

Практичне заняття № 3. Елементи теорії множини

1. Записати множини, перелічивши їх елементи:

1) $A = \{n \in \mathbb{R} : 0 \leq n \leq 25 \wedge n \text{ кратно } 3\}$

2) $A = \{n \in \mathbb{N} : n - \text{прості числа, менші } 22\};$

3) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{9} \leq 3^x < 10\right\};$

2. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин:

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x > 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}.$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+2} > x\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{x+2}} < \frac{1}{x}\right\}.$

Для доведення рівності множин використовуються наступні основні формули.

1. $A \cup B = B \cup A.$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$

3. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B).$

4. $A \cup A = A.$

5. $A \cup \emptyset = A.$

7. $A \cap B = B \cap A.$

8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$

9. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A).$

10. $A \cap \emptyset = \emptyset.$

11. $A \cap A = A.$

12. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

$$13. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$14. A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

$$15. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

$$16. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$17. \overline{\bar{A}} = A.$$

Приклад 3. Довести рівність множин: $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$.

Доведення. Для доведення рівності потрібно, використовуючи основні формули, перетворити ліву частину рівності до правої або праву частину рівності до лівої. Можна також показати, що обидві частини рівності дорівнюють одній і тій же множині. У даному прикладі перетворимо праву частину рівності до лівої.

$$(B \cup C) \setminus A = (B \cup C) \cap \bar{A} = (B \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A}) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$$

Тут ми використали формули (14) та (12).

4. Довести дані твердження або показати, що вони є невірними:

1) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; 2) $A \cap B = A \setminus (B \setminus A)$; 3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

$$4) \overline{(A \setminus B)} = \bar{A} \cup B;$$

$$5) (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

$$1) A \cup B = A \cup (B \setminus A); A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = E \cap (A \cup B) = A \cup B.$$

$$2) A \cap B = A \setminus (B \setminus A); A \setminus (B \setminus A) = A \setminus (B \cap \bar{A}) = A \cap \overline{(B \cap \bar{A})} = A \cap (\bar{B} \cup A) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap A) = (A \cap \bar{B}) \cup A = A, \text{ т.к. } (A \cap \bar{B}) \subset A.$$

$$\begin{aligned}
& A \setminus B = A \setminus (A \cap B); \quad A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \\
3) & = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset \cup (A \setminus B) = A \setminus B. \\
4) & \overline{(A \setminus B)} = \bar{A} \cup B; \quad \overline{(A \setminus B)} = \overline{(A \cap \bar{B})} = \bar{A} \cup B. \\
5) & (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \\
& (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C); \quad (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = \\
& = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \cup ((A \cap \bar{C}) \cap C) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \cup \emptyset = \\
& = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A \setminus B) \setminus C.
\end{aligned}$$

5. Якщо коло та пряма дотикається, що є перерізом множин точок цих фігур?
6. Нехай A – множина всіх ромбів, B – множина всіх прямокутників. Що буде перерізом цих множин?
7. Якою фігурою може виявиться перерізом 2 прямих на площині?
8. Нехай A – множина всіх простих дільників числа 30, B – множина простих дільників числа 42. Що є об'єднанням цих множин?
Кількість елементів множини, що є об'єднанням множини A з кількістю елементів $N(A)$ та множини B з кількістю елементів множини $N(B)$ дорівнює $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.
9. У школі 1400 учнів. З них 1250 кататися на лижах, 952 – на ковзанах. На лижах і на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів уміють кататися і на лижах і на ковзанах?
10. У магазині відвідувачі, звичайно, або один торт або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. Одного дня було продано 57 тортів та 36 коробок цукерок. Скільки всього було покупців,, якщо 12 чоловік купили і торт, і коробку цукерок?
11. Кожному студенту першого курсу поставили у відповідність номеру групу, у якій він навчається. Чи буде ця відповідність взаємно однозначною?
12. Знайти переріз множин A і B , якщо кожен елемент множини A можна подати у вигляді $4n + 2$, а кожен елемент множини B – у вигляді $3n$, $n \in \mathbb{N}$.

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Довести рівність множин:
 - 1) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$;
 - 2) $\bar{A} \cap (B \cup C) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$;
 - 3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} & (A \cap B) \cup (A \setminus B) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = ((A \cap B) \cup A) \cap ((A \cap B) \cup \bar{B}) = \\ 2. & = A \cap (A \cap (B \cup \bar{B})) = A \cap (A \cap E) = A. \\ 2. & \bar{A} \cap (B \cup C) = (B \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A}) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A). \\ 3. & (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \cap (\overline{B \cap C}) = (A \cap C) \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = \\ & = A \cap C \cap \bar{B} \cup (A \cap C \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B} \cap C \cup \emptyset = A \cap \bar{B} \cap C = (A \setminus B) \cap C. \end{aligned}$$