іспит дозволяється перескладати двічі. Випадкова величина $X$ – кількість спроб для успішної здачі іспиту. Знайти її ряд розподілу, а також ймовірність того, що студента відрахують за нездений іспит. (Відповідь: $P(X > 3) = 0{,}216$)

10. Рулетка у казино має 37 полів, серед яких 18 червоних. Гравець ставить «на червоне» доти, доки не виграє. Випадкова величина $X$ – кількість спроб. Знайти її ряд розподілу, найімовірнішу кількість спроб та кількість спроб $x$, для якої ймовірність $P(X \le x) \ge 0,999$. (Відповідь: 1; $x \ge 11$)

11. Студент знає 20 питань з 25. Він навмання отримує 5 питань. Випадкова величина $X$ – кількість питань, на які він дасть відповідь. Знайти ряд розподілу цієї випадкової величини та ймовірність того, що студент дасть відповідь більше, ніж на половину питань. (Відповідь: 0,94208)

12. У партії з 10 деталей 2 браковані. Навмання виймають 3 деталі. Випадкова величина $X$ – кількість бракованих деталей серед вибраних. Знайти її ряд розподілу.

13. Після психологічного тестування виявилося, що серед 15 студентів 1 меланхолік, 5 флегматиків, 6 сангвініків та 3 холерики. З цієї групи навмання вибирають 4 студентів. Випадкова величина $X$ – кількість сангвініків серед вибраних студентів. Знайти її ряд розподілу та функцію розподілу.

14. Магазин отримав 10000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,0004. Знайти ряд розподілу випадкової величини $\xi$, що дорівнює кількості розбитих пляшок. (Відповідь: $P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!}e^{-4}, k = 0,1,2,...$)

15. Закон розподілу дискретної випадкової величини $X$ задано таблицею:

| $x_i$ | -4 | 1 | 2 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,1 | 0,5 | $p_4$ | 0,2 |

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$. (Відповідь: 0,1)

16. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

| $x_i$ | 2,5 | 3 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $a$ | $2a$ | $a$ | $3a$ | $a$ | $2a$ |

Знайти значення параметра $a$ та ймовірності можливих значень випадкової величини $X$: $x_1 = 2,5$; $x_3 = 4,5$, $x_6 = 6$. Обчислити ймовірності випадкових подій: $X < 3$; $X \le 5$; $2,5 \le X < 5,5$.

17. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -4 | -1 | 2 | 5 | 8 | 10 |
| $p_i$ | $a$ | $1,5a$ | $0,5a$ | $3,5a$ | $2,5a$ | $a$ |

Знайти значення параметра $a$. Обчислити ймовірності випадкових подій: $X < 2$; $X \le 5$; $-4 < X \le 8$.

18. Троє студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший студент складе іспит, дорівнює 0,9. Для другого та третього студентів ця ймовірність відповідно дорівнює 0,85 та 0,8. Знайти закон розподілу випадкової величини $X$ – кількості студентів, що здадуть іспит т апобудувати функцію розподілу.

19. На шляху руху автомобіля стоять 5 світлофорів, кожний з яких з ймовірністю 0,5 дозволяє або забороняє рух. Побудувати закон розподілу випадкової величини $X$ – числа світлофорів, що їх автомобіль проїде без зупинки.

20. Ймовірність того, що футболіст реалізує пенальті, дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу випадкової величини $X$ – кількості реалізованих пенальті у серії з 5 ударів.

21. У партії 10 % нестандартних деталей. Навмання відібрано 4 деталі. Записати біноміальний закон розподілу випадкової величини $X$ – кількості нестандартних деталей серед відібраних та побудувати многокутник розподілу.

22. Два гральні кубики одночасно підкидають двічі. Записати закон розподілу випадкової величини $X$ – числа появ парної кількості очок на обох кубиках.

23. У партії з 6 деталей 4 стандартні. Навмання відібрано 3 деталі. Записати закон розподілу випадкової величини $X$ – числа стандартних деталей серед відібраних.

24. Після відповіді студента на запитання екзаменаційного білету екзаменатор задає йому додаткові запитання. Він припиняє задавати запитання, як тільки студент не знає відповіді на поставлене запитання. Ймовірність того, що студент відповість на будь-яке додаткове запитання, дорівнює 0,9. Скласти

закон розподілу випадкової величини $X$ – числа заданих студенту додаткових запитань.

## 4.2. Числові характеристики дискретних випадкових величин

1. Дискретна випадкова величина $X$ задана законом розподілу:

| $x_i$ | -4 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,2 | $a$ | 0,5 |

   Знайти значення параметра $a$, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X$.

2. Дискретна випадкова величина $X$ задана законом розподілу:

| $x_i$ | 0,21 | 0,54 | 0,61 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,5 | $a$ |

   Знайти значення параметра $a$, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X$.

3. Нехай $\xi$ – випадкова величина, яка дорівнює кількості очок, що випадають при одноразовому підкиданні кубика. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини. (Відповідь: $M(\xi)=3{,}5$; $D(\xi)=35/12$, $\sigma(\xi)\approx 1{,}71$)

4. У ящику лежать п’ять пронумерованих кульок з номерами від 1 до 5. Навмання виймається кулька. Випадкова величина $\xi$ – номер цієї кульки. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини. (Відповідь: $M(\xi)=3$; $D(\xi)=2$, $\sigma(\xi)\approx 1{,}41$)

5. Симетрична монета підкидається три рази. Випадкова величина $X$ – кількість гербів, які при цьому випадали. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини. (Відповідь: $M(X)=1{,}5$; $D(X)=0{,}75$)

6. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X$ – кількості хлопчиків у сім’ї з трьома

дітьми (вважати народження хлопчика та дівчинки рівноймовірними подіями). (Відповідь: $M(X)=1{,}5$; $D(X)=0{,}75$; $\sigma(X)\approx 0{,}87$)

7. Стрілець робить по одному пострілу по чотирьох мішенях. Знайти числові характеристики випадкової величини $X$ – кількості влучень, вважаючи, що ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. (Відповідь: $M(X)=2{,}8$; $D(X)=0{,}84$; $\sigma(X)\approx 0{,}92$)

8. Студент знає 20 запитань з 25. На іспиті він навмання отримує 5 запитань. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X$ – кількості запитань, на які студент дасть вірну відповідь. (Відповідь: $M(X)=4$; $D(X)=2/3$; $\sigma(X)\approx 0{,}82$)

9. У ящику лежать 7 зелених та 3 жовті кульки. Навмання вибирається кулька, фіксується її колір і кулька повертається у ящик. Експеримент повторюється 4 рази. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $X$ – кількості зелених кульок, що з'явились при вийманні. (Відповідь: $M(X)=2{,}8$; $D(X)=0{,}84$; $\sigma(X)\approx 0{,}92$)

10. У групі з 20 студентів є троє відмінників. Випадковим чином вибираються 4 студенти. Знайти числові характеристики випадкової величини $\xi$ – кількості відмінників серед вибраних студентів. (Відповідь: $M(\xi)=0{,}6$; $D(\xi)\approx 0{,}43$; $\sigma(\xi)\approx 0{,}66$)

11. Серед 10 деталей є 2 браковані. Знайти числові характеристики випадкової величини $\xi$ – кількості бракованих деталей серед вибраних. (Відповідь: $M(\xi)=0{,}6$; $D(\xi)\approx 0{,}37$; $\sigma(\xi)\approx 0{,}61$)

12. Знайти числові характеристики випадкової величини $Y$ – кількості вгаданих номерів у лотереї «5 з 36». (Відповідь: $M(Y)\approx 0{,}69$; $D(Y)\approx 0{,}53$; $\sigma(Y)\approx 0{,}73$)

13. Гральний кубик підкидають доти, поки не випаде 6 очок. Знайти числові характеристики випадкової величини $X$ та ймовірність того, що відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим, ніж $3\sigma(X)$. (Відповідь: $M(X)=6$; $D(X)=30$; $\sigma(X)\approx 5{,}48$; $P\left(\left|X-M(X)\right|<3\sigma(X)\right)=1-\frac{1}{6^{22}}\approx 1$)

14. Магазин отримує 10000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка розіб'ється, дорівнює 0,0004. Знайти числові характеристики випадкової величини $X$ – кількості розбитих пляшок. (Відповідь: $M(X)=4$; $D(X)=4$; $\sigma(X)=2$)

15. Підручник видано тиражем 10000 екземплярів. Ймовірність того, що зброшурований екземпляр виявиться неякісним, дорівнює 0,001. Знайти числові характеристики випадкової величини $X$ – кількості неякісних екземплярів серед тиражу підручника. (Відповідь: $M(X)=10$; $D(X)=10$; $\sigma(X)\approx 3{,}16$)

16. Задано закон розподілу ймовірностей випадкової величини $X$.

| $x_i$ | –2 | 2 | 4 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | $2a$ | 0,3 | 0,1 | $3a$ |

Знайти значення параметра $a$, математичне сподівання цієї випадкової величини, її дисперсію, середнє квадратичне відхилення та моду. (Відповідь: $M(X)=5{,}2$; $D(X)=15{,}36$; $\sigma(X)\approx 3{,}92$, $Mo_1=4$; $Mo_2=10$)

17. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший з них складе іспит, дорівнює 0,9. Для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює 0,8, для четвертого – 0,7. Випадкова величина $X$ – кількість студентів, що складуть цей іспит. Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини, середнє квадратичне відхилення, асиметрію та моду. (Відповідь: $M(X)=3{,}2$; $\sigma(X)\approx 0{,}79$; $As\approx$-0,75; $Mo=3$)

18. У першому ящику міститься 6 стандартних та 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані, у третьому – 5 стандартних та 5 бракованих деталей. З кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Випадкова величина $X$ – кількість стандартних деталей серед відібраних. Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини, середнє квадратичне відхилення, асиметрію та моду. (Відповідь: $M(X)=1{,}9$; $\sigma(X)\approx 0{,}8$; $As\approx$-0,038; $Mo=2$)

19. Садівник восени посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу та одну вишню. Ймовірність того, що саджанець яблуні весною прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність відповідно дорівнює 0,9 та 0,8. Випадкова величина $X$ – кількість саджанців, що прийметься навесні. Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини, її дисперсію та моду. (Відповідь: $M(X)=2{,}388$; $D(X)\approx 0{,}49$; $Mo=3$)

20. Математичне сподівання випадкової величини $X$ $M(X)=-2$, її дисперсія $D(X)=4$. Знайти $M(-4X+5)$, $D(-4X+5)$. (Відповідь: 13; 64)

21.Знайти $M\left(X^2\right)$, якщо $D(X)=4$, $M(X)=1$. (Відповідь:5)

22.Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $X$ – числа дільників навмання вибраного з множини $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ натурального числа. (Відповідь: $M(X)=2,6$; $D(X)=0,54$)

23.Випадкова величина $\xi$ може приймати три значення: –1, 0 та 1. Скласти її ряд розподілу, якщо $M(\xi)=0$, $D(\xi)=0,5$. (Відповідь: $P(\xi=-1)=P(\xi=1)=0,25$, $P(\xi=0)=0,5$).

24. Знайти дисперсію випадкової величини $X$ – кількості відмов елемента деякого пристрою при 10 незалежних випробуваннях, якщо ймовірність відмови цього елемента у кожному з випробувань дорівнює 0,9. (Відповідь: 0,48)

25. Знайти дисперсію випадкової величини $X$ – числа появ події $A$ у двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події $A$ у кожному випробуванні є однаковою та відомо, що $M(X)=0,9$. (Відповідь: 0,495)

26. Здійснюються незалежні випробування, у кожному з яких ймовірність настання події $A$ є однаковою. Знайти цю ймовірність, якщо дисперсія числа появ події $A$ у трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,63. (Відповідь: 0,3; 0,7)

27. Дискретна випадкова величина $X$ може приймати лише три можливих значення: $x_1=1$, $x_2$ та $x_3$, причому $x_1<x_2<x_3$. Ймовірності того, що $X=x_1$ та $X=x_2$, відповідно дорівнюють 0,3 та 0,2. Знайти закон розподілу випадкової величини $X$, якщо $M(X)=2,2$; $D(X)=0,76$. (Відповідь: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $p_3=0,5$)

28. Дискретна випадкова величина $X$ може приймати лише два можливих значення $x_1$ та $x_2$, причому $x_1<x_2$. Ймовірність того, що $X$ прийме значення $x_1$, дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу випадкової величини $X$, якщо $M(X)=2,6$; $\sigma_x=0,8$. (Відповідь: $x_1=1$, $x_2=3$, $p_2=0,8$)

29. Підкинуто $n$ гральних кубиків. Знайти дисперсію суми числа очок, що можуть з'явитися на всіх верхніх гранях. (Відповідь: $35n/12$)

30. Знайти початкові та центральні моменти першого, другого та третього порядку випадкової величини $X$, що може приймати лише два можливих значення $x_1=1$ та $x_2=3$ з відповідними ймовірностями $p_1=0,4$ та $p_2=0,6$.