ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/363579461

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина II «Нерівності в шкільному курсі математики»

Chapter · September 2022

CITATIONS
0

READS
35

4 authors, including:

Valentyn Sobchuk
National Taras Shevchenko University of Kyiv
68 PUBLICATIONS 202 CITATIONS
SEE PROFILE

Svitlana Kushnirenko
National Taras Shevchenko University of Kyiv
22 PUBLICATIONS 23 CITATIONS
SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

Project Функциональная устойчивость информационных систем View project

Project 2019 IEEE 5th International Conference Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments (APUAVD) View project

All content following this page was uploaded by Valentyn Sobchuk on 15 September 2022.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

механіко-математичний факультет

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики»

Частина II «Нерівності в шкільному курсі математики»

для студентів спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)»

механіко-математичного факультету

Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Цань В.Б.

Київ – 2022

Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Цань В.Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІ «Нерівності в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» механіко-математичного факультету 2022. – 123 с.

Рецензенти:

Працьовитий М.В., доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України;

Радченко В.М., доктор фізико-математичних наук, професор.

Рекомендовано до друку

Вченою радою механіко-математичного факультету

протокол № 2 від 15 вересня 2022

У методичному посібнику наведено короткі відомості про нерівності. Дано приклади розв’язування усіх типів нерівностей, які вивчаються в курсі математики в закладах загальної середньої освіти: нерівностей з параметрами, нерівностей з абсолютними величинами та ірраціональних нерівностей. Запропоновано низку завдань для самостійного розв’язування для студентів спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» механіко-математичного факультету.

Зміст

Вступ

Методичний посібник адресований насамперед студентам освітньої програми 014 «Середня освіта» з предметною спеціалізацією 014.04 «Середня освіта (Математика)» для самостійної роботи з «Методики навчання математики» з розділу «Нерівності». Посібник дає змогу оптимально організувати повторення матеріалу з даного розділу. Даний матеріал корисний при підготовці студентами до занять з відповідного розділу елементарної математики під час виробничої практики з відривом від виробництва.

Мета, завдання та вимоги до обов'язкових результатів навчання і компетентентностей здобувача загальної середньої освіти визначаються державними стандартами відповідного рівня загальної середньої освіти, а саме:

- Державним стандартом початкової загальної освіти;
- Державним стандартом базової середньої освіти;
- Державним стандартом базової та повної загальної середньої освіти (перехідний період, остаточна втрата чинності 01.09.2026 року);
- Державним стандартом профільної середньої освіти (з 01.09.2026 року).

Державні стандарти розробляються на теоретичному і світоглядному фундаменті класичної та сучасної педагогіки України та світу, на основі аналізу впровадження провідних українських та світових інноваційних практик в освіті задля реалізації цілей загальної середньої освіти, що визначаються Законом України «Про освіту» та Законом України «Про повну загальну середню освіту».

Метою базової загальної середньої освіти є розвиток природних здібностей, інтересів, обдарувань учнів, формування компетентностей, необхідних для їх соціалізації та громадянської активності, свідомого вибору подальшого життєвого шляху та самореалізації, продовження навчання на рівні профільної освіти або здобуття професії, виховання відповідального, шанобливого ставлення до родини, суспільства, навколишнього природного середовища, національних та культурних цінностей українського народу.

Провідним засобом реалізації вказаної мети є запровадження компетентнісного підходу у навчально-виховний процес закладу загальної середньої освіти шляхом формування предметних і ключових, зокрема наскрізних, компетентностей.

Метою математичної освітньої галузі є формування математичної та інших ключових компетентностей; розвиток мислення, здатності розпізнавати і моделювати процеси та ситуації з повсякденного життя, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів, а також здатності робити усвідомлений вибір.

Курси «Математика», «Алгебра» і «Геометрія» на рівні базової середньої освіти логічно продовжують реалізацію завдань математичної освітньої галузі, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*. Компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі на рівнях початкової, базової та повної середньої освіти визначається відповідними державними стандартами. Відповідно до нього кінцеві результати навчання учнів у математичній освітній галузі розподілені за такими напрямками:

- дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів;
- моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій;

- критичне оцінювання процесу та результату розв’язання проблемних ситуацій;
- розвиток математичного мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіння математичною мовою.

Навчання математики на рівні базової середньої освіти передбачає формування предметної математичної компетентності, зміст якої, базові знання, уміння і ставлення описані у відповідних модельних навчальних програмах. Формування зазначеної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань математичної освіти, які полягають у формуванні:

- *ставлення* до математики як до невід’ємної складової загальної культури людини, універсальної мови науки та техніки, ефективного засобу моделювання та дослідження процесів і явищ навколишнього світу, а отже, необхідної умови повноцінного життя людини в сучасному суспільстві;
- *математичного мислення* та *мовлення*, необхідного для опису математичних фактів і закономірностей та для створення математичних моделей;
- *здатності* до логічних міркувань, висновків, алгоритмічного мислення;
- *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити твердження, оцінювати правильність і раціональність розв’язування задач, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації;
- *здатності* та потреби застосовувати математичні методи під час розв’язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- *умінь* працювати з науковими джерелами, опрацьовувати математичні тексти, шукати й використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати

головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті.

У сучасному освітньому процесі, за всеохоплюючої доступності відкритих інформаційних джерел, передача «готових знань» вже не є головним завданням процесу навчання. Нині активно розвивається тенденція зниження функціональної значущості і привабливості традиційної організації навчання. Основним завданням навчання математики в школі є забезпечення ґрунтовного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань та умінь, необхідних у повсякденному вивченні дисциплін, та продовження освіти. Гарна математична освіта та розвиток математичних здібностей необхідні не тільки тому, хто згодом займатиметься науковими дослідженнями в галузі математики, а й тому, хто стане економістом, інженером, виробничником, аграрієм тощо.

Зміст математичної освіти на рівні базової середньої освіти структурується за такими змістовими лініями:

- *методологія математики;*
- *числа і вирази;*
- *рівняння та нерівності;*
- *функції;*
- *геометрія і вимірювання геометричних величин;*
- *координати і вектори;*
- *дані, статистика та ймовірність*.

Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на цьому ступені шкільної освіти, в якому виокремлюються два основні етапи: 5–6 класи і 7–9 класи. Освітні завдання на першому етапі реалізуються у процесі вивчення єдиного курсу математики, на другому – двох курсів: алгебри і геометрії.

Курс математики 5–6 класів передбачає, зокрема, розвиток, збагачення і поглиблення знань учнів про числа і дії над ними, числові й буквені вирази, величини та їх вимірювання, рівняння, числові нерівності.

Основу курсу становить розвиток поняття числа та формування міцних обчислювальних і графічних навичок. У 5–6 класах відбувається поступове розширення множини натуральних чисел до множини раціональних чисел шляхом послідовного введення дробів (звичайних і десяткових), а також від'ємних чисел разом із формуванням культури усних, письмових, інструментальних обчислень.

Навчальний матеріал, що стосується виразів, величин, рівнянь і нерівностей, статистики, ймовірності та геометричних фігур, має загалом пропедевтичний характер. Ознайомлення з ним готує учнів до свідомого системного вивчення відповідних тем у курсах алгебри і геометрії. Зокрема, учні мають дістати уявлення про використання букв для запису законів арифметичних дій, формул, навчитись обчислювати значення простих буквених виразів, складати за умовою задачі нескладні рівняння першого степеня й розв'язувати їх, спочатку на основі залежностей між компонентами арифметичних дій, а згодом із використанням основних властивостей рівнянь та нерівностей.

Вивчення математики у 5–6 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань в основному на наочно-інтуїтивному рівні із залученням практичного досвіду учнів і прикладів із довкілля. Відбувається поступове збільшення теоретичного матеріалу, який вимагає обґрунтування тверджень, що вивчаються. Це готує учнів до ширшого використання дедуктивних методів на наступному етапі вивчення математики.

У 7–9 класах вивчаються два курси: алгебра і геометрія.

Основними змістовими завданнями курсу алгебри є формування умінь виконання тотожних перетворень цілих і дробових виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей та їх систем, достатніх для свідомого їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також для практичних застосувань. Важливе завдання полягає в залученні учнів до використання рівнянь і функцій як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв’язуванні на цій основі прикладних задач. У процесі вивчення курсу посилюється роль обґрунтувань математичних тверджень, індуктивних і дедуктивних міркувань, формування різноманітних алгоритмів, що має сприяти розвитку логічного мислення і алгоритмічної культури школярів.

На цьому етапі шкільної математичної освіти учні починають ознайомлюватися з дійсними числами. Так, до відомих учням числових множин долучається множина ірраціональних чисел.

Істотного розвитку набуває змістова лінія рівнянь та нерівностей. Процес розв’язування рівняння трактується як послідовна заміна даного рівняння рівносильними йому рівняннями. На основі узагальнення відомостей про рівняння, здобутих у попередні роки, вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною. Курс передбачає вивчення лінійних рівнянь, квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до лінійних або квадратних. Розглядаються системи лінійних рівнянь та рівнянь другого степеня з двома змінними. Щодо останніх, то увага зосереджується на системах, де одне рівняння – другого степеня, а друге – першого степеня. Передбачається розгляд лише найпростіших систем рівнянь, у яких обидва рівняння другого степеня.

Значне місце відводиться застосуванню рівнянь до розв’язування різноманітних задач. Ця робота має пронизувати всі теми курсу. Важливе значення надається формуванню умінь застосовувати алгоритм розв’язування задачі за допомогою рівняння.

Елементарні відомості про числові нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей.

Розглядається розв'язування систем двох лінійних нерівностей з однією змінною.

Слід відзначити, що в 9 класі учні знайомляться з нерівностями в яких змінна знаходиться під знаком модуля. У класах з поглибленим вивченням математики вивчаються нерівності та системи з двома змінними та значна увага приділяється темі «*Доведення нерівностей*».

1. Методика вивчення змістової лінії нерівностей

Основна мета вивчення учнями даної змістової лінії – оволодіння прийомами розв'язування (алгебраїчного і графічного) нерівностей як математичного апарату розв'язування різноманітних природничих математичних задач та задач із суміжних галузей знань.

Зміст цього матеріалу сприяє розвитку різноманітних пізнавальних процесів, математичного мовлення, уміння вчитися, алгоритмічного і абстрактного мислення, елементів творчої діяльності при розв'язуванні усіх основних типів задач алгебраїчним методом та розвитку просторової уяви при розв'язуванні графічним методом.

Вивчення нерівностей в школі слід розділити на такі етапи:

- пропедевтичний (1–7(8) клас);
- основний (курс алгебри у 9 класі базової програми, у 8-9 класах з поглибленим вивченням математики);
- завершальний (10–11 класи профільної школи).

1.1. Пропедевтичний етап

З першого класу дітей знайомлять з поняттями «*більше*» і «*менше*» (наприклад, 6 більше 5; 7 менше 8 тощо), «*збільшити*» і «*зменшити*», формуючи навички порівняння чисел в межах 100 на основі порядку слідування, знайомлять із символами «=», «<», «>», вчать порівнювати вирази методом різницевого порівняння чисел, встановлювати відношення нерівності між числами і числовими виразами, що обчислюються елементарними діями. Переважно діти проводять порівняння на дидактичному (роздатковому) матеріалі та прикладах з життя. З'являються числові нерівності ($5 < 6$; $8 > 7$). При вивчені одиниць вимірювання навчають порівнянню іменованих чисел (довжин) в однакових одиницях вимірювання та в одиницях вимірювання двох найменувань. При вивченні теми «Вартість» формуються поняття «дорожчий-дешевший», «найдорожчий-найдешевший» та уміння порівнювати вартості способом різницевого порівняння.

В 2 класі дітей навчають розв'язувати прості проблемні завдання на зменшення, збільшення та різницеве порівняння, що виникають із життєвих ситуацій. Також учні розвивають уміння порівнювати числові вирази з дужками, що містять віднімання з переходом через десяток та/або дію множення, набувають уміння здійснювати різницеве порівняння добутку двох множників і числа, розв'язувати складені задачі, які містять відношення «у … більше». Підчас вивчення змістової лінії «Вимірювання величин» удосконалюють навички порівняння довжини предметів, які знаходяться у вертикальному або горизонтальному положенні, маси, місткості, часу, температури та виразів з іменованими величинами поданих в одиницях двох різних найменувань. При вивченні вартості формується поняття «без решти», «достатньо грошей», «недостатньо грошей». Розв'язування проблемних завдань на порівняння іменованих чисел на основі схематичного малюнка.

В 3 класі діти набувають навичок проведення порівняння «*вирази з виразами після операції в кожному з них*». Наприклад, не виконуючи обчислень порівняти вирази ($13 - 9 * 13 – 8$ та $16 + 7 * 16 + 8$) (тобто маємо справу з пропедевтикою властивостей числових нерівностей та доведенням цих властивостей). Водночас в учнів формуються навички «*порозрядного*» порівняння чисел в межах 1000, навички «*оцінки*», розуміння *кратного* порівняння чисел та навички обчислення результату кратного порівняння. Значна увага приділяється засвоєнню учнями змісту термінів «*менше «у»», «більше* «*у*»». При вивченні поняття дробу в учнів формується уміння порівнювати дроби з чисельником 1 за допомогою засобів наочності.

Учні розв'язують задачі типу «Який знак потрібно проставити замість «*», щоб отримати вірну нерівність $(7 * 8 < 1 + 9 * 9)$»; «Довжина одного відрізка 9 см, другого в 3 рази менше, ніж першого, а третього на 7 см більше, ніж другого. Визначити довжину третього відрізка і вирази її в дм.»;

У 3 класі учні вперше зустрічаються з буквенними виразами, набувають навички розрізняти числові нерівності та нерівності зі змінною, а також знаходять окремі розв'язки нерівності зі змінною зручним для себе способом, розв'язуючи такі задачі як: «Знайти числа, які є розв'язками нерівності $676 < x < 680$».

В 4 класі діти розвивають навички порівняння дробів, зокрема, набувають уміння порівнювати дроби з однаковими знаменниками. Розвиваються навички розв'язування нерівностей з однією змінною методом підбору та використовуючи залежність результату арифметичних дій від зміни одного з її компонентів. Наприклад, з використанням таких правил: «*Із двох різниць з однаковими від'ємниками більша та, у якій зменшуване більше*» та «*Із двох різниць з однаковими зменшуваними більша та, у якій від'ємник менший*».

За результатами вивчення нерівностей в 4 класі учні мають розуміти, що нерівність зі змінною може мати один, кілька, безліч розв'язків або не мати розв'язків взагалі.

Математика 5 – 6 клас

Протягом курсу вивчення математики у 5 класі закріплюються й удосконалюються навички, що були набуті в початковій школі, такі як:

порівняння натуральних чисел, порівняння числових виразів, дробів з однаковим знаменником, розв'язування нерівності зі змінною, подвійної нерівності тощо. А також формуються нові навички: порівняння звичайних дробів з однаковими знаменниками (деякі модельні програми включають порівняння дробів з різними знаменниками, коли один з них кратний іншому), правильних і неправильних дробів, мішаних чисел, порівняння десяткових дробів.

Учні, в залежності від конкретного виду чисел, повинні використовувати той чи інший спосіб порівняння.

1. Порівняймо десяткові дроби $4{,}7648$ та $4{,}765$. Цифри в розрядах одиниць, десятих і сотих співпадають, а в розряді тисячних в першому дробі записана цифра 4, а в другому – цифра 5. Оскільки $4 < 5$, то $4{,}7648 < 4{,}765$.

2. Порівняємо від'ємні числа -12 та -21. Модуль першого числа менше модуля другого. Відтак, перше число більше другого, тобто $-12 > -21$.

3. Порівняємо звичайні дроби $3/5$ та $13/20$. Для цього зведемо їх до спільного знаменника:

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}.$$

Оскільки $13 > 12$, то $13/20 > 3/5$.

4. Порівняти кути трикутника.

Учні повинні засвоїти основні критерії та процедури порівняння, усвідомити перше узагальнення: *нерівності є важливим засобом для проведення операції порівняння*.

При вивченні теми «*Середнє арифметичне*» учні використовують теорію нерівностей для проведення округлення з найменшою похибкою, знаходження середньої швидкості руху.

При вивченні трикутника формується поняття про можливість існування трикутника із заданими сторонами. Учні отримують первинні знання про існування обмежень, які задаються нерівностями. Наприклад, трикутника зі сторонами 2 см, 4 см, 6 см – не існує; необхідно, щоб $a + b > c$.

У 6 класі в учнів остаточно формуються вміння порівнювати раціональні числа різними методами, в тому числі за допомогою координатної прямої. Вводиться геометричне означення нерівності. Велику роль у формуванні теорії нерівностей відіграє засвоєння учнями на цьому етапі поняття «*Модуль числа*». За допомогою цього поняття учні будуть порівнювати числа, обчислювати оцінку похибки, описувати обмеження та існування математичних об'єктів тощо. Вводяться нові символи «≤» та «≥». Відтак, окрім нерівностей зі знаками «>» та «<», які називають *строгими*, використовуються *нестрогі* нерівності, для яких введені знаки «≤» та «≥».

Алгебра 7 – 8 клас

При вивченні теми «*Тотожно рівні вирази. Тотожності*» у 7 класі учні розв'язують задачі на порівняння виразів. Зокрема, в підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підручник для 7 кл. закладів заг. серед. освіти, 2020 [22] є багато типових вправ на порівняння виразів.

Вправа **155**. *Відомо, що* $a > 0$ *і* $a + b < 0$. *Порівняйте:*

1. b *і* 0;
2. $|a|$ *і* $|b|$.

Вправа **176**. *Не виконуючи обчислень, порівняйте:* $(-34)^5$ *і* $(-39)^5$.

Вправа **177**. *Не виконуючи обчислень, порівняйте:* $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ *і* $\left(-5\frac{8}{11}\right)^5$.

При вивченні теми «*Властивості степеня з натуральним показником*» знаходять свій розвиток навички порівняння виразів у задачах типу:

Порівняйте значення виразів:

$(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ *і* $(-11)^{16}$; 16^3 *і* 65^2;

10^{40} *і* $10\,001^{10}$; 6^{14} *і* $2^{16} \cdot 3^{12}$.

Вивчаючи тему «*Способи задання функцій*» учні порівнюють значення функцій. Наприклад, дано функції:

$$g(x) = \frac{20}{x} - 3, \qquad h(x) = 8 - 3x.$$

Порівняти: $g(1)$ і $h(1)$, $g(-2)$ і $h(6)$.

У 8 класі учні закріплюють навички порівняння виразів та функцій при вивченні теми «*Числові множини*». У програмі даються вправи на порівняння буквених виразів. Зокрема,

Вправа **469.** *Відомо, що* $a > 0$, $c < 0$. *Порівняйте з нулем значення виразу:*

1) a^3c^4; 2) ac^5.

Ірраціональні числові вирази учні порівнюють при вивченні теми «*Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені*». Починаючи з простих завдань типу порівняти числа $3\sqrt{7}$ і $\sqrt{65}$ задачі ускладнюються. Учні повинні вміти знаходити області визначення та значень функції $y = \sqrt{x}$, та записувати їх за допомогою нерівностей.

1.2. Основний етап (базова середня освіта: алгебра 8 – 9 клас)

Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 30.09.2020р. №898 та Типової освітньої програми для 5-9 класів закладів загальної середньої освіти, затвердженої наказом Міністерства освіти і науки України від 19.02.2021р. №235, нерівності є одним з ключових об'єктів вивчення у 8-9 класах. Теорія нерівностей знаходить застосування при проведенні дослідження функцій:

- визначення області визначення і області значень функцій;
- побудови графіків на обмежених областях визначення;

- вплив знаків параметра на розташування графіків на координатній площині;
- визначення властивостей функцій, зокрема, зростання і спадання.

Учні повинні засвоїти, що нерівності є інструментом перебору логічних можливостей при розв'язуванні задач і побудові функцій.

Вивчення нерівностей є підготовчим етапом до розв'язування систем нерівностей і задач лінійного програмування.

У 8 класах з поглибленим вивченням математики ключова увага фокусується на вивченні теми «*Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей*», яка є базою для:

- розв'язування нерівностей з однією змінною;
- обґрунтування методів наближених обчислень, таких як: метод меж і метод підрахунку цифр, метод множення і ділення наближених чисел тощо.

У класах з вивченням математики на рівні стандарту ця тема вивчається на 9 році навчання. Так у підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів, 2017 [26], дана тема викладена в трьох пунктах (п.1. Числові нерівності; п.2. Основні властивості числових нерівностей; п.3. Додавання і множення числових нерівностей) операція порівняння введена таким способом: «*вважатимемо, що додатний напрямок задано зліва направо. Переміщенню вздовж координатної прямої вправо від точки b відповідає додавання до числа b додатного числа*».

Для будь-яких двох дійсних чисел a та b визначена операція порівняння, результатом якої є одне з трьох тверджень:

1. число a більше числа b;
2. число a рівне числу b;
3. число a менше числа b.

Ми можемо порівняти будь-які a та b і результат порівняння записати у вигляді рівності чи нерівностей, використовуючи знаки $=, <, >$. Для довільних чисел a та b виконується одне і тільки одне зі співвідношень: $a = b$, $a < b$, $a > b$**.**

На координатній прямій більше число зображується точкою, яка лежить правіше, а менше – точкою, яка лежить лівіше.

У залежності від конкретного виду чисел використовується той чи інший спосіб порівняння. Однак зручно мати такий спосіб порівняння чисел, який охоплює всі випадки. Власне для цього знаходять різницю чисел і визначають, чи є вона додатним числом, чи від'ємним числом чи нулем. Цей спосіб порівняння чисел ґрунтується на означенні.

Означення 1. *Число a вважають* ***більшим*** *за число b, якщо різниця $a - b$ є додатним числом. Число a вважають* ***меншим*** *від числа b, якщо різниця $a - b$ є від'ємним числом.*

Зазначимо, що якщо різниця $a - b$ дорівнює нулю, то числа a та b рівні.

Нехай a та b деякі числа, причому $a > b$, тоді число a знаходиться правіше від числа b на координатній прямій. Переміщенню по координатній прямій вправо від точки b відповідає додавання до числа b додатного числа c. Отже, якщо $a = b + c$, то $a - b = c$, тобто $a - b > 0$.

Крім того, розглядаються властивості числових нерівностей, які часто використовують під час розв'язування задач. Їх називають **основними властивостями числових нерівностей.**

Теорема 1. *Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.*

За умовою, $a > b$, тобто $a - b$ – додатне число. Оскільки $b > c$, то $b - c$ – додатне число. При додаванні додатних чисел $a - b$ та $b - c$ отримаємо додатне число. Оскільки $(a - b) + (b - c) = a - c$, то $a - c$ – додатне число, тобто $a > c$.

Справедливою є й така властивість: *Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.*

Теорема 2. *Якщо $a > b$ і c – будь-яке число, то $a + c > b + c$.*

Перетворимо різницю $(a + c) - (b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a - b$$

За умовою $a > b$, тому $a - b$ – додатне число. Таким чином, і різниця $(a + c) - (b + c)$ додатна. Отже, $a + c > b + c$.

Тобто, *якщо до обох частин правильної нерівності додати або від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність*.

Наслідок. *Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в другу, замінивши знак доданка на протилежний, то отримаємо правильну нерівність*.

Теорема 3. *Якщо $a > b$ і c – додатне число, то $ac > bc$. Якщо $a > b$ і c – від'ємне число, то $ac < bc$.*

Має місце така властивість: *якщо $a < b$ і c – додатне число, то $ac < bc$. Якщо $a < b$ і c – від'ємне число, то $ac > bc$.*

Наслідок. *Якщо $\frac{a}{m} > b$ та $m > 0$, то $a > bm$; якщо $\frac{a}{m} > b$ та $m < 0$, то $a < bm$.*

Важливо зазначити, якщо помножити обидві частини нерівності $a > b$ на -1, отримаємо: $-a < -b$. Це означає, що *при зміні знаків обох частин нерівності на протилежні, змінюється й знак нерівності*:

якщо $a > b$, то $-a < -b$.

Отже, можемо стверджувати, що, *якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність;*

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та замінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. *Якщо $ab > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*

Розділимо обидві частини нерівності $a > b$ на додатне число ab:

$$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}.$$

Скоротивши дроби, отримаємо:

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Знання властивостей числових нерівностей допомагає досліджувати функції. Зокрема, саме з нерівностями пов'язані такі відомі властивості функцій, як найбільше та найменше значення функції на визначеному проміжку; обмеженість функції знизу і зверху; властивість зростання і спадання функції. Числові нерівності використовуються також при розв'язуванні текстових задач для знаходження оптимального розташування об'єктів за визначеними умовами.

Тому важливо виробити в учнів стійкі навички оцінювання виразів, що забезпечують правила почленного додавання та множення числових нерівностей.

Теорема 4 (про почленне додавання нерівностей). *Якщо $a > b$ та $c > d$, то $a + c > b + d$.*

Означення 2. *Нерівності $a > b$ і $c > d$ (або $a < b$ і $c < d$) називають* ***нерівностями однакового знаку****, а нерівності $a > b$ і $c < d$ (або $a < b$ і $c > d$) називають* ***нерівностями протилежних знаків.***

Говорять, що нерівність $a + c > b + d$ отримано з нерівностей $a > b$ і $c > d$ шляхом почленного додавання.

Теорема 4 означає, що *при почленному додаванні правильних нерівностей однакового знаку результатом є правильна нерівність того самого знаку*.

Зазначимо, що теорема 4 справедлива й у разі почленного додавання трьох і більше нерівностей. Крім того, при додаванні строгої і нестрогої нерівності, результатом буде строга нерівність.

Теорема 5 (про почленне множення нерівностей). *Якщо $a > b$ та*

$c > d$ і a, b, c, d – додатні числа, то $ac > bd$.

Аналогічно, *якщо $a < b$ та $c < d$ і a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$.*

Теорема 5 означає, що *при почленному множенні правильних нерівностей однакового знаку, у яких ліві та праві частини – додатні числа, результатом є правильна нерівність того самого знаку.*

Звернемо увагу: якщо з формулювання теореми 5 вилучити вимогу, щоб a, b, c, d були додатними числами, то з нерівностей $a > b$ і $c > d$ може не випливати нерівність $ac > bd$.

Наслідок. *Якщо $a > b$ і a, b – додатні числа, то $a^n > b^n$, де n — натуральне число.*

Важливо зазначити, що самостійних правил почленного віднімання та ділення не існує, тому потрібний результат необхідно отримувати за допомогою послідовного застосування основних властивостей числових нерівностей та правил почленного додавання і множення.

Приклад 1. Дано: $18 < x < 20$, $2 < y < 3$. Оцінити суму $x + y$, різницю $x - y$, добуток xy, частку x/y.

Розв'язання. Сума $x + y$:

$$18 < x < 20, \qquad 2 < y < 3.$$

$$20 < x + y < 23.$$

Різницю $x - y$ представимо у вигляді суми $x + (-y)$. Тоді $-2 > -y > -3$, тобто, $-3 < -y < -2$. Відтак, почленно додамо нерівності:

$$18 < x < 20, \qquad -3 < -y < -2,$$

$$15 < x - y < 18.$$

Добуток xy:

$$18 < x < 20, \qquad 2 < y < 3.$$

$$36 < x + y < 60.$$

Частку $\frac{x}{y}$ представимо у вигляді добутку $x \cdot \frac{1}{y}$. Оскільки $2 < y < 3$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$, або, що те саме, $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$.

$$18 < x < 20, \qquad \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2},$$

$$6 < \frac{x}{y} < 10.$$

В учнів необхідно виробити навички розв'язування таких видів задач:

- порівняти два числа;
- задачі на оцінку: оцінити добуток двох чисел, суму двох чисел, їх різницю, піднесення до степеня числа, оцінити обернене йому число;
- задачі на доведення елементарних числових нерівностей, використовуючи основні властивості та операції над числовими нерівностями.

У 9 класі також вивчаються теми «*Нерівності з однією змінною», «Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною*», «*Системи лінійних нерівностей з однією змінною*», «*Розв'язування квадратних нерівностей*».

Властивості числових рівностей допомагали нам розв'язувати рівняння. Аналогічно, властивості числових нерівностей допоможуть розв'язувати нерівності. Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, простішим рівнянням, рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності.

Під час заміни рівняння на йому рівносильне використовують теореми про перенесення доданків з однієї частини рівняння в другу та про множення обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число. Аналогічні правила, що випливають з теорем 2 і 3, застосовують і під час розв'язування нерівностей. А саме:

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те *саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.*

Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Означені вище принципи покладено в основу алгоритму розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Який в свою чергу знаходить застосування при розв'язуванні як раціональних нерівностей вигляду:

$$(ax + b)(cx + d) < 0; \qquad \frac{ax + b}{cx + d} > 0$$

так і квадратних нерівностей.

Усі набуті учнями навички застосовуються при вивченні теми «*Квадратна нерівність*». Розв'язування квадратних нерівностей базується на графічному методі. Учні мають розуміти, що для розв'язування квадратної нерівності потрібно визначити схематичне розташування графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис. Відтак розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ $(ax^2 + bx + c < 0)$ можна визначити як множину значень змінної x, при яких графік квадратичної функції знаходиться вище (нижче) осі абсцис.

Вивчення раціональних нерівностей в окрему тему не виноситься, проте в класах з поглибленим вивченням математики розглядається як розширення теми «*Квадратні нерівності*».

Означення 3. *Раціональною нерівністю з однією змінною називають нерівність вигляду $f(x) < g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ – раціональні функції однієї змінної.*

Як базові розглядаються нерівності вигляду $f(x) < 0$, $f(x) > 0$ та $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени. А ключове місце в цій темі посідає теорема, яка стверджує: *Якщо функція f неперервна на деякому проміжку і не має на ньому нулів, то вона на цьому проміжку зберігає знак.* На вказаному твердженні ґрунтується метод інтервалів розв'язування нерівностей.

Решта раціональних нерівностей з однією змінною розв’язують зведенням до базових за допомогою рівносильних перетворень та властивостей нерівностей. У свою чергу для зручності при використанні методу інтервалів проміжним етапом розв’язування є запис лівої частини базової нерівності $f(x) < 0$ $(f(x) > 0)$, яку подають у вигляді частки та/або добутку лінійних та/або квадратичних многочленів.

Вивчаючи системи нерівностей, учням можна запропонувати розв’язати задачу: «Знайти область визначення виразу $f(x) = \sqrt{2x-4} + \sqrt{6-x}$.» методом складання системи нерівностей.

В цілому вивчення нерівностей у шкільному курсі математики організовано так само як і рівнянь. Зокрема, вони проходять ті ж етапи вивчення. Серед особливостей вивчення нерівностей слід відмітити:

1. усі нерівності вивчаються після вивчення відповідного класу рівнянь;
2. зазвичай, навички розв’язування нерівностей, за виключенням лінійних і квадратних, формуються на більш низькому рівні, ніж рівнянь відповідних класів. Ця особливість має об’єктивну природу: теорія нерівностей складніша за теорію рівнянь;
3. прийоми розв’язування нерівностей ґрунтуються на одному з двох методів: 1) переході від даної нерівності $a > b$ до рівняння $a = b$ і наступному переході від знайдених коренів рівняння до множини розв’язків вихідної нерівності; 2)використання властивостей функцій та їх графіків для розв’язування нерівностей. Цю особливість необхідно постійно підкреслювати, для того щоб перехід до рівнянь і зворотний перехід перетворились в основний метод розв’язування нерівностей; в старших класах він формалізується у вигляді «*методу інтервалів*»;
4. у вивченні нерівностей велику роль відіграють наочно-графічні засоби.

1.3. Основний етап (профільна середня освіта: алгебра і початки аналізу 10 – 11 клас)

Метою профільної середньої освіти є розвиток природних здібностей, інтересів, обдарувань учнів, формування компетентностей, необхідних для їх соціалізації та громадянської активності, свідомого вибору подальшого життєвого шляху та самореалізації, продовження навчання на рівні вищої освіти або здобуття професії, виховання відповідального, шанобливого ставлення до родини, суспільства, навколишнього природного середовища, національних та культурних цінностей українського народу.

Провідним засобом реалізації вказаної мети є запровадження компетентнісного підходу у навчально-виховний процес закладу загальної середньої освіти шляхом формування предметних і ключових компетентностей.

В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, які сприятимуть здатності учня застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях, нести відповідальність за свої дії, брати повноцінну участь у житті суспільства.

Однією з ключових компетентностей є *математична компетентність*, яка передбачає здатність розвивати і застосовувати математичні знання та методи для розв’язування широкого спектра проблем у повсякденному житті; моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичного апарату; усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому та суспільному житті людини. Сформування цієї компетентності є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.

Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв’язків між ними, характеру ілюстрацій, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Реалізація практичної спрямованості в процесі навчання математики означає:

1. створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;
2. формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;
3. навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів.

Однією з головних змістових ліній курсів «Математика» (рівень стандарту) і «Алгебра» (профільний рівень) у старшій школі є «Функції та функціональні залежності». Тому доцільно розпочинати вивчення курсу з теми «*Функції, їхні властивості та графіки*» — його фундаменту. У цій темі здійснюється повторення, систематизація матеріалу стосовно функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення, зокрема, за рахунок степеневих функцій. Головною метою опрацювання цієї теми є підготовка учнів до вивчення нових класів функцій (тригонометричних, степеневих, показникових, логарифмічних), а також мотивація необхідності розширення апарату дослідження функцій за допомогою похідної. Лейтмотивом теми має бути моделювання реальних процесів за допомогою функцій.

У курсі математики старшої школи набувають розвитку й інші змістові лінії: обчислення, вирази і перетворення, рівняння та нерівності.

У старшій школі розширюються класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи розв'язування, сфери застосування. Вивчення цього матеріалу пов'язується з властивостями відповідних функцій.

Зокрема в старшій школі вивчаються такі теми як «*Ірраціональні нерівності*», «*Показникові нерівності*», «*Логарифмічні нерівності*», «*Тригонометричні нерівності*». Усі ці теми будуть детально розглянуті нижче.

2. Раціональні нерівності

2.1. Нерівності з однією змінною та їх розв'язування

Властивості числових рівностей допомагали розв'язувати рівняння. Аналогічно властивості числових нерівностей допоможуть розв'язувати нерівності.

Означення 4. *Нерівністю з однією змінною (невідомою) називаються два вирази зі змінною (невідомою), з'єднані знаком нерівності: > (більше), < (менше), ≥ (більше або рівно; не менше), ≤ (менше або рівно; не більше).*

Означення 5. *Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.*

Наприклад, число 5 є розв'язком нерівності $x^2 - 6x < 0$, оскільки $5^2 - 6 \cdot 5 < 0$.

Означення 6. *Розв'язати нерівність з однією змінною означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує.*

Усі розв'язки нерівності утворюють *множину розв'язків нерівності*. Якщо нерівність розв'язків не має, то говорять, що множиною її розв'язків є *порожня множина*.

Означення 7. *Нерівності називають рівносильними, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.*

Наприклад, нерівність $5x - 2 > 8$ рівносильна кожній з нерівностей: $5x > 2 + 8$, $5x > 10$, $x > 2$.

Розв'язком нерівності є деяка підмножина дійсних чисел.

2.2. Лінійні нерівності з однією змінною

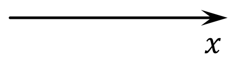
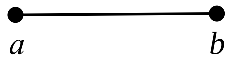
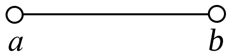
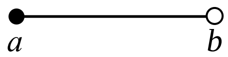
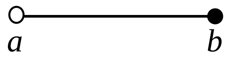
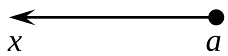
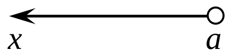
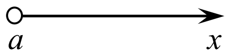
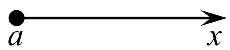
Означення 8. *Лінійною нерівністю з однією змінною* x *називається нерівність вигляду*

$$ax + b > 0, \qquad ax + b < 0, \qquad ax + b \geq 0, \qquad ax + b \leq 0.$$

Нерівності з однією змінною мають багато властивостей, аналогічних

Таблиця 1

Деякі підмножини дійсних чисел, їх позначення, зображення на координатній прямій і запис у вигляді нерівностей

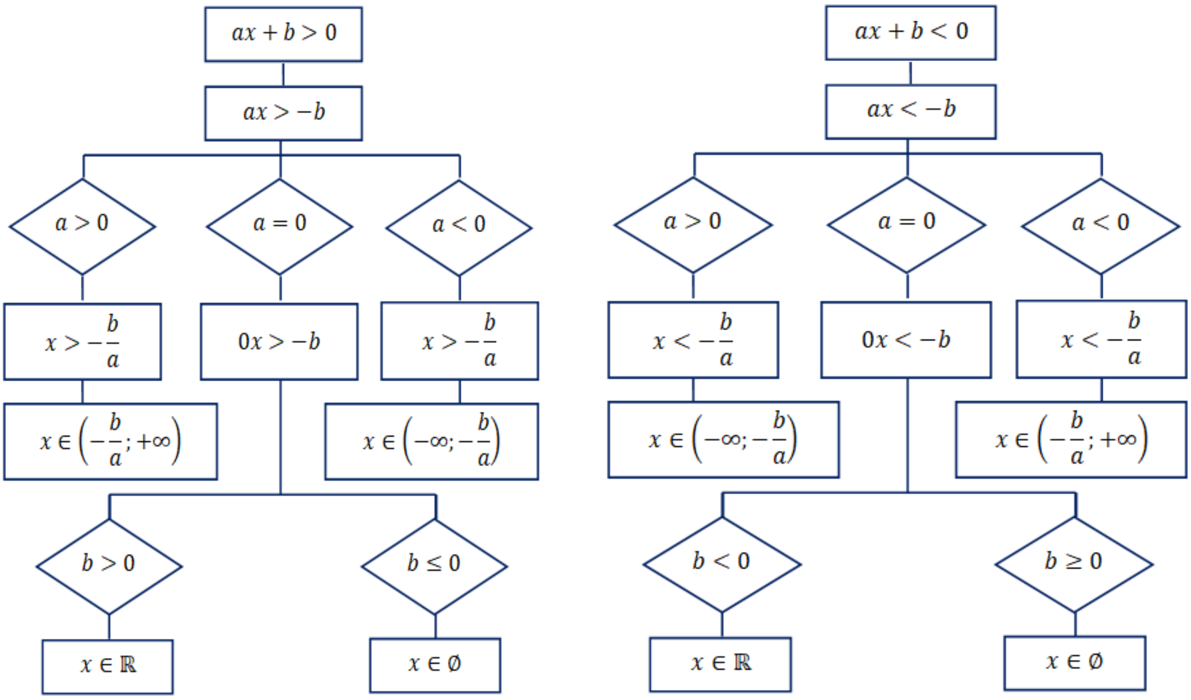
Назва	**Позначення**	**Зображення**	**Запис у вигляді нерівностей**
Числова пряма	$(-\infty; +\infty)$, $\mathbb{R}$		$-\infty < x < +\infty$
Закритий проміжок (відрізок)	$[a; b]$		$a \leq x \leq b$
Відкритий проміжок (інтервал)	$(a; b)$		$a < x < b$
Напіввідкритий проміжок (напівінтервал)	$[a; b)$		$a \leq x < b$
	$(a; b]$		$a < x \leq b$
Нескінчений проміжок (промінь)	$(-\infty; a]$		$x \leq a$
	$(-\infty; a)$		$x < a$
	$(a; +\infty)$		$x > a$
	$[a; +\infty)$		$x \geq a$

до властивостей рівнянь. При розв'язуванні нерівностей використовуються такі властивості.

1. Якщо з однієї частини нерівності перенесемо в іншу доданок з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну даній.
2. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.
3. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Користуючись цими властивостями, нерівності з однією змінною можна розв'язувати подібно до рівнянь.

Схеми розв'язування лінійних нерівностей



Приклад 2: Розв'язати нерівність $16x > 13x + 45$.

Розв'язання.
$$16x - 13x > 45,$$
$$3x > 45,$$
$$x > 15.$$

Відповідь: $x \in (15; +\infty)$.

Приклад 3: Розв'язати нерівність $15x - 23x - 33 > 2x + 11$.

Розв'язання.
$$15x - 23x - 2x > 11 + 33,$$
$$-10x > 44,$$
$$x < -4{,}4.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;\ -4{,}4)$.

Приклад 4: Розв'язати нерівність
$$-8x + 3(x - 2) > -x + 2.$$

Розв'язання. Після перетворень отримаємо нерівність

$$x + 2 < 0,$$

рівносильну вихідній. Таким чином, розв'язками даної нерівності є всі числа з проміжку $(-\infty; -2)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2)$.

Завдання 1. Самостійно розв'язати нерівності з однією змінною:

1.	$2x - 2 > 2;$	**2.**	$3 - 5x < x;$
3.	$-3x + 21 > 0;$	**4.**	$x - (5 - 2x) \geq 0;$
5.	$2(x - 2) - 5(1 - 3x) < 2;$	**6.**	$18 - 6x \leq 0;$
7.	$3x - 1 < 2x - 6;$	**8.**	$\frac{2x - 1}{3} < \frac{5x - 2}{2};$
9.	$\frac{2x - 1}{5} - \frac{3 - x}{3} < 2;$	**10.**	$\frac{x - 3}{2} > \frac{7(x - 3)}{2} + 5(6 - 2x) + 14.$

2.3. Розв'язування квадратних нерівностей

Вивчаючи тему «*Розв'язування квадратних нерівностей*» учні розширюють свої знання про нерівності.

Означення 9. *Нерівності вигляду* $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, *де* x *– змінна,* a, b *і* c *– деякі числа, причому* $a \neq 0$, *називають квадратними*.

Метод розв'язування нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$ за допомогою графіка функції $y = f(x)$ називають *графічним*.

З'ясуємо, як визначити положення графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис.

Наявність і кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ визначають за допомогою дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$: якщо $D > 0$, то нулів у функції два; якщо $D = 0$, то нуль один; якщо $D < 0$, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає напрямок віток параболи $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ вітки напрямлені вгору, при $a < 0$ – униз.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків чисел a і D відображено в таблиці 2 (x_1 і x_2 – нулі функції, x_0 – абсциса вершини параболи).

Пояснимо, як використовувати цю таблицю для розв'язування квадратних нерівностей.

Приклад 5: Розв'язати нерівність $2x^2 - x - 1 > 0$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$ маємо: $a = 2 > 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$. Цим умовам відповідає випадок 1 таблиці 2. Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$. Отримаємо: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Тоді схематично графік функції $y = 2x^2 - x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 1.а).

а) **б)**

Рисунок 1. Схематичні графіки функцій: а) $y = 2x^2 - x - 1$, **б)** $y = -9x^2 + 6x - 1$

Із рисунка 1.а) видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і $(1; +\infty)$.

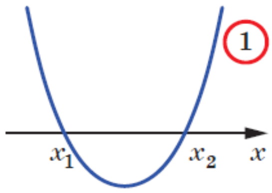
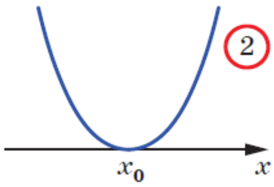
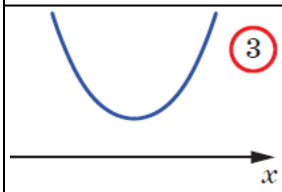
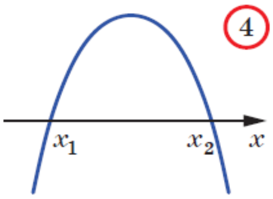
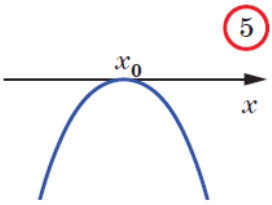
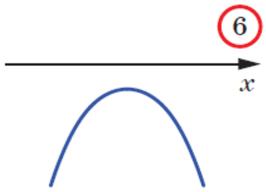
Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 6: Розв'язати нерівність $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена $-9x^2 + 6x - 1$ маємо: $a = -9 < 0$, $D = 0$. Цим умовам відповідає випадок 5 таблиці 2. Установлюємо: $x_0 = \frac{1}{3}$. Тоді схематично графік функції $y = -9x^2 + 6x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 1.б).

Таблиця 2

Розв’язки квадратних нерівностей

	Квадратні нерівності			
	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
 $a > 0, D > 0$	$(-\infty; x_1)$ $\cup\ (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1]$ $\cup\ [x_1; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
 $a > 0, D = 0$	$(-\infty; x_0)$ $\cup\ (x_0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	x_0
 $a > 0, D < 0$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
 $a < 0, D > 0$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1)$ $\cup\ (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1]$ $\cup\ [x_2; +\infty)$
 $a < 0, D = 0$	$\emptyset$	$(-\infty; x_0)$ $\cup\ (x_0; +\infty)$	x_0	$(-\infty; +\infty)$
 $a > 0, D < 0$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$

Із рисунка 1.б) видно, що розв’язками нерівності є всі числа крім $\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що цю нерівність можна розв’язати іншим способом. Домноживши дану нерівність на -1, отримаємо: $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Тоді $(3x - 1)^2 > 0$.

Звідси отримуємо той самий результат.

Відповідь: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Приклад 7: Розв’язати нерівність $x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3$.

Розв’язання. Після перетворень отримаємо нерівність $2x^2 - 3x + 4 < 0$, яка рівносильна заданій. Оскільки $a = 2 > 0$, $D < 0$, маємо випадок, що відповідає ситуації 3 таблиці 2. Відтак, дана нерівність розв’язків не має.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Завдання 2. Самостійно розв’язати нерівності:

1. $x^2 + 6x - 7 > 0$;

2. $2x^2 + 3x + 1 > 0$;

3. $x(x - 5) - 2 < 4x$;

4. $11 - (x + 1)^2 \leq x$;

5. $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leq 5$;

6. $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;

7. $(3x - 7)(x + 2) > (x - 4)(x + 5) + 30$;

8. $(3x - 2)^2 \leq 6 - (2 - 3x)^2$;

9. $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$;

10. $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leq \frac{19}{24}$.

2.4. Системи лінійних нерівностей з однією змінною

Розглянемо вираз $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{5 - x}$. Знайдемо множину допустимих значень змінної x, тобто всі значення змінної x, при яких даний вираз має зміст. Цю множину називають *областю визначення виразу*.

Оскільки підкореневий вираз може набувати тільки невід’ємних значень, то мають *одночасно* виконуватися дві нерівності: $2x - 1 \geq 0$ і $5 - x \geq 0$. Тобто шукані значення змінної x – це всі спільні розв’язки зазначених нерівностей.

Якщо треба знайти всі спільні розв'язки двох або кількох нерівностей, то говорять, що треба *розв'язати систему нерівностей*.

Як і систему рівнянь, систему нерівностей записують за допомогою фігурної дужки. Так, для знаходження області визначення виразу $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 5-x \geq 0. \end{cases}$$

Означення 10. *Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називається значення змінної, яке перетворює кожну нерівність системи в правильну числову нерівність.*

Означення 11. *Розв'язати системи нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.*

Усі розв'язки системи нерівностей утворюють *множину розв'язків системи нерівностей*. Якщо система розв'язків не має, то говорять, що множиною її розв'язків є порожня множина.

Таким чином, *розв'язати систему нерівностей означає знайти множину її розв'язків*.

Системи вигляду:

$$\begin{cases} a_1x+b_1>0, \\ a_2x+b_2>0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x+b_1>0, \\ a_2x+b_2<0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x+b_1<0, \\ a_2x+b_2<0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x+b_1<0, \\ a_2x+b_2>0. \end{cases}$$

називаються системами двох лінійних нерівностей з однією змінною. Зауважимо, що нерівності системи можуть бути як строгими, так і нестрогими.

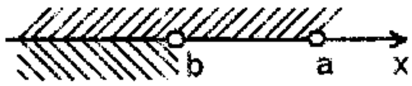
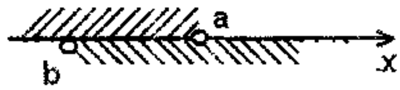
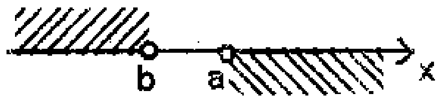
Щоб розв'язати систему нерівностей, потрібно окремо розв'язати кожну нерівність системи, а потім знайти розв'язок системи як перетин множин розв'язків нерівностей, які складають систему.

Приклад 8: Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 3x-1>-7, \\ 3-4x>-9. \end{cases}$$

Таблиця 3

Можливі випадки розв'язування систем лінійних нерівностей

Системи лінійних нерівностей (при а $> b$)	**Розв'язок і його геометрична ілюстрація**
$\begin{cases} x > a, \\ x > b. \end{cases}$	 $x \in (a;\ +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b. \end{cases}$	 $x \in (-\infty; b)$
$\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$	 $x \in (b; a)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$	 $x \in \emptyset$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$$

а) **б)**

Рисунок 2. Геометрична інтерпретація розв'язків нерівностей

а) приклад 8; б) приклад 9

Позначимо на координатній прямій (рис.2.а)) переріз множин розв'язків нерівностей даної системи, тобто переріз проміжків $(-\infty; 3)$ і $(-2; +\infty)$. Шуканий переріз складається із чисел, які задовольняють подвійну нерівність $-2 < x < 3$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $(-2; 3)$ (читають: «*інтервал від* -2 *до* 3»).

Відповідь: можна записати одним із способів $x \in (-2; 3)$ або $-2 < x < 3$.

Приклад 9: Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leq 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leq 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій переріз проміжків $(-\infty; 1)$ і $[-2; +\infty)$, які є множинами розв'язків нерівностей даної системи (рис.2.б)). Шуканий переріз складається із чисел, які задовольняють нерівність $-2 \leq x < 1$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $[-2; 1)$ (читають: «*проміжок від* -2 *до* 1, *включаючи* -2»).

Відповідь: можна записати одним зі способів: $x \in [-2; 1)$ або $-2 \leq x < 1$.

Завдання 3. Самостійно розв'язати нерівності:

1. $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leq x + 9; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 6 \leq x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2(x + 11) \geq 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geq (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - \dfrac{x + 1}{2} \leq \dfrac{x + 1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geq (x - 6)^2; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{7} < \dfrac{x + 1}{4}, \\ (x - 6)(x + 2) + 4x < (x - 7)(x + 7); \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{6x + 1}{6} - \dfrac{5x - 1}{5} > -1, \\ 2(x + 8) - 3(x + 2) < 5 - x; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{2x - 3}{5} - \dfrac{4x - 9}{6} > 1, \\ 5(x - 1) + 7(x + 2) > 3; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{x + 2}{3} < \dfrac{x + 12}{6}, \\ 0{,}3x - 19 \leq 1{,}7x - 5; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{3x - 2}{3} - \dfrac{4x + 1}{4} \leq 1, \\ (x - 1)(x - 2) > (x + 4)(x - 7). \end{cases}$

2.5. Розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів

У загальному випадку *раціональною нерівністю з однією змінною* x називається нерівність, ліва і права частини якої є раціональними функціями однієї змінної, залежними від x.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot\left(x-b_p\right)^{m_p}}, \qquad (1)$$

де $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $m_1, m_2, \ldots, m_p$ – натуральні числа і $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$; $a_i \neq b_j$ ($i = 1,2, \ldots, k$; $j = 1,2, \ldots, p$).

У точках $x = a_i$ функція перетворюється в нуль (ці точки називаються *нулями функції*), точки $x = b_i$ – точки розриву функції $f(x)$. Якщо всі нулі функції і точки розриву відмітити на числовій прямій, то вони розіб'ють її на $k + p + 1$ проміжків. З курсу математичного аналізу відомо, що всередині кожного з цих проміжків функція $f(x)$ неперервна і зберігає постійний знак. Для визначення цього знаку достатньо взяти будь-яку точку з інтервалу, який нас цікавить, і визначити знак функції в цій точці.

Приклад 10: Розв'язати нерівність

$$\frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7} > 0.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7}$ перетворюється в нуль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ і має розрив в точці $x_4 = 4$. Ці чотири точки розбивають числову пряму на п'ять проміжків (рис.3) $(-\infty;\, -3)$, $(-3;\, 0)$, $(0;\, 2)$, $(2;\, 4)$, $(4;\, +\infty)$. Визначимо знак функції $f(x)$ на кожному з цих проміжків.

Рисунок 3. Розбиття прямої на проміжки для прикладу 10

На проміжку $(-\infty;\ -3)$ оберемо точку $x = -4$. Маємо $f(-4) < 0$, отже, $f(x) < 0$ при всіх $x \in (-\infty;\ -3)$.

На проміжку $(-3;\ 0)$ оберемо точку $x = -2$. Маємо $f(-2) > 0$, отже, $f(x) > 0$ при всіх $x \in (-3;\ 0)$.

На проміжку $(0;\ 2)$ оберемо точку $x = 1$. Маємо $f(1) > 0$, отже, $f(x) > 0$ при всіх $x \in (0;\ 2)$.

На проміжку $(2;\ 4)$ оберемо точку $x = 3$. Маємо $f(3) < 0$, отже, $f(x) < 0$ при всіх $x \in (2;\ 4)$.

На проміжку $(4;\ +\infty)$ оберемо точку $x = 5$. Маємо $f(5) > 0$, отже, $f(x) > 0$ при всіх $x \in (4;\ +\infty)$.

Нам потрібно розв'язати нерівність $f(x) > 0$. Із наведених міркувань зрозуміло, що нерівність виконується на проміжках $(-3;\ 0)$, $(0;\ 2)$ та $(4;\ +\infty)$. Об'єднання цих проміжків, власне, і є розв'язком даної нерівності.

Відповідь: можна записати двома способами

1. $x \in (-3; 0) \cup (0; 2) \cup (4;\ +\infty)$;
2. $-3 < x < 0$; $0 < x < 2$; $4 < x < +\infty$.

На практиці для розв'язування нерівності $f(x) > 0$ (відповідно, $<, \geq, \leq$), де $f(x)$ – функція вигляду (1), застосовують *метод інтервалів* – геометричний метод розв'язування. Він ґрунтується на таких трьох досить очевидних твердженнях:

1. *Якщо c – найбільше з чисел a_i, b_j, то в проміжку $(c;\ +\infty)$ функція $f(x)$ додатна.*
2. *Якщо a_i (відповідно b_j) – така точка, що показник степеня h_i виразу $(x - a_i)^{h_i}$ є непарним числом, то справа і зліва від a_i (або b_j), тобто на суміжних проміжках, функція $f(x)$ має протилежні знаки.*

Таку точку a_i (відповідно b_j) називатимемо *простою.* Отже, твердження 2 означає, що *при переході функції через просту точку функція $f(x)$ змінює знак на протилежний.*

3. *Якщо a_i (відповідно b_j) – така точка, що показник степеня h_i виразу $(x - a_i)^{h_i}$ є парним числом, то справа і зліва від a_i (або b_j), тобто на суміжних проміжках, функція $f(x)$ має однакові знаки.*

Таку точку a_i (відповідно b_j) називатимемо *подвійною.* Отже, твердження 2 означає, що *при переході функції через подвійну точку функція $f(x)$ не змінює знак.*

Зокрема, в прикладі 10 точки $x = -3$, $x = 2$, $x = 4$ – прості, а точка $x = 0$ подвійна. Знаки функції $f(x)$ на проміжках представлені на рисунку 4.

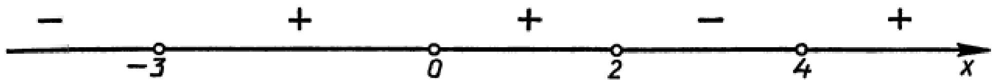


Рисунок 4. Знаки функції $f(x)$ на проміжках числової прямої для прикладу 10

Таким чином, $f(x) > 0$ на проміжках $(-3;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(4;\ +\infty)$. Саме такий результат ми отримали вище розв'язуючи приклад 10.

Метод інтервалів, який ґрунтується на сформульованих вище трьох твердженнях, застосовується для розв'язування нерівностей вигляду:

$$f(x) = \frac{(x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_k)^{n_k}}{(x - b_1)^{m_1}(x - b_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot \left(x - b_p\right)^{m_p}} > 0 \ \ (< 0; \leq 0; \geq 0). \qquad (2)$$

Алгоритм застосування методу інтервалів наступний:

1. *Знайти всі нулі і точки розриву функції $f(x)$, яка міститься в лівій частині нерівності* (2).

2. *Позначити всі точки розриву функції $f(x)$ на числовій прямі виколотими точками.*

3. *Якщо нерівність нестрога*$(\leq 0; \geq 0)$, *то позначити всі нулі функції* $f(x)$ *на числовій прямій зафарбованими, а якщо строга – виколотими точками.*

4. *Проводимо хвилеподібну криву, яку починаємо завжди в деякій точці, що знаходиться над числовою прямою, правіше найбільшого з чисел* a_i *та* b_j. *При цьому її проводять так, щоб вона проходила всі відмічені точки з урахуванням того, що при переході через прості точки крива перетинає числову пряму, а при переході через подвійні точки вона залишається з тієї ж сторони числової прямої.* Цю хвилеподібну криву називають *кривою знаків.*

5. *Обираємо проміжки числової прямої у відповідності до знаку нерівності* (2) (*а саме,* $f(x) > 0$ *там, де крива знаків розташовується над числовою прямою, і* $f(x) < 0$ *там, де крива розташовується під числовою прямої*).

6. *Об'єднання обраних проміжків є розв'язком нерівності* (2).

Слід зауважити, що подвійні точки на рисунках часто показують підкресленими числами. На рисунку 5 зображено криву знаків, яка ілюструє розв'язок нерівності прикладу 10. Точка 0 подвійна, тому вона підкреслена, і крива знаків справа та зліва від цієї точки розташована по один бік від числової прямої.

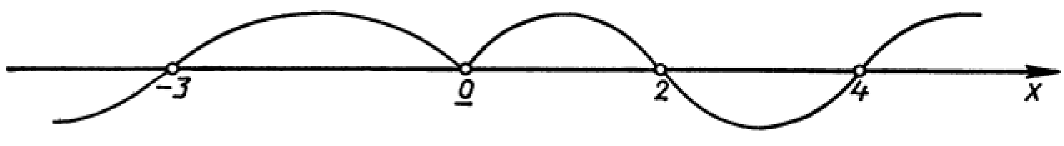


Рисунок 5. Крива знаків та ілюстрація до розв'язку прикладу 10

Приклад 11: Розв'язати нерівність

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x-5)} > 0.$$

Розв'язання. Позначимо на числовій прямій (рис.6) нулі функції

$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x-5)}$ – точки $x_1 = -2$ і $x_2 = 1$ та точки $x_3 = 4$ і $x_4 = 5$, які є точками її розриву. Проведемо через ці точки криву знаків, розпочинаючи її правіше і вище точки $x_4 = 5$, враховуючи, що всі відмічені точки прості.

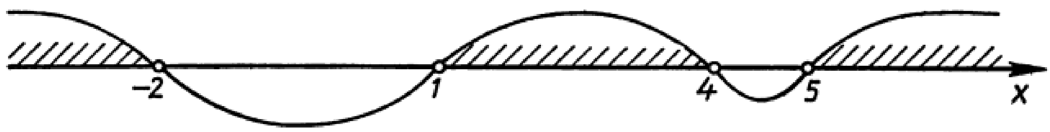


Рисунок 6. Крива знаків та ілюстрація до розв'язку прикладу 11

Оберемо на числовій прямій ті проміжки (на рис.6 вони заштриховані), де крива знаків проходить над числовою прямою. Це проміжки $(-\infty;\ -2)$, $(1;\ 4)$ та $(5;\ +\infty)$. Об'єднання цих проміжків, власне, є розв'язком даної нерівності.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 4) \cup (5;\ +\infty)$.

Приклад 12: Розв'язати нерівність

$$\frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3} \leq 0.$$

Розв'язання. Позначимо на числовій прямій (рис.7) зафарбованими кружечками нулі функції

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3},$$

тобто точки $x_1 = -6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, та $x_4 = 3$ і виколотими точки розриву цієї функції, тобто точки $x_5 = 0$ і $x_6 = 7$.

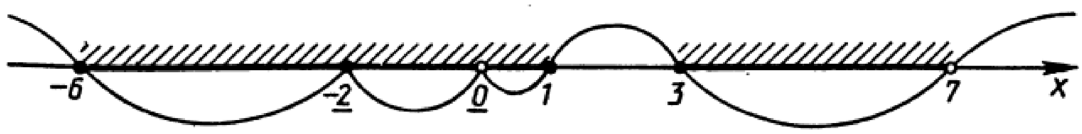


Рисунок 7. Крива знаків та ілюстрація до розв'язку прикладу 12

Зауважимо, що точки $x_2 = -2$ і $x_5 = 0$ є подвійними і проведемо криву знаків. Обираючи проміжки, де $f(x) \leq 0$ (крива знаків під числовою прямою), отримуємо розв'язок даної нерівності.

Відповідь: $x \in [-6; 0) \cup (0; 1] \cup [3; 7)$.

Завдання 4. Самостійно розв'язати нерівності методом інтервалів:

1. $\dfrac{x^2 - 3x - 18}{13x - x^2 - 42} \geq 0$;

2. $\dfrac{(3x + 4)(x^2 - 1)}{x^2 - 3x + 5} < 0$;

3. $\dfrac{(x - 3)(x + 2)}{x^2 - 1} < 1$;

4. $\dfrac{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}{(2x - 1)(x + 4)(3 - x)} > 0$;

5. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 35} > 0$;

6. $\dfrac{x^2 - 4x - 2}{9 - x^2} < 0$;

7. $\dfrac{2x^2 + 18x - 4}{x^2 + 9x + 8} > 2$;

8. $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + x - 1} < 0$.

2.6. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною

Декілька нерівностей з однією змінною утворюють *систему нерівностей* у тому випадку, коли ставиться задача відшукати всі ті значення змінної, які задовольняють *одночасно кожній з цих нерівностей*.

Декілька нерівностей з однією змінною утворюють *сукупність нерівностей* у тому випадку, коли ставиться задача відшукати всі ті значення змінної, кожне з яких задовольняє *принаймні одній з цих нерівностей*.

Таким способом отримуємо, що *множина розв'язків системи нерівностей є перетином множин розв'язків нерівностей*, які утворюють систему, а *розв'язком сукупності нерівностей є об'єднання розв'язків нерівностей*, які утворюють сукупність.

Якщо нерівності $f_1(x) > g_1(x)$ і $f_2(x) > g_2(x)$ утворюють систему, то їх записують в стовпчик за допомогою фігурної дужки:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

У деяких випадках нерівності, що утворюють систему, можна записати в рядок. Так, якщо нерівності $f(x) > g_1(x)$ і $f(x) < g_2(x)$ утворюють систему, то цю систему можна записати у вигляді так званої подвійної нерівності:

$$g_1(x) < f(x) < g_2(x).$$

З означення системи нерівностей випливає, що якщо нерівність $f(x) > g(x)$ є наслідком нерівностей $f_1(x) > g_1(x)$ і $f_2(x) > g_2(x)$ (чи наслідком лише однієї з нерівностей), то система нерівностей

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x) \end{cases}$$

рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Іншими словами, якщо до заданої системи нерівностей приписати нерівність-наслідок чи, навпаки, із заданої системи нерівностей виключити нерівність-наслідок, то отримаємо систему нерівностей, яка рівносильна заданій. Отже, рівносильними є системи нерівностей

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ f_1(x) + f_2(x) > g_1(x) + g_2(x) \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x) \end{cases}$$

(з першої системи виключена нерівність $f_1(x) + f_2(x) > g_1(x) + g_2(x)$, яка є наслідком нерівностей $f_1(x) > g_1(x)$ і $f_2(x) > g_2(x)$).

Якщо нерівності $f_1(x) > g_1(x)$ і $f_2(x) > g_2(x)$ утворюють сукупність нерівностей, то їх записують або в стовпчик за допомогою квадратної дужки:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \end{array}\right.$$

або в рядок за допомогою знака «;»:

$$f_1(x) > g_1(x); \quad f_2(x) > g_2(x).$$

Кожна нестрога нерівність $f(x) \geq g(x)$ є сукупністю строгої нерівності $f(x) > g(x)$ і рівняння $f(x) = g(x)$ й тому може бути записана так, як зазвичай записується сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) = g(x), \end{array}\right. \quad \text{або} \quad f(x) > g(x); \quad f(x) = g(x).$$

Кожну «*не рівність*» $f(x) \neq g(x)$ можна записати у вигляді сукупності двох строгих нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < g(x), \end{array}\right. \quad \text{або} \quad f(x) > g(x); \quad f(x) < g(x).$$

Декілька систем нерівностей з однією змінною утворюють *сукупність систем нерівностей* у тому випадку, якщо ставиться задача відшукати всі ті значення змінної, кожне з яких задовольняє *принаймні одній з цих систем*.

Приклад 13: Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 4}{x} < 1, \\ x^2 < 64. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку першу нерівність. Маємо:

$$\frac{x^2 + x - 4}{x} - 1 < 0, \qquad \frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0.$$

За допомогою кривої знаків (рис. 8) знаходимо множину розв'язків цієї нерівності: $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

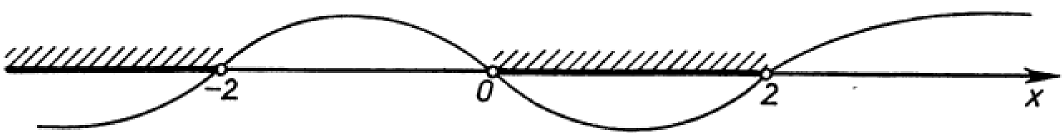


Рисунок 8. Крива знаків та ілюстрація до розв'язку першої нерівності прикладу 13

Розв'яжемо другу нерівність цієї системи. Маємо $x^2 - 64 < 0$, або $(x-8)(x+8) < 0$. За допомогою кривої знаків (рис.9) знаходимо множину розв'язків цієї нерівності: $(-8; 8)$.

Зобразивши множини розв'язків першої і другої нерівності штрихами, які мають різні кути нахилу відносно числової прямої, або, як зображено на рисунку 10, штрихами, розташованими вище та нижче числової прямої, знайдемо перетин множин розв'язків нерівностей, що утворюють задану систему.

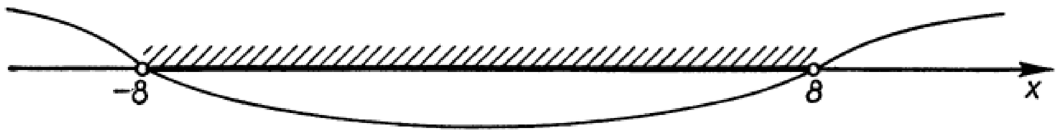


Рисунок 9. Крива знаків та ілюстрація до розв'язку другої нерівності прикладу 13

Рисунок 10. Ілюстрація до розв'язку системи нерівностей прикладу 13

Відповідь: $x \in (-8; -2) \cup (0; 2)$.

Приклад 14: Знайти область визначення функції

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-6}{x+2}} + \sqrt[4]{(x^4 - 5x^3 + 6x^2)(1 - x^2)}.$$

Розв'язання. Задача зводиться до розв'язування системи нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-6}{x+2} \geq 0, \\ (x^4 - 5x^3 + 6x^2)(1 - x^2) \geq 0. \end{cases}$$

Перетворимо першу нерівність системи до вигляду $\frac{x-2}{x+2} \geq 0$ й за допомогою кривої знаків (рис.11) знайдемо множину розв'язків цієї нерівності: $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$.

Рисунок 11. Ілюстрація до розв'язку першої нерівності з прикладу 14

Перетворимо другу нерівність системи до вигляду

$$x^2(x-2)(x-3)(x-1)(x+1) \leq 0.$$

За допомогою кривої знаків (рис.12) знайдемо множину розв'язків цієї нерівності: $[-1; 1] \cup [2; 3]$.

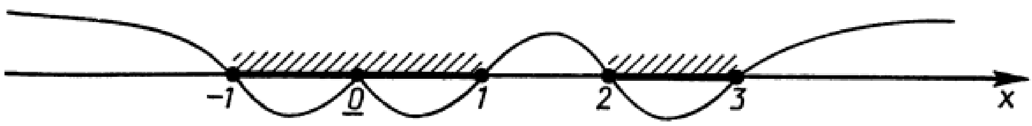


Рисунок 12. Ілюстрація до розв'язку другої нерівності з прикладу 14

Зобразивши штрихуванням знайдені множини розв'язків першої і другої нерівності заданої системи на числовій прямій (рис.13), знайдемо їх перетин: $[2; 3]$.

Рисунок 13. Ілюстрація до розв'язку системи нерівностей з прикладу 14

Відповідь: $x \in [2; 3]$.

Приклад 15: Розв'язати сукупність нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} x^5 \geq 100x^3, \\ \dfrac{(x+9)(5x - x^2 - 18)}{x^2 - 18x + 45} \geq 0. \end{array}\right.$$

Розв'язання. Перетворимо першу нерівність сукупності до вигляду:

$$x^3(x-10)(x+10) \geq 0.$$

За допомогою кривої знаків (рис.14) знайдемо множину розв'язків цієї нерівності: $[-10; 0] \cup [10; +\infty)$.

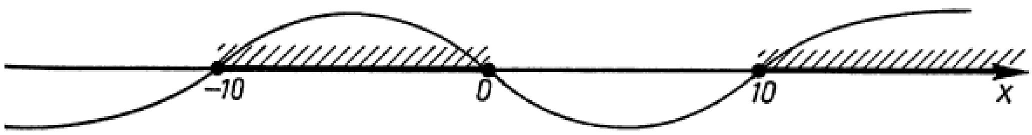


Рисунок 14. Ілюстрація до розв'язку першої нерівності з прикладу 15.

Розглянемо другу нерівність сукупності. Маємо:

$$\frac{(x+9)(x^2 - 5x + 18)}{(x-3)(x-15)} \leq 0.$$

Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 5x + 18$ від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то $x^2 - 5x + 18 > 0$ при всіх значеннях x і, відповідно, розділивши обидві частини нерівності на $x^2 - 5x + 18$, зберігши знак нерівності, отримаємо рівносильну нерівність

$$\frac{x+9}{(x-3)(x-15)} \leq 0.$$

За допомогою кривої знаків (рис.15) знайдемо множину розв'язків цієї нерівності: $(-\infty; -9] \cup (3; 15)$.

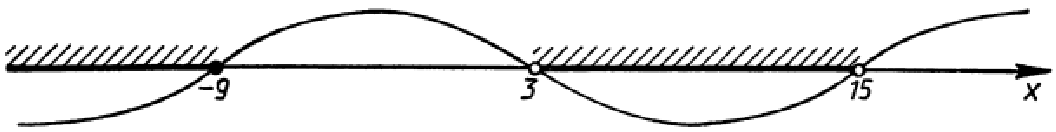


Рисунок 15. Ілюстрація до розв'язку другої нерівності з прикладу 15

Об'єднавши знайдені множини розв'язків кожної з нерівностей сукупності (рис.16), отримаємо $(-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$ – множина розв'язків вихідної сукупності.

Відповідь: $x \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$.

Рисунок 16. Ілюстрація до розв'язку сукупності нерівностей з прикладу 15

Приклад 16: Розв'язати сукупність систем нерівностей

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x^2 < 16; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 9 < 0, \\ 100 \geq x^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Множиною розв'язків першої системи є числовий проміжок $(2; 4)$.

Множиною розв'язків другої – числовий проміжок $[-10; 3)$. На числовій прямій (рис. 17) зобразимо означені множини, тоді об'єднання множин розв'язків першої і другої систем: $[-10; 4)$, тобто множина розв'язків заданої сукупності систем.

Відповідь: $x \in [-10; 4)$.

Рисунок 17. Ілюстрація до розв'язку сукупності систем з прикладу 16

Приклад 17: Розв'язати систему сукупностей нерівностей

$$\begin{cases} x > \dfrac{2}{3}; \qquad -2 \le x \le 2, \\ x > -2; \qquad -3 < x < 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Покажемо на числовій прямій (рис. 18) множину розв'язків першої сукупності ($x \ge -2$) штрихуванням над числовою прямою, а множину розв'язків сукупності ($x > -3$) штрихуванням під числової прямою.

Рисунок 18. Ілюстрація до розв'язку сукупності систем з прикладу 17

Проміжок числової прямої, який заштрихований двічі, є множиною розв'язків заданої системи. Отже, $[-2; +\infty)$ – є множиною розв'язків.

Відповідь: $x \in [-2; +\infty)$.

Завдання 5. Самостійно розв'язати сукупності нерівностей і системи нерівностей

1. $(x-1)(x-2)(x-3) < 0;\ \ x^2 < 1;$

2. $\dfrac{3x-2}{x-3} > 0; \dfrac{4x-1}{5x-2} < 0$

3. $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 8 \le 0, \\ x^2 - 3x + 6 < 0, \\ \quad x^2 < 1; \end{array}\right.$

4. $\left[\begin{array}{l} 5x - 20 \le x^2 \le 8x, \\ 1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} < 2; \end{array}\right.$

5. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ \dfrac{3x - 21}{x^2 + x + 4} < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3 > 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3} < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x^2 + 9x - 20}{11x - x^2 - 30} \le -1, \\ x^2 + 18 > 5x. \end{cases}$

Розв'язати системи сукупностей нерівностей

6. $\begin{cases} (x+1)(x-3) > 0; \qquad 2 - x^2 \le 0, \\ \qquad\qquad x^2 > 25; \qquad \dfrac{x-1}{x+2} < 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^4+5x^2+4\le 0; \qquad 8x^2-x^3-15x\ge 0, \\ \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4x-5}>0; \quad \dfrac{x-3}{x-5}<0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-3}\le 0; \quad \dfrac{x-5}{(x-6)^2(x-8)}<0, \\ x^2-9x+14<0; \quad x>x^2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{2}{x-3}<\dfrac{3}{x}; \quad (x-10)(x^2+3x+8)\ge 0; \quad x^2-1<0, \\ \dfrac{5}{x+2}<\dfrac{4}{x}; \quad \dfrac{x-4}{x-3}>\dfrac{x-3}{x-4}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{7x-3x^2-10}>-1; \quad x^6-64<0, \\ x^2-5x+6>0; \quad x-2x^2<0, \\ x^3-7x+6>0. \end{cases}$

2.7. Нерівності, що містять змінну під знаком модуля

При розв’язуванні нерівностей, які містять змінну під знаком модуля, іноді корисно використовувати таку теорему про рівносильність нерівностей.

Теорема 6. *Нехай дано нерівність $f(x)>g(x)$, причому $f(x)\ge 0$ та $g(x)\ge 0$ при всіх x з області визначення нерівності. Якщо обидві частини нерівності піднести до одного й того ж натурального степеня n, то при цьому знак нерівності залишиться без змін і отримаємо нерівність*

$$\big(f(x)\big)^n>\big(g(x)\big)^n,$$

рівносильну даній.

Нехай, наприклад, потрібно розв’язати нерівність $|f(x)|>|g(x)|$. Скористаймося тим, що якщо $p(x)$ – деяка функція, то $|p(x)|\ge 0$ і $|p(x)|^2=\big(p(x)\big)^2$.

Це означає, що згідно з теоремою 6, нерівність $|f(x)|>|g(x)|$ рівносильна нерівності $\big(f(x)\big)^2>\big(g(x)\big)^2$. Крім того, іноді корисно скористатись геометричною інтерпретацією модуля дійсного числа.

Перший спосіб розв'язування нерівностей з модулем. З означення модуля випливає, що геометрично $|a|$ означає відстань від точки a числової прямої до початку координат, а $|a-b|$ означає відстань між точками a та b. Наприклад, якщо $a=5$, $b=2$, то $|5-2|=3$ – відстань між точками з координатами 2 і 5 (рис.19). Або $|2-5|=|-3|=3$.

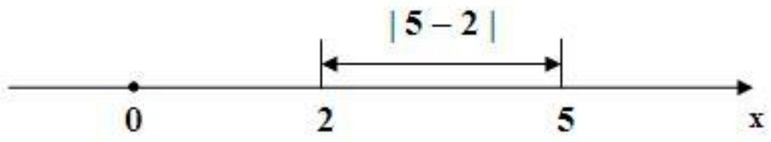


Рисунок 19. Геометрична ілюстрація $|5-2|$

Відстань між точками 5 і -6 дорівнює: $|5-(-6)|=|5+6|=11$ (рис.19). Або $|-6-5|=|-11|=11$.

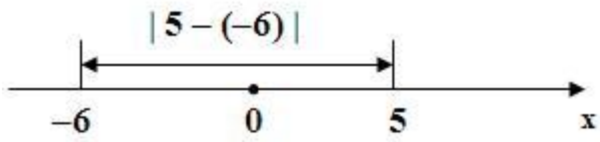


Рисунок 20. Геометрична ілюстрація $|5-(-6)|$

Геометрично нерівність $|x|\le a$, де $a>0$, означає, що відстань від точки з координатою x до точки 0 не більша від a (рис.21).

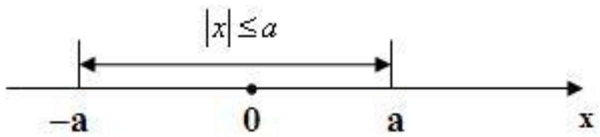


Рисунок 21. Геометрична ілюстрація $|x|\le a$

Цю властивість мають точки $x\in[-a;a]$. Отже, нерівність $|x|\le a$ означає те саме, що й подвійна нерівність $-a\le x\le a$. Нерівність $|x|<a$ означає те саме, що й подвійна нерівність $-a<x<a$.

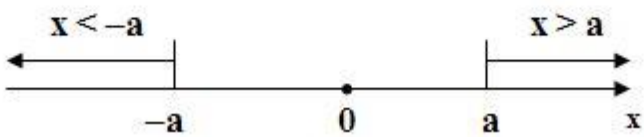


Рисунок 22. Геометрична ілюстрація $|x|>a$

Нерівність $|x| > a$, означає, що $x > a$ або $x < -a$ (рис. 21). Нерівність $|x| \geq a$ означає, що $x \geq a$ або $x \leq -a$.

Нерівності $|f(x)| < a$, $|f(x)| \leq a$, $|f(x)| > a$, $|f(x)| \geq a$, де $a > 0$, розв'язуються аналогічно, оскільки можуть бути зведені до попередніх заміною $f(x) = t$.

Другий спосіб розв'язування нерівностей з модулем. При розв'язуванні нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, використовується означення модуля функції:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Нерівність вигляду $|f(x)| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < f(x) < a$, якщо $a > 0$. Якщо $a \leq 0$, то нерівність $|f(x)| < a$ розв'язків не має.

Нерівність вигляду

$$|f(x)| > a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a, \end{array}\right.$$

якщо $a > 0$; якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності $|f(x)| > a$ буде множина допустимих значень функції $f(x)$; якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $|f(x)| > a$ буде множина тих x, для яких $f(x) \neq 0$.

Для розв'язування нерівностей, які містять більше одного модуля, застосовують метод інтервалів для модулів, який полягає в розбитті нулями модулів числової прямої на інтервали з наступним пошуком множини розв'язків нерівності на кожному з них і подальшим об'єднанням у спільну множину розв'язків.

Приклад 18: Розв'язати нерівність $|5x - 3| > 2$.

Розв'язання. Скориставшись першим способом розв'язування нерівностей з модулем отримуємо, що $5x - 3 > 2$ або $5x - 3 < -2$, тобто

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 3 > 2, \\ 5x - 3 < -2, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < \dfrac{1}{5}, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (1; +\infty).$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 19: Розв'язати нерівність $|3x - 8| < x - 2$.

Розв'язання. Дану нерівність можна замінити сукупністю двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x - 8 \geq 0,\\ 3x - 8 < x - 2;\end{cases}\\ \begin{cases}3x - 8 < 0,\\ -(3x - 8) < x - 2;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq \frac{8}{3},\\ x < 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x < \frac{8}{3},\\ x > 2{,}5;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x \in \left[\frac{8}{3}; 3\right);\\ x \in \left(2{,}5; \frac{8}{3}\right);\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad x \in (2{,}5; 3).$$

Відповідь: $x \in (2{,}5; 3)$.

Приклад 20: Розв'язати нерівність $|x - 3| + |x + 2| - x > 5$.

Розв'язання. Для розв'язування даної нерівності використаємо метод інтервалів для модулів. Позначимо на числовій прямій точки, в яких вирази, що знаходяться під знаком модулів, перетворюються в нуль. Це точки $x = -2$ і $x = 3$. Числова пряма розбивається цими точками на три проміжки:

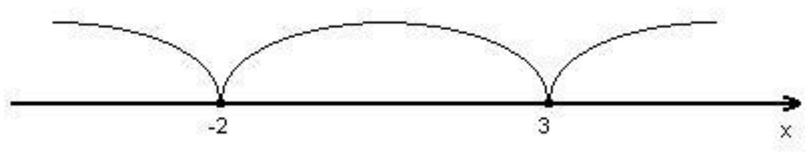


Рисунок 23. Ілюстрація розбиття числової прямої на проміжки для прикладу 20

1) Розглянемо проміжок **(**інтервал) $x \in (-\infty; -2)$. Підставимо в підмодулеві вирази замість змінної x довільне значення з даного інтервалу, виявивши тим самим знак підмодулевого виразу. Таким чином, $x - 3 < 0$, $x + 2 < 0$. Розкривши модулі відповідно зі зміною знаків, отримаємо нерівність:

$$-x + 3 - x - 2 - x > 5, \quad \Leftrightarrow \quad -3x - 4 > 0, \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{4}{3}.$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -2); \\ x < -\dfrac{4}{3}; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x < -2.$$

2) Розглянемо проміжок $x \in [-2; 3)$. За тим самим принципом, що й на попередньому проміжку, маємо

$$-x + 3 + x + 2 - x > 5, \quad \Leftrightarrow \quad -x > 0, \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{l} -2 \le x < 3; \\ x < 0; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad -2 \le x < 0.$$

3) Розглянемо проміжок $x \ge 3$: Маємо

$$x - 3 + x + 2 - x > 5, \quad \Leftrightarrow \quad x > 6.$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x \ge 3; \\ x > 6; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x > 6.$$

Об'єднаємо отримані множини розв'язків:

$$\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ -2 \le x < 0, \\ x > 6; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

Приклад 21: Розв'язати нерівність

$$\frac{x^2 - 3|x| - 4}{x + 1} < -3x.$$

Розв'язання. Розпишемо дану нерівність у вигляді сукупності двох систем:

$$\frac{x^2 - 3|x| - 4}{x + 1} < -3x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} < -3x; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} < -3x; \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 4 + 3x(x+1)}{x+1} < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ \dfrac{x^2 + 3x - 4 + 3x(x+1)}{x+1} < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{4x^2 - 4}{x+1} < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ \dfrac{4x^2 + 6x - 4}{x+1} < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ (x-1)(x+1)(x+1) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ (2x-1)(x+2)(x+1) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

Зобразимо на числових прямих множини розв’язків нерівностей і знайдемо їх перетин і об'єднання відповідно (рис.24).

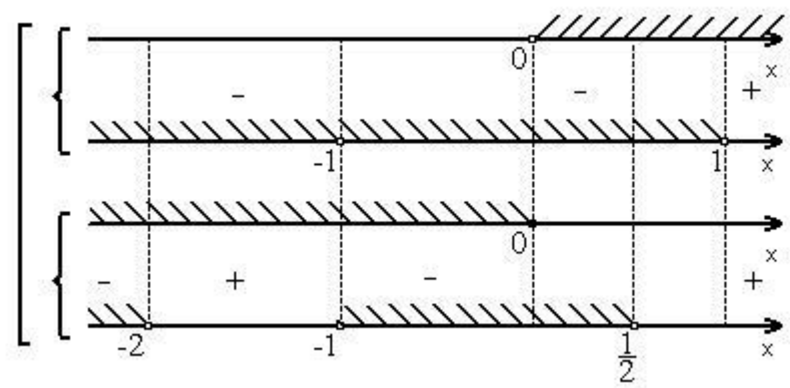


Рисунок 24. Ілюстрація об’єднання проміжків сукупності систем нерівностей прикладу 21

$$\left[\begin{array}{l} x \in (0; 1), \\ x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0], \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1)$.

Приклад 22: Розв’язати нерівність

$$\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right| > 1.$$

Розв’язання. Дана нерівність рівносильна нерівності

$$\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^2 > 1,$$

яку можна переписати таким способом:

$$\frac{4x^2 + 12x + 9}{9x^2 - 12x + 4} - 1 > 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-5x^2 + 24x + 5}{(3x-2)^2} > 0,$$

звідки

$$\frac{5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)}{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}<0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}<0.$$

Методом інтервалів (рис.25) знаходимо розв'язок останньої нерівності, а разом з ним й заданої.

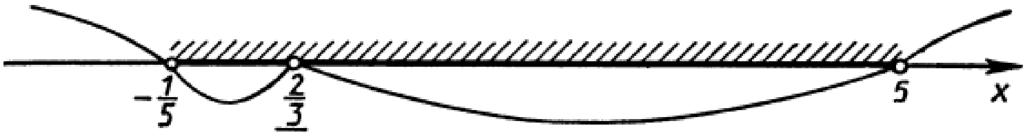


Рисунок 25. Ілюстрація до розв'язку прикладу 22

Відповідь: $x \in \left(-\frac{1}{5};\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};5\right)$.

Приклад 23: Розв'язати нерівність $|x^2-3x+2| \leq 2x-x^2$.

Розв'язання. Нерівність рівносильна такій сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3x+2\geq 0,\\ x^2-3x+2\leq 2x-x^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3x+2<0,\\ -(x^2-3x+2)\leq 2x-x^2,\end{cases}\end{array}\right.$$

розв'язуючи яку знаходимо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)(x-2)\geq 0,\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\leq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}(x-1)(x-2)<0,\\ x-2\leq 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 1;\ \ x\geq 2,\\ \frac{1}{2}\leq x\leq 2;\end{cases}\\ \begin{cases}1<x<2,\\ x\leq 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідки $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$; $x=2$; $1<x<2$. Об'єднуючи знайдені множини розв'язків, отримаємо $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Відповідь: $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Завдання 6. Самостійно розв'язати нерівності:

1. $|x+3|+2x\geq 6$;

2. $|x-4|-6x<15$;

3. $|x+5|-3x>4$;

4. $|x-1|+x\leq 3$;

5. $\left|-\frac{5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|$;

6. $\left|\frac{3}{2x-7}\right| < \left|-\frac{6}{x+4}\right|$;

7. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| > 1$;

8. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| \leq 3$.

9. $|x-1| - |2x+1| < 3$;

10. $\left||x-1| + x\right| < 3$.

3. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними

Теми «*Нерівності з двома змінними*» та «*Системи нерівностей з двома змінними*» вивчаються в 9 класах з поглибленим вивченням математики. Розглянемо детально дану тематику викладену в підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів, 2017 [26].

3.1. Нерівності з двома змінними

Нерівності $2x - y \geq 1$, $y > x^2$, $x^2 + y^2 < 4$ є прикладами нерівностей з двома змінними.

Означення 12. *Пара значень змінних, яка перетворює нерівність з двома змінними на правильну числову нерівність, називається розв'язком нерівності з двома змінними.*

Зокрема, для нерівності $3x - y > 0$ кожна з пар чисел $(1; -1)$, $(2; 0)$, $(1; 2)$ є розв'язком, а, наприклад, пара $(0; 0)$ не є її розв'язком.

Означення 13. *Графіком нерівності з двома змінними називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких є розв'язками даної нерівності.*

Приклад 24: Зобразіть графік нерівності $2x - y > 1$.

Розв'язання. Графіком рівняння $2x - y = 1$ є пряма. Ця пряма розбиває координатну площину на дві області, кожну з яких називають *відкритою півплощиною* (відкрита півплощина відрізняється від півплощини тим, що вона не містить прямої, яка її обмежує). Покажемо, що рожева область (рис.26) є шуканим графіком.

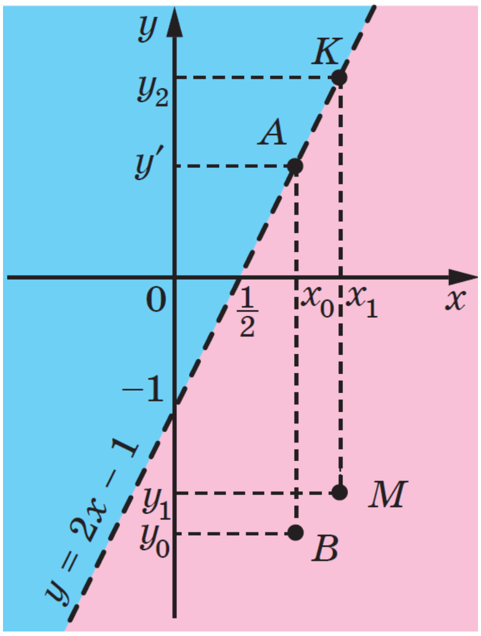


Рисунок 26. Ілюстрація до розв'язку нерівності $2x - y > 1$

Перепишемо задану нерівність таким способом:

$$y < 2x - 1.$$

Розглянемо довільну точку $M(x_1; y_1)$, яка належить зазначеній відкритій півплощині.

Нехай пряма, яка проходить через точку M і перпендикулярна до осі абсцис, перетинає пряму $y = 2x - 1$ у кожній точці $K(x_1; y_2)$. Маємо: $y_2 = 2x_1 - 1 > y_1$. Оскільки $y_1 < y_2$, то $y_1 < 2x_1 - 1$. Отже, пара чисел $(x_1; y_1)$ є розв'язком даної нерівності.

Ми показали, що координати будь-якої точки рожевої області є розв'язком заданої нерівності. Залишилося показати, що будь-який розв'язок нерівності $y < 2x - 1$ є координатами точки, яка належить зазначеній області.

Розглянемо пару чисел $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком нерівності $y < 2x - 1$, тобто $y_0 < 2x_0 - 1$. Нехай $2x_0 - 1 = y'$. Тоді точка $A(x_0; y')$ належить прямій $y = 2x - 1$ (рис.26). Оскільки $y_0 < y'$, то точка $B(x_0; y_0)$ лежить нижче від точки A, тобто належить рожевій області.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що блакитна область є графіком нерівності $2x - y < 1$.

Також говорять, що кожна з нерівностей $2x - y > 1$ і $2x - y < 1$ задає відповідно рожеву та блакитну області.

Домовимося, що в зображенні графіка пунктирна лінія позначає точки, які не належать шуканому графіку. Тому на рисунку 26 пряму $y = 2x - 1$ зображено пунктиром.

Означення 14. *Лінійною нерівністю з двома змінними називається нерівність вигляду $ax + by > c$ або $ax + by < c$, де x і y – змінні, a, b і c – параметри.*

Міркуючи так, як у прикладі 25, можна показати, що коли параметри a і b не дорівнюють нулю одночасно, тобто $a^2 + b^2 \neq 0$, то графіком лінійної нерівності є одна з відкритих півплощин, на які пряма $ax + by = c$ розбиває координатну площину xy.

Якщо $a^2 + b^2 = 0$, то при $c = 0$ графіком лінійної нерівності є вся координатна площина, а при $c \neq 0$ – порожня множина.

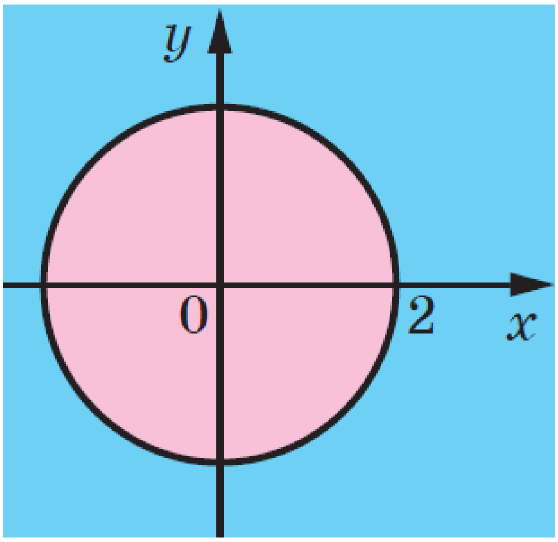
Нерівності виду $ax + by \geq c$ і $ax + by \leq c$ також вважають лінійними. Графіком кожної з нерівностей $ax + by \geq c$ і $ax + by \leq c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, є півплощина.

Розглянемо приклади побудови графіків нелінійних нерівностей.

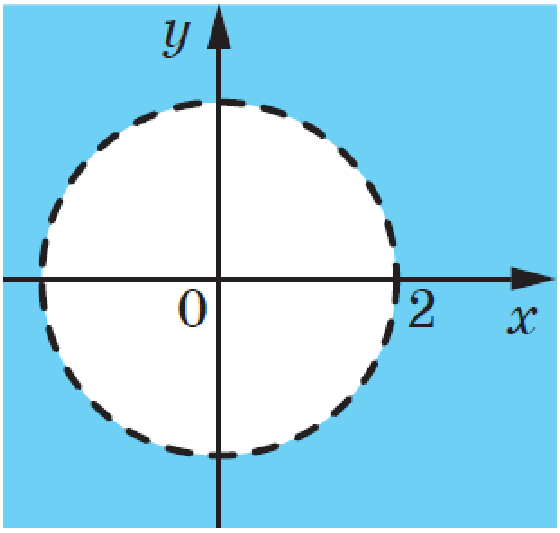
Приклад 25: Побудуйте графік нерівності $x^2 + y^2 \leq 4$.

Розв'язання. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло радіуса 2 із центром у початку координат. Це коло розбиває координатну площину на дві області, зображені на рисунку 26.а рожевим і блакитним кольорами. Розв'язками даної нерівності є координати тих і тільки тих точок, які віддалені від початку координат на відстань, не більшу за 2. Тому шуканим графіком є круг радіуса 2 із центром у початку координат (рис.26.а)).

Зауважимо, що графіком нерівності $x^2 + y^2 > 4$ є множина точок координатної площини, які не належать кругу радіуса 2 із центром у початку координат (рис.26.б).



а)



б)

Рисунок 26. Ілюстрація до розв'язку нерівності $x^2 + y^2 \leq 4$

Звернемо увагу, що графіки нерівностей із прикладів 24–25 можна побудувати за однією загальною схемою:

- подати нерівність у вигляді $F(x; y) > 0$ (або $F(x; y) < 0$),
- потім побудувати графік рівняння $F(x; y) = 0$, який розбиває координатну площину на дві області. Одна із цих областей (можливо, разом із графіком рівняння) буде шуканим графіком нерівності.

Ця схема застосовна й у тих випадках, коли рівняння $F(x; y) = 0$ розбиває площину на три та більше області, і в тих випадках, коли областю визначення виразу $F(x; y)$ є не вся площина. Які із цих областей належать шуканому графіку, з'ясовують за допомогою «*пробних точок*» подібно до того, як ми це робили, розв'язуючи нерівності з однією змінною методом інтервалів.

Приклад 26: Побудуйте графік нерівності $xy < 6$.

Розв'язання. Графік рівняння $xy = 6$ розбиває координатну площину на області (рис.27.а)). Оберемо як «пробні» точки $A(-4;-4)$, $O(0;0)$, $B(4;4)$. Вони належать відповідно жовтій, блакитній і рожевій областям. При цьому пари чисел $(-4;-4)$ і $(4;4)$ не є розв'язками даної нерівності, а пара чисел $(0;0)$ є її розв'язком.

Тоді, можна зробити такий висновок: жовта й рожева області не належать графіку нерівності, а блакитна область йому належить.

Отже, шуканим графіком є блакитна область.

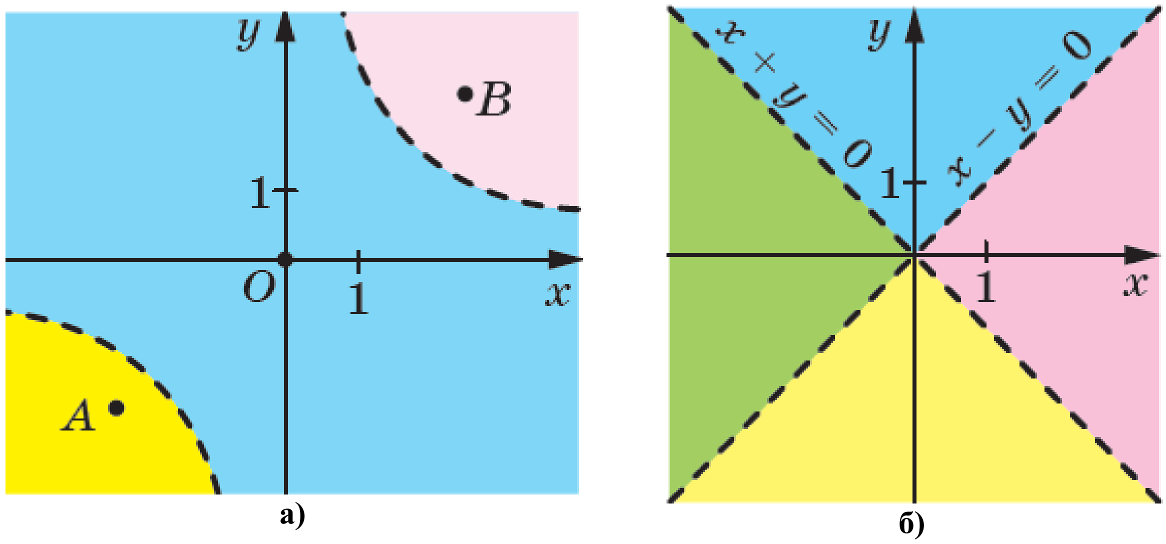


Рисунок 27. Графіки розв'язку нерівностей: а) $xy < 6$; **б)** $x^2 - y^2 < 0$

Приклад 27: Зобразіть графік нерівності $x^2 - y^2 < 0$.

Розв'язання. Графіком рівняння $x^2 - y^2 = 0$ є об'єднання прямих $x + y = 0$ та $x - y = 0$. Тоді графік рівняння $x^2 - y^2 = 0$ розбиває координатну площину на чотири області (рис.27.б).

За допомогою «пробних» точок установлюємо, що шуканим графіком є об'єднання блакитної та жовтої областей (рис.27.б).

Завдання 7. Самостійно розв'язати задачі.

1. Зобразіть графіки нерівності:

   а) $2x - y > 1$; б) $x + 4y \geq 6$.

2. Графіками яких нерівностей є півплощина?

   а) $y < 3$; б) $|x| \geq x$;

в) $\dfrac{(x-y)^2}{x-y} \geq 0$; г) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} \geq 0$.

3. Побудуйте графік нерівності:

а) $y < 3x - x^2$; б) $x^2 - x - 2 > y$;

в) $(x+y)^2 + y^2 \leq 4$; г) $(x+y)(x-y-1) > 0$;

е) $y < -x^2 - 2x$; є) $xy \geq 12$;

ж) $(x-1)^2 + (y+2)^2 < 1$; з) $x^2 + y^2 - 4y > 0$.

3.2. Системи нерівностей з двома змінними

Пара чисел $(1; 2)$ є розв'язком кожної з нерівностей $y - x^2 \geq 0$ і $y - x \geq 1$. У такому випадку говорять, що пара $(1;\ 2)$ є розв'язком системи нерівностей

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ y - x \geq 1. \end{cases}$$

Щоб знайти множину розв'язків системи нерівностей, треба знайти переріз множин розв'язків нерівностей, які входять до системи.

Множину розв'язків системи можна зображати на координатній площині. *Для цього треба побудувати графіки нерівностей, які входять до системи, і знайти їхній переріз. Отримана фігура є зображенням множини розв'язків системи.*

Побудуємо зображення множини розв'язків записаної вище системи.

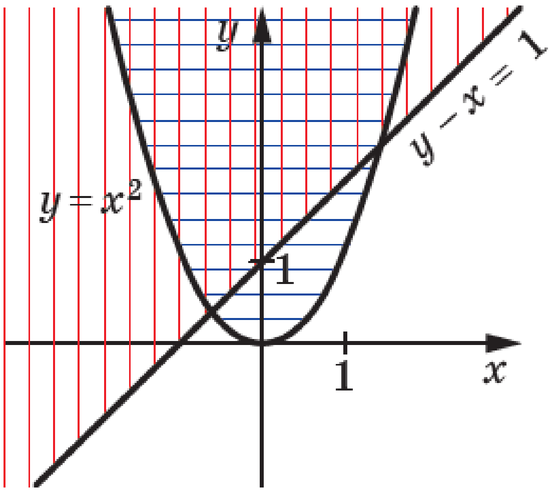
Графіком першої нерівності є множина точок, які лежать не нижче від параболи $y = x^2$. Цю фігуру показано на рисунку 28.а) горизонтальною штриховкою. Графіком другої нерівності є півплощина з межею $y - x = 1$, показана на рисунку 28.а) вертикальною штриховкою. Фігуру, яка зображає розв'язки системи, позначено подвійною штриховкою.

Також говорять, що *система нерівностей* $\begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ y - x \geq 1 \end{cases}$ *задає* побудовану фігуру.

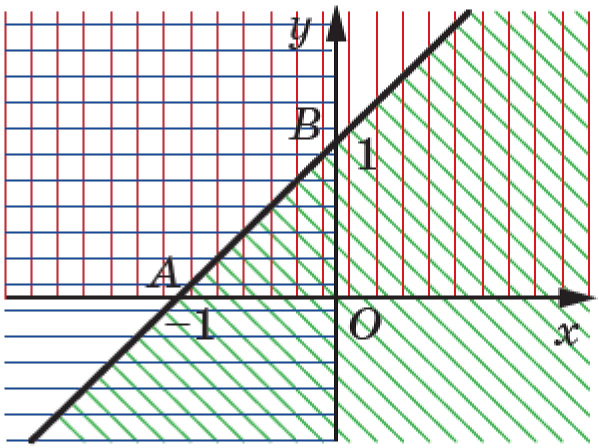
Наприклад, система нерівностей

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ x \leq 0, \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$$

задає трикутник *ABO* (рис. 28.б).



а)



б)

Рисунок 28. Графіки множин розв'язків систем нерівностей:

а) $\begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ y - x \geq 1. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y \geq 0, \\ x \leq 0, \\ -x + y \leq 1. \end{cases}$.

Приклад 28: Зобразіть на координатній площині графік нерівності

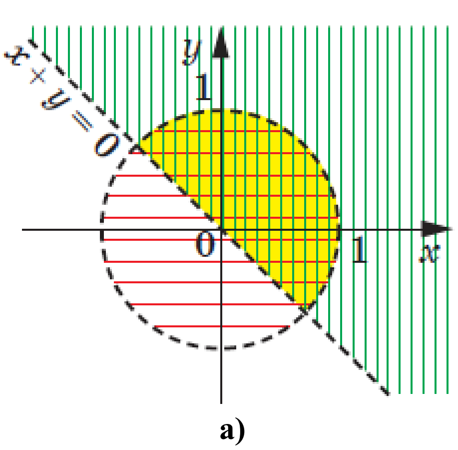
$$\sqrt{1 - x^2 - y^2}(x + y) > 0.$$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x + y > 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0. \end{cases}$$

Графіком першої нерівності системи є відкрита півплощина з межею $x + y = 0$, показана на рисунку 29.а) вертикальною штриховкою; графіком другої – внутрішня область круга радіуса 1 із центром у початку координат.

Отже, графіком даної нерівності є відкритий півкруг, показаний на рисунку 29.а) подвійною штриховкою.



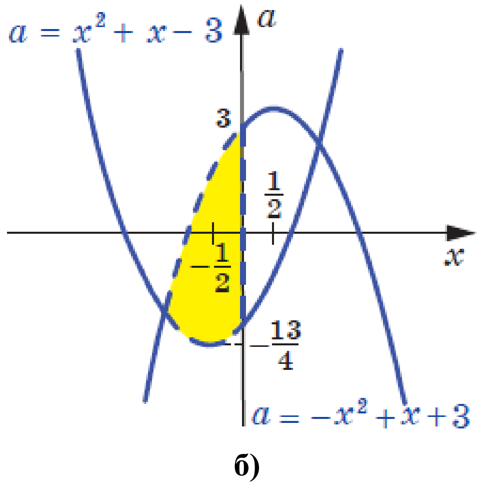


Рисунок 29. Графіки множин розв'язків нерівностей:
а) $\sqrt{1-x^2-y^2}(x+y)>0$; **б)** $3-|x-a|>x^2$.

Приклад 29: При яких значеннях параметра a нерівність $3-|x-a|>x^2$ має хоча б один від'ємний розв'язок?

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так:

$$|x-a|<3-x^2.$$

Ця нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x-a<3-x^2, \\ x-a>-3+x^2. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} a>x^2+x-3, \\ a<-x^2+x+3. \end{cases}$$

Отримана система повинна мати хоча б один від'ємний розв'язок. Тому задача зводиться до того, щоб знайти всі значення параметра a, при яких має розв'язок система

$$\begin{cases} a>x^2+x-3, \\ a<-x^2+x+3, \\ x<0. \end{cases}$$

На координатній площині xa зобразимо розв'язки останньої системи. Графіком першої нерівності системи є множина точок, які лежать вище параболи $a=x^2+x-3$, графіком другої нерівності — множина точок, які лежать нижче параболи $a=-x^2+x+3$, графіком третьої нерівності –

відкрита півплощина, розміщена ліворуч від осі ординат. Переріз зазначених множин зображено на рисунку 29.б) жовтим кольором.

Система має розв'язок, якщо горизонтальні прямі перетинають побудовану фігуру. Цей перетин забезпечується умовою $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Відповідь: $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Приклад 30: Зобразити на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2>1,\\(x+1)^2+(y-1)^2\le 9.\end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язком першої нерівності є вся координатна площина крім внутрішніх точок кола одиничного радіуса з центром у точці $(-1;1)$. Всі точки, які задовольняють другу нерівність, лежать всередині круга з центром у точці $(-1;1)$ радіуса 3. Множиною розв'язків вихідної нерівності є перетин розв'язків першої та другої нерівності. Його зображено на рисунку 30 заштрихованою областю.

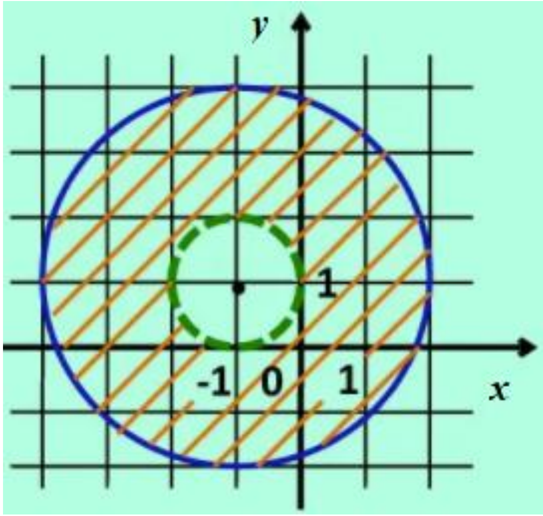


Рисунок 30. Ілюстрація до розв'язку системи нерівностей прикладу 30.

Завдання 8. Самостійно зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1. $\begin{cases} 2x - y > 1, \\ 2x - y < 2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x > 5 - 2y, \\ y < -1{,}5x + 1; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 2y > 2, \\ x - y > 1; \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x + y \geq -3, \\ 2x - y \geq -2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + (y+3)^2 \leq 9; \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ xy \geq 2; \end{cases}$

7. $\begin{cases} y < -x^2 + 1, \\ y \geq |x| - 1; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 100, \\ xy \leq -3; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ y \leq -|x|; \end{cases}$

10. $\begin{cases} xy \geq 6, \\ |y| \leq 2. \end{cases}$

4. Доведення нерівностей

Державним стандартом базової середньої освіти для класів з поглибленим вивченням математики передбачено оволодіння учнями починаючи з 9 класу техніками доведення нерівностей.

4.1. Основні методи доведення нерівностей

Очевидно, що нерівності $a^2 \geq 0$, $-a^2 - 1 < 0$, $|a| + |b| \geq 0$, $(a-b)^4 \geq 0$ виконуються *при всіх значеннях змінних*, які до них входять.

Нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0$ також виконується при будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$, хоча цей факт не настільки очевидний. У його справедливості треба переконатися.

У таких випадках говорять, що потрібно *довести нерівність* $x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0$. Маємо:

$$x^2 - 8xy + 17y^2 = x^2 - 8xy + 16y^2 + y^2 = (x-4y)^2 + y^2.$$

Вираз $(x-4y)^2 + y^2$ набуває тільки невід'ємних значень. Отже, при будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$ є правильною нерівність

$$x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0.$$

Для доведення нерівностей використовують різні прийоми. Наприклад, нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0$ ми довели, *виділивши квадрат двочлена*.

Розглянемо ще кілька прийомів доведення нерівностей.

Метод різниці

Цей прийом полягає в тому, що розглядають різницю лівої та правої частин нерівності та доводять, що ця різниця набуває значень постійного знака при будь-яких значеннях змінних, що входять у нерівність.

Приклад 31: Довести нерівність $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 \geq 6ab$.

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab = (a^2b^2 - 4ab + 4) + (a^2b^2 - 2ab + 4) =$

$= (ab - 2)^2 + (a - b)^2.$

При будь-яких значеннях a і b ця різниця набуває тільки невід'ємних значень, отже, нерівність, що доводиться, є правильною.

Приклад 32: Доведіть, що коли $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$$

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності. Маємо:

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} - (a + 2b + c) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a-b} - (a+b)\right) + \left(\frac{b^2}{b-c} - (b+c)\right) = \frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c}.$$

З умови $a > b > c$ випливає, що $a - b > 0$, $b - c > 0$ і $b^2 + c^2 \neq 0$. Отже,

$$\frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c} > 0,$$

що доводить задану нерівність.

Приклад 33: Доведіть, що коли $a \geq 0$, $b \geq 0$, то виконується нерівність Коші

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Розв'язання. Запишемо різницю

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$

і з'ясуємо її знак. Маємо:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Зрозуміло, що вираз $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ невід'ємний при будь-яких невід'ємних значення a і b. Отже, й різниця $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ невід'ємна, а це означає, що

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Зауважимо, що знак рівності справедливий лише для випадку $a=b$.

Метод спрощення нерівності

У низці випадків спрощення виразів, які утворюють нерівність, робить цю нерівність очевидною.

Приклад 34: Доведіть нерівність

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Нерівність, що доводиться, набуває вигляду

$$1-\frac{1}{n+1}<1$$

і стає очевидною.

Метод міркувань від супротивного

Приклад 35: Доведіть, що коли $a\geq 0$, $b\geq 0$, то

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{a}} \geq \sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{b}}.$$

Розв'язання. Припустимо, що нерівність, яку доводимо, є неправильною, тобто існують такі значення a і b, при яких є правильною нерівність

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{a}} < \sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{b}}.$$

Звідси маємо:

$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(b+\sqrt{a}\right) < \left(a+\sqrt{a}\right)\left(b+\sqrt{b}\right);$$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b} < a\sqrt{b}+b\sqrt{a};$$

$$(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) < 0.$$

Остання нерівність є неправильною, оскільки при $a \geq 0$, $b \geq 0$ різниці $a-b$ і $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ набувають значень однакових знаків або дорівнюють нулю. Отримана суперечність означає, що задана нерівність є правильною.

Приклад 36: Доведіть, що коли $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Розв'язання. Нам потрібно довести, що для будь-яких невід'ємних значень a, b, c, d виконується задана нерівність. Припустимо протилежне, що *існує* набір невід'ємних значень a, b, c, d для яких дана нерівність невірна, тобто що виконується нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Оскільки обидві частини останньої нерівності невід'ємні, то при піднесенні до квадрату отримаємо:

$$(a+c)(b+d) < ab+cd+2\sqrt{abcd},$$

звідки $bc+ad < 2\sqrt{abcd}$, і далі

$$\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{(bc)\cdot(ad)}.$$

Однак, ця нерівність протирічить нерівності Коші. Отже, наше припущення невірне, а тому справедливою є задана нерівність.

Метод застосування очевидної нерівності

Цей прийом полягає в такому: задану нерівність отримують у результаті перетворення очевидної нерівності або почленного додавання чи множення кількох очевидних нерівностей. Як опорні нерівності в цьому методі можуть використовуватись, наприклад, такі нерівності:

$$a^2 \geq 0; \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \text{де} \quad a \geq 0, b \geq 0;$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 0, \quad \text{де} \quad ab > 0;$$

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \text{де} \quad a > 0, b^2 - 4ac < 0.$$

Приклад 37: Доведіть нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Розв'язання. Очевидно, що при будь-яких значеннях a, b і c виконується така нерівність:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Звідси

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Приклад 38: Доведіть, що коли $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Розв'язання. Для невід'ємних значень a, b і c виконуються такі три очевидні нерівності:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0, \qquad \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 \geq 0, \qquad \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0.$$

Звідси

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \qquad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \qquad c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Оскільки обидві частини кожної із цих нерівностей набувають невід'ємних значень, то можна застосувати теорему про почленне множення нерівностей. Маємо:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Оскільки $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ то $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$.

Отримуємо, що $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Метод застосування раніше доведеної нерівності

Нерідко раніше доведену нерівність можна використати для доведення іншої, більш складної нерівності. Наприклад, легко довести (переконайтесь у цьому самостійно), що $a^2 + b^2 \geq 2ab$. А цю нерівність часто застосовують для доведення інших нерівностей.

Застосування нерівності $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Приклад 39: Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ то

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a};$$

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b};$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{c+a}{2ca} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}.$$

Звідси

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Застосування нерівності $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Приклад 40: Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$.

Розв'язання. Маємо:

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (b^2)^2 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 =$$

$$= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) =$$

$$ab^2c + bc^2a + ca^2b = abc(a + b + c).$$

Завдання 9. Самостійно доведіть нерівності:

1. $2a^2 - 8a + 16 > 0$;

2. $4b^2 + 4b + 3 > 0$;

3. $a^2 + ab + b^2 \geq 0$;

4. $9x^2 - 6xy + 5y^2 \geq 0$:

5. $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geq 0$;

6. $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;

7. $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c)$;

8. $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq 4ab$;

9. $\dfrac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$;

10. $\dfrac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$.

4.2. Нерівності між середніми величинами. Нерівність Коші-Буняковського

Значення виразів

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \qquad \frac{a + b}{2}, \qquad \sqrt{ab}, \qquad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

називають відповідно *середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним* і *середнім гармонічним* чисел a і b.

Ці величини називають «*середніми*», оскільки при $0 < a \leq b$ їхні значення належать проміжку $[a; b]$, тобто виконуються нерівності

$$a \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq b, \qquad a \leq \frac{a + b}{2} \leq b, \qquad a \leq \sqrt{ab} \leq b, \qquad a \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq b.$$

Зв’язок між середніми величинами виражають такі три теореми.

Теорема 7. *При будь-яких значеннях a і b виконується нерівність*

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}. \qquad (1)$$

Доведення. Маємо:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$2a^2 + 2b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2;$$

$$2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2;$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{|a+b|}{2}.$$

Оскільки $|a+b| \geq a+b$, то

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Зауважимо, що в нерівності (1) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geq 0$.

Теорема 8. (нерівність Коші для двох чисел) *При будь-яких невід'ємних значеннях* a *і* b *виконується нерівність*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{2}$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a + b - \sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

При будь-яких невід'ємних значеннях a і b ця різниця набуває невід'ємних значень. Отже, нерівність, що доводиться, є правильною.

Зауважимо, що в нерівності (2) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geq 0$.

Наслідок. *Якщо* $a > 0$*, то* $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Доведення. До додатних чисел a і $\frac{1}{a}$ застосуємо нерівність Коші

$$\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}.$$

Звідси

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Слід зауважити, що в даній нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = \frac{1}{a}$. З урахуванням того, що $a > 0$, отримуємо $a = 1$.

Під час доведення теореми 7 ми використовували нерівність $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Цю нерівність також можна розглядати як наслідок із нерівності Коші. Дійсно, оскільки $a^2 \geq 0$ і $b^2 \geq 0$, то можна записати:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}.$$

Відтак $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2|ab| \geq 2ab$.

Теорема 9. *Якщо* $ab > 0$*, то*

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \tag{3}$$

Доведення. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < 0 \quad \text{і} \quad \sqrt{ab} > 0.$$

Звідки маємо, що нерівність (3) очевидно виконується.

Нехай $a > 0$ і $b > 0$. Застосуємо нерівність Коші до додатних чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності при $a > 0$ і $b > 0$ набувають додатних значень, то справедливою є така нерівність:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Зауважимо, що в нерівності (3) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a > 0$.

Теореми 7 – 9 дають змогу дійти висновку, що при $a > 0$ і $b > 0$ справедливим є такий ланцюжок нерівностей:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Для квадратного тричлена справедлива лема.

Лема. *Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$, де $a > 0$, при всіх значеннях x набуває невід'ємних значень, то його дискримінант D є недодатним.*

Теорема 10. (нерівність Коші–Буняковського) *При будь-яких значення $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ виконується нерівність*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Доведення. Якщо $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то нерівність, що доводиться, є очевидною. Розглянемо випадок, коли хоча б одне із чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ не дорівнює 0.

При будь-якому значенні змінної x виконується нерівність

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0.$$

Останню нерівність можна перетворити до такого вигляду:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x +$$
$$+b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \geq 0.$$

Ліва частина останньої нерівності – це квадратний тричлен з додатним старшим коефіцієнтом. Цей квадратний тричлен набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінної x. Тоді згідно з лемою його дискримінант D є недодатним.

Маємо:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$
$$- 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Оскільки $D \leq 0$, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Приклад 40: Доведіть нерівність

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \ge \sqrt{2}.$$

Розв'язання. Скориставшись нерівністю (1), можна записати:

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{x^2 + (1-y)^2}{2}} \ge \sqrt{2} \cdot \frac{x + 1 - y}{2};$$

$$\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{(1-x)^2 + y^2}{2}} \ge \sqrt{2} \cdot \frac{1 - x + y}{2}.$$

Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \ge \sqrt{2}\left(\frac{x + 1 - y}{2} + \frac{1 - x + y}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Приклад 41: Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \ge a^2 + b^2 + c^2.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a^4}{bc} + bc \ge 2\sqrt{\frac{a^4}{bc} \cdot bc} = 2a^2.$$

Звідси

$$\frac{a^4}{bc} \ge 2a^2 - bc.$$

Повторюючи ці міркування отримаємо:

$$\frac{b^4}{ca} \ge 2b^2 - ca; \qquad \frac{c^4}{ab} \ge 2c^2 - ab.$$

Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \ge 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Оскільки $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ (див. приклад 37), то

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0.$$

Тоді

$$(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Приклад 42: Доведіть нерівність

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Розв'язання. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського до наборів чисел $(a_1;\ a_2; \dots;\ a_n)$ і $(1;\ 1; \dots;\ 1)$ запишемо:

$$(a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1)^2 \leq$$
$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) = n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Звідси

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Із доведеної нерівності можна отримати таку нерівність:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \qquad (4)$$

Вирази, записані в лівій і правій частинах цієї нерівності, називають відповідно *середнім квадратичним* і *середнім арифметичним* чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Нерівність (4) є узагальненням нерівності (1).

Приклад 43: Доведіть, що якщо $a + b + c \geq 0$, то

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc. \qquad (5)$$

Розв'язання. Розглянемо різницю $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, в якій суму $a^3 + b^3$ доповнимо до кубу суми. Отримаємо:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc$$
$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b + c) + c^3.$$

Розклавши суму кубів $(a + b)^3 + c^3$ на множники отримаємо:

$$(a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) =$$
$$= \big((a + b) + c\big)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) =$$
$$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) =$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) =$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2).$$

Оскільки за умовою $a+b+c \geq 0$, то отриманий вираз невід'ємний. Звідси випливає істинність нерівності (5). Зауважимо, що знак рівності в нерівності (5) можливий тоді і тільки тоді, коли $a+b+c=0$ або у випадку, коли $a=b=c$.

Зауваження. Нехай дано n невід'ємних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Введемо такі величини для чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}$$ – середнє гармонічне,

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$ – середнє геометричне,

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$ – середнє арифметичне,

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$$ – середнє квадратичне.

Між цими величинами існує така залежність:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n. \tag{6}$$

Частинні випадки нерівності (6) нами вище доведені.

4.3. Доведення нерівностей методом математичної індукції

Метод математичної індукції ґрунтується на принципі математичної індукції, що формулюється так:

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) доводять (перевіряють) справедливість твердження для $n=1$*;*

2) роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, $k \in \mathbb{N}$*, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для* $n = k + 1$.

Теорему, яку доводять у першій частині, називають *базою індукції*.

Теорему, яку доводять у другій частині методу, називають *індуктивним переходом*.

Кожне доведення методом математичної індукції передбачає реалізацію трьох етапів: на першому показуємо, що істинним є твердження $A(1)$; на другому припускаємо, що істинним є твердження $A(k)$ і, виходячи з цього, доводимо, що істинним є твердження $A(k+1)$. Виконані міркування дозволяють стверджувати, що твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального n. Відповідний висновок є третім етапом і завершує доведення.

Іноді використовують узагальнений принцип математичної індукції: твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального $n \geq m$, якщо воно вірне для натурального числа $n = m$ і з того, що $A(n)$ істинне для довільного натурального $n = k \geq m$ випливає, що воно істинне для наступного натурального числа $n = k + 1$.

Описаний метод широко використовується при обґрунтуванні різних математичних тверджень, зокрема при доведенні нерівностей. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 44: Доведіть, що якщо $n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 3$ виконується нерівність

$$3^n > 2^n + 3n.$$

Розв'язання. Покажемо, що при $n = 3$ виконується «база індукції», маємо $3^3 > 2^3 + 3 \cdot 3$ – правильна нерівність.

Припустимо, що нерівність, яку треба довести, є правильною при $n = k$, тобто $3^k > 2^k + 3k$, де $k \in \mathbb{N}$ і $k \geq 3$.

Доведемо «індуктивний перехід», тобто, що нерівність виконується при $n = k + 1$. Для цього обидві частини нерівності $3^k > 2^k + 3k$ помножимо на 3. Отримаємо:

$$3^{k+1} > 3 \cdot 2^k + 9k = (2+1)2^k + 3(k+1) + 6k - 3 =$$
$$= 2 \cdot 2^k + 3(k+1) + 2^k + 3(2k-1) > 2^{k+1} + 3(k+1).$$

Таким способом, можемо стверджувати, що нерівність справедлива при $n = k+1$. Відтак методом математичної індукції отримуємо, що твердження справедливе при будь-якому натуральному $n \geq 3$.

Приклад 45: Доведіть, що якщо $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, то

$$2^n > 2n + 1. \quad (7)$$

Розв'язання. При $n = 3$ нерівність (7) вірна: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$. Припустимо, нерівність (7) виконується при $n = k$ $(k > 3)$, тобто припустимо, що $2^k > 2k + 1$, і доведемо, що тоді нерівність (7) виконується й при $n = k + 1$, тобто доведемо, що $2^{k+1} > 2k + 3$.

Дійсно, маємо:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1) = 4k + 2 = (2k+3) + (2k-1).$$

Отже

$$2^{k+1} > (2k+3) + (2k-1).$$

Але $2k - 1 > 0$ при будь-якому натуральному значенні k. Отже, тим більше $2^{k+1} > 2k + 3$

Згідно з принципом математичної індукції можемо зробити висновок про те, що нерівність (7) справедлива при всіх $n \geq 3$.

Приклад 46: Доведіть, що якщо $n \in \mathbb{N}$, то

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}. \quad (8)$$

Розв'язання. Вираз, який міститься в лівій частині нерівності (8) є сумою дробів, знаменники яких натуральні числа від 1 до $2^n - 1$. При $n = 1$ він перетворюється у вірну числову нерівність $1 > \frac{1}{2}$.

Припустимо, що нерівність (8) виконується при $n = k$, тобто

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} > \frac{k}{2}.$$

Доведемо, що тоді нерівність (8) виконується при $n = k + 1$, тобто

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{k+1}{2}.$$

Дійсно,

$$S_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \cdots + \frac{1}{2^k + (2^k - 2)} + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right) = S_k + P_k,$$

де

$$P_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}.$$

Вираз P_k є сумою 2^k дробів, кожний з яких більший ніж $\frac{1}{2^{k+1}}$. Отже,

$$P_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k} =$$

$$= 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Відтак, $S_k > \frac{k}{2}$, $P_k > \frac{1}{2}$. Але тоді

$$S_{k+1} = S_k + P_k > \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2},$$

тобто

$$S_{k+1} > \frac{k+1}{2}.$$

Керуючись принципом математичної індукції робимо висновок, що нерівність (8) справедлива для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Завдання 10. Самостійно довести нерівності:

1. $\frac{a^2 + 4}{2} \geq \sqrt{a^2 + 3}$;

2. $\frac{a^2 + 6}{4} \geq \sqrt{a^2 + 2}$;

3. $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$;

4. $x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} \geq 1$;

5. $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 1} > 1$;

6. $a > 0, b > 0, \frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} \geq 4$.

5. Текстові задачі на побудову нерівностей

Розглянемо задачі, у яких системи рівнянь і системи нерівностей використовуються як математичні моделі реальних ситуацій.

Приклад 47: За контрольну роботу з математики учні отримали оцінки «9», «10», «11», «12». Оцінки «9», «10», «12» отримала однакова кількість учнів, а оцінок «11» було поставлено більше, ніж решту інших оцінок, узятих разом. Оцінку вище «10» отримало менше 10 учнів. Скільки оцінок «10» і скільки оцінок «11» було поставлено, якщо контрольну роботу писали не менше 12 учнів?

Розв'язання. Нехай «9», «10», «12», отримали по x учнів, а оцінку «11» – y учнів. Оскільки оцінку «11» отримало більше учнів, ніж решту інших оцінок, узятих разом, то $y > 3x$. Оцінку вище «10» отримало менше 10 учнів, тому $x + y < 10$. Оскільки контрольну роботу писали не менше 12 учнів, то $3x + y \geq 12$. Отримали систему нерівностей:

$$\begin{cases} y > 3x, \\ x + y < 10, \\ 3x + y \geq 12. \end{cases}$$

Тоді $x + y < x + 3x = 4x$; $4x < 10$; $x < 2{,}5$.

Оскільки x – ціле невід'ємне число, то з нерівності $x < 2{,}5$ випливає, що $x = 0$, або $x = 1$, або $x = 2$.

При $x = 0$ отримуємо систему $\begin{cases} y > 0, \\ y < 10, \\ y > 12, \end{cases}$ яка розв'язків не має.

При $x = 1$ отримуємо систему $\begin{cases} y > 3, \\ y < 9, \\ y \geq 9, \end{cases}$ яка також розв'язків не має.

При $x = 2$ маємо: $\begin{cases} y > 6, \\ y < 8, \\ y \geq 6, \end{cases}$ звідки $y = 7$.

Отже, оцінку «10» отримали 2 учні, оцінку «11» – 7 учнів.

Відповідь: 2 учні, 7 учнів.

Приклад 48: О 6 год ранку з пункту А до В за течією річки вирушили човен і катер. Човен прибув у пункт В о 16 год того самого дня. Катер, дійшовши до пункту В, одразу повернув назад і на своєму шляху з пункту В до пункту А зустрів човен не пізніше ніж о 14 год, а прибув у пункт А не раніше ніж о 22 год того самого дня. Знайдіть час прибуття катера у пункт В, якщо його власна швидкість удвічі більша за власну швидкість човна.

Розв'язання. Нехай x км/год – власна швидкість човна, y км/год – швидкість течії річки. За умовою човен, рухаючись за течією, прибув у пункт В через 10 год після виходу з пункту А. Тоді відстань між пунктами А і В дорівнює $10(x+y)$ км.

Катер рухався з пункту А в пункт В зі швидкістю $(2x+y)$ км/год, а назад – зі швидкістю $(2x-y)$ км/год, а тому витратив на весь шлях $\left(\frac{10(x+y)}{2x+y}+\frac{10(x+y)}{2x-y}\right)$ год. Отримаємо нерівність:

$$\frac{10(x+y)}{2x+y}+\frac{10(x+y)}{2x-y}\geq 16.$$

До моменту зустрічі човен і катер були в дорозі не більше 8 год. За цей час човен пройшов не більше $8(x+y)$ км, отже, катеру після зустрічі залишилося пройти не більше ніж $8(x+y)$ км проти течії. До моменту зустрічі катер знаходився в дорозі не більше 8 год, а отже, на весь шлях з А до В і назад катеру знадобилося не більше $\left(8+\frac{8(x+y)}{2x-y}\right)$ год. Отримаємо ще одну нерівність:

$$\frac{10(x+y)}{2x+y}+\frac{10(x+y)}{2x-y}\leq 8+\frac{8(x+y)}{2x-y}.$$

Запишемо отриману систему нерівностей:

$$\begin{cases}\frac{10(x+y)}{2x+y}+\frac{10(x+y)}{2x-y}\geq 16,\\ \frac{10(x+y)}{2x+y}+\frac{10(x+y)}{2x-y}\leq 8+\frac{8(x+y)}{2x-y}.\end{cases}$$

Ураховуючи, що $2x+y>0$ і $2x-y>0$, можна записати:

$$\begin{cases}5(x+y)(2x-y)+5(x+y)(2x+y)\geq 8(4x^2-y^2),\\5(x+y)(2x-y)+(x+y)(2x+y)\leq 4(4x^2-y^2).\end{cases}$$

Після перетворень отримаємо систему

$$\begin{cases}3x^2-5xy-2y^2\leq 0,\\x^2-2xy\geq 0.\end{cases}$$

Зробимо заміну $x=yt$. Отримаємо

$$\begin{cases}3y^2t^2-5y^2t-2y^2\leq 0,\\y^2t^2-2y^2t\geq 0.\end{cases}$$

Ураховуючи, що $y>0$, можна записати

$$\begin{cases}3t^2-5t-2\leq 0,\\t^2-2t\geq 0.\end{cases}$$

Остання система має єдиний додатній розв'язок $t=2$.

За умовою човен, рухаючись за течією, прибув у пункт В через 10 год після виходу з пункту А. Швидкість човна становила $(x+y)$ км/год, або ж враховуючи, що $x=2y$, відповідно, становила $3y$ км/год. Тобто шлях від точки А до точки В – $30y$ км. Швидкість катера $(2x+y)$ км/год, або ж враховуючи, що $x=2y$, отримуємо $5y$ км/год. Відтак знаходимо час, за який катер подолав відстань від точки А до точки В: $30y/5y=6$ год. Отже, катер прибув у точку В о 12 годині.

Відповідь: о 12 год.

Приклад 49: У школяра була деяка кількість марок. Йому подарували альбом для марок. Якщо він наклеїть по 20 марок на аркуш, то йому не вистачить альбому, а якщо він наклеїть по 23 марки на аркуш, то, принаймні, один аркуш залишиться вільним. Якщо школяру подарувати точно такий самий альбом, на кожному аркуші якого наклеєні по 21 марці, то всього в нього буде 500 марок. Скільки аркушів в альбомі?

Розв'язання. Позначимо через x – число аркушів в альбомі, а через y – число марок, які були у школяра.

Якщо школяр наклеїть по 20 марок на аркуш, то розклеєними виявляться $20x$ марок, що за умовою менше числа марок, які були у школяра, тобто $20x < y$. Якщо він буде наклеювати по 23 марки на аркуш, то для розклейки достатньо використовувати $(x-1)$ аркуш, на яких поміститься $23(x-1)$ марок. За умовою це число менше числа марок, які були у школяра, тобто $23(x-1) \geq y$. Крім того, в задачі говориться, що якщо школяреві подарувати альбом, в якому наклеєні $21x$ марок, то всього марок у нього стане 500, тобто $y + 21x = 500$. Таким способом, можна записати таку систему:

$$\begin{cases} 20x < y, \\ 23x - 23 \geq y, \\ 21x + y = 500. \end{cases}$$

Виразивши y з рівняння системи і підставивши результат в обидві нерівності системи, отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 20x < 500 - 21x, \\ 23x - 23 \geq 500 - 21x, \end{cases}$$

розв’язавши яку знаходимо

$$\frac{523}{44} \leq x < \frac{500}{41}.$$

За умовою x – ціле число. Однак у вказаному проміжку міститься лише одне ціле число – 12. Отже, в альбомі було 12 аркушів.

Відповідь: 12 аркушів.

Завдання 11. Самостійно розв’язати задачі.

1. У двох ящиках знаходиться 29 однакових деталей. Число деталей у першому ящику, зменшене вдвічі, більш як в 3 рази перевищує число деталей у другому ящику. Потроєне число деталей у першому ящику перевищує подвоєне число деталей у другому ящику, але менше ніж на 60. Скільки деталей у кожному ящику?
2. Якщо скаутів в таборі вишикувати в колону по 8 людей у ряду, то один ряд виявиться неповним. Якщо вишикувати по 7 людей у ряду, то рядів буде на 2 більше і всі вони будуть повними. Якщо ж виконати шикування по 5 людей у ряду, то рядів буде ще на 7 більше, але один ряд буде заповнений не весь. Скільки скаутів у таборі?

3. Якщо рідину розлити в бутилі ємністю 40 л, то при цьому один бутиль виявиться не зовсім повним. Якщо ту ж рідину розлити в бутилі ємністю 50 л, то бутилів знадобиться на 5 менше і всі вони будуть заповнені. Якщо ту ж рідину розлити в бутилі ємністю 70 л, то бутилів знадобиться ще на 4 бутилі менше, однак один бутиль буде неповним. Скільки було літрів рідини?
4. Бригади, які складаються з однакового числа робітників, отримали на складі спецодяг. Кожний робітник отримав по два комплекти спецодягу, а кожній бригаді видали на 20 комплектів більше, ніж було бригад. Якщо б бригад було на 4 більше і кожній бригаді давали б по 12 комплектів, то спецодягу на складі не вистачило б. Скільки комплектів спецодягу на складі?
5. Троє хлопчиків разом хотіли купити дві однакові іграшки, але загальної кількості їх грошей не вистачало навіть на одну. Якщо б у першого хлопчика грошей було б вдвічі більше, то на одну іграшку грошей вистачило б, а на придбання двох іграшок їм не вистачало б 34 грн. Якщо б у третього хлопчика грошей було б втричі більше, то після придбання двох іграшок у хлопчиків залишилося б 6 грн. Яка вартість однієї іграшки, якщо відомо, що у другого хлопчика було на 3 грн більше, ніж у першого?

6. Трансцендентні нерівності

Курс алгебри і початків аналізу передбачає навчання учнів розв'язуванню трансцендентних рівнянь і нерівностей (тригонометричних, показникових, логарифмічних) та ірраціональних рівнянь і нерівностей. Це пов'язано з вивченням властивостей відповідних функцій. Відомо, що не існує загального способу розв'язування трансцендентних рівнянь і нерівностей. Проте при вивченні алгебри в 10-11 класах доцільно ознайомити учнів зі способами розв'язування найпростіших та окремих видів таких рівнянь і нерівностей, до яких зводиться, як правило, розв'язування складніших.

Зупинимось на детальному вивченні розв'язування найпростіших типів трансцендентних нерівностей, які вивчаються в шкільному курсі математики.

6.1. Ірраціональні нерівності

Ірраціональними називають рівняння, в яких невідома міститься під знаком кореня. Аналогічно визначаються *ірраціональні нерівності*. Слід звернути увагу учнів на те, що до складу ірраціональних рівнянь і нерівностей входять лише арифметичні корені. Така домовленість дає змогу уникнути неоднозначностей у тлумаченні значень коренів.

На рівні вимог до обов'язкових результатів навчання навчальна програма з математики не вимагає ознайомлювати учнів зі способами розв'язання ірраціональних нерівностей. Однак на профільному і поглибленому рівнях у курсі алгебри треба передбачити розв'язування найпростіших ірраціональних нерівностей. Дана тема викладена в підручнику Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф.. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. 2018 [28].

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей використовуються ті ж прийоми, що й при розв'язуванні ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до одного й того степеня, введення нових (допоміжних) змінних тощо. Розв'язувати нерівності можна дотримуючись, наприклад, такого плану:

1. *Знайти область визначення заданої нерівності;*
2. *Керуючись припущенням про рівносильність нерівностей розв'язати дану нерівність;*
3. *Із знайдених розв'язків відібрати значення змінної, яке належить області визначення заданої нерівності.*

Найпростіші ірраціональні нерівності розв'язуються використовуючи властивості кореня.

Схеми розв'язування найпростіших ірраціональних нерівностей

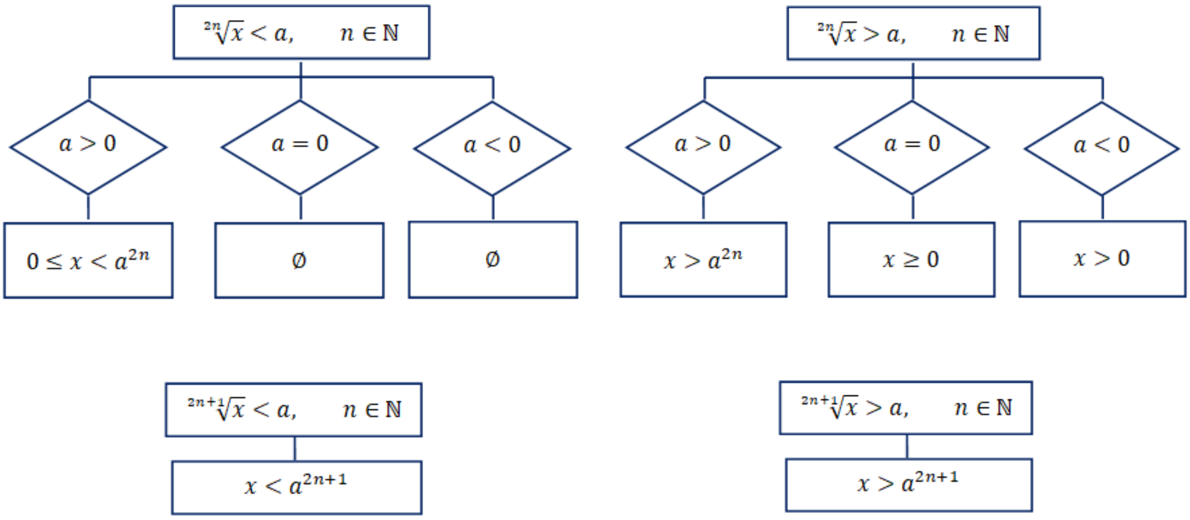


Рисунок 31. Схеми розв'язування найпростіших ірраціональних нерівностей

Розглянемо теореми, за допомогою яких розв'язують основні типи ірраціональних нерівностей.

Теорема 11. *Нерівність виду* $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ *рівносильна системі*

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 50: Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 1} > \sqrt{3x - 4}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 3x - 4, \\ 3x - 4 \ge 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0, \\ x \ge \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 5, \\ x \le 1, \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow \quad x \ge 5.$$

Відповідь: $x \in [5; +\infty)$.

Теорема 12. *Нерівність виду* $\sqrt{f(x)} < g(x)$ *рівносильна системі*

$$\begin{cases} f(x) < \left(g(x)\right)^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 51: Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} > x - 1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > (x-1)^2, \\ x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leq -1, \quad \text{або} \quad x \geq 2{,}5. \end{cases}$$

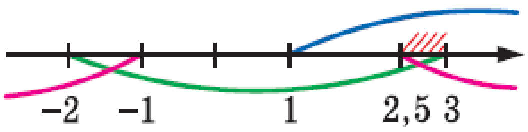


Рисунок 32. Ілюстрація до розв'язку нерівності прикладу 51

Розв'язування цієї системи проілюстровано на рисунку 32. Отримуємо: $2{,}5 \leq x < 3$.

Відповідь: $x \in [2{,}5; 3)$.

Теорема 13. *Нерівність виду* $\sqrt{f(x)} > g(x)$ *рівносильна сукупності систем*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(g(x)\right)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 52: Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1. $\begin{cases} 6 - x < 0, \\ x^2 + 7x + 12 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -4, \\ x \geq -3; \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \quad x > 6.$

2. $\begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ x^2 + 7x + 12 > (6-x)^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x > \frac{24}{19}; \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{24}{19} < x \leq 6.$

Відповідь: $x \in \left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$.

Теорема 14. *Якщо для будь-якого* $x \in M$ *виконуються нерівності* $f(x) \geq 0$ *і* $g(x) \geq 0$*, то нерівності* $f(x) > g(x)$ *і* $\left(f(x)\right)^{2k} > \left(g(x)\right)^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$*, рівносильні на множині* M.

Приклад 53: Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} \leq 2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Обидві частини даної нерівності набувають невід'ємних значень на множині $M = [3; +\infty)$, яка є областю визначення цієї нерівності. Отже, дана нерівність на множині M рівносильна нерівності

$$\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3}\right)^2 \leq \left(2\sqrt{x}\right)^2.$$

Звідси

$$2 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x-3} \leq x + 2.$$

На множині $M = [3; +\infty)$ обидві частини останньої нерівності набувають невід'ємних значень. Тоді за теоремою 14 отримуємо:

$$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3) \leq (x+2)^2, \\ x \geq 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x^2 - 24x - 16 \leq 0, \\ x \geq 3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{7} \leq x \leq 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \Rightarrow \quad 3 \leq x \leq 4.$$

Відповідь: $x \in [3; 4]$.

Приклад 54: Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geq 1. \qquad (9)$$

Розв'язання. Знайдемо область визначення нерівності (9). З системи

$$\begin{cases} 3x \geq 0, \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

отримуємо $x \geq 0$, тобто $M = [0; +\infty)$.

Перепишемо нерівність (9) таким способом

$$\sqrt{3x} \geq 1 + \sqrt{2x+1}$$

і піднесемо до квадрату обидві частини отриманої нерівності.

На множині $M = [0; +\infty)$ обидві частини нерівності (9) невід'ємні, отже піднесення до квадрату є рівносильним перетворенням. Маємо:

$$\left(\sqrt{3x}\right)^2 \geq \left(1+\sqrt{2x+1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2x+1} \leq x-2.$$

Дана нерівність (а з нею й нерівність (9), з врахуванням того, що $M = [0; +\infty)$) рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ \left(2\sqrt{2x+1}\right)^2 \leq (x-2)^2; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 2, \\ x \leq 0, \quad x \geq 12; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \geq 12.$$

Відповідь: $x \in [12; +\infty)$.

Приклад 55: Розв’яжіть нерівність

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}. \tag{10}$$

Розв’язання. Для спрощення покладемо $y = \frac{2}{x}$. Тоді нерівність (10) набуває вигляду:

$$y - \frac{1}{2} > \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}}.$$

Ця нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} y^2 - \dfrac{3}{4} \geq 0, \\ y - \dfrac{1}{2} > 0, \\ \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{y^2 - \dfrac{3}{4}}\right)^2, \end{cases}$$

розв’язавши яку знаходимо $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y < 1$. Залишилось розв’язати систему нерівностей

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{2}{x} < 1,$$

звідки знаходимо $2 < x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь: $x \in \left(2; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$.

Завдання 13. Самостійно розв'язати нерівності:

1. $\sqrt{(x-3)(x-1)} > 3(x+1)$;

2. $\sqrt{2x+10} < 3x-5$;

3. $\sqrt{(x+4)(2x-1)} < 2(x+4)$;

4. $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$;

5. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \le 1$;

6. $2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \ge 2\sqrt{x-3}$;

7. $x^2 + \sqrt{x^2+11} < 31$;

8. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} \ge 2$;

9. $\sqrt{\frac{x+2}{4-x}} \ge 2$;

10. $\sqrt{\frac{2x-1}{3x-2}} \le 3$.

6.2. Показникові нерівності

Означення 15. *Показниковими нерівностями називають нерівності вигляду*

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$(<, \ge, \le)$, *де* a *– додатне число, відмінне від* 1, *і нерівності, що зводяться до цього вигляду.*

Найпростішими є показникові нерівності виду $a^x > x^b$ і $a^x < a^b$. Під час їх розв'язування використовують властивість монотонності показникової функції. Якщо $a^x > a^b \iff \begin{cases} a > 1, \\ x > b, \end{cases}$ знак нерівності зберігається.

Показникові нерівності розв'язуються за допомогою властивості зростання або спадання показникової функції:

- для *зростаючої* функції більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу;
- для *спадної* функції більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу.

Під час розв'язування багатьох показникових нерівностей застосовують такі теореми.

Теорема 15. *При* $a > 1$ *нерівність* $a^{x_1} > a^{x_2}$ *виконується тоді й тільки тоді, коли* $x_1 > x_2$.

Теорема 16. *При* $0 < a < 1$ *нерівність* $a^{x_1} > a^{x_2}$ *виконується тоді й тільки тоді, коли* $x_1 < x_2$.

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ – спадною.

Наслідок. *Якщо* $a > 1$, *то нерівність* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *рівносильна нерівності* $f(x) > g(x)$.

Наслідок. *Якщо* $0 < a < 1$, *то нерівність* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *рівносильна нерівності* $f(x) < g(x)$.

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

Приклад 56: Розв'яжіть нерівність

$$8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1} \quad \Rightarrow \quad 2^{3x+2} < 2^1.$$

Оскільки основа степенів 2^{3x+2} і 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 3x < -1 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Приклад 57: Розв'яжіть нерівність

$$4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^x > 0.$$

Оскільки $5^{2x} > 0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини останньої нерівності на 5^{2x}, отримуємо рівносильну нерівність

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 > 0$. Розв’язавши цю нерівність, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$$

Звідси:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ знаходимо, що $x < 0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не має розв’язків.

Відповідь: $x \in (-\infty; 0)$.

Приклад 58: Розв’яжіть нерівність

$$\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}. \qquad (11)$$

Розв’язання. Перетворимо нерівність (11) до вигляду:

$$2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} < 2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}.$$

За теоремою 15 нерівність (11) рівносильна нерівності

$$\frac{3x-1}{3(x-1)} < \frac{3(x-3)}{3x-7}. \qquad (12)$$

З нерівності (12) послідовно отримуємо:

$$\frac{3x-1}{3x-3} - \frac{3x-9}{3x-7} < 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{12x-20}{(3x-3)(3x-7)} < 0, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)} < 0.$$

Застосовуючи метод інтервалів, з останньої нерівності (рис. 33) отримуємо $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$ – множина розв’язків нерівності (11).

Рисунок 33. Ілюстрація до розв'язку нерівності прикладу 58

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Приклад 59: Розв'яжіть нерівність

$$\frac{1}{(0{,}5)^x - 1} - \frac{1}{1 - (0{,}5)^{x+1}} \geq 0.$$

Розв'язання. Покладемо $y = (0{,}5)^x$. Тоді задана нерівність набуде вигляду:

$$\frac{1}{y-1} - \frac{1}{1 - 0{,}5y} \geq 0,$$

звідки після перетворень отримаємо нерівність

$$\frac{y - \frac{4}{3}}{(y-1)(y-2)} \geq 0. \qquad (13)$$

Застосовуючи метод інтервалів, з останньої нерівності (рис. 34) отримуємо її розв'язок $1 < y \leq \frac{4}{3}$; $y > 2$.

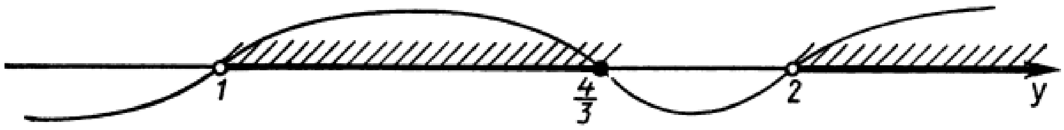


Рисунок 34. Ілюстрація до розв'язку нерівності (13)

Таким чином, задача звелася до розв'язання сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} 1 < (0{,}5)^x \leq \frac{4}{3}, \\ (0{,}5)^x > 2, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2^0 < 2^{-x} \leq 2^{\log_2 \frac{4}{3}}, \\ 2^{-x} > 2^1. \end{array}\right.$$

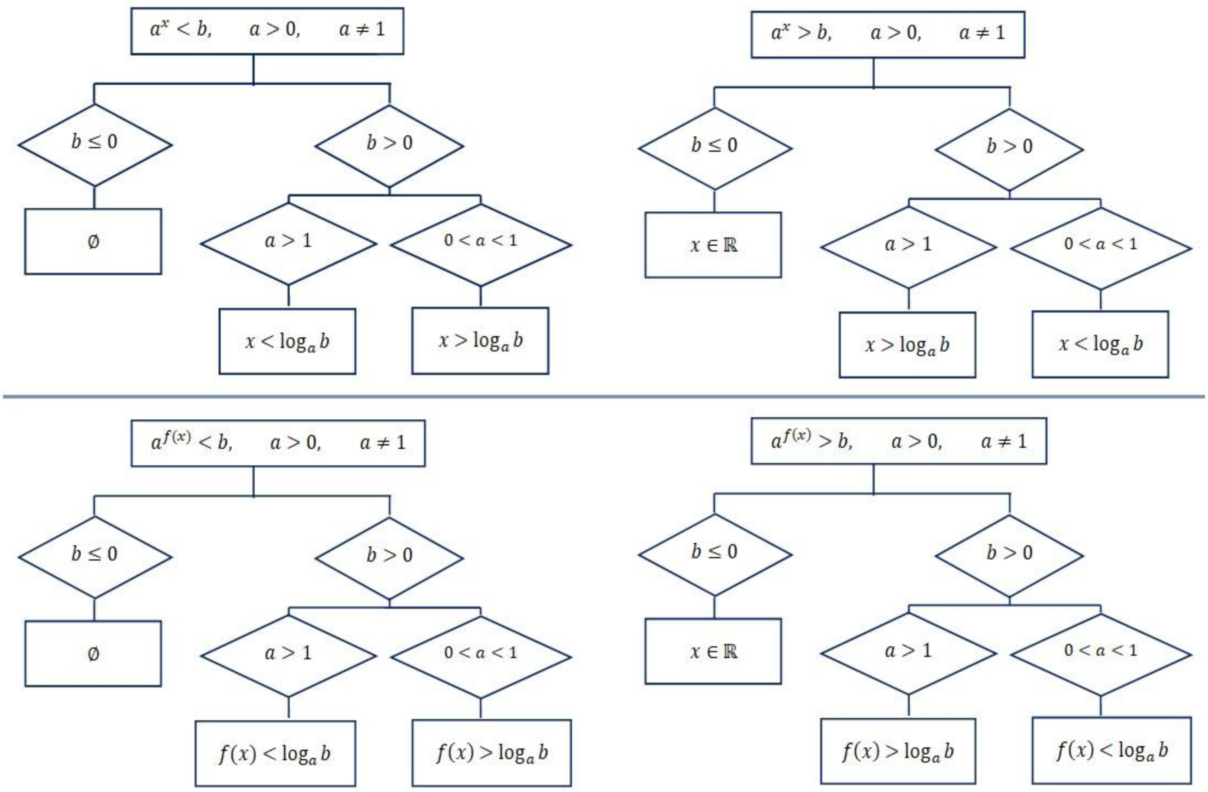
З цієї сукупності за теоремою 15 отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} 0 < -x \leq \log_2 \frac{4}{3}, \\ -x > 1. \end{array}\right.$$

Звідки $(-\infty;-1) \cup \left[-\log_2 \frac{4}{3}; 0\right)$ – множина розв'язків заданої нерівності.

Відповідь: $x \in (-\infty;-1) \cup \left[-\log_2 \frac{4}{3}; 0\right)$.

Схеми розв'язування найпростіших показникових нерівностей



Завдання 13. Самостійно розв'язати нерівності:

1. $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;

2. $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;

3. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;

4. $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leq 650$;

5. $0,6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$;

6. $0,3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1$;

7. $35^{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot 13^{2\sqrt{x^2-1}} > 35^{x-\sqrt{x^2-1}}$;

8. $2^x \cdot 5^x > 0,1(10^{x-1})^5$;

9. $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$;

10. $\dfrac{1}{3^x+5} < \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

6.3. Логарифмічні нерівності

Для розв'язування логарифмічних нерівностей учні повинні добре знати властивості логарифма та логарифмічної функції.

Функція $y = \log_a x$ монотонно зростає, якщо основа логарифма більша одиниці $a > 1$, та спадає на ОДЗ $(x > 0)$, якщо основа менша одиниці $0 < a < 1$. На графіку видно (рис. 35), при основі $a > 1$ більшому значенню аргументу x відповідає більше значення логарифма, для $y = \log_a x$
з основою меншою одиниці $(0 < a < 1)$ навпаки – чим менше значення x, тим більше значення приймає логарифм.

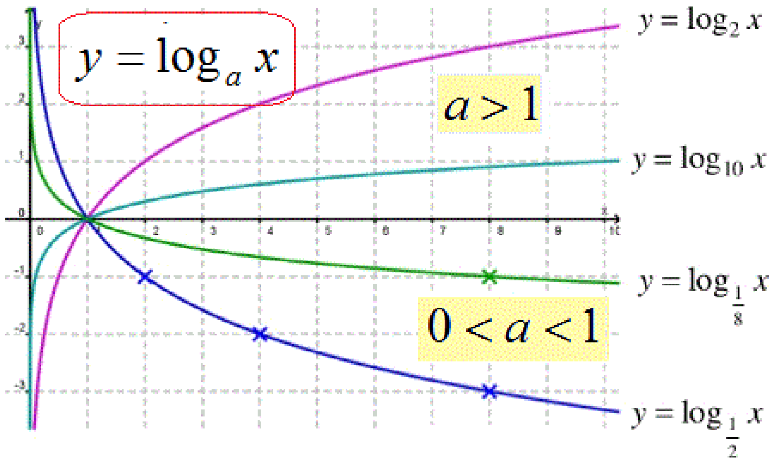


Рисунок 35. Графіки логарифмічної функції

Означення 16. *Логарифмічні нерівності – це нерівності, що містять змінну під знаком логарифма*.

Під час розв'язування багатьох логарифмічних нерівностей застосовують такі теореми.

Теорема 17. *При* $a > 1$ *нерівність* $\log_a x_1 > \log_a x_2$ *виконується тоді й тільки тоді, коли* $x_1 > x_2 > 0$.

Теорема 18. *При* $0 < a < 1$ *нерівність* $\log_a x_1 > \log_a x_2$ *виконується тоді й тільки тоді, коли* $0 < x_1 < x_2$.

Справедливість теорем випливає з того, що при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ – спадною.

Теорема 19. *Якщо* $a > 1$, *то нерівність* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *рівносильна системі*

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Зауваження: в останній системі можна опустити першу нерівність, оскільки вона є наслідком системи другої та третьої нерівності.

Теорема 20. *Якщо* $0 < a < 1$, *то нерівність* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *рівносильна системі*

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Зауваження: в останній системі можна опустити другу нерівність, оскільки вона є наслідком першої та третьої нерівності.

Приклад 60: Розв'яжіть нерівність $\log_2 x > 5$.

Розв'язання. Оскільки $5 = \log_2 2^5$, то можна записати:

$$\log_2 x > \log_2 2^5$$

Ця нерівність рівносильна такій: $x > 2^5$. Звідси $x > 32$.

Відповідь: $x \in (32; +\infty)$.

Приклад 61: Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} x > 1$.

Розв'язання. Маємо: $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 0,5$.

Ця нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x \leq 0,5, \\ x > 0. \end{cases}$$

Звідси $0 < x \leq 0,5$.

Відповідь: $x \in (0; 0,5]$.

Приклад 62: Розв'яжіть нерівність

$$\log_x 3 - \frac{5}{3} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} + \log_3 x > 0.$$

Нехай $\log_3 x = t$. Тоді

$$\frac{1}{t} - \frac{5}{2} + t > 0.$$

Звідси

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0; \qquad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0.$$

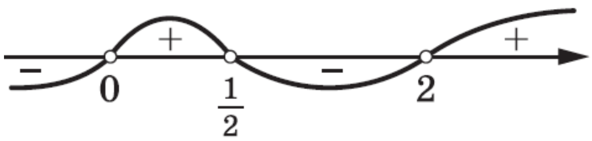


Рисунок 36. Ілюстрація до розв'язку нерівності прикладу 62

Скориставшись методом інтервалів (рис. 36), отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Далі,

$$\left[\begin{array}{l} 0 < \log_3 x < \frac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \left(1; \sqrt{3}\right) \cup (9; +\infty)$.

Приклад 63: Розв'яжіть нерівність

$$\lg(2x^2 + 4x + 10) > \lg(x^2 - 4x + 3).$$

Розв'язання. Оскільки основа логарифмів рівна 10, тобто більше 1, то до даної нерівності слід застосувати теорему 19. Відтак отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + 10 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 > 0, \\ 2x^2 + 4x + 10 > x^2 - 4x + 3. \end{cases}$$

Опускаючи першу нерівність (як наслідок другої та третьої) і виконуючи спрощення в третій нерівності, отримаємо систему

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 + 8x + 7 > 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0, \\ (x+1)(x+7) > 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $(-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$ – множина розв'язків заданої нерівності.

Відповідь: $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

Приклад 64: Розв'яжіть нерівність

$$\log_{0,3}(x^3 + 8) - \log_{0,3}(x^2 + 4x + 4) \le \log_{0,3}(x + 58). \tag{14}$$

Розв'язання. Перепишемо нерівність (14) таким способом:

$$\log_{0,3} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 4x + 4} \le \log_{0,3}(x + 58),$$

або

$$\log_{0,3} \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} \le \log_{0,3}(x + 58). \tag{15}$$

Оскільки основа логарифмів $0 < 0{,}3 < 1$, то до цієї нерівності слід застосувати теорему 20. Однак, застосування формули

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$$

могло призвести до розширення області визначення нерівності (14). Це означає, що до нерівності

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} \ge x + 58,$$

яка є наслідком нерівності (14), потрібно приєднати умови, якими задається область визначення нерівності (14), а не нерівності (15).

Таким способом, нерівність (14) рівносильна такій системі

$$\begin{cases} x^3 + 8 > 0, \\ x^2 + 4x + 4 > 0, \\ x + 58 > 0, \\ \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} \ge x + 58, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x+2)(x^2 - 2x + 4) > 0, \\ (x+2)^2 > 0, \\ x + 58 > 0, \\ \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} \ge x + 58. \end{cases}$$

З першої нерівності системи знаходимо, що $x + 2 > 0$. Це дозволяє в останній нерівності системи звільнитись від знаменника, не змінюючи знак цієї нерівності. Отримали систему

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x^2 - 2x + 4 \geq (x + 2)(x + 58), \end{cases}$$

звідки знаходимо $\left(-2; -\frac{56}{31}\right)$ – множина розв'язків нерівності (14).

Відповідь: $x \in \left(-2; -\frac{56}{31}\right)$.

Приклад 65: Розв'яжіть нерівність

$$x^{\lg x} > 10. \qquad (16)$$

Розв'язання. Нерівність (16) можна назвати *показниково-логарифмічною*. Слід зазначити, що при розв'язуванні показниково-логарифмічних рівнянь (нерівностей) доцільно використовувати такий прийом*: взяти логарифми від обох частин рівняння (нерівності) за однією й тією ж основою.*

Природно, беручи логарифм від обох частин нерівності попередньо пересвідчитись, що логарифми існують.

Знак отриманої логарифмічної нерівності залишиться таким самим яким він був до логарифмування, якщо логарифмування відбувалось за основою $a > 1$; якщо ж логарифмування відбувалось за основою $0 < a < 1$, то знак нерівності зміниться на протилежний.

Повертаючись до нерівності (16) зазначимо, що її обидві частини набувають тільки додатні значення, тому логарифми цих частин існують. Прологарифмуємо за основою 10. Оскільки $10 > 1$, то отримаємо нерівність того ж знаку, що й нерівність (16),

$$\lg x^{\lg x} > 1$$

рівносильну нерівності (16).

Після перетворення отримаємо нерівність

$$\lg x \cdot \lg x > 1,$$

тобто $\lg^2 x - 1 > 0$, звідки

$$\left[\begin{array}{l}\lg x < -1,\\ \lg x > 1.\end{array}\right.$$

З першої нерівності отриманої сукупності знайдемо $0 < x < 0{,}1$, а з другої – $x > 10$. Таким способом, $(0; 0{,}1) \cup (10; +\infty)$ – множина розв'язків нерівності (16).

Відповідь: $x \in (0; 0{,}1) \cup (10; +\infty)$.

Завдання 14. Самостійно розв'язати нерівності:

1.	$\log_2 2x > \log_2(x+1)$;	**2.**	$\log_{0,4}(x^2 - 3) < \log_{0,4}(x+3)$;
3.	$\log_{0,7}(x^2 - 2x - 3) \le \log_{0,7}(9 - x)$;	**4.**	$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x + 31) \le \log_{\frac{1}{3}}(10x + 11)$;
5.	$\log_2^2 x \ge 9$;	**6.**	$2\log_4^2 x - \log_4 x - 1 < 0$;
7.	$\dfrac{\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8}{\log_3 x - 1} \ge 0$;	**8.**	$\log_{1,5} \log_3 \dfrac{3x - 5}{x + 1} \le 0$;
9.	$\log_x(6 - x) \ge 2$;	**10.**	$\log_{x-3}(x^2 - 4x)^2 \le 4$.

6.4. Тригонометричні нерівності

У давнину тригонометрія виникла у зв'язку з потребами астрономії, землеустрою і будівництва, тобто носила чисто геометричний характер і представляла головним чином «числення хорд». Згодом у неї поволі вкраплялись певні аналітичні елементи. У першій половині XVIII століття стався різкий перелом, після чого тригонометрія остаточно сформувалась як цілісний напрямок математичної науки. Саме з того часу тригонометричні залежності почали розглядатися як функції.

Тригонометричні рівняння та нерівності – одна з найскладніших тем у шкільному курсі математики. Вони виникають при розв'язуванні задач з планіметрії, стереометрії, астрономії, фізики та багатьох інших галузей.

Основна відмінність тригонометричних рівнянь та нерівностей від алгебраїчних полягає в тому, що в алгебраїчних рівняннях скінченне число коренів, а в тригонометричних – нескінченне, що суттєво ускладнює пошук коренів. Ще однією специфічною особливістю тригонометричних рівнянь та нерівностей є неєдиність форми запису відповіді.

Означення 17. *Нерівності виду* $f(x) > a$, $f(x) < a$, *де* f *– одна із чотирьох тригонометричних функцій, називають* ***найпростішими тригонометричними нерівностями***.

Підґрунтям для розв'язування цих нерівностей є таке наочне міркування: множиною розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ є множина тих значень змінної x, при яких точки графіка функції f розміщені вище за відповідні точки графіка функції g (рис.37). За допомогою цього рисунка встановлюємо, що проміжок $(a;\, b)$ – множина розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$.

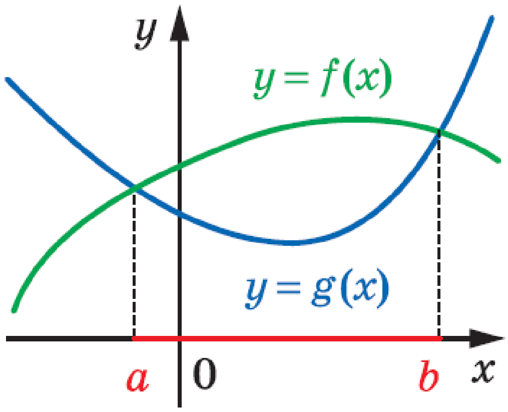


Рисунок 37. Ілюстрація до розв'язку тригонометричної нерівності

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводитимемо за такою схемою:

- знайдемо розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції;
- усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn, де T – головний період даної функції, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Розглянемо виклад цієї теми в підручнику Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти, 2018 [27].

Приклад 66: Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 38 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$.

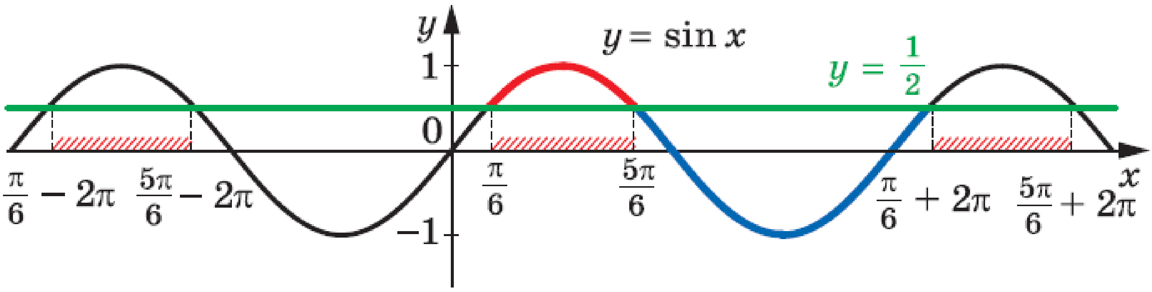


Рисунок 38. Графіки функцій $y = \sin x$ **і** $y = \frac{1}{2}$

Оскільки $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графіки перетинаються в точках з абсцисами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ і $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$ завдовжки в період функції $y = \sin x$.

На цьому проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться вище за графік функції $y = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (рис.38).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таке об'єднання прийнято позначати так:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right).$$

Відповідь записують одним із трьох способів:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або}\quad \left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$\text{або}\quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right).$$

Приклад 67: Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-2\pi+\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, тобто на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

На цьому проміжку графік функції $y=\cos x$ розміщений вище ніж графік функції $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x\in\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис.39).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

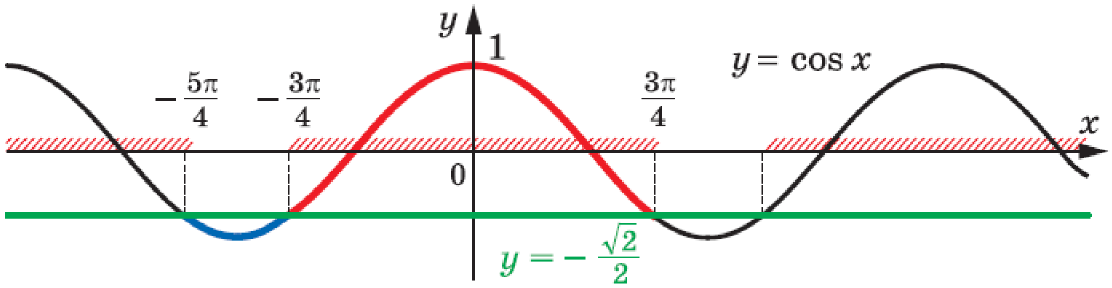


Рисунок 39. Графіки функцій $y=\cos x$ **і** $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Відповідь: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Приклад 68: Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x < 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, то на розглядуваному проміжку графік функції $y=\operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y=1$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис.40).

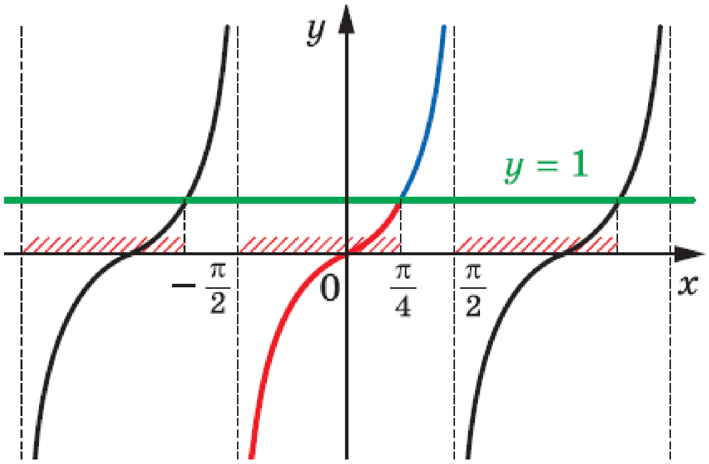


Рисунок 40. Графіки функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ **і** $y = 1$

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх

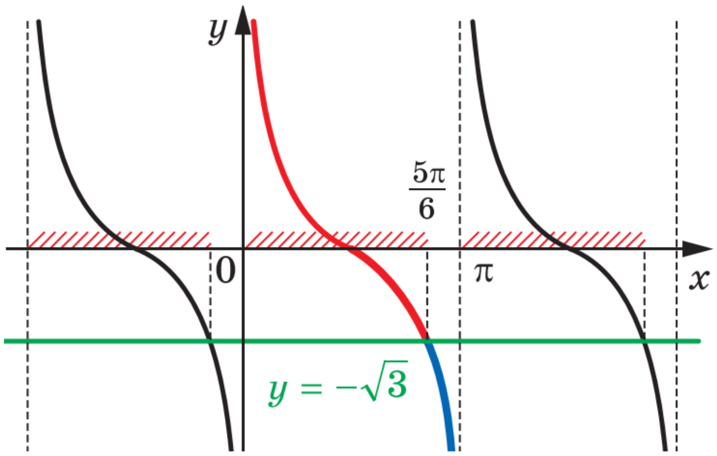


Рисунок 41. Графіки функцій $y = \mathrm{ctg}\, x$ **і** $y = -\sqrt{3}$

проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pi n < x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей можна інтерпретувати за допомогою одиничного кола.

Приклад 70: Розв'яжіть нерівність $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x < \frac{1}{2}$.

Розв'язання.

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і менші від $\frac{1}{2}$ (рис.42).

Множина розв'язків даної нерівності – це множина таких чисел x, що точки $P_x = R_O^x(P_0)$ належать дузі AB або дузі CD.

Маємо:

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{і} \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

Уявимо собі, що ми рухаємося по дугах AB і CD проти годинникової стрілки. Тоді можна записати:

$$A = R_O^{\frac{\pi}{3}}(P_0), \quad B = R_O^{\frac{5\pi}{6}}(P_0), \quad C = R_O^{\frac{7\pi}{6}}(P_0), \quad D = R_O^{\frac{5\pi}{3}}(P_0).$$

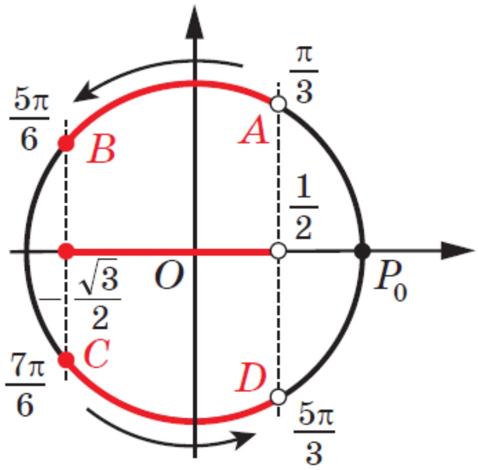


Рисунок 42. Ілюстрація одичного кола для прикладу 70

З урахуванням періодичності функції $y = \cos x$ переходимо до сукупності, яка рівносильна даній нерівності:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

або $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Завдання 15. Самостійно розв'язати нерівності:

1. $\sin x < -\frac{1}{2}$;
2. $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $\operatorname{tg} x < -1$;
4. $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$;
5. $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \geq \sqrt{3}$;
6. $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
7. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq \sqrt{3}$;
8. $\sin x \geq \cos x$;
9. $\operatorname{tg} x \geq 2\operatorname{ctg} x$;
10. $\sin 2x + 2\sin x > 0$.

7. Нерівності з параметрами

Нерівності з параметрами вивчаються паралельно з вивченням нерівностей усіх типів. Часто такі задачі відносяться до задач підвищеної складності.

Нерівність виду $ax < b$ $(>, \leq, \geq)$, де a і b – дійсні числа або вирази, які залежать від параметра(змінної), а x – невідоме, називається *лінійною нерівністю з однією змінною з параметром.*

Розв'язати нерівність з параметром означає дослідити, яким буде розв'язок нерівності при кожному з можливих значень параметра.

Приклад 71: Розв'язати нерівність $ax < 1$.

Розв'язання. Якщо $a = 0$, то нерівність набуває вигляду $x \cdot 0 < 1$ і буде вірна для будь-якого x з множини $\mathbb{R}$.

Якщо $a > 0$, то, розділивши обидві частини нерівності на додатне число a, отримаємо: $x < \frac{1}{a}$, отже $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right)$.

Якщо $a < 0$, то, розділивши обидві частини нерівності на від'ємне число a, отримаємо: $x > \frac{1}{a}$, отже $x \in \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$.

Відповідь: якщо $a = 0$, то $x \in \mathbb{R}$; якщо $a > 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right)$; якщо $a < 0$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$.

Зверніть увагу, що при розв'язуванні нерівності прикладу 71 областю допустимих значень як для змінної так і для параметру є множина всіх дійсних чисел.

Приклад 72: При яких значеннях параметра a нерівність

$$x^2-(2+a)x\le -2a$$

має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Перепишемо задану нерівність у вигляді

$$(x-a)(x-2)\le 0.$$

Очевидно, якщо $a\ne 2$, то розв'язком нерівності буде інтервал, а при $a=2$ нерівність матиме вигляд $(x-2)^2\le 0$ та матиме єдиний розв'язок $x=2$.

Відповідь: $a=2$.

Приклад 73: При яких значеннях параметра a нерівність

$$x^2-(a-3)x-a+6>0$$

справедлива при будь-якому $x\in\mathbb{R}$?

Розв'язання. Оскільки графіком квадратичної функції $y=x^2-(a-3)x-a+6$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору, то умова задачі виконується при $D<0$. Отримаємо:

$$D=(a-3)^2-4\cdot 1\cdot(-a+6)=a^2-2a-15,$$

$$a^2-2a-15<0,$$

$$(a-5)(a+3)<0.$$

Звідки $a\in(-3;5)$.

Відповідь: $a\in(-3;5)$.

Приклад 74: Про числа a, b і c відомо, що $c(a+b+c)<0$. Доведіть, що $b^2>4ac$.

Розв'язання. Якщо $a=b=0$, то з умови випливає, що $c^2<0$. Отже, числа a і b не можуть дорівнювати нулю одночасно.

Нехай $a=0$. Тоді $b\ne 0$, і нерівність $b^2>4ac$ стає очевидною.

Нехай $a\ne 0$. Тоді розглянемо квадратичну функцію

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

Маємо: $f(0) = c, f(1) = a + b + c$.

З умови випливає, що $f(0)f(1) < 0$, тобто квадратична функція f у точках $x = 0$ і $x = 1$ набуває значень різних знаків. Тоді її графіку відповідає випадок **1** або випадок **4** таблиці 2. Отже, функція f має два нулі. Тому дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є додатним, тобто $b^2 > 4ac$.

Цю задачу можна розв'язати інакше.

Розглянемо квадратичну функцію $f(x) = x^2 + bx + c$. Маємо: $f(c) = c^2 + bc + ac \; = c(a + b + c)$. Отже, $f(c) < 0$. Вітки параболи $f(x) = x^2 + bx + c$ напрямлені вгору, і існує значення аргументу, при якому функція f набуває від'ємного значення. Тоді графіку цієї функції відповідає випадок **1** таблиці 2.

Варто зазначити, що розв'язувати нерівності з параметрами інколи доводиться як невід'ємну складову області визначення при розв'язуванні рівнянь чи дослідженні функцій.

Приклад 75: Розв'язати рівняння $\sqrt{1 + ax} - \sqrt{1 - ax} = x$.

Розв'язання. Маємо ірраціональне рівняння, для якого допустимі значення параметра a і змінної x визначаються з таких умов:

$$\begin{cases} 1 + ax \geq 0, \\ 1 - ax \geq 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq ax \leq 1.$$

Відтак, необхідно дослідити, коли добуток ax має додатне і від'ємне значення.

1. Якщо $ax > 0$, то вираз $\sqrt{1 + ax} - \sqrt{1 - ax} > 0$, тобто додатний. Згідно із заданим рівнянням, якщо ліва частина більша нуля, то змінна $x > 0$ (права частина). Отже, параметр $a > 0$ (оскільки $ax > 0$).

2. Якщо $ax < 0$, то вираз $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} < 0$, тому $x < 0$ і відповідно $a > 0$.

3. Якщо $a = 0$, то із заданого рівняння знаходимо: $x = 0$.

Таким способом, задане рівняння має розв'язок лише при $a \geq 0$. Перетворимо рівняння до виразу:

$$\sqrt{1+ax} = x + \sqrt{1-ax}.$$

Піднісши до квадрату обидві частини останнього рівняння та виконавши перетворення, маємо:

$$x\left(x + 2\sqrt{1-ax} - 2a\right) = 0.$$

Отримуємо, що рівняння має розв'язок $x_1 = 0$ для усіх $a \in \mathbb{R}$.

Рівняння $x + 2\sqrt{1-ax} - 2a = 0$ має розв'язок, коли $2a - x \geq 0$, $1 - ax \geq 0$. Піднісши до квадрату та виконавши перетворення маємо:

$$x^2 = 4(1 - a^2).$$

Це рівняння має корені при $|a| \leq 1$: $x_2 = -2\sqrt{1-a^2}$, $x_3 = 2\sqrt{1-a^2}$. Таким способом x_2 та x_3 є розв'язками заданого рівняння при виконанні наступних умов:

$$\begin{cases} ax \leq 1, \\ 2a - x \geq 0, \\ a > 0, \\ |a| \leq 1. \end{cases}$$

З останньої системи нерівностей, підставляючи значення x_2 та x_3, знаходимо інтервал зміни параметра a:

$$\begin{cases} \pm 2a\sqrt{1-a^2} \leq 1, \\ a \geq \sqrt{1-a^2}, \\ 0 \leq a \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2(1-a^2) \leq 1, \\ a^2 \geq 1 - a^2, \\ 0 \leq a \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4a^2 + 1 \geq 0, \\ 2a^2 \geq 1, \\ 0 \leq a \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a^2 - 1)^2 \geq 0, \\ a^2 \geq \dfrac{1}{2}, \\ 0 \leq a \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; +\infty), \\ a \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ a \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 \leq a \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1. \right.$$

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1, +\infty)$, то рівняння має три корені: $x = 0$, $x = -2\sqrt{1-a^2}$, $x = 2\sqrt{1-a^2}$; якщо $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, то $x = -2\sqrt{1-a^2}$, $x = 2\sqrt{1-a^2}$.

Приклад 76: Розв'язати нерівність $\log_a(x-a) > \log_{\frac{1}{a}}(x+a)$.

Розв'язання. Визначимо насамперед область визначення

$$\begin{cases} x + a \geq 0, \\ x - a \geq 0, \\ a > 0, \quad a \neq 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > a, \\ a \in (0;1) \cup (1;+\infty). \end{cases}$$

Виконаємо перетворення заданої нерівності

$$\log_a(x-a) + \log_a(x+a) > 0, \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(x^2-a^2) > 0, \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \log_a(x^2-a^2) > \log_a 1. \tag{17}$$

Необхідно розглянути такі випадки:

1. Якщо $0 < a < 1$, то нерівність (17) рівносильна нерівності

$$x^2 - a^2 < 1, \quad \Leftrightarrow \quad x < \sqrt{1+a^2}.$$

Тоді розв'язок початкової нерівності $a < x < \sqrt{1+a^2}$.

2. Якщо $a > 1$, то отримуємо нерівність

$$x^2 - a^2 > 1, \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt{1+a^2}.$$

Звідки розв'язок початкової нерівності $x \in \left(\sqrt{1+a^2}; +\infty\right)$.

Відповідь: якщо $0 < a < 1$, то $x \in \left(a; \sqrt{1+a^2}\right)$; якщо $a > 1$, то $x \in \left(\sqrt{1+a^2}; +\infty\right)$.

Приклад 77: Розв'язати нерівність

$$\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1.$$

Розв'язання. Замінимо дану нерівність рівносильною

$$\frac{1+\log_a^2 x-1-\log_a x}{1+\log_a x}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_a x\,(\log_a x-1)}{1+\log_a x}>0.$$

Знаходимо область визначення:

$$\begin{cases} x>0, \\ a>0, \\ a\neq 1. \end{cases}$$

***Знаменник із змінною відкидати не можна*.**

Виконаємо заміну змінної: $t=\log_a x$. Отримаємо нерівність:

$$\frac{t(t-1)}{t+1}>0, \quad \Leftrightarrow \quad t\in(-1;0)\cup(1;+\infty).$$

Таким способом,

$$-1<\log_a x<0 \quad \text{і} \quad \log_a x>1.$$

Відтак, потрібно розглянути два випадки відносно параметра a.

1. Нехай $0<a<1$. Тоді нерівності $-1<\log_a x<0$ відповідає розв'язок $1<x<\frac{1}{a}$, а нерівність $\log_a x>1$ має розв'язок $0<x<a$.

2. Коли $a>1$, нерівності $-1<\log_a x<0$ відповідає розв'язок $\frac{1}{a}<x<1$, а нерівності $\log_a x>1$, відповідно, $x>a$.

Відповідь: при $0<a<1$ маємо $0<x<a$, $1<x<\frac{1}{a}$; при $a>1$ маємо $\frac{1}{a}<x<1$, $x>a$.

Приклад 78: При якому значенні параметра a система

$$\begin{cases} 2x+x^2+y^2\leq 1, \\ x-y+a=0. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.

Розв'язання. Підставляючи значення $y=x+a$ в задану нерівність, отримуємо

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1\leq 0.$$

Остання нерівність має єдиний розв’язок лише тоді, коли

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 2(a^2 - 1) = 0.$$

Із цього рівняння отримуємо $a_1 = -1$, $a_2 = 3$. Коли $a_1 = -1$, то $2x^2 \leq 0$ і, відповідно, $x = 0$, $y = -1$. Коли $a_2 = 3$, то $2x^2 + 8x + 8 \leq 0$ звідки отримуємо $x = -2$, $y = 1$.

Відповідь: якщо $a = -1$, то $(0; 1)$; якщо $a = 3$, то $(-2; 1)$.

Завдання 15. Самостійно розв’язати задачі з параметрами.

При яких значеннях параметра a дана нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x:

1. $x^2 - 4x + a > 0$;

2. $x^2 + (a-1)x + 1 - a - a^2 \geq 0$;

3. $(a-1)x^2 - (a+1)x + a + 1 > 0$;

4. $(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$.

5. $\sqrt{ax} \geq x + 1$;

6. $x - \frac{a}{1-a} < 1 - \frac{x-1}{a-1}$.

7. При яких значення параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq a, \\ y = x + 2 \end{cases}$$

має розв’язки?

8. Для кожного значення параметра a розв’яжіть нерівність

$$(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geq 0.$$

9. Для кожного значення параметра a розв’яжіть нерівність

$$(3^x - a)\sqrt{x - 2} \leq 0.$$

10. Для кожного значення параметра a розв’яжіть нерівність

$$(2^x - a)\sqrt{x - 3} \geq 0.$$

8. Комбіновані нерівності

Розглянемо приклади розв'язування комбінованих нерівностей.

Приклад 79: Розв'язати нерівність

$$\sqrt{7-x}\cdot|x^2-3| \le \sqrt{7-x}\cdot|x^2-14x+27|.$$

Розв'язання. Областю допустимих значень нерівності є множина $x \le 7$. Зауважимо, що $x = 7$ є розв'язком. При $x < 7$ скорочуючи дану нерівність на $\sqrt{7-x}$, отримуємо:

$$|x^2-3| \le |x^2-14x+27| \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-3)^2 \le (x^2-14x+27)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \big((x^2-3)-(x^2-14x+27)\big)\big((x^2-3)+(x^2-14x+27)\big) \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (7x-15)(x^2-7x+12) \le 0 \quad \Leftrightarrow \left(x-\frac{15}{7}\right)(x-3)(x-4) \le 0.$$

Розв'язуючи останню нерівність методом інтервалів отримаємо: $x \le \frac{15}{7}$, $3 \le x \le 4$. Всі отримані значення x задовольняють обмеження $x < 7$ і тому є розв'язками вихідної нерівності.

Відповідь: $x \in \left(-\infty; \frac{15}{7}\right] \cup [3; 4] \cup \{7\}$.

Приклад 80: Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x^2+|1-x|-2} > x-1. \qquad (18)$$

Розв'язання. Нехай спочатку $x \in M_1 = (-\infty; 1)$. Тоді нерівність (18) рівносильна нерівності

$$x^2-x-1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Враховуючи, що $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ та $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ в перетині з множиною M_1 отримуємо частину розв'язків нерівності (18):

$$x \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \qquad (19)$$

Нехай тепер $x \in M_2 = [1; +\infty)$. У даному випадку нерівність (18) рівносильна нерівності

$$\sqrt{x^2+x-3} \geq x-1,$$

яка, в силу невід'ємності своєї правої частини рівносильна на множині M_2 нерівності

$$x^2+x-3 \geq (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{4}{3}. \tag{20}$$

Усі ці значення x належать множині M_2, тому є розв'язками нерівності (18).

Об'єднуючи множини (19) і (20) отримуємо розв'язок нерівності (18).

Відповідь: $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Приклад 81: Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x-3} \leq 3-|x-6|.$$

Розв'язання. Можемо розкрити модуль на двох проміжках, розв'язуючи в кожному випадку нескладну ірраціональну нерівність. Проте в цій задачі можна використати іншу цікаву техніку. Зробивши заміну змінної $t=\sqrt{x-3}$ отримаємо нерівність:

$$t \leq 3-|t^2-3| \quad \Leftrightarrow \quad |t^2-3| \leq 3-t. \tag{21}$$

з обмеженням

$$t \geq 0. \tag{22}$$

Нерівність (21) рівносильна системі

$$\begin{cases} t^2-3 \leq 3-t, \\ t^2-3 \geq t-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+t-6 \leq 0, \\ t^2-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t+3)(t-2) \leq 0, \\ t(t-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq t \leq 2, \\ \left[\begin{array}{l} t \leq 0, \\ t \geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \leq t \leq 0, \\ 1 \leq t \leq 2, \end{array}\right.$$

звідки, враховуючи (22), отримаємо $t=0$ або $1 \leq t \leq 2$. Повернемося до заміни змінної:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3}=0, \\ 1 \leq \sqrt{x-3} \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ 4 \leq x \leq 7. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{3\} \cup [4; 7]$.

Приклад 81: Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{|x+2|-1}} \leq \frac{1}{5+x}. \qquad (23)$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даної невірності:

$$\begin{cases} |x+2|-1 \geq 0, \\ 5+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > -1, \end{array}\right. \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -5, \\ -5 < x < -3, \\ x > -1. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $x < -5$ нерівність (23) не має розв'язків, оскільки її ліва частина додатна, а права – від'ємна. Тому будемо розв'язувати нерівність (23) на множині $M = (-5; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Обидва знаменники нерівності (23) при $x \in M$ додатні. Домножуючи нерівність на додатну величину $(5+x)\sqrt{|x+2|-1}$, отримаємо рівносильну на множині M нерівність:

$$\sqrt{|x+2|-1} \geq 5+x,$$

яка з врахуванням умови $5+x > 0$ рівносильна на M нерівності:

$$|x+2|-1 \geq (5+x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| \geq x^2+10x+26.$$

Остання нерівність еквівалентна сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x+2 \geq x^2+10x+26, \\ x+2 \leq -(x^2+10x+26) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+9x+24 \leq 0, \\ x^2+11x+28 \leq 0. \end{array}\right.$$

Перша нерівність цієї сукупності не має розв'язків ($D < 0$), а розв'язки другої нерівності є відрізком $-7 \leq x \leq -4$. Переріз даного відрізка з множиною M утворює множину $-5 < x \leq -4$, яка і є розв'язком нерівності (23).

Відповідь: $x \in (-5; -4]$.

Приклад 82: Розв'язати нерівність

$$\log_2 \sqrt{7-x} \cdot \log_{(x-1)} 4 \leq 2. \qquad (24)$$

Розв'язання. Область допустимих значень нерівності визначається умовами $7-x > 0$, $x-1 > 0$, $x-1 \neq 1$, тобто $x \in M = (1; 2) \cup (2; 7)$.

Виконавши перетворення отримаємо:

$$\frac{\log_2 \sqrt{7-x}}{\log_4(x-1)} \leq 2,$$

звідки

$$\frac{\log_2(7-x) - 2\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)} \leq 0.$$

Остання нерівність з врахуванням M, рівносильна нерівності (24).

Нулі чисельника визначаються з рівняння

$$\log_2(7-x) = 2\log_2(x-1).$$

Розв'язуючи логарифмічні рівняння є небезпека отримати сторонні корені:

$$7 - x = (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x+2) = 0.$$

Тут розв'язок $x = 3$ – корінь нашого логарифмічного рівняння, а розв'язок $x = -2$ – сторонній корінь, оскільки $-2 - 1 = -3 < 0$.

Нуль знаменника $x = 2$.

Методом інтервалів знаходимо розв'язок нерівності (24) $x \in (1; 2) \cup [3; 7)$.

Відповідь: $x \in (1; 2) \cup [3; 7)$.

Приклад 83: Розв'язати нерівність

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geq 1. \qquad (25)$$

Розв'язання. Радикали в нерівності (25) визначені при

$$\begin{cases} x + 8 \geq 0, \\ 7 - x \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -8 \leq x \leq 7.$$

Відтак розв'язуємо нерівність (25) на множині $M = [-8; 7]$. Виконуємо перетворення:

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x}-\sqrt{(2x+1)^2}} \geq 0. \tag{26}$$

Останнє перетворення необхідне для того, щоб скористатись такою властивістю: оскільки функція $y=\sqrt{x}$ монотонно зростає, знак різниці $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ співпадає зі знаком різниці $A-B$. Відповідно, нерівність (26) еквівалентна на множині M нерівності

$$\frac{(x+8)-(7-x)}{(7-x)-(2x+1)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{4x^2+5x-6} \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{4(x+2)\left(x-\frac{3}{4}\right)} \leq 0.$$

Розв'язуючи останню нерівність методом інтервалів, отримуємо:

$$x<-2, \quad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}. \tag{27}$$

Перетин множини (27) та множини M є розв'язком нерівності (25).

Відповідь: $x \in [-8;-2) \cup \left[-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Приклад 84: Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x}-1} > 1.$$

Розв'язання. Розглянемо дану нерівність як показникову нерівність вигляду:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{u} > \left(\frac{3}{7}\right)^{0}.$$

Оскільки основа $0<\frac{3}{7}<1$, то $u<0$, тобто отримуємо:

$$\sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x} < 1. \tag{28}$$

Ірраціональна нерівність (28) рівносильна системі логарифмічних нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x \geq 0, \\ \log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x < 1, \end{cases}$$

з якої отримуємо

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq 1, \\ \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}, \end{cases}$$

звідки знаходимо $\frac{\pi}{6} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi k$ – розв'язок заданої нерівності.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$.

Завдання 16. Самостійно розв'язати нерівності:

1. $\sqrt{1 - |x|} \geq x - 2$;

2. $3\sqrt{|x+1| - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$;

3. $3\sqrt{x+2} \leq 6 - |x - 2|$;

4. $|x - 6| + \sqrt{3x + 1} \leq 5$;

5. $\sqrt{\frac{500 + 30x - 2x^2}{2x + 5}} > 10 - |x|$;

6. $\frac{1}{\sqrt{|x - 3| - 1}} \leq \frac{1}{6 - x}$;

7. $\sqrt{-x^2 + 7x - 10}\log_2(x - 3) \leq 0$;

8. $(x^2 - 2{,}8x + 1{,}8)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}|x - 2|} \geq 0$;

9. $\frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2}} \geq 0$;

10. $\frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{\sin x}} > 0$.

Список рекомендованої літератури

1. Бевз Г. П. Методика розв'язування алгебраїчних задач. К.: Рад. школа, 1975. – 240 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики.– К.: Вища школа, 1989.
3. Белешко Д.Т. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. Пос. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 80 с.
4. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1987.–240с.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І.А. Математика на вступних випробуваннях: Навч. посіб. К.: КНЕУ, 2006.
6. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: В-во «Shark», 2015. – 238с.
7. Істер О. С. Математика. 5 кл.: підруч. для закл. заг. серед. освіти. 2-ге видання доопрацьоване, 2018.
8. Істер О. С. Математика: підруч для 6-го кл. загальноосвіт. навч. закл., 2014.
9. Істер О. С. Алгебра: підруч для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл., 2015.
10. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8-го кл. закладів загальної середньої освіти, 2021.
11. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл., 2017.
12. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти, 2018.
13. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти, 2019.
14. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А.В.Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.

15.Збірник задач з математики для вступників до вузів / В. К. Єгерєв, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; За ред. М. І. Сканаві. К.: Вища школа, 1992. – 445с.

16.Капіносов А. Математика : збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / уклад. А. Капіносов, Г. Гап'юк, О. Мартинюк, С. Мартинюк. Тернопіль: Підручники і посібники, 2017. – 336 с.

17.Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

18.Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия : учебн. пособие для студентов физ-мат. спец. пед. ин-тов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 1991. – 352 с.

19.Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Харків : ББН, 1999. – 172 с.

20.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. Математика. 5 клас: підруч. для закладів загальної середньої освіти, 2018.

21.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закладів., 2014.

22.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл., 2020.

23.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл., 2020.

24.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручн. для 8 кл. з поглибл. вивч. Математики, 2016.

25.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів, 2017.

26. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів, 2017.
27. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти, 2018.
28. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти, 2018.
29. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти, 2019.
30. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти, 2019.
31. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Збірник задач і контрольних робіт. Х.: Гімназія, 2010.
32. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти, 2019.
33. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти, 2019.
34. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук. - метод. пос. К.: Вид-во А.С.К., 2003.
35. Репета В.К., Клешня Н.О., Коробова М.В., Репета Л.А. Задачі з параметрами: Навч. Посіб. К.: Вища школа, 2006.
36. Романюк В.Я., Дутко Л.І. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. Львів: Тріада плюс, 2004.
37. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Навчальний посібник. К.: Техніка, 2003. – 416 с.

View publication stats