Тема. λ-матриці та їх еквівалентність

Многочленною матрицею або λ-матрицею називають матрицю $A(\lambda)$ елементи якої є многочленами від λ

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетворюваннями λ-матриці називають операції:

1) множення рядка (стовпця) матриці на число $c \neq 0$;

2) додавання до будь-якого рядка (стовпця) іншого рядка (стовпця), помноженого на довільний многочлен $\varphi(\lambda)$;

3) заміна місцями двох будь-яких рядків (стовпців) матриці.

Канонічною λ-матрицею називають λ-матрицю, якій притаманні наступні властивості:

1) вона є діагональною, тобто $\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$;

2) будь-який многочлен $e_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$ націло ділиться на многочлен $e_{i-1}(\lambda)$;

3) старший коефіцієнт кожного з ненульових многочленів $e_i(\lambda)$ дорівнює одиниці.

Зауважимо, якщо серед многочленів $e_i(\lambda)$ є нульові многочлени, то вони (за властивістю 2) займають останні місця на головній діагоналі. Якщо серед многочленів $e_i(\lambda)$ є многочлени нульового степеню, то вони (за властивістю 3) дорівнюють 1 і (за властивістю 2) займають перші місця на головній діагоналі.

Приведення матриці $A(\lambda)$ до канонічного вигляду.

Серед многочленів $a_{ij}(\lambda)$ знаходимо многочлен найменшого степеню та перестановкою рядків та стовпців переміщуємо його в верхній лівий кут – робимо його елементом $a_{11}(\lambda)$. Після цього знаходимо частки та остачі від ділення многочленів $a_{i1}(\lambda)$ та $a_{1j}(\lambda)$ на $a_{11}(\lambda)$:

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda) + r_{i1}(\lambda),\ i = 2,3,\ldots,n$$

$$a_{1j}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{1j}(\lambda) + r_{1j}(\lambda),\ j = 2,3,\ldots,n.$$

Якщо хоча б одна з остач $r_{i1}(\lambda)$, $r_{1j}(\lambda)$, $i, j = 2,3,\ldots,n$ не дорівнює нулю, то можна понизити степінь елемента $a_{11}(\lambda)$. Нехай, наприклад, $r_{1k}(\lambda) \neq 0$. Віднімемо від k -го стовпця перший стовпець, помножений на $q_{1k}(\lambda)$. Після цього k -й стовпець міститиме в першому рядку многочлен $r_{1k}(\lambda)$, степінь якого нижчий степеня $a_{11}(\lambda)$. Переставимо перший та k -й стовпці і отримаємо в верхньому лівому куті матриці многочлен нижчого степеня. Після цього процес зниження степеня многочлена, розташованого в лівому верхньому куті матриці можна продовжити. Після скінченного числа таких перетворень отримаємо остачі $r_{i1}(\lambda)$, $r_{1j}(\lambda)$, $i, j = 2,3,\ldots,n$ рівні нулю. Тоді перший рядок матриці помножимо на $q_{i1}(\lambda)$ і віднімемо від i -го рядка (для всіх $i = 2,3,\ldots,n$). Потім перший стовпець отриманої матриці помножимо на $q_{i1}(\lambda)$ і віднімемо від j -го стовпця (для всіх $j = 2,3,\ldots,n$). В результаті матриця $A(\lambda)$ набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^1(\lambda) & \ldots & a_{2n}^1(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^1(\lambda) & \ldots & a_{nn}^1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Якщо при цьому хоча б один з елементів $a_{ij}^1(\lambda)$ $i = 2,3,\ldots,n$, $j = 2,3,\ldots,n$, не ділиться без остачі на $a_{11}(\lambda)$, то додаємо до першого рядка рядок, який містить цей елемент, і знову маємо попередню ситуацію, і можемо замінити многочлен

$a_{11}(\lambda)$ на многочлен меншого степеня. Таким чином, після скінченного числа елементарних перетворень отримаємо матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

у якій всі елементи $b_{ij}(\lambda)$ діляться без остачі на $a_1(\lambda)$. Якщо серед елементів $b_{ij}(\lambda)$ є відмінні від тотожного нуля, то, продовжуючи описаний процес зведення для рядків і стовпців із номерами $2,3,\dots,n$, отримаємо матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \dots & c_{3n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n3}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

де $a_2(\lambda)$ ділиться без остачі на $a_1(\lambda)$, а кожен із многочленів ділиться без остачі на $a_2(\lambda)$.

Продовжуючи цей процес далі, ми прийдемо врешті-решт до матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де многочлени $a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_r(\lambda)$, $r \le n$ не дорівнюють тотожно нулю і кожен із них ділиться без остачі на попередній.

Помноживши перші рядки цієї матриці на числові множники, ми отримаємо многочлени, старші коефіцієнти яких дорівнюють одиниці.

Твердження. *Будь-яка λ-матриця елементарними перетвореннями зводиться до канонічного вигляду*.

Нехай λ-матриця $A(\lambda)$ має ранг r, тобто у цієї матриці є відмінні від тотожного нуля мінори порядку r, а всі мінори порядку вище r дорівнюють нулю тотожно відносно λ. Позначимо через $D_k(\lambda)$ найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку матриці $A(\lambda)$. Старший коефіцієнт найбільшого спільного дільника беремо рівним одиниці. Розглянемо многочлени

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \ldots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) \equiv 1.$$

Кожен многочлен у цій послідовності ділиться на наступний: мінор k-го порядку дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка на їхні алгебраїчні доповнення (а це з точністю до знаку мінори порядку $k-1$) кожен доданок цієї суми ділиться на $D_{k-1}(\lambda)$, а, значить, і $D_k(\lambda)$ ділиться на $D_{k-1}(\lambda)$.

Через $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_r(\lambda)$ позначимо частки

$$e_1(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}, e_2(\lambda) =, \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \ldots, e_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}.$$

Многочлени $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_r(\lambda)$ називають *інваріантними многочленами* матриці $A(\lambda)$. Якщо матриця $A(\lambda)$ має канонічний вигляд, то

$$D_1(\lambda) = a_1(\lambda), \quad D_2(\lambda) = a_1(\lambda)a_2(\lambda), \ldots, D_r(\lambda) = a_1(\lambda)a_2(\lambda)\cdots a_r(\lambda).$$

Тобто

$$e_1(\lambda) = a_1(\lambda), e_2(\lambda) = a_2(\lambda), \ldots, e_r(\lambda) = a_r(\lambda).$$

Твердження. *Многочленна матриця $A(\lambda)$ завжди еквівалентна канонічній діагональній матриці* $\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e_r(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, *де* r - *ранг матриці* $A(\lambda)$.

Наслідок. Для того, щоб многочленні матриці однакового розміру $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ були еквівалентні, необхідно і достатньо, щоб вони мали ті самі інваріантні многочлени.

Розкладемо інваріантні многочлени $e_1(\lambda), e_2(\lambda),..., e_r(\lambda)$ матриці $A(\lambda)$ на незвідні в даному числовому полі K множники:

$$e_1(\lambda) = [p_1(\lambda)]^{m_1}[p_2(\lambda)]^{m_2}...[p_s(\lambda)]^{m_s},$$

$$e_2(\lambda) = [p_1(\lambda)]^{n_1}[p_2(\lambda)]^{n_2}...[p_s(\lambda)]^{n_s},$$

………………………………………..

$$e_r(\lambda) = [p_1(\lambda)]^{l_1}[p_2(\lambda)]^{l_2}...[p_s(\lambda)]^{l_s},$$

$$0 \le m_k \le n_k \le ... \le l_k, \quad k = 1,2,...,s.$$

Тут $p_1(\lambda), p_2(\lambda),..., p_s(\lambda)$ - усі різні незвідні в полі K многочлени, які входять до складу многочленів $e_1(\lambda), e_2(\lambda),..., e_r(\lambda)$. Старші коефіцієнти всіх многочленів дорівнюють одиниці.

Усі відмінні від одиниці степені серед многочленів $[p_1(\lambda)]^{m_1},...,[p_s(\lambda)]^{l_s}$ називають *елементарними дільниками* матриці $A(\lambda)$ в полі K.

Приклад 1. Елементарними перетвореннями звести λ-матрицю до діагонального канонічного вигляду $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}_{Ic.+IIIc.} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}_{IIIp.-Ip.} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}_{II\,c.-\lambda^2\cdot I\,c.} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}_{IIIc.-\lambda\cdot Ic.} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}_{IIIc.+IIc.} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}_{(-1)\cdot IIIc.} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}.$$

Інваріантні многочлени: $e_1(\lambda)=1, e_2(\lambda)=\lambda, e_3(\lambda)=\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)$.

Елементарні дільники: $\lambda, \lambda, (\lambda+1)$.

Приклад 2. З'ясувати, чи будуть еквівалентними вказані λ-матриці

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & -1 \\ 6 & \lambda+7 & -6 \\ 10 & 9 & \lambda-9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \underset{Ip.\leftrightarrow IIIp.}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \lambda \\ -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{IIIp.+\lambda\cdot Ip.}{\overset{IIp.-Ip.}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & -1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{IIIc.+\lambda\cdot Ic.}{\overset{IIc.-Ic.}{\sim}}$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{IIIp.+IIp.}{\overset{(-1)\cdot p.}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 \end{pmatrix} \underset{IIIc.+IIc.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 \end{pmatrix}$$

Інваріантні многочлени $e_1(\lambda)=1, e_2(\lambda)=\lambda+1, e_3(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)$.

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & -1 \\ 6 & \lambda+7 & -6 \\ 10 & 9 & \lambda-9 \end{pmatrix} \overset{Ic.\leftrightarrow IIIc.}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda+2 \\ -6 & \lambda+7 & 6 \\ \lambda-9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \overset{IIIc.+(\lambda+2)\cdot Ic.}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & \lambda+7 & -6\lambda-6 \\ \lambda-9 & 9 & \lambda^2-7\lambda-8 \end{pmatrix} \underset{IIIp.+(\lambda-9)\cdot I}{\overset{IIp.-6\cdot Ip}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+7 & -6\lambda-6 \\ 0 & 9 & \lambda^2-7\lambda-8 \end{pmatrix} \overset{IIp.\leftrightarrow Ip}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & \lambda^2-7\lambda-8 \\ 0 & \lambda+7 & -6\lambda-6 \end{pmatrix} \underset{9\cdot IIIp.-(\lambda+7)\cdot II}{\overset{(-1)\cdot Ip}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & \lambda^2-7\lambda-8 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+3\lambda+2 \end{pmatrix} \underset{9\cdot IIIc.-(\lambda^2-7\lambda-8)\cdot IIc.}{\overset{(-1)\cdot Ip}{\sim}}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & \lambda^2-7\lambda-8 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+3\lambda+2 \end{pmatrix} \underset{9\cdot IIIc.-(\lambda^2-7\lambda-8)\cdot IIc.}{\overset{IIc.:9}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+3\lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-3\lambda-2 \end{pmatrix}$$

Інваріантні многочлени $e_1(\lambda)=1, e_2(\lambda)=1, e_3(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

Матриці не еквівалентні.

Приклад 3. Елементарними перетвореннями звести λ-матрицю до діагонального канонічного вигляду

а) $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

б) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+1\\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1\end{pmatrix}$

в) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+5\end{pmatrix}$

г) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2\\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda\\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda\end{pmatrix}$