5. Найпростіші екстремальні задачі у економічних дослідженнях

5.1. Оптимізація функцій однієї змінної

Для дослідження функцій, що є моделями різноманітних економічних систем та процесів, широко використовують апарат диференціального числення, зокрема, методи дослідження функцій на екстремум. Застосування цих методів дає змогу знаходити оптимальні параметри економічних систем, для яких функціонування таких систем буде найбільш ефективним. Одним з найпростіших прикладів такого застосування похідної є визначення оптимального обсягу виробництва фірми-монополіста. Нехай монополіст, знаючи функцію попиту на свою продукцію, вирішує, скільки її виробити та за якою ціною продавати. Якщо монополіст встановить дуже високу ціну, то споживачі за певний період придбають у нього невелику кількість продукції. Якщо він вироблятиме більше продукції, йому доведеться знизити ціну.

Для того, щоб визначити оптимальний обсяг виробництва продукції, монополіст повинен визначити залежність між прибутком та обсягом виробленої продукції. Нехай задано функцію доходу $R = R(q)$ та функцію витрат $C = C(q)$. Тоді залежність прибутку фірми від обсягу виробництва її продукції визначається рівністю:

$$P(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q).$$

З'ясуємо, для якого обсягу виробництва продукції прибуток фірми є максимальним. Для цього нам потрібно знайти точку екстремуму функції прибутку. Розв'язання цієї задачі здійснюють з допомогою похідної. Розглянемо приклад.

Приклад 5.1. На основі статистичних даних про попит на продукцію фірми у минулі роки була встановлена залежність попиту q від ціни p за одиницю товару: $q = 100000 - 200p$, де q – кількість одиниць товару, що реалізуються за рік. Витрати на виробництво та реалізацію q одиниць товару складають: $C(q) = 150000 + 100q + 0,003q^2$. Розрахувати річний прибуток фірми та визначити його максимальне значення.

Розв'язання. Виразимо ціну товару через величину обсягу реалізації:

$$p(q) = \frac{100000}{200} - \frac{q}{200} = 500 - \frac{q}{200}.$$

Величина доходу (обсягу продаж) фірми: $R(q) = 500q - \frac{q^2}{200}$. Тоді річний прибуток знайдемо за формулою:

$$P(q) = R(q) - C(q) = 500q - \frac{q^2}{200} - \left(150000 + 100q + 0,003q^2\right) =$$

$$= -0,008q^2 + 400q - 150000.$$

Визначимо при якому значенні обсягу товару q прибуток є максимальним. Знайдемо $P'(q)$:

$$P'(q) = -0,016q + 400.$$

З рівності $P'(q) = -0,016q + 400 = 0$ знаходимо значення q, що є точкою екстремуму: $q = 25000$ одиниць товару. Знайдена точка екстремуму є точкою максимуму, оскільки $P''(q) = -0,016 < 0$. Максимальне значення прибутку при цьому складе $P(25000) = -0,008 \cdot (25000)^2 + 400 \cdot 25000 - 150000 = 4850000$ (г.о.)

Приклад 5.2 (оптимізація оподаткування підприємства). Нехай величина доходу R від залежності від кількості x реалізованого товару є функцією $R(x) = 16x - x^2$, а функція витрат на виробництво товару має вигляд $C(x) = x^2 + 1$. Визначити оптимальний для бюджету рівень податку на одиницю продукції та прибуток підприємства при такому оподаткуванні.

Розв'язання. Нехай t г.о. – податок з одиниці продукції. Тоді сумарний податок з x одиниць продукції складе $T = tx$ г.о. Залежність між прибутком підприємства та обсягом виробництва є функцією $F(x) = R(x) - C(x) - tx = 16x - 2x^2 - tx - 1$. Значення обсягу виробництва, що максимізує прибуток, визначається з рівності $F'(x) = 0$: $16 - 4x - t = 0 \Rightarrow x = 4 - \dfrac{t}{4}$. Підставивши це значення x у сумарну величину податку, отримаємо: $T = tx = t\left(4 - \dfrac{t}{4}\right) = 4t - \dfrac{t^2}{4}$. Знайдемо t, для якого T є максимальним. Маємо:

$$T'(t) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow t = 8.$$

При $t = 8$ г.о. максимальна величина прибутку досягається при $x = 4 - \dfrac{8}{4} = 2$. Тоді $F_{\max} = F(2) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = 7$ (г.о.)

Оптимальна з точки зору бюджету величина податку $T = 8 \cdot 2 = 16$ (г.о.). При відсутності оподаткування ($t = 0$) величина прибутку підприємства становить:

$F(x) = 16x - 2x^2 - 1.$

Тоді отримуємо:

$$F'(x) = 16 - 4x = 0 \Rightarrow x = 4,\ F_{\max} = F(4) = 16 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 - 1 = 31 \text{ (г.о.)}.$$

Цей приклад свідчить, що зменшення оподаткування стимулює зростання виробництва продукції і приводить до зростання прибутку підприємства від її реалізації.

Застосовані у розглянутих прикладах міркування лежать у основі теорії одноресурсної фірми. Нехай фірма випускає один товар, використовуючи при цьому лише один ресурс. Кількість товару дорівнює y: $y = F(x)$ – виробнича функція, де x – кількість ресурсу, витраченого у процесі виробництва. Будемо вважати, що виробнича функція є диференційовною та задовольняє наступні аксіоми.

Аксіома 1. На деякій частині області визначення виробничої функції (*економічній області*) ця функція є неспадною, тобто збільшення витрат ресурсу не спричиняє зменшення обсягу виробництва. У економічній області $F'(x) \geq 0$. Цю похідну називають *граничним (маржинальним) продуктом*.

Аксіома 2. Існує опукла підмножина S економічної області, для якої підмножина $\{x \in S : F(x) \geq c\}$ також є опуклою для всіх значень c і у цій підмножині друга похідна виробничої функції є недодатною.

Розглянемо економічний зміст цих аксіом. Перша аксіома відображає той факт, що у реальній економіці збільшення виробничих витрат за інших рівних умов не може спричинити зниження рівня виробництва продукції. Економічний зміст твердження про те, що друга похідна виробничої функції не є додатною, полягає у тому, що зі збільшенням витраченого ресурсу, починаючи з деякої величини, граничний продукт починає зменшуватися. Цю властивість виробничих систем у економіці називають *законом спадаючої віддачі*.

Нехай p – ціна одиниці ресурсу, v – ціна одиниці товару, який виробляє фірма. Величина прибутку $P(x)$ є функцією кількості x ресурсу, витраченого на виробництво за умови, що ціни є сталими. Тоді $P(x) = vF(x) - px$. Потрібно максимізувати функцію прибутку $P(x)$ для невід'ємних значень змінної x:

$$P(x) \to \max, \; x \geq 0.$$

Знайдемо стаціонарні точки функції прибутку з рівності $P'(x) = 0$. Отримуємо: $vF'(x) - p = 0 \Rightarrow F'(x) = \frac{p}{v}$. Оскільки $F''(x) \leq 0$, то знайдений корінь цього рівня є точкою максимуму. Отже, кількість ресурсу, який необхідно витратити для забезпечення оптимального обсягу виробництва продукції, що забезпечує максимум прибутку фірми, визначають з рівняння

$$F'(x) = \frac{p}{v}. \tag{5.1}$$

Розглянемо економічний зміст співвідношення (5.1). Величина $F'(x)$ є граничним продуктом, а $vF'(x)$ – це вартість граничного продукту, який додатково отримують з одиниці ресурсу. Оскільки вартість одиниці ресурсу дорівнює р, отримуємо стан рівноваги: після виробництва та реалізації додаткової одиниці товару отримуємо скільки ж коштів, скільки витратили на придбання одиниці ресурсу. Отже, збільшувати обсяг виробництва доцільно доти, поки не почне виконуватися співвідношення (5.1), тобто поки не буде досягнута рівність доходу від реалізації додаткової одиниці продукції та витрат на придбання потрібного для цього ресурсу. Нехай $x = x^*$ – розв'язок рівняння (5.1). Він залежить від цін p та v, тобто $x^* = x^*(p,v)$. Цю функцію цін називають функцією *попиту на ресурс з боку фірми*. Якщо діють ринкові ціни p та v, то фірма визначає необхідний обсяг придбання ресурсу згідно з цією функцією $x^*(p,v)$. Підставивши $x^*(p,v)$ у виробничу функцію $y = F(x)$, отримаємо вираз для обсягу виробництва продукції у вигляді функції цін p та v: $y = F(x^*(p,v))$. Отриману функцію називають *функцією пропозиції продукції фірми*.

Приклад 5.2. Обсяг виробництва деякого товару залежить від витрат людської праці x (кількість робітників), причому цю залежність можна представити виробничою функцією $y = 6\sqrt{x}$. Ціна одиниці товару 40 г.о., заробітна плата робітника складає 30 г.о. за години. Інші витрати, крім оплати праці, не враховуються. Знайти оптимальну кількість робітників, що забезпечує максимальний прибуток підприємства.

Розв'язання. Якщо кількість робітників дорівнює x, то прибуток підприємства становить: $P(x) = 40 \cdot 6\sqrt{x} - 30x$. Знайдемо максимум функції прибутку за умови, що $x > 0$. Похідна цієї функції має вигляд:

$$P'(x) = \frac{120}{\sqrt{x}} - 30.$$

Розв'язавши рівняння $P'(x) = 0$, отримуємо $x = 16$. При цьому значенні x друга похідна $P''(x) = -60 \cdot x^{-3/2} = -\frac{60}{x\sqrt{x}} < 0$, тому значення $x = 16$ надає прибутку максимального значення.

Цей же результат можна отримати, безпосередньо використавши формулу (4.6). Дійсно, тоді маємо $F'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{30}{40} \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$.

Застосуємо апарат диференціального числення для дослідження зв'язку між прибутком фірми та величиною податкових надходжень у державу при заданій ставці податку. Нехай y – обсяг продукції, виробленої на підприємстві, а ціна на продукцію лінійно зменшується зі збільшенням її обсягу: $v(y) = a - by$. Залежність витрат I від обсягу виробництва y є квадратичною: $I(y) = cy^2 + dy + e$, де a, b, c, d, e – деякі додатні константи. Нехай податок є акцизом зі ставкою t, тобто з кожної проданої одиниці товару платять податок t г.о., а з усього обсягу товару платять податок $G=ty$. При цьому фірма отримує прибуток

$$P(y) = y(a - by) - cy^2 - dy - e - ty.$$

Визначимо обсяг виробництва, що максимізує прибуток. Для нього повинна виконуватись рівність $P'(y) = 0$. Отже, отримуємо:

$$P'(y) = a - 2by - 2cy - d - t = 0 \Rightarrow 2(b + c)y = a - d - t \Rightarrow y = \frac{a - d - t}{2(b + c)}.$$

Враховуючи, що $P''(y) = -2b - 2c < 0$, отримане значення y надає функції прибутку максимальне значення. Наявність акцизного податку спричиняє зменшення оптимального обсягу виробництва та відповідного прибутку підприємства.

Для прогнозування дій уряду щодо встановлення акцизного податку t, обчислимо податковий доход держави:

$$G = ty = \frac{(a - d - t)t}{2b + c},$$

тобто ця функція є квадратичною відносно t, а її графіком є парабола, гілки якої спрямовані вниз. Максимум податкового доходу досягається при значенні t, що є абсцисою цієї вершини, тобто $t^* = \frac{a-d}{2}$. Відповідне значення податкового доходу отримаємо, підставивши це значення t у вираз для $G(t)$: $G^* = \frac{(a-d)^2}{8(b+c)}$. Для цього значення t^* оптимальний обсяг виробництва

$$y^* = y(t^*) = \frac{a-d-t^*}{2(b+c)} = \frac{(a-d)^2}{16(b+c)-e}.$$

Прикладом застосування методів дослідження функцій на екстремум є відома у логістиці формула Вілсона.

Розглянемо роботу ідеального складу. Такий склад відпускає своїм клієнтам продукцію, що знаходиться на зберіганні (сировину, матеріали, запасні частини тощо) рівномірно, зі сталою швидкістю M одиниць товару за одиницю часу. Нехай h – витрати на зберігання одиниці запасу за одиницю часу, T – час, на протязі якого запас повністю витрачається, тобто період циклу, на протязі якого склад витрачає запас. На початку циклу на склад надходить запас, обсяг якого становить Q одиниць.

Склад має адміністративні (сталі) витрати K, величина яких не залежить від величини запасу. По мірі зменшення запасу на складі здійснюється організація нового постачання на склад. Чергова партія запасу прибуває на склад у момент повної витрати попередньої партії. Будемо вважати, що розвантаження нової партії здійснюється миттєво.

Задача полягає у мінімізації середніх витрат складу за одиницю часу. Якщо величина партії постачання дорівнює Q, то тривалість циклу витрачання запасу становить $\frac{Q}{M}$, а середні за одиницю часу адміністративні витрати становлять $\frac{K \cdot M}{Q}$ г.о. Середня величина запасу на складі дорівнює $\frac{Q}{2}$, тому середні змінні витрати на зберігання запасу на одиницю часу становлять $\frac{hQ}{2}$. Таким чином, загальні середні витрати за одиницю часу становлять $G = \frac{KM}{Q} + \frac{hQ}{2}$. Знайдемо величину Q партії постачання на склад, що мінімізує запас. Для цього знайдемо критичні точки функції $G(Q)$:

$$G'(Q) = -\frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow Q = Q^* = \sqrt{\frac{2KM}{h}}.$$

При всіх можливих значеннях Q, у тому числі і Q^*, друга похідна $G''(Q) = \frac{2KM}{Q^3} > 0$, тому при $Q = Q^*$ функція $G(Q)$ досягає мінімуму. Отже, отримали величину партії постачання, при якій середні витрати зберігання запасу на складі є мінімальними:

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}. \tag{5.2}$$

Формулу (5.2) називають *формулою Вілсона*. При цьому мінімальна величина середніх витрат $G_{\min} = \sqrt{2KMh}$.

З формули (5.2) можна отримати критерій оптимальності обсягу партії постачання: розмір партії постачання є оптимальним тоді і лише тоді, коли на протязі циклу зберігання адміністративні витрати дорівнюють змінним витратам на зберігання запасу. Дійсно, при оптимальному розмірі партії постачання $Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$ адміністративні витрати за цикл дорівнюють *K*, а змінні витрати на зберігання запасу за цикл дорівнюють

$$\frac{hQ}{2} \cdot \frac{Q}{M} = \frac{hQ^2}{2M} = \frac{h \cdot 2KM}{h \cdot 2M} = K.$$

Навпаки, з умови рівності адміністративних та змінних витрат на зберігання запасу отримуємо:

$$K = h \cdot \frac{Q}{M} \cdot \frac{Q}{2} = \frac{hQ^2}{2M} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}},$$

тобто величину партії постачання, що співпадає з отриманою за формулою Вілсона.

Приклад 5.3. На склад цемент надходить у баржі по 1500 т. Адміністративні витрати дорівнюють 2000 г.о. Змінні витрати зберігання цементу оцінюються в 0,1 г.о. за добу на 1 т цементу. Кожної доби склад відпускає 50 т цементу. Знайти витрати на зберігання цементу на протязі циклу зберігання. Визначити оптимальний обсяг партії постачання.

Розв'язання. Середній обсяг цементу, що зберігається на складі, дорівнює $\frac{1500}{2} = 750$ т. Отже, середні змінні витрати на зберігання цементу за добу становлять $750 \cdot 0{,}1 = 75$ г.о. Тривалість циклу складає $\frac{1500}{50} = 30$ днів. Отже, змінні витрати зберігання за цикл складають $75 \cdot 30 = 2250$ г.о. З врахуванням адміністративних витрат отримуємо, що загальні витрати зберігання запасу за цикл становлять 2000+2250=4250 (г.о.)

Оптимальний обсяг партії постачання розрахуємо за формулою Вілсона:

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 50}{0{,}1}} \approx 1420 \text{ т.}$$

5.2 Оптимізація функцій кількох змінних. Задача максимізації корисності

У економічних дослідженнях задачі оптимізації функцій кількох змінних – це задачі, у яких потрібно визначити, для яких значень аргументу функції, що моделюють певні економічні величини (прибуток, витрати, обсяг виробництва, корисність тощо), досягають екстремальних значень. Найчастіше це задачі на умовний екстремум. Прикладом такої задачі є задача оптимізації вибору споживача.

Будемо вважати, що ціна i-го товару дорівнює p_i, вектор цін $\overline{P}=\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$, а дохід споживача, який він може витратити на придбання товарів, дорівнює Q. На придбання набору товарів $\overline{X}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, $x_i>0, i=1,2,...,n$ він може витратити кошти, що дорівнюють $p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=\overline{P}\cdot\overline{X}$. Отже, споживач може придбати лише такий набір товарів, для якого виконується нерівність $\overline{P}\cdot\overline{X}\le Q$. Множину таких наборів називають *бюджетною множиною* B. Бюджетна множина B є замкненою та обмеженою. *Межею бюджетної множини* називають множину $G=\left\{\overline{X}\in B:\overline{P}\cdot\overline{X}=Q\right\}$. Межа G є відрізком на площині у випадку двох товарів, площиною у просторі для трьох товарів, гіперплощиною у просторі n товарів.

Споживач, маючи дохід, бажає його витрати з максимальною корисністю для себе, тобто перед ним виникає задача максимізації функції корисності. Йому потрібно визначити набір товарів $\overline{X}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, який максимізує його функцію корисності $u\left(\overline{X}\right)=u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ при виконанні бюджетного обмеження $\overline{P}\cdot\overline{X}\le Q$. Отже, маємо екстремальну задачу у n-вимірному просторі:

$$\begin{cases}u\left(\overline{X}\right)\to\max,\\ \overline{X}\in B\left(\overline{P},Q\right).\end{cases}\qquad(5.3)$$

Оскільки $u\left(\overline{X}\right)$ є неперервною функцією, визначеною на замкненій обмеженій бюджетній множині B, то вона досягає на ній максимуму, тобто розв'язок задачі (5.3) існує. При цьому будь-яка точка $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$, на якій функція корисності досягає максимуму, лежить на межі G бюджетної множини. Дійсно, допустимо, що деяка точка максимуму Z не лежить на межі бюджетної множини G. Тоді $\overline{P}\cdot\overline{Z}<Q$. У цьому випадку у споживача залишається невикористаною сума коштів $Q-\overline{P}\cdot\overline{Z}$ і на неї можна придбати додаткові товари, тобто отримати новий набір товар, у якому кількості товарів є більшими, ніж у X^*. Для цього набору значення функції корисності буде більшим, ніж для набору Z. Отримали протиріччя з твердженням, що Z – точка максимуму на бюджетній множині.

Теорема. Якщо функція $u\left(\overline{X}\right)$ є строго опуклою вгору на бюджетній множині B, то на цій множині існує єдина точка максимуму. З курсу математичного аналізу згадаємо, що функція n змінних $u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ є строго опуклою вгору на деякій множині, якщо для будь-яких точок X та Y цієї множини та для будь-якої сталої $0<\lambda<1$ $u\left(\lambda\overline{X}+(1-\lambda)\overline{Y}\right)>\lambda u\left(\overline{X}\right)+(1-\lambda)u\left(\overline{Y}\right)$.

Доведення. Нехай A та C – дві точки максимуму, тобто $u\left(X\right)\le u\left(A\right)=u\left(C\right)$ для будь-якої точки X бюджетної множини B. Точки A та C є точками максимуму, тому вони розташовані на межі бюджетної множини: $\overline{P}\cdot\overline{A}=\overline{P}\cdot\overline{C}=Q$. Розглянемо точку E, таку, що $\overline{E}=\frac{1}{2}\left(\overline{A}+\overline{C}\right)$. Тоді $\overline{P}\cdot\overline{E}=\frac{1}{2}\overline{P}\cdot\left(\overline{A}+\overline{C}\right)=\frac{Q}{2}+\frac{Q}{2}=Q$. Отже, $E\in B$. На цій множині функція $u\left(X\right)$ є строго опуклою вгору, отже, $u\left(E\right)>u\left(A\right)=u\left(C\right)$. Отримали протиріччя з тим, що точки A та C є точками максимуму функції $u\left(X\right)$, яке доводить теорему.

Отже, якщо функція корисності споживача строго опукла вгору, то у бюджетній множині існує її єдина точка максимуму, тобто єдиний набір товарів, що максимізує корисність для споживача. Цю єдину точку максимуму X^* називають *точкою попиту* споживача.

Ми з’ясували, що точка попиту лежить на межі бюджетної множини. Отже, для знаходження цієї точки отримуємо задачу дослідження функції багатьох змінних на екстремум за наявності обмеження у формі рівності, тобто задачу Лагранжа:

$$\begin{cases} u\left(X\right)\to\max, \\ \overline{P}\cdot\overline{X}=Q. \end{cases} \tag{5.4}$$

Розв’яжемо цю задачу методом Лагранжа. Складемо функцію Лагранжа

$$L\left(X,\lambda\right)=u\left(X\right)+\lambda\left(Q-\overline{P}\cdot\overline{X}\right).$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму функції кількох змінних, знайдемо частинні похідні функції Лагранжа та прирівняємо їх до нуля. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0,\, i=1,2,...,n, \\ \overline{P}\cdot\overline{X}=Q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\lambda p_i,\, i=1,2,...,n \\ \overline{P}\cdot\overline{X}=Q. \end{cases} \tag{5.5}$$

З останньої системи випливає, що точка попиту лежить на межі бюджетної множини і у цій точці вектор граничних корисностей $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ пропорційний вектору цін $\overline{P}$, тобто у точці попиту відношення граничної корисності будь-якого товару з набору до ціни цього товару є сталою величиною. Отже, взаємозамінними є кількості товарів, що мають однакову ціну. Споживачу невигідно споживати один товар замість іншого, що має таку ж ціну, і змінювати структуру споживання, оскільки така зміна може лише погіршити корисність для нього товарів з набору.

Приклад 5.4. Знайти точку попиту споживача з функцією корисності $u\left(x_1,x_2\right)=\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}$, .якщо доход споживача, який він може витратити на товари набору, дорівнює Q, а вектор цін товарів набору $\overline{P}=\left(p_1,p_2\right)$.

Розв’язання. Частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$. Запишемо систему рівнянь (5.5):

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = Q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} : \dfrac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \Rightarrow \\ p_1x_1 + p_2x_2 = Q. \end{cases} \begin{cases} p_1x_1 = p_2x_2, \\ 2p_1x_1 = Q. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{p_1}{p_2}x_1, \\ x_1 = \dfrac{Q}{2p_1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{Q}{2p_1}, \\ x_2 = \dfrac{Q}{2p_2}. \end{cases}$$

5.3 Оптимізація виробничої програми підприємства

Розглянемо задачу про оптимізацію виробничої програми підприємства, що при виробництві товару витрачає n видів ресурсів і виробнича функція підприємства має вигляд: $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$, де y – обсяг виробництва товару, x_i – обсяг витрат i-го ресурсу.

У п. 5.1 розглянуто випадок, коли підприємство виробляє один товар. Було показано, що збільшувати обсяг виробництва доцільно доти, поки не буде досягнута рівність доходу від реалізації додаткової одиниці продукції та витрат на придбання потрібного для цього ресурсу, тобто при оптимальному обсягу виробництва граничний доход підприємства дорівнює його граничним витратам. Аналогічний результат отримуємо, якщо виробнича функція підприємства є функцією кількох змінних. Будемо вважати, що виробнича функція підприємства $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ є неперервно диференційовною, її частинні похідні є невід'ємними у її області визначення, а функція є опуклою вгору у цій області.

Нехай $\overline{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор цін на ресурси, v – ціна одиниці товару, що випускається на підприємстві, всі ціни вважаються сталими. Прибуток підприємства W є функцією витрат ресурсів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при цьому маємо:

$$W(X) = vy - \overline{P} \cdot \overline{X} = vF(X) - \overline{P} \cdot \overline{X}.$$

Отже, отримуємо задачу оптимізації функції кількох змінних:

$$\begin{cases} W(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max, \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{5.6}$$

Використавши необхідну умову екстремуму функції кількох змінних (рівність нулю її частинних похідних), отримуємо:

$$v\frac{\partial F}{\partial x_i} = p_i, i = 1, 2, ..., n. \tag{5.7}$$

Точка $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, координати якої визначаємо з системи (5.7), є стаціонарною точкою функції прибутку. Оскільки виробнича функція опукла вгору на своїй області визначення, опуклою вгору є й функція прибутку (додавання до функції лінійної функції $\overline{P} \cdot \overline{X}$ не змінює характеру її опуклості), тому знайдена стаціонарна точка X^* функції прибутку є її точкою максимуму. Координати цієї точки визначають кількість ресурсів, потрібних для виробництва оптимального обсягу продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Для задачі оптимізації виробничої функції кількох змінних вектор частинних похідних $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$, тобто вектор-градієнт виробничої функції називають *граничним вектором-продуктом* або *вектором граничних продуктів*. Цей вектор відображає реакцію об'єму виробництва товару на зміну витрат ресурсів. З співвідношення (5.7) випливає, що у оптимальній точці вектор граничних продуктів пропорціональний вектору цін, причому коефіцієнтом пропорційності є ціна одиниці продукції. Оптимальний розв'язок (5.7) єдиний для всіх додатних значень цін на ресурси $p_i, i = 1, 2, ..., n$ та ціни v на одиницю товару. Таким чином, отримуємо вектор-функцію $X^* = X^*\left(v, \overline{P}\right)$. Цю функцію називають *функцією попиту на ресурси* з боку підприємства у залежності від цін на них та ціни на товар, що виробляє це підприємство. Якщо ці ціни відомі, виробник за функцією попиту на ресурси визначає обсяг необхідних для виробництва ресурсів, а підставивши ці значення у виробничу функцію, знаходить оптимальний обсяг виробництва, що забезпечує максимальний прибуток.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте необхідні та достатні умови екстремуму для функцій однієї змінної.
2. Сформулюйте необхідні та достатні умови екстремуму для функцій кількох змінних.
3. Сформулюйте задачу Лагранжа на умовний екстремум.
4. Наведіть загальний вигляд функції Лагранжа.
5. Наведіть формулу Вілсона.
6. Як визначають функцію попиту на ресурс та функцію пропозиції товару для підприємства?
7. Добові витрати при плаванні судна складаються з двох частин: сталої, що дорівнює *a* г.о. та змінної, що зростає пропорційно кубу швидкості. При якій швидкості плавання судна буде найбільш економним?
8. Нехай у короткостроковому періоді виробнича функція залежить лише від чисельності персоналу і має вигляд $Q = 6L^2 - 0,2L^3$, де Q – обсяг виробництва, L – кількість персоналу. При якій чисельності персоналу обсяг виробництва є максимальним?

9. Підприємство працює на двох ринках. Функції попиту (залежності ціни від попиту) для кожного з них мають вигляд: $P_1 = 500 - Q_1$, $P_2 = 360 - 1{,}5Q_2$. Сумарна функція витрат має вигляд: $C = 50000 + 20Q$. Яку цінову політику повинно проводити підприємство (які ціни воно повинно встановити для першого та другого ринків), щоб його прибуток був максимальним?
10. Фірма виробляє два види товарів, A_1 та A_2, і продає їх по ціні 1000 г.о. та 800 г.о. відповідно. Функція витрат має вигляд: $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$, де Q_1 та Q_2 позначають відповідно обсяги виробництва товарів, відповідно A_1 та A_2. Знайдіть значення Q_1 та Q_2, при яких фірма отримуватиме максимальний прибуток?
11. Нехай виробнича функція деякого підприємства має вигляд: $Q = F(K, L) = 4K \cdot L + L^2$. Нехай витрати на одиницю капіталу (K) та одиницю праці (L) становлять відповідно 1 г.о. та 2 г.о. Визначте величину витрат на капітал та працю при максимальному обсязі виробництва продукції, якщо загальна сума витрат становить 105 г.о.
12. У невеликій теплиці щодня збирають врожай огірків y, що залежить від кількості робітників x: $y = 4\sqrt{x} + 4\ln x$. Знайдіть оптимальну кількість робітників, якщо денна заробітна плата робітника дорівнює ціні 4 кг огірків.
13. Знайдіть функцію попиту на ресурс та функцію пропозиції продукції підприємства з виробничою функцією $y = v\ln(x+1)$, де y – обсяг виробництва, x – витрати ресурсу, v – вартість одиниці продукції, p – ціна одиниці ресурсу, $p < v$.
14. Апельсини привозять у магазин на машині. Постійні витрати у розрахунку на одну поїздку складають 50 г.о. Щодобово магазин продає 2 т апельсинів. Витрати на зберігання складають 0,2 г.о. за 1 кг апельсинів за добу. За формулою Вілсона розрахуйте оптимальний розмір партії постачання апельсинів, знайдіть періодичність їх постачання у магазин, середні щодобові витрати. Підрахуйте ці витрати при розмірах партії постачання 2 т та 0,5 т.
15. При цінах $\overline{P} = (p_1, p_2)$ та доході Q знайти точку попиту для функції корисності $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.
16. Підприємство за місяць виробляє продукції на 10 млн. г.о., його основні фонди коштують також 10 млн. г.о. Економісти підрахували, що для збільшення обсягу виробництва на 1 млн. г.о. необхідно придбати обладнання на 3 млн. г.о. Відомо, що виробнича функція підприємства є функцією Кобба-Дугласа при $\alpha + \beta = 1$, чисельність робітників дорівнює 1000 осіб. Знайти виробничу функцію підприємства.
17. Основні фонди фермерського господарства коштують 10 млн. г.о. На ньому працюють 9 робітників. Для збільшення доходу фермер запросив у господарство ще одного працівника і побачив, що його доход збільшився на 8% і склав 13 млн. г.о. Виробництво сільськогосподарської продукції у цьому господарстві описується виробничою функцією Кобба-Дугласа при $\alpha + \beta = 1$. Знайти цю функцію.
18. Підприємець вирішив створити невелике автотранспортне підприємство з надання послуг населенню. Ознайомившись зі статистичними даними, він

побачив, що приблизна залежність щоденної виручки від кількості автомобілів A та кількості працівників N виражається формулою $Y = 90000 \cdot A^{1/2} \cdot N^{1/4}$. Амортизаційні та інші витрати на один автомобіль становлять 40000 г.о., щоденна зарплата працівникам становить 10000 г.о. Знайти оптимальну кількість працівників та автомобілів.