Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина III «Функції в шкільному курсі математики»

Chapter · September 2022

5 authors, including:

Valentyn Sobchuk
National Taras Shevchenko University of Kyiv
68 PUBLICATIONS **202** CITATIONS

Svitlana Kushnirenko
National Taras Shevchenko University of Kyiv
22 PUBLICATIONS **23** CITATIONS

Alexandr Kurylko
National Taras Shevchenko University of Kyiv
2 PUBLICATIONS **3** CITATIONS

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики»
Частина ІІІ «Функції в шкільному курсі математики»

для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
механіко-математичного факультету

Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В.,
Курилко О.Б., Цань В.Б.

Київ – 2022

Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Курилко О.Б., Цань В.Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІІ «Функції в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2022. – 224 с.

Рецензенти:

Працьовитий М.В., доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України,

Радченко В.М., доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до друку
Вченою радою механіко-математичного факультету
протокол № 1 від 15 вересня 2022

У частині ІІІ «Функції в шкільному курсі математики» методичного посібника для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету розглянуто основні поняття та теореми теорії функцій в порядку їх вивчення у шкільному курсі математики згідно навчальних програм. Дано приклади використання функцій для розв'язування задач, дослідження функцій та побудови їх графіків. Запропоновано низку завдань для самостійного розв'язування студентами спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету.

Зміст

Вступ

Методичний посібник адресований насамперед студентам освітньої програми 014 «Середня освіта» з предметною спеціалізацією 014.04 «Середня освіта (Математика)» для самостійної роботи з «Методики навчання математики» за змістовою лінією «Функції». Посібник дає змогу оптимально організувати повторення матеріалу з даної тематики. Даний матеріал корисний при підготовці студентами до занять з відповідних тем елементарної математики під час педагогічної практики з відривом від виробництва.

Мета, завдання та вимоги до обов’язкових результатів навчання і компетентностей здобувача загальної середньої освіти визначаються державними стандартами відповідного рівня загальної середньої освіти, а саме:

- Державним стандартом початкової загальної освіти;
- Державним стандартом базової середньої освіти;
- Державним стандартом базової та повної загальної середньої освіти (перехідний період, остаточна втрата чинності 01.09.2026 року);
- Державним стандартом профільної середньої освіти (з 01.09.2026 року).

Державні стандарти розробляються на теоретичному і світоглядному фундаменті класичної та сучасної педагогіки України та світу, на основі аналізу впровадження провідних українських та світових інноваційних практик в освіті задля реалізації цілей загальної середньої освіти, що визначаються Законом України «Про освіту» та Законом України «Про повну загальну середню освіту».

Мета базової загальної середньої освіти: розвиток та соціалізація особистості учнів, формування їхньої національної самосвідомості, загальної культури, світоглядних орієнтирів, екологічного стилю мислення і поведінки, творчих здібностей, дослідницьких навичок і навичок життєзабезпечення, здатності до саморозвитку та самонавчання в умовах глобальних змін і викликів.

Провідним засобом реалізації вказаної мети є запровадження компетентнісного підходу у навчально-виховний процес загальноосвітньої школи шляхом формування предметних і ключових компетентностей.

Курси «Математика», «Алгебра» і «Геометрія» на рівні базової середньої освіти логічно продовжують реалізацію завдань математичної освітньої галузі, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*. Компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі на рівнях початкової, базової та профільної середньої освіти визначається відповідними державними стандартами. Відповідно до нього кінцеві результати навчання учнів у математичній освітній галузі розподілені за такими напрямками:

- дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів;
- моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій;
- критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій;
- розвиток математичного мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіння математичною мовою.

Навчання математики на рівні базової середньої освіти логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. Насамперед це передбачає формування предметної математичної компетентності, зміст якої, базові знання, уміння і ставлення описані у відповідних модельних навчальних програмах. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, як здатності учня застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, повноцінно брати участь в житті суспільства, нести відповідальність за свої дії. Навчання математики в основній школі передбачає формування предметної математичної компетентності, сутнісний опис якої подано у розділі «Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності» відповідних модельних програм. Формування зазначеної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти. До них належать:

- формування *ставлення* до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишнього світу;
- забезпечення *оволодіння* математичною мовою, розуміння математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;
- формування *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- розвиток *умінь* працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела,

виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті;

- формування *здатності* оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач, обґрунтовувати твердження, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації.

Зміст математичної освіти на рівні базової середньої освіти структурується за такими змістовими лініями:

- *методологія математики;*
- *числа і вирази;*
- *рівняння та нерівності;*
- *функції;*
- *геометрія і вимірювання геометричних величин;*
- *координати і вектори;*
- *дані, статистика та ймовірність.*

Реалії сучасного освітнього процесу за всеохоплюючої доступності відкритих інформаційних систем передача «готових знань» вже не є головним завданням процесу навчання. Нині активно розвивається тенденція зниження функціональної значущості привабливості традиційної організації навчання. Основним завдання навчання математики в школі є забезпечення ґрунтовного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань та умінь, необхідних у повсякденному вивченні дисциплін та продовження освіти. Ґрунтовна математична освіта та розвиток математичних здібностей необхідні не тільки тому, хто згодом займатиметься науковими дослідженнями в галузі математики, а й тому, хто стане економістом, інженером, виробничником, аграрієм тощо.

Шкільна математика – це дисципліна, основною метою якої є вивчення реальних ситуацій за допомогою математичних моделей.

Первинною математичною моделлю є *функція*, тому функції, їх властивості та графіки, як в явній, так і в неявній формі є стрижнем шкільного курсу математики.

1. Функції в шкільному курсі - місце в програмі

Згідно з чинною навчальною програмою для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, затвердженою Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804 поняття функції і відповідне означення явно вводиться у 7 класі. Одним з основних завдань *шкільного курсу алгебри* є залучення учнів до використання рівнянь і функцій як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язування на цій основі прикладних задач. У процесі вивчення курсу посилюється роль обґрунтувань математичних тверджень, індуктивних і дедуктивних міркувань, формування різноманітних алгоритмів, що має сприяти розвитку логічного мислення і алгоритмічної культури школярів. Водночас вивчення матеріалу функціональної лінії напрямлене на оволодіння найпростішими методами дослідження функцій та усвідомлення учнями на тому чи іншому рівні поняття функції як однієї з основних математичних моделей, що дозволяє описувати й вивчати різноманітні залежності між реальними величинами.

Вивчення функцій дає поштовх розвитку всіх пізнавальних процесів, зокрема діалектичного та наочно-образного мислення, світогляду (діалектики), розкривати загальнонаукову і загальнокультурну роль математики, здійснювати естетичне, екологічне виховання та професійну орієнтацію учнів.

Основна мета вивчення – сформувати уявлення про функції як математичні моделі залежності між величинами й об'єктами будь-якої природи; розвинути аналітичне та функціональне мислення, здатність розпізнавати і моделювати процеси та ситуації з повсякденного життя; виробити уміння використовувати функції та їх графіки для аналізу даних.

Підготовка до вивчення функцій починається, ще до введення самого поняття «функція». На рівні початкової освіти формуються поняття елементарної залежності, змінної величини та вміння інтерпретувати дані у вигляді таблиць і графічної інформації(схеми, діаграми, ілюстрації тощо). У 5-6 класі, хоч явно поняття «функції» ще відсутнє, але пропедевтично вводиться поняття залежності між змінними, формується вміння будувати таблиці значень змінних, аналізувати і будувати лінійні діаграми за табличними даними тощо.

У 7 класі вводиться одне з фундаментальних математичних понять – поняття функції. Разом з тим вводяться поняття область визначення, область значення, графік функції та формуються знання про способи її задання, розглядається лінійна функція, її графік та основні властивості. Ці відомості використовуються для графічного ілюстрування розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Інші види функцій розглядаються у зв'язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу. Зокрема, у 8 класі в темах «Раціональні вирази» та «Квадратні корені» учні ознайомлюються з функціями $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ та їх властивостями. Для класів з поглибленим вивченням математики під час вивчення властивостей квадратного кореня, розв'язування рівнянь з модулем, побудови графіків функцій звертається увага учнів на необхідність враховувати множину допустимих значень змінних, які входять до рівнянь, а також відслідковувати перетворення, які можуть вплинути на множину допустимих значень змінних (розширити чи звузити її) у ході розв'язування рівнянь.

У 9 класі розглядається квадратична функція, алгоритми її дослідження та побудови графіка. Разом з тим формуються поняття основних властивостей функцій таких, як зростання(спадання) та знакосталість. Вивчення цих властивостей пов'язується, зокрема, з розв'язуванням квадратних нерівностей. Формується уміння будувати ескізи графіків функцій шляхом послідовних перетворень графіків елементарних функцій.

Для курсу «Алгебра і початки аналізу» згідно з навчальними програмами для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна, тому у процесі навчання приділяється особлива увага дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі. Важливо при цьому демонструвати взаємозв'язок між основними поняттями курсу: функція, рівняння та нерівність. Зокрема, розв'язування рівняння $f(x) = 0$ та нерівностей $f(x) > 0,\ f(x) < 0$ є окремими випадками задачі на дослідження функції $y = f(x)$ (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості). Також зауважте, що функції моделюють реальні процеси, тому учні мають асоціювати характер реального процесу із відповідною функцією, її графіком та властивостями. Наприклад, зміна маси радіоактивної речовини має викликати уявлення про функцію $m = m_0 e^{-kt} (k > 0)$. Важливо, щоб притаманні явищу властивості (наприклад, зменшення чи збільшення маси, розпад речовини з часом) пов'язувались із властивостями функцій (спадання, зростання, збіжність до нуля при $t \to \infty$). Доцільно особливу увагу приділити показниковій функції, яка широко використовується при моделюванні процесів і явищ навколишнього світу.

Одним із головних завдань вивчення математики на профільному рівні є також розвиток графічної культури учнів, що зумовлено практичними потребами — робота з графіками, діаграмами, рисунками займає значне місце в діяльності спеціаліста технічного та природничого профілів. Тому особливу увагу при вивченні функцій слід приділити формуванню в учнів умінь встановлювати властивості функції за її графіком, будувати ескізи графіків функцій за формулою, набором даних або шляхом геометричних перетворень графіків елементарних функцій. Необхідно навчити учнів за графіком функції встановлювати її неперервність, точки розриву, проміжки зростання та спадання, знакосталості, найбільше та найменше значення.

Основною формою проведення занять залишається система уроків: вивчення нового матеріалу, формування вмінь розв'язувати задачі, узагальнення та систематизації знань, контролю та корекції знань. Поряд із цим ширше, ніж при вивченні курсу математики на академічному рівні, використовується шкільна лекція, семінарські та практичні заняття, а також нетрадиційні форми навчання такі як: динамічні слайд-лекції, дидактичні ігри, уроки «однієї задачі», «однієї ідеї», математичні «бої», навчання по станціях, перевернутий клас тощо. Також інтегровані уроки математики і фізики, поєднання вивчення алгебри і початків аналізу з обробкою (у тому числі комп'ютерною) даних, одержаних під час проведення лабораторних і практичних робіт на уроках фізики, астрономії, хімії, біології тощо активізують інтерес учнів до вивчення як математики, так і інших природничих предметів, встановлючи взаємозв'язки між ними. Можливі й різні форми індивідуальної або групової діяльності учнів, такі, наприклад, групові навчальні проєкти, написання учнями науково-пошукових робіт, «Допишемо підручник» тощо. Бажаним є залучення до участі у навчальному процесі викладачів вищих навчальних закладів, учених та спеціалістів. Такі заходи, як правило, мотивують учнів до глибшого вивчення предмету.

Вибір учнем математичного профілю навчання передбачає наявність у нього стійкого усвідомленого інтересу кожного учня до математики, схильності до вибору в майбутньому професії, пов'язаної з нею. Незважаючи на це, мотиваційний етап навчального процесу в таких класах не можна ігнорувати. Одним зі способів мотивації, які доцільно використовувати у математичних та фізико-математичних класах, є створення проблемної ситуації. Така ситуація може бути досить складною, вимагати серйозних математичних знань та значних зусиль для її розв'язування. При спробі знайти спосіб розв'язання проблеми учні мають стикатися з недостатністю наявних у них математичних знань та необхідністю оволодіння новою предметною інформацією, при цьому вчитель виступає у ролі наставника, направляючи науковий пошук у потрібному напрямку.

Широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення учнів надають сучасні інформаційні технології навчання. При їх використанні доцільно дотримуватися таких педагогічних умов:

- враховувати особливості навчальної діяльності, її зміст і структуру; цикли життєдіяльності учня, його здібності, інтереси, нахили, індивідуальні відмінності учнів, форми їх прояву в сфері комунікативних відносин і в пізнавальній діяльності;
- відповідні технології навчання мають бути варіативними, особистісно орієнтованими, коли знання, вміння та ставлення розглядаються не лише як самоціль, а й як засіб розвитку пізнавальних і особистісних якостей учня; виховують в учня здатність бути суб'єктом свого розвитку, рефлексивного ставлення до самого себе;
- забезпечувати цілісне психолого-методичне проєктування навчального процесу в умовах рівневої та профільної диференціації навчання.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, AGrapher, GeoGebra, бібліотек електронних наочностей та інших. За їх допомогою доступнішим стає побудова графіків функцій в курсі алгебри і початків аналізу.

Вивчаючи функції учні мають: розуміти зміст поняття «функція»; знати три основні способи задання функцій; розуміти суттєві ознаки функцій, передбачених програмою; розпізнавати їх серед інших функцій, що задані формулою; вміти досліджувати функцію і будувати її графік, як за властивостями, так і методом послідовних геометричних перетворень; визначати властивості функції за її графіком; наводити приклади залежностей, які виражаються функціями.

2. Історичний розвиток поняття функції

Поняття функції, як і поняття числа пройшло довгий історичний шлях уточнення і розширення. Воно виникло з потреб практики й таких наук, як фізика, хімія, природознавство тощо. Явного означення функції не було навіть тоді, коли І. Ньютон (1643-1727) та Г. Лейбніц (1646-1716) вже відкрили диференціальне та інтегральне числення (XVIII століття). Вперше термін «*функція*» вжив у своїх працях Г. Лейбніц, пов'язуючи його з геометричними уявленнями. Він також ввів термін «*змінна*», «*константа*». Перше означення функції сформулював учень і колега Г. Лейбніца

Й. Бернуллі у 1718 році: *функцією змінної величини називається кількість, яка утворена будь-яким способом з цієї змінної величини і сталих.*

У 1748 році це означення було уточнене Л. Ейлером: *функція змінної кількості – це аналітичний вираз, складений якимось чином з цієї кількості і чисел або сталих кількостей.*

Отже, перше означення функції Й. Бернуллі і Л. Ейлер пов'язували з аналітичним виразом, що її задає. Однак таке тлумачення звужувало поняття функції щонайменше з двох причин: По-перше, існують функції, які не можна задати аналітичним виразом (формулою); по-друге, один і той самий вираз може задавати різні функції. Наприклад, $y = x$ і $y = \sin(\arcsin x) = x$. Отже, таке означення функції гальмувало подальший розвиток математичної науки та її застосувань.

Поступ природознавства і математики вимагав розширення поняття функції. Власне, на це звернув увагу Ж. Фур'є, розробляючи теорію рядів. Поза тим минуло понад 100 років після введення першого означення функції Й. Бернуллі, поки М. Лобачевський у 1834 році не сформулював більш загальне означення функції від x, що визначає функцію як одне з трьох:

- *число, яке задається для кожного x і разом з x поступово змінюється;*
- *значення, що можна задати або аналітичним виразом, або умовою, яка визначає засіб випробування всіх чисел і вибору одного з них;*
- *залежність, що може існувати і залишатися невідомою.*

Три роки по тому П. Діріхле дійшов висновку, що спосіб встановлення відповідності між значеннями x та y неважливий, і дав таке означення функції: *y є функцією від x, якщо будь-якому значенню x відповідає цілком певне значення y, причому зовсім несуттєво, яким способом встановлено зазначену відповідність.*

Отже, в основу означень М. Лобачевського і П. Діріхде явно покладена ідея *відповідності.*

Поняття функції далі розширювалось у XX столітті. П. Дірак у 1930 році ввів нове поняття «*дельта-функції*», за допомогою якого описував явища квантової механіки. С. Соболєв ввів поняття «*узагальнена функція*», для розв'язування задач математичної фізики.

Більше того, під впливом нових вимог математики та інших наук означення функції буде й надалі змінюватися, і кожна наступна зміна, як і попередня, відкриватиме нові горизонти науки і приводитиме до нових важливих відкриттів.

Аналіз навчально-методичної літератури для шкіл і вищих навчальних закладів свідчить про те, що в ній поширені два напрями у тлумаченні поняття функції: *класичний* і *сучасний.*

У рамках класичного означення існує кілька підходів до тлумачення поняття функції. Зокрема, функція тлумачиться як:

1. закон (або правило): за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної;
2. змінна величина, числові значення якої змінюються залежно від числових значень іншої змінної величини;
3. відповідність між значеннями змінних величин.

Наприклад, перше тлумачення знаходимо в підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. 2020; підручнику Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Алгебра. підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. 2015 та ін.

Означенням класичного напрямку послуговуються природничі науки.

Недоліками заданого напрямку є те, що по-перше, вони ґрунтуються на понятті «*величина*», зміст якого не можна розкрити; по-друге, вони не охоплюють відповідностей між об'єктами будь-якої природи.

Сучасний напрям у тлумаченні поняття функції охоплює такі означення, які ґрунтуються на теоретико-множинній основі і використовують поняття «*відповідність*», «*множина*». У рамках цього напряму існує кілька підходів:

1. означається не сама функція, а лише функціональна ситуація;
2. функція тлумачиться як відповідність або відношення між певними множинами;
3. функція означається як закон відповідності між множинами.

Означення сучасного напряму охоплюють широкий клас об'єктів будь-якої природи, тому їх можна використовувати і в традиційних застосуваннях математики у природничих науках, зокрема, і в тих, які виникли останніми десятиліттями.

У зв'язку з модернізацією шкільної математичної науки в певний час в традиційному курсі алгебри давалось означення сучасного напряму: *якщо кожному значенню змінної* x *з деякої множини* D *відповідає єдине значення змінної* y*, то змінну* y *називають функцією від* x (Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра. Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. 2007). Пізніше повернулись до означення функції як відповідності певного виду між двома множинами.

Багаторічна шкільна практика і експериментальні дослідження з проблем методики навчання математики показали, що сучасні означення функції як відповідності між множинами і бінарного відношення між елементами двох множин, маючи безсумнівні переваги перед іншими підходами до означення функції, з точки зору математичної строгості, виявились невдалими для сприйняття школярами. У свідомості учнів поняття функції пов'язувалось зі стрілочними діаграмами, які використовуються для ілюстрації лише скінченних множин. Крім того, ці означення позбавили функцію її основної риси – динамічності і далі не використовувались для характеристики реальних процесів, особливо в суміжних предметах.

Тому в останньому виданні підручника алгебри за редакцією А.Г. Мерзляка поняття функції вводиться в 7 класі і тлумачиться як залежність між двома змінними, при якій кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної. У цьому разі явно означення не формулюється, а вводиться описово на прикладах у тому числі з використанням табличних описів. Таке тлумачення поняття функції не поступається за загальністю означенню через поняття множини, оскільки йдеться про відповідність між значеннями змінних (а не лише змінних величин), якими можуть бути об'єкти будь-якої природи. Разом з тим всі приклади підручника охоплюють числові функції і є прикладами залежності між значеннями змінних величин, які є реальними прикладними моделями відомих учням процесів. Виявилось, що для такого тлумачення функції учні підготовлені життєвим досвідом і лише його сприймають. Це не виключає можливість надалі в курсі алгебри і початків аналізу ознайомити учнів із сучасним означенням функції як відповідності між двома множинами.

3. Функція в шкільному курсі алгебри

3.1. Функціональна пропедевтика

Для свідомого засвоєння відомостей про функцію в курсі алгебри треба проводити, починаючи з 1 класу, функціональну пропедевтику – підготовчу роботу, спрямовану на попередній розвиток в учнів розуміння фундаментальних об'єктів та процесів необхідних для розкриття змісту поняття функції та формування знань про способи її задання і властивості окремих видів функції. У початковій школі, розв'язуючи текстові задачі, учні спостерігають залежність вартості товару від ціни, зміну результатів дій від зміни компонентів.

Уже у 1 класі учні з допомогою вчителя виконують елементарні дослідження математичних закономірностей, навчаються читати дані, вміщені на схематичному рисунку або в таблиці, обчислювати значення виразів.

У 2 класі програма передбачає формування в учнів вміння записувати математичні твердження, подані в текстовій формі, з використанням математичних символів; встановлювати залежності між компонентами і результатом арифметично дії; створювати елементарні математичні моделі задач. У цей період також розвивають вміння виділяти і впорядкувати дані за певною ознакою, зокрема, вміння виокремлювати дані з графів та лінійних діаграм, визначати достатність даних для розв'язання проблемної ситуації.

У 3 класі розглядаються задачі на обчислення шляху залежно від швидкості і від часу, визначення площі прямокутника залежно від довжини однієї зі сторін тощо.

По завершенню 4 класу учні мають: вміти обґрунтовувати як зміна одного з компонентів впливає на результат арифметичної дії; читати і записувати математичні твердження; використовуючи буквену символіку, обчислювати вирази зі змінною (змінними) при заданому її (їх) числовому значенні; представляти проблемну ситуацію різними способами та обирати оптимальний спосіб представлення інформації (схема, таблиця, схематичний рисунок).

В основній школі вивчення функцій можна умовно розділити на два етапи: функціональної пропедевтики (5-6 класи) та безпосереднього вивчення функцій (7-9 класи). На відміну від початкової школи у 5-6 класі поступово вводяться поняття, що використовуватимуться в подальшому вивченні функцій.

У 5 класі вводиться поняття трійки взаємопов'язаних величин, а учні набувають вміння розпізнавати групу величин, якою описується певна ситуація або процес, знаходити одну величину за двома іншими величинами та розуміти характер зміни однієї величини залежно від зміни іншої при сталій третій величині. На основі отриманих знань в явному вигляді вводиться поняття формули. Також у 5 класі функціональна пропедевтика передбачає формування поняття координатного променя(прямої) та координати точки. На основі цих понять розглядається ряд задач:

1. визначення положення точки на координатній прямій за заданою її координатою;
2. визначення координати точки на координатній прямій;
3. порівняння дійсних чисел з опорою на координатний промінь;
4. визначення відстані між двома точками координатного променя.

При вивченні цього матеріалу важливо звертати увагу учнів, що положення точки на координатній прямій визначається заданням одного числа – координати цієї точки.

Шостий рік навчання з точки зору функціональної пропедевтики присвячено трьом основним напрямкам:

вивченню пропорційної залежності між величинами та її різновидів – прямо та обернено пропорційні залежності та формул, що їх задають;

удосконаленню знань про координатну пряму, зокрема, доповнення її значень раціональними числами;

формуванню понять координатна площина, графік і пов'язаних з ними понять.

На цьому етапі учні навчаються встановлювати вид залежності між величинами певної групи, записувати залежність у вигляді формули, заповнювати таблицю величин, які перебувають у прямій/оберненій пропорційній залежності. При вивченні координатної прямої формується поняття модуля величини, як відстані від точки, що її зображає, до початку координат.

Ознайомлення з прямокутною системою координат, як правило ілюструють низкою прикладів. Наприклад таким, положення місця глядача в кінотеатрі задається двома числами, зазначеними у квитку. Перше число вказує на номер ряду, а друге число – на номер місця в цьому ряду. Вказують, що у математиці для визначення положення точки на площині вводиться прямокутна система координат, яка складається з двох взаємно перпендикулярних координатних прямих, для кожної з яких їх точка перетину O визначається за початок відліку, і на кожній координатній прямій встановлюються додатний і від'ємний напрями та одиниця вимірювання. *Площина, з обраною на ній системою координат, називається координатною площиною*. Положення будь-якої точки на координатній площині визначається впорядкованою парою чисел (x_0, y_0) такими, що пряма проведена через задану точку перпендикулярно до осі x перетинає її у точці x_0 , а пряма проведена через цю ж точку перпендикулярно осі y перетинає її у точці y_0. Далі розв'язуються дві взаємно обернені задачі, про відповідність точки з заданими координатами визначеній точці координатної площини і навпаки.

Після введення нового поняття варто запропонувати учням навести приклади застосування системи координат на практиці та в інших шкільних предметах (шахова дошка, географічна карта, за якою можна визначити широту і довготу будь-якою точки на карті тощо), з метою формування зв'язків між новими і вже відомими учням об'єктами.

На цьому етапі потужний пропедевтичний ефект матимуть задачі на побудову графіка руху об'єкта зі сталою вказаною швидкістю за вказаними таблицею даними та обернена задача аналізу деякого процесу за готовим графіком, що його зображає .

3.2. Формування поняття про функціональну залежність

У плані функціональної пропедевтики поняття функції вживатимемо у вузькому розумінні — як зв’язок між змінними величинами.

З метою формування уявлень молодших школярів про змінні та сталі величини, про зв’язки між величинами у чинних підручниках з математики подаються вправи з таблицями, вправи на знаходження значень виразів із змінною, задачі з пропорційними величинами.

У початкових класах учні ознайомлюються з вимірюванням деяких величин (довжина, площа, маса, час), встановлюють зв’язки між величинами: ціна, кількість і вартість; маса одного предмета, кількість предметів і загальна маса; швидкість, час і відстань за рівномірного руху тіла тощо. Учні спостерігають, як змінюється результат арифметичної дії від зміни компонентів. Названі величини попарно перебувають у різних видах залежностей: *прямо пропорційній* (ціна і вартість, множник і добуток); *обернено пропорційній* (ціна і кількість, дільник і частка); лінійній (доданок і сума, зменшуване і різниця).

Завдання вчителя полягає в тому, щоб під час виконання відповідних вправ спрямувати увагу учнів на ці зв'язки і залежності. При цьому, звичайно, не використовують відповідні термінологію й символіку. Ознайомлення дітей з функціональною залежністю відбувається в неявному вигляді. Вчитель оперує лише поняттями «залежність», «змінна величина».

У початкових класах функціональну залежність між величинами здебільшого описують словами та показують її за допомогою таблиці.

Словесний спосіб використовується при розв’язуванні задач, у яких розглядаються взаємопов’язані величини.

Лінійна залежність. Знаходження значень таких виразів, як $5 \cdot a + 7$, $9 \cdot a - 3$, $100 - a \cdot 2$ є не що інше, як знаходження значень функції для заданих значень аргументів. Аргументом виступає змінна a, функцією — вираз з цією змінною. З вправами на знаходження значень виразів учні час від часу зустрічаються, але бажано посилити увагу до випадків впорядкованої множини змінної.

Приклад 1. Знайдіть значення виразу $5 \cdot a + 7$, якщо a набуває значень одноцифрових чисел. Побудуйте таблицю і запишіть у ній значення змінної a і значення виразу $5 \cdot a + 7$.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$5 \cdot a + 7$	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52

Бесіда. Найменше значення змінної a дорівнює 0, найбільше значення 9. Кожного разу значення змінної збільшується на одиницю. Як змінюється при цьому значення виразу $5 \cdot a + 7$? (Збільшується кожного разу на 5).

Якщо значення змінної a дорівнює 5, то яке значення виразу? (Значення виразу дорівнює 32). Кожному значенню змінної відповідає єдине значення виразу.

Одним з видів лінійної залежності є зміна результатів дій першого степеня від зміни одного з компонентів. Учні мають розуміти характер зміни результатів дій залежно від зміни одного з компонентів і мати уявлення про кількісні зміни (в такій залежності).

Під час розв’язування задач вчитель має звертати увагу учнів на характер залежності між величинами, змінювати числові дані в задачі і потім порівнювати її розв’язок з попередньою. З метою усвідомлення учнями зв’язків між даними можна запропонувати їм самостійно змінити дані задачі таким чином, щоб отримати інший, вказаний вчителем, результат.

Прямо пропорційна залежність. Задачі з пропорційними величинами займають вагоме місце у функціональній пропедевтиці. Це задачі, в яких величини перебувають у прямо пропорційній залежності (ціна товару і вартість, маса одного ящика з овочами і загальна маса, кількість виробів і тривалість часу їх виготовлення, швидкість руху і відстань, довжина сторони квадрата і його периметр тощо). В прямо пропорційній залежності знаходяться множник і добуток (при сталому другому множникові), частка і ділене (при сталому дільникові).

Обернено пропорційна залежність. В обернено пропорційній залежності знаходяться: ціна і кількість товару, час і швидкість руху, дільник і частка тощо.

Звернімо увагу, що на рівні початкової освіти також розв'язують задачі на пряму та обернену пропорційність, проте явно їх так не називають і, хоча в цей період закладаються підвалини пропорційної залежності, при розв'язуванні задач спираються на властивості операцій множення та ділення.

Закріплення розуміння цих понять відбувається при безпосередньому вивченні в 6 класі теми «*Пряма та обернена пропорційні залежності*», де подаються їх вичерпні означення, ознаки та властивості.

Означення 1. *Дві величини називаються прямо пропорційними, якщо при збільшенні (зменшенні) однієї величини в кілька разів інша величина збільшується (зменшується) в ту саму кількість разів*.

Ознака прямої пропорційності: *Якщо дві змінні величини прямо пропорційні, то відношення відповідних значень цих величин є сталим.*

При переході від прямої до оберненої пропорційності доцільно навести приклад: дорогою до школи, коли часу обмаль, ви збільшуєте швидкість свого руху, щоб не запізнитися на урок. Отже, швидкість вашого руху залежить від часу руху наступним чином: що меншим є час руху, то більшою буде ваша швидкість. Такі величини називають *обернено пропорційними*.

Означення 2. *Дві величини називаються обернено пропорційними, якщо при збільшенні (зменшенні) однієї величини в кілька разів інша величина зменшується (збільшується) в ту саму кількість разів*.

Ознака оберненої пропорційності: *Якщо дві змінні величини обернено пропорційні, то добуток відповідних значень цих величин є сталим*.

Відтак, якщо є залежність між величинами, то аналізуючи природу зв'язку між змінними, спочатку потрібно визначити чи пропорційні дані величини. Зрозуміло, якщо пропорційної залежності немає, то з'ясовувати, як саме пропорційні ці величини — прямо чи обернено, — потреби не виникає. Якщо ж дві величини пропорційні, то можливі лише два види, які взаємно виключають одне одного, — або пряма пропорційність, або обернена пропорційність.

3.3. Введення поняття функції

Пояснення поняття функції починається, як правило, з розгляду залежностей між значеннями двох змінних, в яких кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної.

Під час формулювання загального поняття функції важливо використати, зокрема, відомі учням з попередніх класів приклади залежностей, що задаються різними способами (за допомогою опису, формули, графіка, таблиці), і ті знання і вміння, які вони здобули під час здійснення функціональної пропедевтики. Цільовим підбором прикладів підвести учнів до означення функції, наприклад такого:

Означення 3. *Функцією називається правило, що кожному значенню незалежної змінної ставить у відповідність єдине значення залежної змінної.*

Оскільки функція вважається заданою, коли вказано спосіб залежності між змінними і область визначення функції, то природно, розглядаючи приклади, ввести поняття області визначення та області значень функції. У підручнику під редакцією А.Г. Мерзляк [22] наведено досить вдалі приклади функції пов'язані з формуванням цінопоняття. Надалі протягом певного часу учні матимуть справу з числовими функціями. Проте оскільки загальне поняття функції вводиться через поняття змінних, якими можуть бути об’єкти будь-якої природи, буде корисним навести приклади і такого характеру.

Приклад 2. На рисунку 1 зображено графік залежності температури повітря від часу доби.

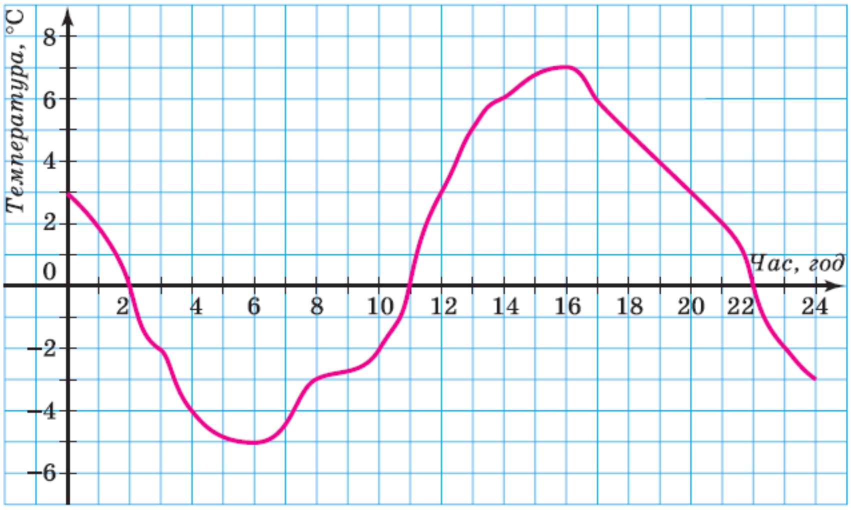


Рис. 1. Графік залежності температури повітря від часу доби

За цим графіком можна, вибравши довільний момент часу t, знайти відповідну температуру T. Таким чином, величина t є незалежною змінною, а величина T – залежною.

На даному етапі наголошують, що функцію можна задати одним з чотирьох способів: описово, таблично, графічно або за допомогою формули. А також вказують на те, що для позначення формули, яка задає функцію використовують запис: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»), де незалежну змінну позначено літерою x, залежну — літерою y, а функцію (правило) — літерою f. Незалежну змінну ще називають *аргументом функції*, а залежну змінну – *значенням функції.*

Область визначення функції – містить всі значення, яких може набувати аргумент функції.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють *область значень функції*.

Важливо звернути увагу учнів, якщо функцію задано формулою $y = f(x)$ і не вказано, яких значень може набувати аргумент (тобто область визначення в явному вигляді не задано), то вважають, що областю визначення такої функції є множина всіх тих дійсних чисел, для яких вираз $f(x)$ має зміст.

Як приклад можна розглянути функцію $y = \frac{1}{x-1}$, яка втрачає зміст, якщо знаменник дорівнює нулю, тобто при $x = 1$. Таким чином, область визначення даної функції містить всі дійсні числа, крім $x = 1$. Записують: $x \neq 1$.

Також корисно розглянути також приклади залежностей, які не є функціями.

Приклад 3. Нехай довжина маршруту автобуса дорівнює 15 км. Вартість проїзду визначається за такою таблицею:

Вартість проїзду, грн	12	14	16
Довжина шляху, який проїжджає пасажир, км	до 5	від 5 до 10	від 10 до 15

Зрозуміло, що змінні величини «вартість проїзду» й «довжина шляху, який проїжджає пасажир» пов'язані між собою. Проте якщо вважати вартість проїзду незалежною змінною, то описана залежність не є функціональною. Справді, якщо пасажир заплатив 12 грн, то не можна *однозначно* встановити довжину шляху, який він проїхав.

Важливо час від часу звертати увагу учнів на те, що термін «функція» вживається для позначення двох понять: функціональної залежності(правила) і залежної змінної(величини).

Для правильного формування уявлення про функцію корисно приділяти достатню увагу вправам на обчислення значень функції за даними значеннями аргументу і оберненій задачі – пошук значень аргументу, яким відповідає задане значення функції. При цьому бажано розглядати функції, що задані різними способами.

З погляду формування умінь складати математичні моделі залежностей в умовах практичних задач, важливими є завдання на складання формул, що визначають функції(залежності): шляху від часу за сталої швидкості, маси різноманітних предметів від об’єму, побудови графіків залежностей температури повітря, атмосферного тиску від часу, одержаних при експериментальних спостереженнях. З метою впровадження елементів статистики можна практикувати складання таблиць статистичних даних.

3.4. Методика вивчення окремих видів функцій

З точки зору методики навчання математики доцільно виділити методичну схему вивчення окремих видів функцій як у курсі алгебри, так і в курсі алгебри і початків аналізу.

1. ***Етап мотивації***: розглядаються приклади залежностей, які приводять до даного виду функцій.
2. ***Формулювання означення функції, що вводиться***. Залежно від виду функції і підготовленості учнів означення можна ввести конкретно-індуктивним методом (коли учні підводяться до самостійного виділення суттєвих властивостей і формулювання означення) або абстрактно-дедуктивним методом (коли вчитель сам формулює означення і наводить приклади введеного виду функції). Розв’язування усних вправ на підведення під поняття функції, що вивчається. Серед пропонованих функцій мають бути й такі, що не належать до розглядуваного вигляду.
3. ***Побудова графіка функції та визначення її властивостей.*** Графік функції будується по точках за заздалегідь заготовленою таблицею значень даної функції. На початкових етапах(7-9 клас) властивості функції визначаються на основі отриманого графіка, поступово все більше переходять до обґрунтування властивостей на основі знань про математичні об’єкти. На наступних етапах навчання (9-11 клас), коли систематизуються відомості про функції та вводиться означення зростаючої, спадної, парної, непарної, періодичної функцій, властивості функцій доводяться аналітично.

4. ***Застосування властивостей вивченої функції***, зокрема, до розв'язування рівнянь, нерівностей та інших задач.

Застосуємо цю методичну схему до вивчення *лінійної функції*.

На першому етапі, *етапі мотивації*, наведемо приклади різних залежностей, які задаються тією самою формулою.

1) Залежність шляху s при рівномірному прямолінійному русі від часу t, коли відомий початковий шлях s_0, який пройшло тіло: $s = s_0 + vt$, де t і s – змінні, v і s_0 – сталі.
2) Видовження металевого стержня при нагріванні відбувається за формулою $l = kt + l_0$, де температура нагрівання t і довжина стержня l – змінні, l_0 – довжина стержня за температури 0^{o} та k – коефіцієнт лінійного розтягу – сталі.
3) Вартість Skype-дзвінка з України можна виразити формулою $T = k + nx$, де k – плата за з'єднання, x – кількість хвилин розмови, n – вартість хвилини розмови.
4) Вартість проїзду на таксі виражається формулою $p = p_0 + qx$, де x – кількість кілометрів, що проїхав на таксі пасажир, q грн – вартість проїзду за 1 км, p_0 грн – показ лічильника в момент від'їзду таксі.

Етап формулювання означення функції, що вводиться. Якщо вводити означення лінійної функції конкретно-індуктивним методом, то можна запропонувати учням записати у загальному вигляді залежності між змінними у розглянутих чотирьох прикладах у вигляді однієї формули, використавши позначення незалежної змінної літерою x , залежної – літерою y. Учні з допомогою вчителя мають прийти до формули $y = kx + b$. Після чого, узагальнюючи спостереження учнями або вчителем формулюється означення.

Означення 4. *Функцію, яку можна задати формулою вигляду* $y = kx + b$, *де* k *і* b *— деякі числа,* x *— незалежна змінна, називають лінійною*.

Доцільно звернути увагу учнів на структуру формули, що задає цю функцію: це двочлен, у якого один член є добутком числа на першу степінь незалежної змінної, а другий – число. У загальному вигляді між членами стоїть знак плюс. Але якщо між членами стоїть знак мінус, то формулу можна привести до стандартного вигляду приєднанням знака до вільного члена b

$$y = kx - b = kx + (-b).$$

Несуттєвими ознаками є як значення коефіцієнта k та вільного члена b, що можуть бути будь-якими числами, так і порядок розташування членів двочлена. Для демонстрації цього принципу необхідно розв'язати систему вправ на розпізнання лінійної функції за виглядом формули, що її задає, варіюючи несуттєві ознаки – значення k і b. Вона може бути такою.

Приклад 4. Які формули з наведених нижче задають лінійну функцію? Вказати для яких k і b:

1.	$y = 5x + 2;$	5.	$y = \frac{5}{x} + 1;$	9.	$y = \frac{1}{2} - 2x;$
2.	$y = 8;$	6.	$\frac{y}{2} = 2x + 1;$	10.	$y = a - x;$
3.	$y = 2x^2 - 1;$	7.	$y = x;$	11.	$y = x^2 + a^2;$
4.	$y = 7{,}3x - 6;$	8.	$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2};$	9.	$y = a^2 x,$

де a – стала.

В останньому прикладі не всі учні розпізнають лінійну функцію за певної сталої a. Важливо, щоб учні усвідомили, що формула $y = kx + b$ є узагальненням всіх можливих лінійних функцій і вона задає множину лінійних функцій за різних значень k і b та порядку членів.

Етап побудови графіка функції та визначення її властивостей. Після заповнення таблиці значень x і y для певної лінійної функції і побудови відповідних точок на координатній площині учням пропонується поки що прийняти на віру (цей факт буде доведено в старших класах), що графіком функції є суцільна пряма. Доцільно після побудови графіків функцій звернути увагу учнів на те, що для побудови прямої, як відомо з курсу геометрії, достатньо дві точки. Коли значення b невеликі за модулем, одна точка $(0;\ b)$ завжди відома безпосередньо з формули. Другою точкою може бути будь-яка, координати якої обчислюються з формули $y = kx + b$ при будь-якому заданому x. Інколи зручно обчислити точку перетину графіка з віссю x обравши $y = 0$ і обчислюючи відповідне значення x.

Бажано, щоб учні самі помітили, як впливають на розташування графіка знаки k і b: при $k > 0$ пряма утворює з додатним напрямком осі x гострий кут, при $k < 0$ – тупий, а при $k = 0$ графік функції є прямою паралельною до осі абсцис, а якщо при цьому і вільний член також дорівнює нулю, то її графік співпадає з віссю x. Залежна змінна y зростає при зростанні x у першому випадку і зменшується в другому. Цим самим реалізуються перспективні зв'язки навчального матеріалу з доведенням монотонності лінійної функції у 9 класі.

Лінійна функція знаходить своє застосування при вивченні систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими, зокрема при введенні графічного способу розв'язування таких систем і навіть раніше, коли учні вивчають графік лінійного рівняння з двома невідомими.

Під час введення поняття зростаючої та спадної функцій у 9 класі, парної і непарної функцій – у 10 класі доцільно знову звернутися до властивостей лінійної функції і довести їх аналітично. Зокрема, довести, послуговуючись означеннями зростаючої і спадної функцій, що при $k > 0$ лінійна функція зростає.

Доведення. Нехай $k > 0$ і $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ і $x_2 > x_1$. Тоді

$$f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1) > 0,$$

оскільки $k > 0$, а за умовою $(x_2 - x_1) > 0$ за означенням числової нерівності. Отже, за означенням числової нерівності $f(x_2) > f(x_1)$. А отже, функція зростає.

Так само доводиться, що при $k < 0$ лінійна функція спадна.

Під час дослідження лінійної функції на парність і непарність у 10 класі треба зазначити, що при $k \neq 0$ і $b \neq 0$ ця функція не належить ні до парних, ні до непарних функцій. Справді, хоч будь-які x і $-x$ належать області визначення функції, тобто множині $\mathbb{R}$, проте $f(-x) = -kx + b \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x) = -kx - b$.

Однак при $b = 0$ і $k \neq 0$ лінійна функція $y = kx$ є непарною, оскільки $f(-x) = -kx = -f(x)$, а при $k = 0$ і довільних значеннях вільного члена b вона є парною, оскільки $f(x) = b, f(-x) = b = f(x)$ і її графік є прямою симетричною відносно осі y.

У 10 класі при вивченні поняття періодичної функції слід звернути увагу учнів на те, що коли $k \neq 0$ і $b \neq 0$, лінійна функція не є періодичною, оскільки не існує такого числа $T \neq 0$, що

$$f(x+T) \neq f(x),$$

бо $f(x+T) = k(x+T) + b = kx + kT + b \neq f(x)$.

Проте, якщо $k = 0$, $y = b$ є періодичною функцією, оскільки за будь-якого $T \neq 0$: $f(x+T) = b = f(x)$. Однак найменшого додатного періоду для цієї функції не існує.

Окремий випадок лінійної функції є пряма пропорційність, оскільки формула функції $y = kx$ є частковим випадком формули $y = kx + b$ при $b = 0$. Тому вивчення графіка функції прямої пропорційності можна почати саме з таких міркувань. Після цього учні самі можуть сформулювати означення функції прямої пропорційності і навести приклади залежностей, які задаються формулою $y = kx$. Графіком функції прямої пропорційності, як окремого випадку лінійної функції, є пряма. Можна запитати в учнів, яка специфічна властивість цієї прямої. Прогнозована відповідь, що графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат, оскільки при $x = 0$ маємо $y = 0$.

Справді, точка $(0; 0)$ задовольняє рівняння $y = kx$. Тому для побудови графіка прямої пропорційності достатньо знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат і провести пряму через цю точку й точку O $(0;\ 0)$.

Етап застосування властивостей вивченої функції. При розв'язуванні вправ, що стосуються лінійної функції і функції прямої пропорційності, потрібно обирати вправи не лише на побудову графіків відповідних

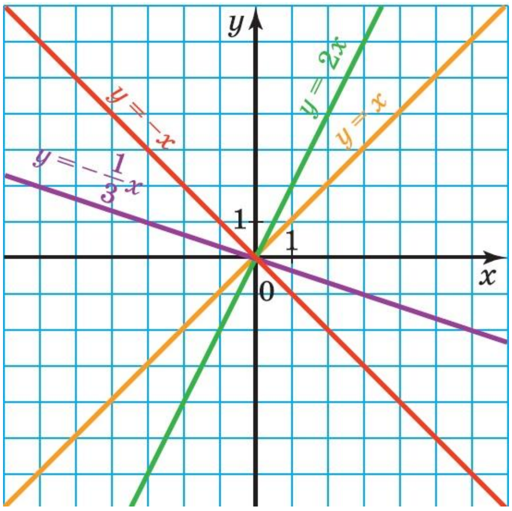


Рис. 2. Графіки функцій прямої пропорційності

функцій за заданою формулою, а й обернені вправи – на визначення коефіцієнтів лінійної функції за відомим графіком. Приклади графіків функцій прямої пропорційності наведено на рис. 2.

4. Функції в курсі алгебри 7 клас

Багато наук, такі як фізика, хімія, біологія та інші, досліджують залежності між величинами. Вивчає ці зв'язки й математика, будуючи математичні моделі реальних процесів. З поняттям математичної моделі учні ознайомилися при розв'язуванні текстових задач.

На першому занятті учитель актуалізує знання учнів, отримані в молодших класах. Ще раз акцентує увагу на тому, що незважаючи на істотні відмінності моделей залежностей, описаних у багатьох задачах, їм усім притаманне таке: *указано правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної*. Таке правило називають ***функцією***, а відповідну залежність однієї змінної від другої — ***функціональною*** (див. п.3.3. Введення поняття функції).

4.1. Способи задання функцій

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної [22].

Учням неодноразово доводилося формулювати різні правила. Спираючись на цей їх досвід, можна наголосити, що оскільки функція — це правило, то його можна виразити словами. Такий спосіб задання функції називають ***заданням функції описом***.

Приклад 5. Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень. Значення залежної змінної знаходимо за таким правилом: кожне подвоєне значення незалежної змінної потрібно зменшити на 2.

Очевидно, що такий спосіб дає змогу однозначно визначити значення залежної змінної. Отже, ми задали деяку функцію f, областю визначення якої є всі числа. Приклад необхідно підкріпити чисельним обрахунком даної функції для кількох навмання обраних значень аргументу:

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1,$$

$$f(-12{,}5) = (-12{,}5) \cdot 2 - 2 = -27 \text{ тощо.}$$

Приклад 6. Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень, крім 0. Відповідні значення залежної і незалежної змінних — взаємно обернені числа. Тут задано функцію f, область визначення якої — усі числа, крім 0. Наприклад,

$$f(1) = 1, \qquad f(2) = \frac{1}{2}, \qquad f\left(-\frac{1}{4}\right) = -4.$$

Найпоширенішим способом задання функції є задання функції ***за допомогою формули***. В старших класах такий спосіб задання функції називають *аналітичним*. Звернемо увагу на деякі ключові моменти в ознайомленні учнів з даним способом задання функції.

Необхідно продемонструвати, що одну й ту саму функцію можна задати більше ніж одним способом. Наприклад, якщо в прикладі 5 незалежну змінну позначити літерою x, а залежну — літерою y, то формула $y = 2x - 2$, де x – будь-яке число, задає вищеописану функцію.

Важливо звернути увагу учнів, що область визначення функції є невід'ємною частиною самої функції. Наприклад розглянувши функцію $y = 2x - 2$, де x – будь-яке число, та функцію $y = 2x - 2$, де x – будь-яке натуральне число, що хоч і задаються однаковою формулою, проте є різними функціями. Перша з цих функцій співпадатиме з функцією з прикладу 5, а друга – ні.

Варто зазначити, що область визначення функції може бути не задана явно і тоді ми вважаємо, що в область визначення входять всі значення незалежної змінної при яких вираз $f(x)$ має зміст. Зрозуміло, що формула $y = \frac{1}{x}$ задає функцію з прикладу 6, оскільки дана формула задає обернену пропорційність і при всіх значеннях змінної x, крім 0, вираз $\frac{1}{x}$ може бути обчислений, тобто область визначення даного виразу і функції заданої у прикладі 6 співпадають.

Якщо функцію задано формулою, права частина якої — цілий вираз, і при цьому не вказано область визначення, то вважатимемо, що областю визначення такої функції є всі числа.

Якщо хочуть наголосити, що, наприклад, формула $y = 5 - \frac{x}{3}$ задає деяку функцію f, то пишуть: $f(x) = 5 - \frac{x}{3}$.

Якщо хочуть наголосити, що, наприклад, формула $s = 10t + 2$ задає функцію з аргументом t і залежною змінною s, то пишуть: $s(t) = 10t + 2$.

Зважаючи, що учні уже мали досвід подання даних ***у вигляді таблиці***, покажемо, що функцію також можна подати в такий спосіб.

Для цього розглянемо функцію $f(x) = x - 2x^2$, область визначення якої складається із чисел $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3$. Знайдемо значення цієї функції при заданих значеннях аргументу:

$$f(-1) = -3, \qquad f(0) = 0, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad f(1) = -1, \qquad f(3) = -15.$$

Отримані результати занесемо до таблиці:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

Усі числа, записані в першому рядку цієї таблиці, складають область визначення даної функції f. Таблиця дає змогу за вказаним значенням аргументу однозначно знайти відповідне значення функції. Отже, ця таблиця — ще один спосіб задання функції f.

Додатково можна навести приклад, який демонструє, що таблицею можуть бути задані функції, які не мають явної закономірності.

x	1	0	2	3	5
$f(x)$	2	-1	5	-1	-10

Оскільки таблиця містить вичерпний перелік точок, то необхідно звернути увагу, що даний спосіб зручно використовувати лиш в тих випадках, коли область визначення функції складається з кількох чисел.

Четвертим способом задання функції є ***графічний спосіб*** проте, для пояснення учням його використання необхідно ввести поняття графіка функції.

4.2. Графік функції

З 6 класу учням відоме поняття прямокутної системи координат, тому для підведення до поняття графіка функції, учням пропонують побудувати точки задані парами чисел, що задовольняють деяку функцію. Наприклад, розглянемо функцію $y = x^2 - 4x$, де $-1 \leq x \leq 4$ і складемо таблицю значень цієї функції при цілих значеннях аргументу:

x	-1	0	1	2	4
y	5	0	-3	-4	0

Розглянемо пари чисел, записаних у кожному стовпці цієї таблиці, як координати $(x;y)$ точок координатної площини. При цьому значення аргументу є абсцисою точки, а відповідне значення функції — її ординатою.

Ці точки зображено на рисунку 3.а).

Далі звертають увагу на те, що, надаючи аргументу інших значень (відмінних від цілих) з області визначення та знаходячи відповідні значення функції, можна позначити все більше й більше точок на координатній площині (рис. 3.б, 3.в) [22].

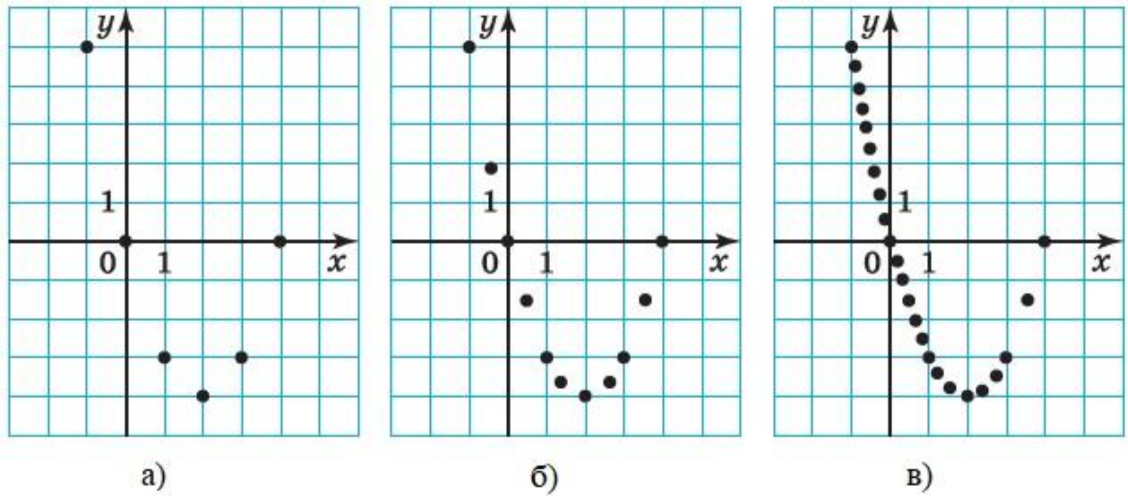


Рис. 3 Точки на координатній площині функції $y = x^2 - 4x$

Вказавши, що усі точки координатної площини, які можна позначити, діючи в такий спосіб, утворюють графік функції, формулюють строге означення.

Означення. *Графіком функції f називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.*

Очевидно, що реалізувати на практиці описаний метод побудови графіка функції $y = x^2 - 4x$ неможливо. Адже точок, які треба було б позначити, безліч. Проте, якщо позначити досить багато точок, а потім сполучити їх плавною лінією, то отримана крива (рис. 4) буде тим менше відрізнятися

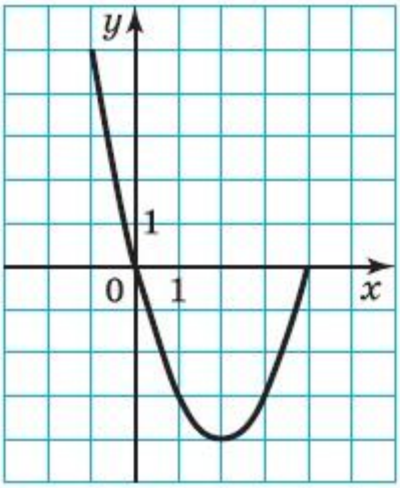


Рис. 4. Графік функції $y = x^2 - 4x$

від шуканого графіка, чим більше точок ми позначимо.

Варто запропонувати учням, в якості домашнього завдання, провести експеримент за допомогою програмних засобів навчання. Побудувати у такий спосіб набір точок, що задовольняють деяку функцію, а поряд з ним графік даної функції, що задана формулою. Занотувати результати своїх спостережень.

Необхідно наголосити на тому, що *коли якась фігура є графіком функції* f*, то виконуються дві умови*:

1) якщо x_0 *— деяке значення аргументу, а* $f(x_0)$ *— відповідне значення функції, то точка з координатами* $(x_0; f(x_0))$ *обов'язково належить графіку;*

2) якщо $(x_0; y_0)$ *— координати довільної точки графіка функції, то* x_0 *і* y_0 *— відповідні значення незалежної і залежної змінних функції* f*, тобто* $y_0 = f(x_0)$.

Потрібно звернути увагу, що графіком функції не обов'язково є лінія. На рисунку 5.а) зображено графік функції, заданої таблицею:

x	1	-2
y	3	0

Він складається з двох точок.

Розглянемо приклад побудови графіка функції, заданої описом.

Нехай область визначення даної функції — усі числа. Для кожного додатного аргументу значення функції дорівнює 1; для кожного від'ємного аргументу значення функції дорівнює -1; якщо аргумент дорівнює нулю, то значення функції дорівнює нулю. Графік цієї функції зображено на рисунку 5.б). Він складається з трьох частин: точки $O\ (0;\ 0)$ і двох променів, у кожного з яких «*виколото*» початок.

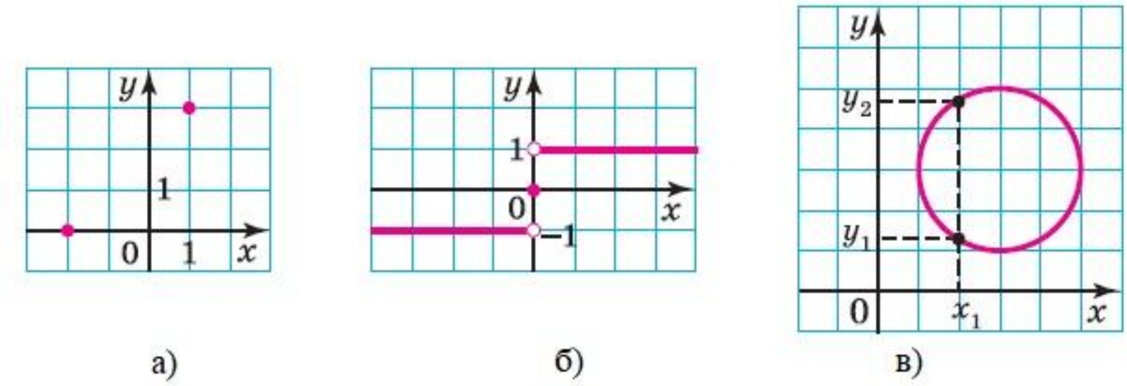


Рис. 5. Приклади графіків функцій заданих описом

Слід також вказати, що не будь-яка фігура, зображена на координатній площині, може слугувати графіком функції. Наприклад, коло не може бути графіком функції, оскільки за заданим значенням змінної x не завжди однозначно знаходиться значення змінної y (рис. 5.в).

Таким чином, фігура, зображена на координатній площині, може бути графіком функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має із цією фігурою не більше ніж одну спільну точку. Тоді можна говорити, що ця фігура задає деяку функцію і такий спосіб задання функції називають ***графічним***. Абсциси й ординати всіх точок цієї фігури утворюють відповідно область визначення та область значень функції.

4.3. Лінійна функція, її графік і властивості

Хоча лінійна функція вже була детально розглянута нами як приклад дослідження окремого виду функції (див. п.3.4. Методика вивчення окремих видів функцій). Розглянемо її з точки зору подачі відповідного матеріалу при вивченні функцій у 7 класі.

Зважаючи, що вивченню лінійної функції передує введення самого поняття функція, то розпочати належить з фронтального опитування з метою актуалізації попередніх знань. А при формулюванні означення та основних властивостей даного виду функцій, час від часу належить повертатись до нагадування основних понять з метою їх закріплення.

Відповідно до загальної методики вивчення лінійної функції починають з мотивації пізнавальної діяльності, тобто з наведення кількох прикладів лінійної залежності, опираючись на попередній досвід учнів.

Ще один зі способів пов'язати попередню тему з вивченням лінійної функції та мотивувати учнів до вивчення наступного матеріалу полягає у тому, що у якості домашнього завдання з теми «Функції» використовують функції вигляду $y = kx + b$. А тоді розпочинають вивчення нового матеріалу кількома прикладами з домашнього завдання, пропонуючи учням знайти взаємозв'язок між ними. І вже на основі виявлених закономірностей формулюють означення та властивості лінійної функції, доповнюючи їх у процесі дослідження.

Означення 4. *Функцію, яку можна задати формулою виду* $y = kx + b$*, де* k *і* b *— деякі числа,* x *— незалежна змінна, називають* ***лінійною****.*

Прикладами лінійних функцій є:

$$y = -2x + 1, \qquad y = 1 - x, \qquad y = 5x, \qquad y = 2.$$

Зауважимо, що *областю визначення лінійної функції є всі числа*. Побудуємо графік функції $y = -2x + 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1	-3	-5

Точки $A\,(-3;7)$, $B(-2;5)$, $C\,(-1;3)$, $D(0;1)$, $E(1;\,-1)$, $F\,(2;\,-3)$, $G\,(3;\,-5)$ належать шуканому графіку (рис.6.а). Усі ці точки лежать на

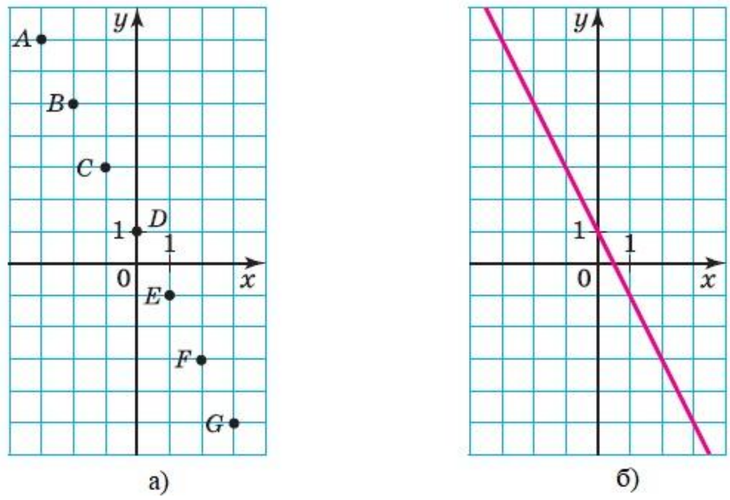


Рис. 6. Графік функції $y = -2x + 1$

одній прямій, яка є графіком функції $y = -2x + 1$ (рис.6.б).

У курсі геометрії 9 класу доводиться, що ***графіком лінійної функції є пряма***, таким способом поєднуємо пропедевтику та міжпредметні зв'язки на уроках алгебри.

Важливо звернути увагу, що ця пряма не може бути вертикальною, тобто прямою, перпендикулярною до осі абсцис. Можна запропонувати учням самостійно подумати чому в результаті чого вони мають прийти до наступних міркувань: вертикальна пряма не може слугувати графіком функції, оскільки для єдиного значення незалежної змінної x повертає більше одного значення(а саме, безліч) залежної змінної y.

Варто запропонувати учням простий і зрозумілий спосіб побудови графіка лінійної функції. Тут можна звернутись до геометричних властивостей прямої: *Оскільки пряму можна однозначно задати будь-якими двома її точками, то для побудови графіка лінійної функції достатньо вибрати два довільних значення аргументу й скласти таблицю значень функції, яка має лише два стовпці*.

Нагадаємо, що в курсі математики 6 класу учні вже ознайомилися з подібними залежностями між величинами. Тому у якості прикладу також можна використовувати залежність прямої пропорційності, звернувши увагу, що лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, також називають ***прямою пропорційністю***.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції, то варто зазначити, що її графік також є прямою.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Задайте формулою функцію, якщо значення функції:

а) протилежні відповідним значенням аргументу;

б) дорівнюють потроєним відповідним значенням аргументу;

в) на 4 більші за квадрати відповідних значень аргументу.

2. Функції задано формулами $y = x^2 - 8x$, і $y = 4 - 8x$. При яких значеннях аргументу ці функції набувають рівних значень?

3. Функцію задано формулою $f(x) = 3x + 5$. При якому значенні x значення функції дорівнює значенню аргументу?

4. Функцію f задано описом: значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, яке не більше за відповідне значення аргументу. Знайдіть $f(3{,}7)$, $f(0{,}64)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(-0{,}35)$, $f(-2{,}8)$. Примітка: для даної функції існує спеціальне позначення $y = [x]$ (читають: «*y дорівнює цілій частині числа x*»).

5. Графіком деякої функції є ламана MKE, де $M\ (-4;\ 1)$, $K\ (2;\ 4)$, $E\ (5;\ -2)$.

а) Побудуйте графік даної функції.

б) Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-2;\ 0;\ 3$.

в) Знайдіть значення x, при якому $y = -2;\ 0;\ 2$.

6. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

а) $y = 36 - 9x$; б) $y = x^2 + x$; в) $y = 49 - x^2$.

7. Функцію f задано описом: значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, яке не більше за відповідне значення аргументу. Побудуйте графік цієї функції.

8. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 5x - 6$ і $y = -2x + 1$ та знайдіть координати точки їхнього перетину.

9. Не виконуючи побудови графіка функції $y = -7x + 8$, знайдіть точку цього графіка, абсциса та ордината якої — протилежні числа.

10. При якому значенні b графіки функцій $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ і $y = 5x + b$ перетинаються в одній точці?

5. Функції в курсі алгебри 8 клас

При вивченні теми «*Раціональні вирази*» розглядається функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік. Вивчаючи тему «*Квадратні корені. Дійсні числа*» учні знайомляться з функцією $y = x^2$ і функцією $y = \sqrt{x}$, їх властивостями та графіками.

5.1. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості

У курсі математики 6 класу учні ознайомилися з функціональною залежністю, за якої зі ***збільшенням*** (***зменшенням***) однієї величини в кілька разів друга величина ***зменшується*** (***збільшується***) в таку саму кількість разів. Таку залежність називають ***оберненою пропорційністю*** [23].

На етапі мотивації навчальної діяльності доцільно розглянути приклади, що опираються на цей досвід учнів і запропонувати їм описати обернену пропорційність у вигляді функції.

Приклад 7. Нехай є 500 грн. Позначимо через x грн ціну за 1 кг товару, а через y кг — кількість цього товару, яку можна придбати за 500 грн.

Залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю:

збільшення ціни x у кілька разів приводить до зменшення кількості товару y у стільки ж разів і, навпаки, зменшення ціни спричиняє збільшення кількості купленого товару.

Цій функціональній залежності відповідає функція, задана формулою $y = \frac{500}{x}$.

Приклад 8. Розглянемо прямокутник, площа якого дорівнює 18 см^2, а сторони — x см і y см. Тоді $y = \frac{18}{x}$.

Збільшення (зменшення) знаменника x у кілька разів спричиняє зменшення (збільшення) величини y в стільки ж разів, тобто залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю.

За допомогою використання змінних x та y, які зазвичай використовуються для позначення змінних при заданні функцій, ми підводимо учнів до думки, що у розглянутих прикладах математичною моделлю реальних ситуацій з одного боку є обернена пропорційність, а з іншого – функція, яку можна задати формулою вигляду $y = \frac{k}{x}$. Таким чином, переходячи до формулювання означення функції.

Означення 5. *Функцію, яку можна задати формулою виду* $y = \frac{k}{x}$, *де* $k \neq 0$, *називають* ***оберненою пропорційністю***.

Оскільки у виразі $\frac{k}{x}$ допустимими значеннями змінної x є всі числа, крім 0, то областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ також є всі числа, крім 0.

Наступним етапом є побудова графіка функції та визначення її властивостей. Для прикладу обирають функцію з конкретним значенням коефіцієнта k.

Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x}$. У таблиці наведемо деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	-6	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	1	1,5	2	3	4	6
y	-1	$-1{,}5$	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	1,5	1

Позначають на координатній площині точки, координати $(x;y)$ яких наведено в таблиці (рис.7.а) та звертають увагу, що чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \frac{6}{x}$, ми зможемо позначити, тим менше отримана фігура (рис.7.б) відрізнятиметься від графіка функції $y = \frac{6}{x}$.

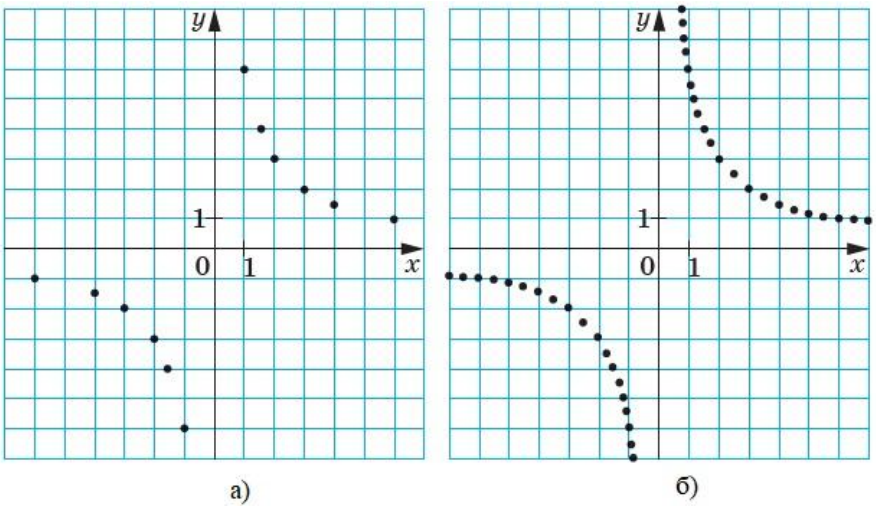


Рис. 7. Точки на координатній площині функції $y = \frac{6}{x}$

Особлива увага приділяється тому факту, що серед позначених точок не може бути точки, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки число 0 не належить області визначення даної функції. Тому графік функції $y = \frac{6}{x}$ не має спільних точок з віссю ординат.

Крім того, цей графік не має спільних точок і з віссю абсцис, тобто точок, ординати яких дорівнюють нулю. У якості підтвердження цього факту показують, що рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має розв'язків. Отже, число 0 не належить області значень даної функції.

Наступним кроком, як правило, є дослідження розміщення графіка функції на координатній площині. Якщо $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, тобто $y > 0$; якщо $x < 0$, то $y < 0$. Отже, точки графіка даної функції можуть розміщуватися тільки в I і III координатних чвертях.

Зауважують, що зі збільшенням модуля абсциси відстані від точок графіка функції $y = \frac{6}{x}$ до осі абсцис зменшуються та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюватимуть нулю. І аналогічно можна встановити, що зі зменшенням модуля абсциси відстані від точок графіка до осі ординат зменшуються та можуть стати як завгодно малими, проте ніколи не дорівнюватимуть нулю.

Тому якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = \frac{6}{x}$, то ми отримали б фігуру, зображену на рисунку 8.а). Можна запропонувати учням перевірити дане твердження за допомогою програмних засобів.

Фігуру, яка є графіком функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають ***гіперболою***. Гіпербола складається з двох частин — ***віток гіперболи***.

Зауважимо, коли є правильною рівність $y_0 = \frac{k}{x_0}$, то також виконується і рівність $-y_0 = \frac{k}{-x_0}$. Тоді варто зробити такий висновок: якщо точка $A(x_0;\ y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0;\ -y_0)$ також належить цій гіперболі. Можна сказати, що графік функції оберненої пропорційності є симетричним відносно початку координат. *З центральною симетрією учні детально ознайомляться у 9 класі на уроках геометрії*. У даному випадку вчитель поєднує елементи пропедевтики геометричних понять та міжпредметних зв'язків на уроках алгебри.

Важливо зазначити, що знак чисельника безпосередньо впливає на вигляд графіка оберненої пропорційності. Якщо $k > 0$, то вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, а якщо $k < 0$ — то в II і IV чвертях.

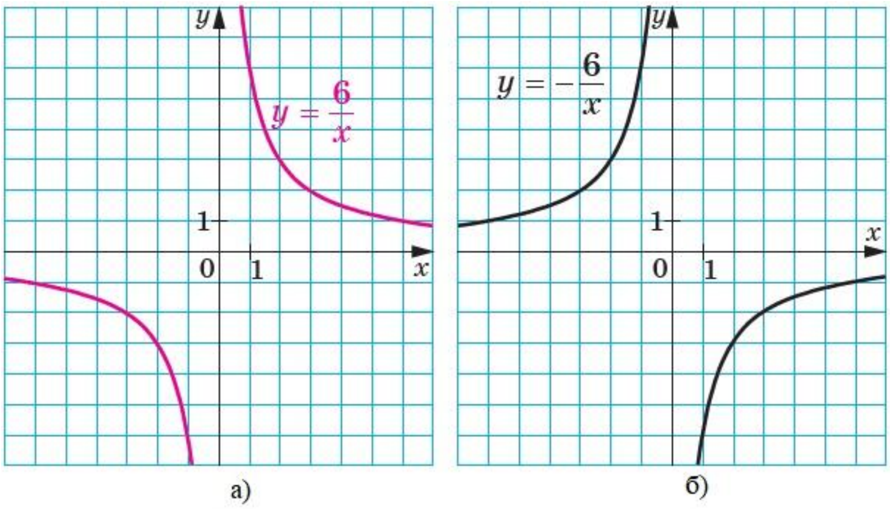


Рис. 8. Графіки функції $y = \frac{6}{x}$ та $y = -\frac{6}{x}$

На рисунку 8.б) зображено графік функції $y = -\frac{6}{x}$, вітки гіперболи якого розміщені в II і IV чвертях. Як правило, другий випадок функції учням пропонують спробувати побудувати і дослідити самостійно, у спосіб аналогічний представленому під час уроку.

Систематизувати властивості функції $y = \frac{k}{x}$, вивчені в цьому пункті, можна у вигляді таблиці.

Область визначення функції	Усі числа, крім 0
Область значень функції	Усі числа, крім 0
Графік функції	Гіпербола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	Не існує
Властивості графіка функції	Якщо точка $A(x_0;\ y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0;\ -y_0)$ також належить цій гіперболі.

На етапі використання функції та її властивостей необхідно показати, як графік функції $y = \frac{k}{x}$ можна використовувати під час розв'язування рівнянь. Під час розв'язування задач не лише закріплюються знання про обернено пропорційну функцію, але й вибудовуються зв'язки нових понять з уже відомим матеріалом.

Приклад 9. Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

Розглянемо функції $y = \frac{4}{x}$ і $y = x + 3$. Побудуємо в одній системі координат графіки цих функцій (рис. 9). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 1 і -4. У кожній із точок перетину графіків значення функції $y = \frac{4}{x}$ дорівнює значенню функції $y = x + 3$. Отже, при знайдених абсцисах значення виразів $\frac{4}{x}$ і $x + 3$ рівні, тобто числа 1 і -4 є коренями рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

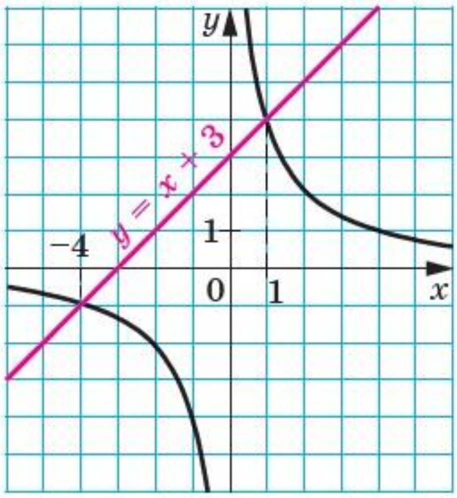


Рис. 9. Графіки функції $y = \frac{4}{x}$ **і** $y = x + 3$

Проведемо числову перевірку отриманих результатів. Справді, $\frac{4}{1} = 1 + 3$ і $\frac{4}{-4} = -4 + 3$.

Описаний метод розв'язування рівнянь називають ***графічним***. У 7 класі учні ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь і знають, що цей метод не завжди дає точні результати. Тому *перевірка знайдених коренів є обов'язковим етапом розв'язування рівняння*.

5.2. Функція $y = x^2$, її графік і властивості

Знайомство за даним видом функцій, як правило, проводять конкретно-індуктивним методом: використовується функція у вигляді формули, але формула у явному вигляді не повідомляється, а отримується як результат узагальнення індуктивного розв'язку завдання.

Позначимо через S площу квадрата зі стороною a. Тоді $S = a^2$.

Зі зміною сторони a квадрата відповідно змінюватиметься і його площа S.

Зрозуміло, що кожному значенню змінної a відповідає єдине значення змінної S. Отже, залежність змінної S від змінної a є *функціональною*. Тоді позначивши площу через змінну y, а сторону квадрата – змінною x, отримаємо формулу $y = x^2$, що задає *функцію*[23]. Також при формулюванні означення варто зауважити, що функція $y = x^2$ є елементарною формою ***квадратичної функції***.

Переходимо до поточкової побудови графіка функції та дослідження її властивостей. Розглянемо функцію $y = x^2$, *областю визначення якої є всі числа*. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо на координатній площині точки, координати яких $(x; y)$ візьмемо з таблиці (рис.10.а).

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, буде позначено, тим менше отримана фігура (рис.10.б) відрізнятиметься від графіка функції $y = x^2$. Як і раніше, радимо цей етап вивчення функції підкріплювати за допомогою програмних засобів навчання.

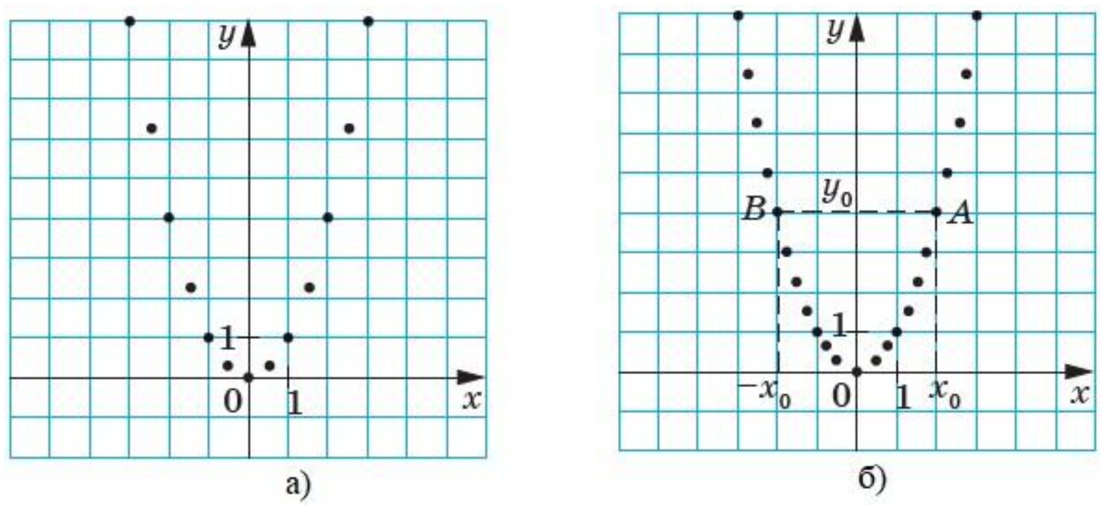


Рис. 10. Точки на координатній площині функції $y = x^2$

Досліджуючи властивості функції за отриманим графіком, звернімо увагу учнів на те, що графік даної функції проходить через початок координат, та запропонуємо пересвідчитись, що пара чисел $(0; 0)$ дійсно є розв'язком рівняння $y = x^2$.

З властивостей парного степеня можна аналітичним чином дослідити наступну важливу властивість функції $y = x^2$. Оскільки $y = x^2$ і $x^2 \geq 0$, то $y \geq 0$, тобто серед точок графіка цієї функції не може бути точок з від'ємними ординатами. Звідси, областю значень функції $y = x^2$ є всі невід'ємні числа.

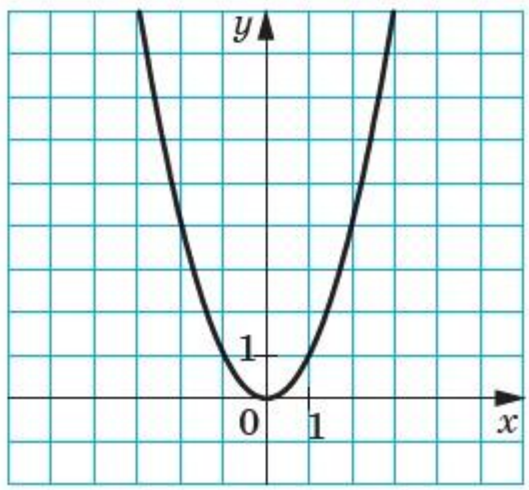


Рис. 11. Графіки функції $y = x^2$

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, то отримали б фігуру —

графік функції $y = x^2$, яку називають ***параболою*** (рис. 11).

Точка з координатами $(0; 0)$ ділить параболу на дві рівні частини, кожну з яких називають ***віткою параболи***, а саму точку — ***вершиною параболи***.

Варто акцентувати увагу учнів на тому, що парабола є симетричною відносно осі ординат, що містить вершину параболи. *З осьовою симетрією учні детально ознайомляться у 9 класі на уроках геометрії*. Тому цей момент є важливим з точки зору пропедевтики геометричних понять та міжпредметних зв'язків на уроках алгебри.

Зауважимо, що коли є правильною рівність $y_0 = x_0^2$, то є правильною й рівність $y_0 = (-x_0)^2$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо точка $A(x_0;\ y_0)$ належить параболі $y = x^2$, то точка $B(-x_0;\ y_0)$ також належить цій параболі.

Систематизувати та узагальнити розглянуті властивості функції $y = x^2$, можна у вигляді таблиці.

Область визначення функції	Усі числа
Область значень функції	Усі невід'ємні числа
Графік функції	Парабола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$
Властивості графіка функції	Якщо точка $A(x_0;\ y_0)$ належить параболі $y = x^2$, то точка $B(-x_0;\ y_0)$ також належить цій параболі.

5.3. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості

Для обґрунтування практичного значення функції $y = \sqrt{x}$, як правило обирають приклади, обернені до тих, що розглядались при вивченні функції $y = x^2$.

Розглянемо задачу про знаходження сторони квадрата за його площею. Якщо площа квадрата дорівнює x, то його сторону y можна знайти за формулою $y = \sqrt{x}$. Зміна площі x квадрата спричиняє зміну його сторони y.

Кожному значенню площі x відповідає єдине значення сторони квадрата y. Отже, залежність змінної y від змінної x є *функціональною*, а формула $y = \sqrt{x}$ задає *функцію* [23].

Вивчення функції $y = \sqrt{x}$ закріплює і узагальнює попереднє вивчення арифметичного квадратного кореня як математичного об'єкта, тому властивості його бути трансформовані у відповідні властивості функції.

З означення арифметичного кореня вираз $\sqrt{x}$ не може набувати від'ємних значень, тобто жодне від'ємне число не може належати області значень розглядуваної функції. Отже, *областю значень функції* $y = \sqrt{x}$ *є множина невід'ємних чисел*.

Оскільки область допустимих значень змінної виразу $\sqrt{x}$ включає ті і тільки ті значення змінної x, що не менші за нуль, то *областю визначення функції* $y = \sqrt{x}$ *є множина невід'ємних чисел*.

Зазначимо, що коли $x = 0$, то $y = 0$. Враховуючи область визначення та область значень функції $y = \sqrt{x}$, можна зробити висновок, що її графік розташований тільки в першій координатній чверті.

У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції $y = \sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо на координатній площині точки, координати $(x; y)$ яких наведено в таблиці (рис.12.а).

Чим більше позначити точок, координати яких задовольняють рівняння

$y = \sqrt{x}$, тим менше отримана фігура відрізнятиметься від графіка функції $y = \sqrt{x}$ (рис.12.б).

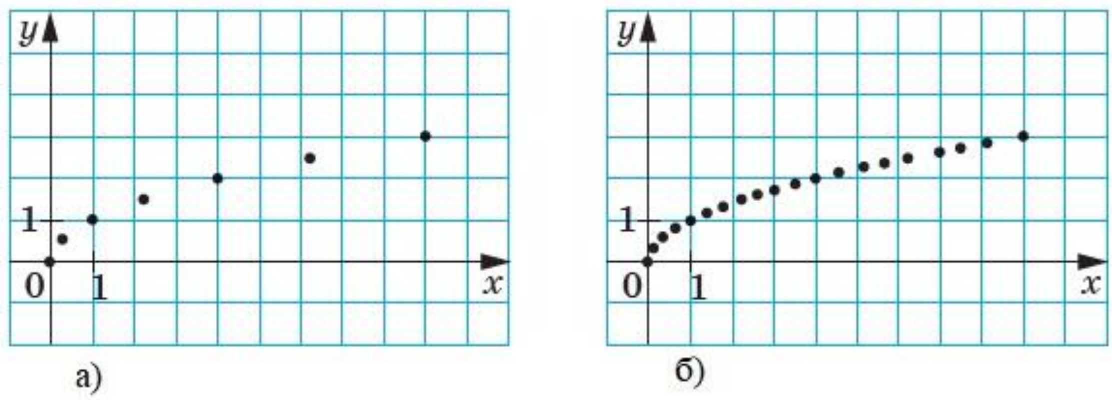


Рис. 12. Точки на координатній площині функції $y = \sqrt{x}$

Якби вдалося позначити на координатній площині всі такі точки, то отримали б фігуру, яку зображено на рисунку 13.а).

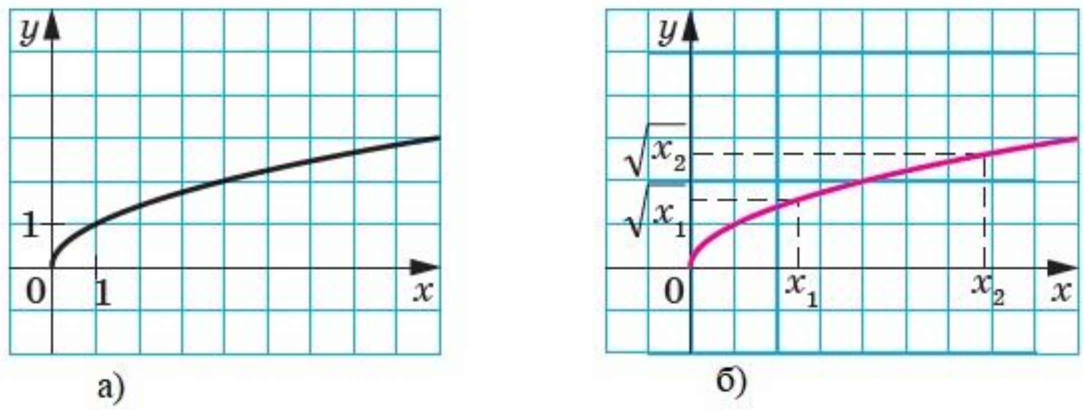


Рис. 13. Графіки функції $y = \sqrt{x}$

Оскільки для будь-якого невід'ємного числа b завжди знайдеться таке значення x, що $x = b^2$, $x \geq 0$, і з властивостей функції $y = x^2$ для жодних двох різних невід'ємних значень числа b відповідні значення змінної x не співпадатимуть, то можна зробити висновок, що функція $y = \sqrt{x}$ встановлює взаємно однозначну відповідність.

Для ілюстрації цього факту і з метою пропедевтики вивчення властивостей обернених функції доцільно запропонувати учням виконати наступний експеримент, можливо у якості проєкту або лабораторної роботи.

Крок 1. Для довільного обраного набору значень змінної x знайти значення функції $y = \sqrt{x}$. Результати обчислення оформити у вигляді таблиці.

Крок 2. На основі таблиці даних побудувати графік функції $y = \sqrt{x}$.

Крок 3. Взявши отримані на першому кроці значення функції y, у якості аргументу x, обчислити для них відповідні значення функції $y = x^2$. Результати обчислення оформити у вигляді таблиці.

Крок 4. На основі таблиці даних побудувати на окремій координатній площині побудувати графік квадратичної функції $y = x^2$.

Крок 5. Проаналізувати отримані результати. Сформулювати власні спостереження і висновки.

У старших класах доводиться, що графіком функції $y = \sqrt{x}$ є фігура, яка є віткою параболи $y = x^2$.

На рівні 8 класу властивість зростання функції $y = \sqrt{x}$ формулюють на основі графіка функції і проведених чисельних експериментів. Пізніше у 9 класі при вивченні властивостей зростання/спадання функцій, цей факт буде доведено аналітично.

Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу функції $y = \sqrt{x}$ такі, що $x_1 < x_2$.

Варіант 1.// Тоді розглянемо різницю $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$. Домножимо дану різницю на додатний вираз $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$, отримаємо:

$$\big(f(x_1) - f(x_2)\big)\big(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\big) = \big(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\big)\big(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\big) = x_1 - x_2.$$

Оскільки з означення нерівності права частина виразу $x_1 - x_2 < 0$, то маємо, що $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Отже, функція $y = \sqrt{x}$ зростає.

Варіант 2.//Тоді з властивості арифметичного квадратного кореня випливає, що $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Це означає, що більшому значенню аргументу функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення функції. Правильним також є обернене твердження: більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тобто коли $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 13.б).

Систематизувати та узагальнити розглянуті властивості функції $y = \sqrt{x}$, можна у таблиці.

Область визначення функції	Множина невід'ємних чисел
Область значень функції	Множина невід'ємних чисел
Графік функції	Вітка параболи
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$
Властивості графіка функції	Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайдіть значення k, при якому графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

а) $A\left(-5;\ 4\right)$; б) $B\left(\frac{1}{6};\ -2\right)$; в) $C\left(1{,}5;\ -8\right)$.

2. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$ та визначте координати точок їхнього перетину.

3. Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2, & \text{якщо } -2 \le x \le 2, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

4. Побудуйте графік функції:

$$y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}.$$

5. Побудуйте графіки функцій:

$$1)\ y = \frac{x^3 + x^2}{x + 1}; \qquad 2)\ y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}.$$

6. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 4x - 4$. Побудуйте графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

7. Функцію f задано в такий спосіб:

$$f = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Знайдіть $f\,(-3), f\,(-2), f(-1), f\,(1), f\,(3), f\,(0{,}5)$.

2) Побудуйте графік даної функції.

8. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3}{x}$.

9. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{x} = -x^2$.

10. Побудуйте графік функції $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

11. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x} = a - x$ залежно від значення параметра a.

12. Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

1) Знайдіть: $f(-2),\ f(0),\ f(1),\ f(4)$.

2) Побудуйте графік даної функції.

6. Функції в курсі алгебри 9 клас

У 9 класі вивчення функцій сконцентровано у темі: «Квадратична функція». Протягом цієї теми узагальнюються і доповнюються знання про функцію та її властивості, удосконалюються вміння будувати графіки функцій, зокрема, за допомогою геометричних перетворень та, на основі отриманих знань, формулюються властивості квадратичної функції та способи побудови її графіка. Вивчення її властивостей пов’язується, зокрема, з розв’язуванням квадратних нерівностей.

Необхідно відзначити, що функціональна лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається в тісному зв'язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій, як правило, встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується.

При навчанні побудові графіків функцій за допомогою геометричних перетворень також необхідно дотримуватись принципу подачі матеріалу від простого до складного.

Як правило, при вивченні нових алгебраїчних структур спочатку вивчаються властивості цих структур при виконанні дій першого ступеня(додавання і віднімання), згодом переходять до дій другого ступеня(множення і ділення), визначають пріоритетність дій, формулюють дистрибутивний закон, якщо він притаманний даним структурам, тощо. Таким чином, поступово переходячи до менш тривіальних властивостей структур.

Тема перетворення графіків функцій не є виключенням з цього правила. Зауважимо, що перетворення $y = f(x) + c$ та $y = f(x + c)$ призводять до паралельного переносу графіка функції $y = f(x)$ та не змінюють вигляду самої кривої, тому такі перетворення можна вважати елементарними, тоді як перетворення $y = kf(x)$ та $y = f(kx)$ призводять до деформації самої кривої, що зазвичай вимагає від учнів більшої уважності та значних зусиль для усвідомлення принципів такої трансформації.

Під час вивчення функцій чільне місце відводиться формуванню розуміння функції як певної математичної моделі реального процесу та умінь будувати й аналізувати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують.

6.1. Загальні властивості функцій

У 9 класі відбувається поступовий перехід від наочно-образних формулювань властивостей функції, сформованих на основі її графіка, до абстрактно-теоретичних.

Оскільки часто про властивості об’єкта можна робити висновки за його зображенням: фотографією, рентгенівським знімком, рисунком тощо, а «зображенням» функції може слугувати її графік, то за графіком функції можна визначити певні її властивості [27]. Тому вивчаючи властивості функції будемо переходити від графіка деякої функції до певної властивості цієї функції, від сформульованого означення властивості до її аналітичної ознаки.

Можна навести такий приклад, на рисунку 14 зображено графік деякої функції $y = f(x)$. Її *областю визначення* є проміжок $[-4;\ 7]$, а *областю значень* — проміжок $[-4;\ 4]$. На основі графіка функції $y = f(x)$ вивчимо деякі властивості цієї функції.

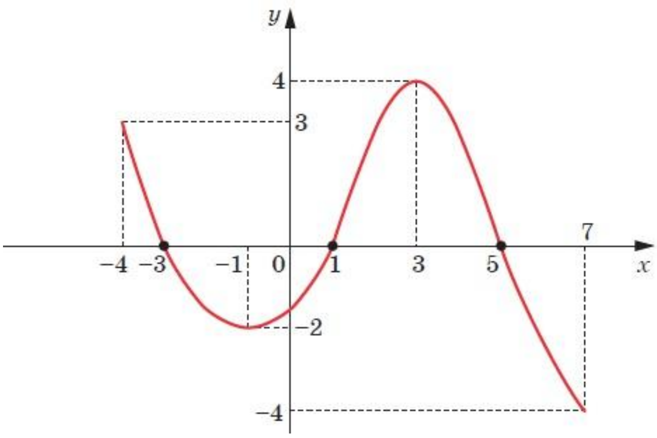


Рис. 14. Графік функції $y = f(x)$

Точки перетину графіка функції з віссю абсцис завжди мають нульову ординату, тобто можна зробити висновок, що при значеннях змінної, які відповідають абсцисам точок перетину, функція буде дорівнювати нулю.

На рисунку 14 видно, що графік функції перетинає вісь абсцис у трьох точках, отже при $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнюють нулю.

Означення 6. *Значення аргументу, при якому значення функції* *дорівнює нулю, називають **нулем функції**.*

Так, числа -3, 1, 5 є нулями даної функції.

Аналітична ознака нулів функції, випливає з означення: *значення змінної $x = x_0$ є нулем функції, якщо $f(x_0) = 0$.* Таким чином, розв'язки рівняння $f(x) = 0$ будуть нулями відповідної функції.

Наступна властивість функції пов'язана з порівнянням значення функції з нулем. Продовжимо вивчення попередньої функції. З рисунка 14 видно, що на проміжках $[-4;\ -3)$ і $(1;\ 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3;\ 1)$ і $(5;\ 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4;\ -3)$ і $(1;\ 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3;\ 1)$ і $(5;\ 7]$ — від'ємних.

Кожний із зазначених проміжків називають ***проміжком знакосталості функції*** f.

Означення 7. *Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знаку, називають **проміжком знакосталості** функції.*

Зазначимо, що, наприклад, проміжок $(0; 5)$ не є проміжком знакосталості даної функції.

При знайомстві учнів з проміжками знакосталості потрібно зауважити, що при дослідженні функції прийнято вказувати проміжки знакосталості найбільшої довжини. І хоча, наприклад на проміжку $(-2, -1)$ функція f має сталий знак(рис.14), і відповідно до означення даний інтервал також є проміжком знакосталості, проте при дослідженні функції записують проміжок $(-3; 1)$, який містить $(-2; -1)$.

Аналітично задача знаходження проміжків знакосталості зводиться до розв'язування нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$. Важливо наголосити, що відповідь при знаходженні проміжків знакосталості записують як перелік отриманих проміжків, тоді як розв'язок нерівності є об'єднанням всіх отриманих проміжків знакосталості.

Наприклад, проміжки знакосталості $f(x) > 0$: $[-4; -3)$, $(1; 5)$, тоді як розв'язок нерівності $f(x) > 0$ має вигляд $x \in [-4; -3) \cup (1; 5)$.

Наступною, як правило, вивчається властивість монотонності. З метою акцентувати увагу на всебічному дослідженні функції, продовжуємо розгляд даної властивості на попередньому прикладі(рис.14).

Звернімо увагу, що при «читанні» графіка зліва на право, можна помітити, що при збільшенні абсциси від -4 до -1 графік функції «йде вниз», тобто значення функції зменшуються. У таких випадках кажуть, що на проміжку $[-4; -1]$ ***функція спадає***. При збільшенні x від -1 до 3 графік функції «йде вгору», тобто значення функції збільшуються. У таких випадках кажуть, що на проміжку $[-1; 3]$ ***функція зростає***. Знову поряд з наочно-образним описом учням формулюються строгі означення цих понять.

Означення 8. *Функцію f називають* ***зростаючою на деякому проміжку****, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.*

Означення 9. *Функцію f називають* ***спадною на деякому проміжку****, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.*

Часто використовують і такі формулювання.

Означення 10. *Функцію називають* ***зростаючою на деякому проміжку****, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.*

Означення 11. *Функцію називають* ***спадною на деякому проміжку****, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.*

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають ***зростаючою***. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають ***спадною***.

Природно, що аналітичну перевірку функції на зростання/спадання проводять користуючись означеннями 8 і 9. Важливо звернути увагу, що порівняння величин часто зручніше проводити за означенням, тобто оцінюючи знак, якого набуває різниця даних величин.

При вивченні найпростіших елементарних функцій ($y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$), увага учнів уже привертались до цієї властивості в неявному вигляді. Тому, з метою закріплення зв'язку з попередньо вивченим матеріалом, у якості прикладу доцільно використати одну з них.

Приклад 10. Доведіть, що функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty;\ 0]$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty;\ 0]$, причому $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Тоді запишемо різницю значень функції в цих точках у якості добутку:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Перший множник, як уже було сказано раніше додатний. Оскільки $x_1 < x_2 \leq 0$, можна зробити висновок, що їх сума $x_1 + x_2 < 0$. Таким чином маємо:

$f(x_2) - f(x_1) < 0,$.

звідки $f(x_2) < f(x_1)$. Тоді за означенням функція $y = x^2$ спадає на $(-\infty; 0]$.

Зазначимо, що в подібних випадках говорять: проміжок $(-\infty;\ 0]$ називають ***проміжком спадання*** функції $y = x^2$. Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є ***проміжком зростання*** функції $y = x^2$.

У задачах на дослідження функції на зростання і спадання прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

Важливим аспектом, який необхідно відзначити є те, що в 9 класі в курсі алгебри з'являється багато задач на доведення. Відтак вже з цього моменту учителю необхідно багато уваги приділяти доказовій математиці на регулярній основі.

6.2. Як побудувати графік функції $\boldsymbol{y = f(x) + b}$ і $\boldsymbol{y = f(x + a)}$

Розпочинати знайомство учнів з геометричними перетвореннями графіків функцій належить з простого та зрозумілого учням прикладу, що покаже зв'язок даної теми з життям. Наприклад такого.

Можна запропонувати учням уявити, що вони грають у екшн-гру, де їхньому героєві потрібно під час бігу перестрибувати різні об'єкти такі, як прірви і валуни, та дати відповідь на кілька простих для них запитань.

- Що буде, якщо при перестрибуванні прірви стрибнути зарано?

  Відповідь: Можна недолетіти до її кінця.
- А якщо стрибнути запізно?

  Відповідь: Є ймовірність зірватись у прірву на самому її початку.
- По якій траєкторії відбуватиметься такий стрибок?

  Відповідь: По траєкторії схожій на параболу.
- Що буде, якщо при перестрибуванні великого валуна стрибнути зарано? Чому?

  Відповідь: Можна врізатись у нього недострибнувши, бо досягши пікової висоти герой почне падати вниз.
- Що потрібно зробити, щоб перестрибнути вдвічі більший валун?

  Відповідь: Зробити вдвічі більший стрибок *або* використати подвійний стрибок.

Схожий приклад створює в учнів потрібні образи, що допоможуть усвідомити головні принципи геометричних перетворень графіків функцій.

Метою наступного прикладу є наочна демонстрація правила, перед його строгим формулюванням. У 8 класі учні ознайомилися з функцією $y = x^2$ і дізналися, що її графіком є фігура, яку називають параболою. Покажемо як, використовуючи графік функції $y = x^2$, можна побудувати графік функції $y = x^2 + 2$ [25].

Необхідно скласти таблицю значень цих функцій при одних і тих самих значеннях аргументу.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,5	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

На основі даних таблиці потрібно запропонувати учням помітити закономірність, яку вона містить, а саме, що кожну точку графіка функції $y = x^2 + 2$ можна отримати з відповідної точки графіка функції $y = x^2$ шляхом збільшення ординати на 2 одиниці.

Тоді має місце таке співвідношення, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; y_0 + 2)$ графіка функції $y = x^2 + 2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = x^2 + 2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; y_1 - 2)$ графіка функції $y = x^2$(рис.15.а).

У такому випадку говорять, що графік $y = x^2 + 2$ отримано в наслідок ***паралельного перенесення*** графіка функції $y = x^2$ на 2 одиниці вгору. *З паралельним перенесенням учні детально ознайомляться на уроках геометрії*. У даному випадку учитель поєднує елементи пропедевтики геометричних понять та міжпредметних зв'язків на уроках алгебри.

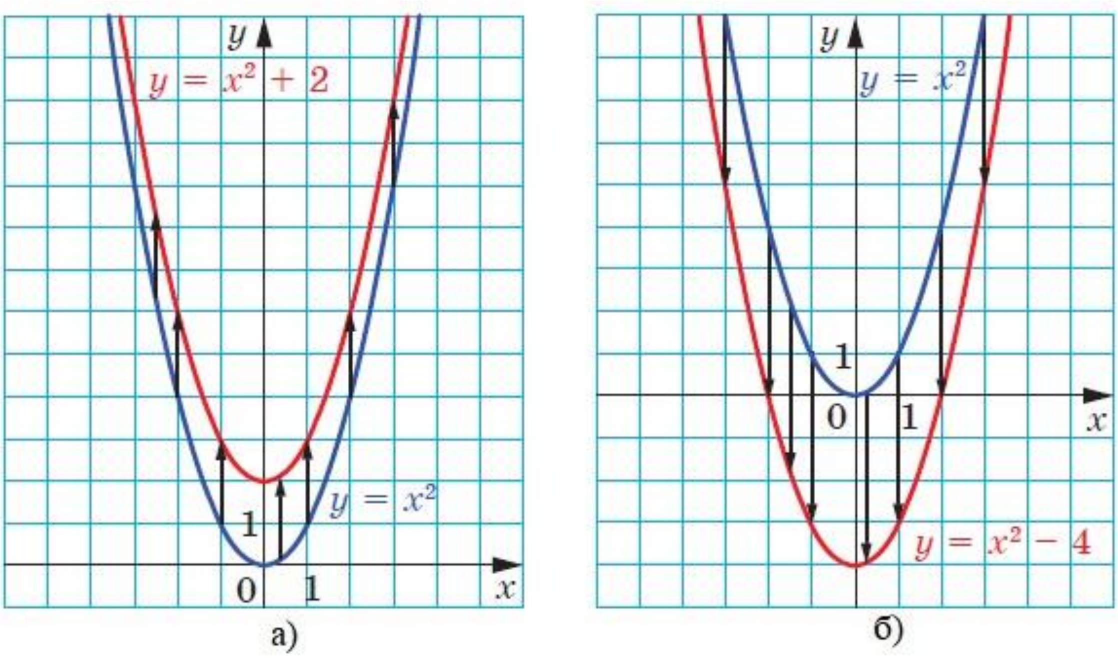


Рис. 15. Графіки функцій $y = x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 4$

Аналогічно можна показати, що паралельним перенесенням графіка функції $y = x^2$ на 4 одиниці вниз можна отримати графік функції $y = x^2 - 4$(рис. 15.б). Дане твердження можна запропонувати перевірити учням самостійно.

Ці приклади відображають як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x) + b$.

Графік функції $\boldsymbol{y = f(x) + b}$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ уздовж осі ординат на $\boldsymbol{b}$ одиниць угору, якщо $\boldsymbol{b > 0}$, і на $\boldsymbol{|b|}$ одиниць униз, якщо $\boldsymbol{b < 0}$.

Очевидно, що в результаті паралельного перенесення отримуємо фігуру, яка дорівнює фігурі, що є графіком початкової функції. Наприклад, кожний із графіків функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ також є параболою $y = x^2$. Тому графіками функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ також є параболами.

Важливо наголосити на алгоритмі покоординатної побудови такого графіка: ***У наслідок перетворення функції $\boldsymbol{f(x) \to f(x) + b}$ абсциса кожної точки залишається без змін, а ордината збільшується на $\boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{b > 0}$, і зменшується на $\boldsymbol{|b|}$, якщо $\boldsymbol{b < 0}$.***

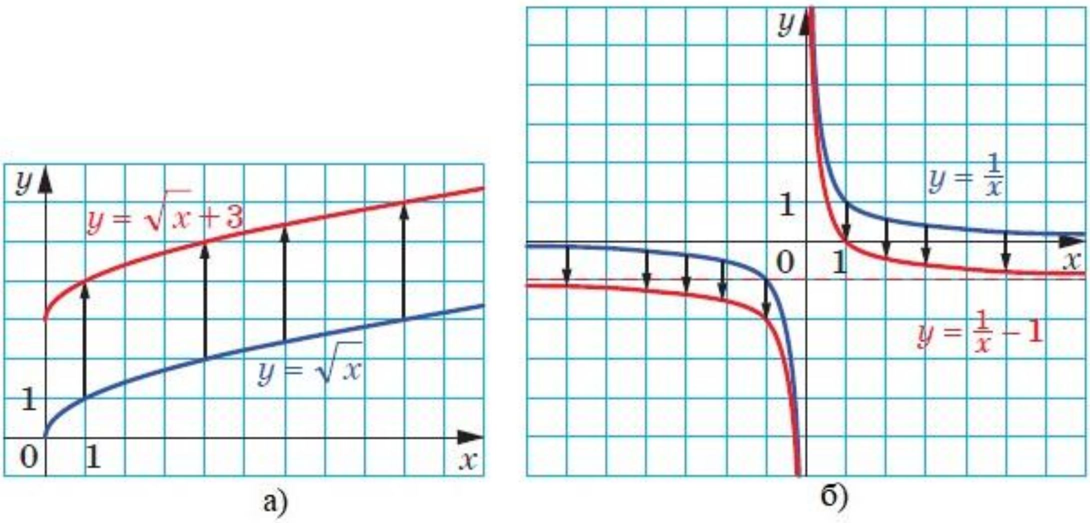


Рис. 16. Графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} - 1$

З метою мотивації учнів до подальшої навчальної діяльності варто зауважити на тому, що геометричні перетворення графіків функції універсальні, і для всіх видів функцій діють однаково. Таким чином, вони можуть бути застосовані для побудови графіків і тих функцій, які будуть вивчатися у профільній школі. На рисунках 16.а), 16.б) показано, як застосовується сформульований вище алгоритм покоординатної побудови для побудови графіків функцій $y = \sqrt{x} + 3$ і $y = \frac{1}{x} - 1$.

Перетворення $y = f(x) + b$ є додаванням сталої величини до значення функції. Як зміниться поведінка графіка функції, якщо додати сталу величину до аргументу даної функції, тобто при геометричному перетворенні графіка функції $y = f(x)$ на графіка функції $y = f(x + a)$?

Аналогічно попередньому випадку варто наочно проілюструвати таке перетворення, наприклад за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x + 2)^2$.

У такий спосіб помітимо, що всі точки графіка функції $y = (x + 2)^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою ординатою та з абсцисою, зменшеною на 2 (рис.17.а).

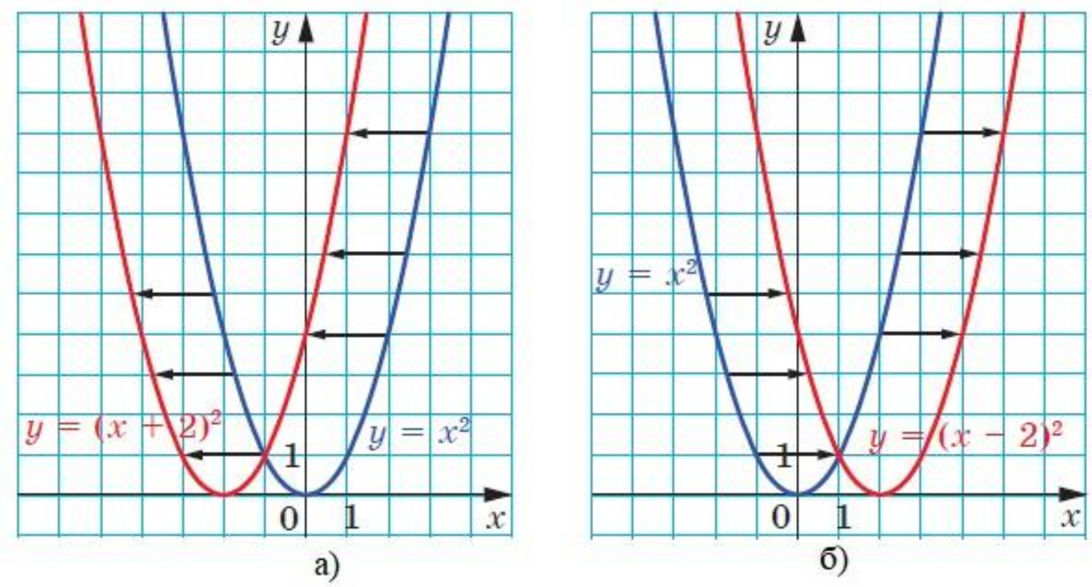


Рис. 17. Графіки функцій $y = (x + 2)^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = x^2$

Тоді можна довести, що якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = x^2$, тобто $x_0^2 = y_0$, то точка $(x_0 - 2; y_0)$ належить графіку функції $y = (x + 2)^2$. Для цього знайдемо значення цієї функції у точці з абсцисою $x_0 - 2$. Маємо: $\left((x_0 - 2) + 2\right)^2 = x_0^2 = y_0$. Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$

графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 - 2; y_0)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1 + 2; y_1)$ графіка функції $y = x^2$.

Говорять, що графік функції $y = (x + 2)^2$ отримано в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 2 одиниці вліво.

Аналогічно можна показати, що паралельним перенесенням графіка функції $y = x^2$ на 2 одиниці вправо можна отримати графік функції $y = (x - 2)^2$ (рис. 17.б).

Тоді легко встановити, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 + 2; y_0)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ і кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1 - 2; y_1)$ графіка функції $y = x^2$.

Важливо зауважити, що графіками функцій $y = (x + 2)^2$ і $y = (x - 2)^2$ є параболи, які співпадають з параболою $y = x^2$.

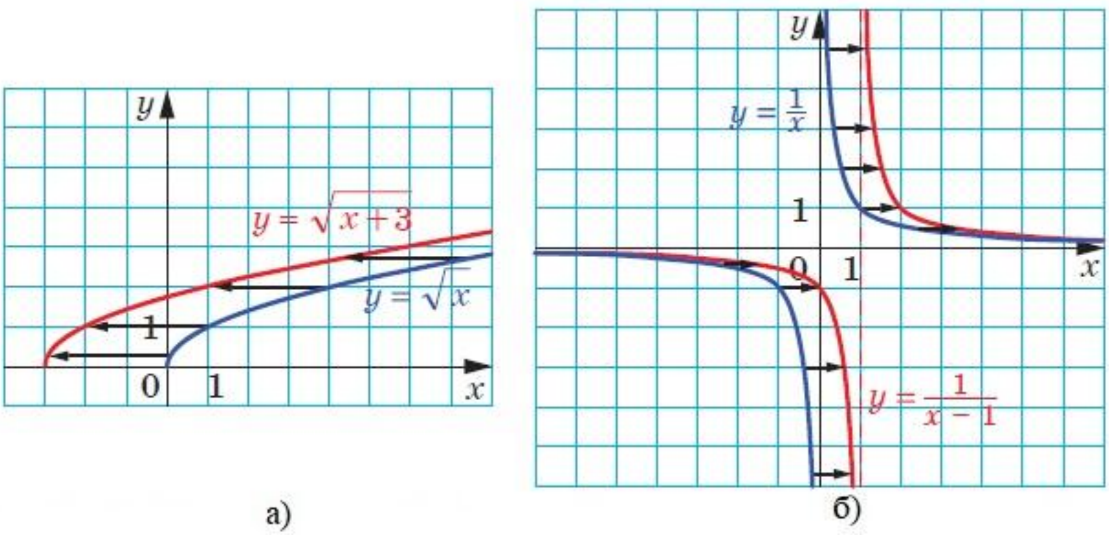


Рис. 18. Графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x + 3}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x-1}$

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x + a)$.

Графік функції $\boldsymbol{y = f(x + a)}$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ уздовж осі абсцис

на а одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $|a|$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

Важливо наголосити на алгоритмі покоординатної побудови такого графіка: ***У наслідок перетворення функції $f(x) \rightarrow f(x+a)$ ордината кожної точки залишається без змін, а абсциса зменшується на a, якщо $a > 0$, і збільшується на $|a|$, якщо $a < 0$.***

Варто звернути увагу учнів на те, що операції над функцією впливають на перетворення графіка відповідно, тобто при додаванні сталої величини графік паралельно переноситься у додатному напрямку, а при відніманні – у від’ємному напрямку осі ординат. Тоді як операції над аргументом функції впливають на перетворення протилежним чином: при додаванні сталої величини графік функції паралельно переноситься у від’ємному напрямку, а при відніманні – у додатному напрямку осі абсцис.

Для закріплення матеріалу і наголошення на універсальності перетворень графіків функцій наводять ще кілька прикладів застосування для різних елементарних функцій. Наприклад, на рисунках 18.а), 18.б) зображено графіки функцій $y = \sqrt{x+3}$ і $y = \frac{1}{x-1}$, що побудовано шляхом використання даного перетворення до графіків функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \frac{1}{x}$ відповідно.

6.3. Як побудувати графік функції $y = kf(x)$

Перед тим, як розпочати пояснення принципів дії геометричного перетворення $f(x) \rightarrow kf(x)$, варто розділити дане перетворення на два окремих випадки:

- $f(x) \rightarrow kf(x), k > 0$;
- $f(x) \rightarrow -f(x)$.

Послідовне застосування цих перетворень забезпечить виконання геометричного перетворення $f(x) \rightarrow kf(x)$, $k < 0$, проте учні краще засвоюють дане перетворення у вигляді комбінації двох елементарних перетворень.

Діючи у спосіб використаний у п.6.2 варто почати з наочної демонстрації геометричного перетворення перед його строгим формулюванням, за допомогою уже відомих учням функцій.

Наприклад показати, як за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = kx^2$, де $k \neq 0$.

Побудуємо, наприклад, графік функції $y = 2x^2$, для чого складемо таблицю значень функцій $y = x^2$ і $y = 2x^2$ при одних і тих самих значеннях аргументу:

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

На основі даних таблиці потрібно запропонувати учням помітити закономірність, яку вона містить, а саме, що кожну точку графіка функції $y = 2x^2$ можна отримати з відповідної точки графіка функції $y = x^2$ шляхом збільшення ординати у 2 рази(рис. 19.а).

Тоді звернути увагу учнів на те, що в результаті такого перетворення між графіками функцій встановлюється взаємно однозначна відповідність, кожній точці $(x_0;\ y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0;\ 2y_0)$ графіка функції $y = 2x^2$. А кожна точка $(x_1;\ y_1)$ графіка функції $y = 2x^2$ є відповідною єдиній точці $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ графіка функції $y = x^2$.

Аналогічним чином, використовуючи графік функції $y = x^2$ запропонувати учням побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ і порівняти отриманий результат.

Важливо поступово підвести учнів до висновку, що всі точки графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на $\frac{1}{2}$ (рис. 19.б).

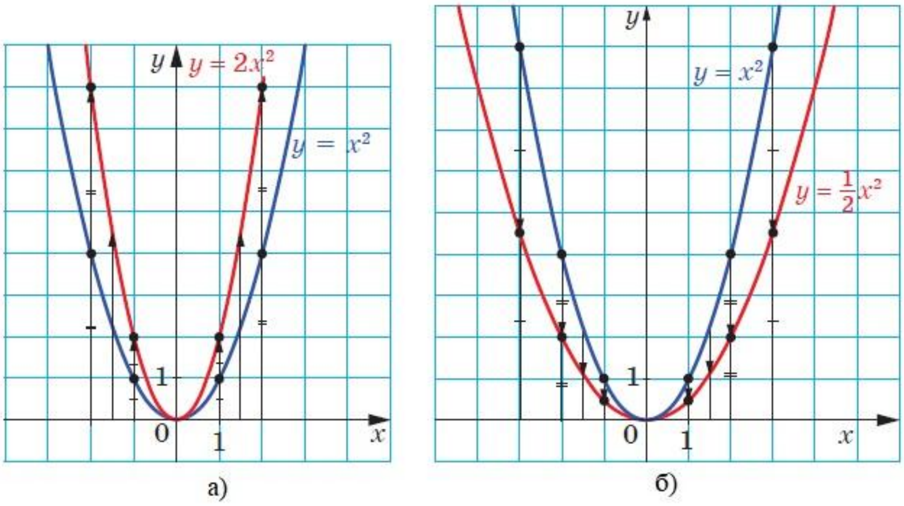


Рис. 19. Графіки функцій $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$

Розглянуті приклади відображають як, використовуючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$.

Після демонстрації на прикладі необхідно узагальнити правило покоординатної побудови такого графіка: ***У наслідок перетворення функції $f(x) \rightarrow kf(x)$, де $k > 0$, абсциса кожної точки залишається без змін, а ордината множиться на k.***

А також звернути увагу на властивості такого перетворення графіка функції загалом, зазначивши, що графік функції $y = kf(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті ***розтягнення в k разів від осі абсцис***, якщо $k > 1$, або в результаті ***стискання в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис***, якщо $0 < k < 1$.

Для закріплення матеріалу і наголошення на універсальності перетворень графіків функцій наводять ще кілька прикладів застосування для різних елементарних функцій. Наприклад, на рисунках 20.а), 20.б) зображено графіки функцій $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ і $y = \frac{3}{x}$, що побудовано в результаті такого перетворення графіків елементарних функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \frac{1}{x}$ відповідно.

Так, графік функції $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ отримано в результаті стискання графіка функції $y=\sqrt{x}$ у 3 рази до осі абсцис, а графік функції $y=\frac{3}{x}$ отримано в результаті розтягнення графіка функції $y=\frac{1}{x}$ у 3 рази від осі абсцис.

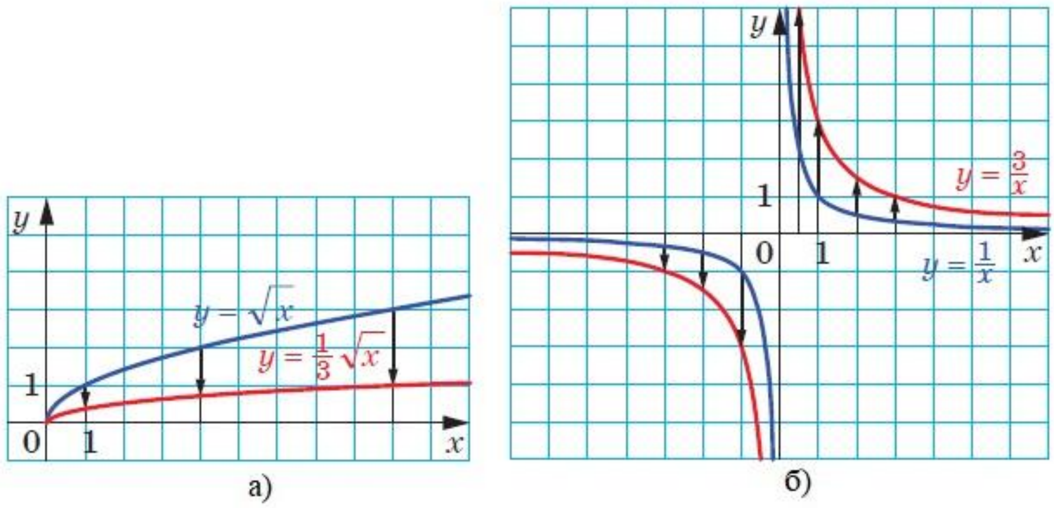


Рис. 20. Графіки функцій $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{1}{x}$

Розбір перетворення $f(x)\to -f(x)$ також варто почати з наочної демонстрації побудувавши графіків функцій $y=x^2$ і $y=-x^2$ і запропонувавши учням порівняти їх.

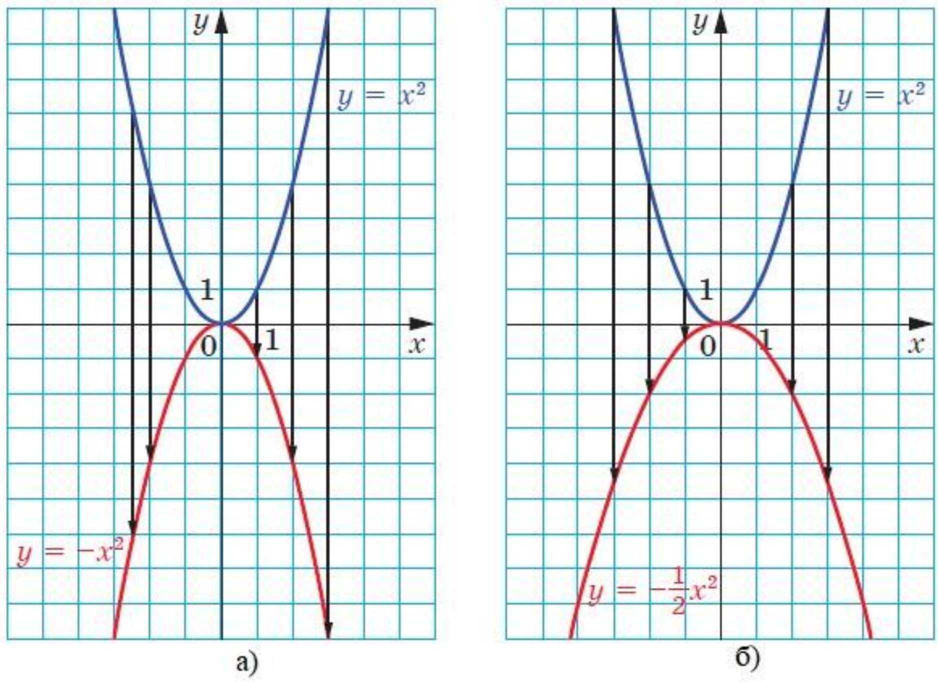


Рис. 21. Графіки функцій $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$

Коли учні помітять, що графіки є симетричними відносно осі Ox, потрібно узагальнити дане твердження до властивості перетворення $f(x) \to -f(x)$:

Щоб побудувати графік функції $\boldsymbol{y = -f(x)}$ необхідно відобразити графік функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ симетрично(дзеркально) відносно осі $\boldsymbol{Ox}$.

Після чого вивести поокординатне правило: Кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; -y_0)$ графіка функції $y = -x^2$. А кожна точка $(x_1;\ y_1)$ графіка функції $y = -x^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; -y_1)$ графіка функції $y = x^2$(рис. 21.а). Отже, ***У наслідок перетворення функції $\boldsymbol{f(x) \to -f(x)}$, абсциса кожної точки залишається без змін, а ордината множиться на $\boldsymbol{-1}$.***

Таким чином учні отримали інструменти для здійснення перетворення $f(x) \to kf(x)$, де $k < 0$, що є тотожним послідовному перетворенню графіків $f(x) \to -f(x)$ та $f(x) \to kf(x)$, де $k > 0$.

Доцільно проілюструвати таке перетворення. Наприклад, на рисунку 21.б показано, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = -\frac{1}{2}x^2$.

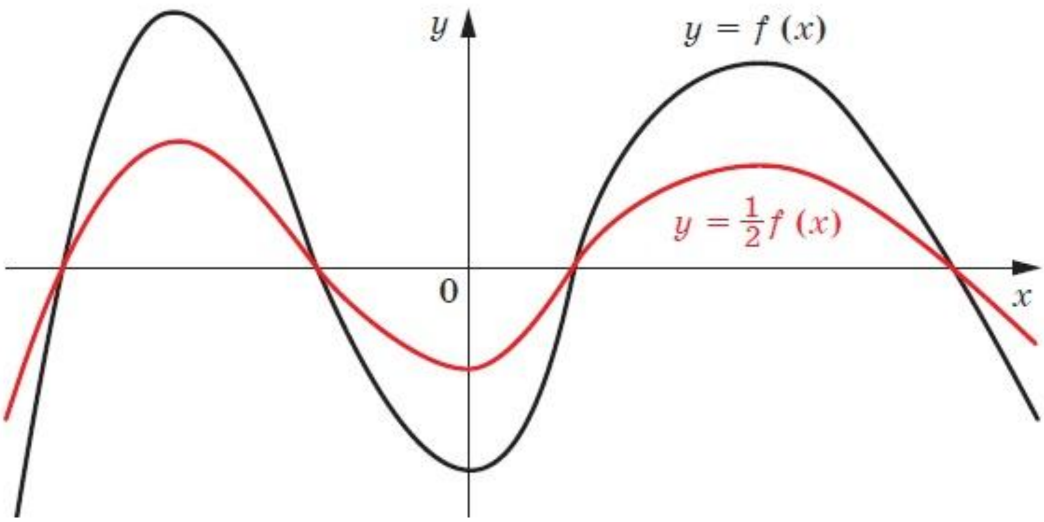


Рис. 22. Графіки функцій $y = f(x), y = \frac{1}{2}f(x)$

Доречно зауважити, *що при* $k \neq 0$ *функції* $y = f(x)$ *і* $y = kf(x)$ *графіки цих функцій перетинають вісь абсцис в одних і тих самих точках, тобто* ***нулі функції при перетворенні $\boldsymbol{f(x) \to kf(x)}$ залишаються незмінними***.

Цей факт проілюстровано на рисунку 22.

Крім того, потрібно вказати на те, що вид кривої при такому геометричному перетворенні, попри деформацію самої кривої, також не змінюється.

Так, на рисунку 21 зображено графіки функцій $y = ax^2$ при деяких значеннях a. Кожний із цих графіків, як і графік функції $y = x^2$, називають ***параболою***. Точка $(0;\ 0)$ є вершиною кожної із цих парабол.

Якщо $a > 0$, *то вітки параболи напрямлені вгору, якщо* $a < 0$, *то вітки параболи напрямлені вниз.*

Часто замість вислову «*Дано функцію* $y = ax^2$» уживають вислів «*Дано параболу* $y = ax^2$».

Як підготовчий етап до наступного вивчення квадратичної функції корисно систематизувати застосування геометричного перетворення графіка функції $y = x^2$ на графік функції $y = ax^2$, $a \neq 0$ у вигляді таблиці.

Властивість функції	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

Можна запропонувати учням алгоритм побудови графіка функції за допомогою геометричних перетворень графіків:

1. Звести вираз, що задає функцію до вигляду, у якому змінна включена лише один раз.

2. Визначити вид елементарної функції, геометричними перетвореннями якої можна отримати задану.
3. Визначити послідовність геометричних перетворень, які необхідно виконати для перетворення графіка елементарної функції на заданий. Як правило таку послідовність зображають у вигляді ланцюжка перетворень.
4. Виконати послідовно необхідні геометричні перетворення на координатній площині.

До відомих на момент вивчення теми елементарних функцій належать наступні: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$

Наведений приклад має добре ілюструвати даний алгоритм. Бажано використати декілька прикладів, один з яких розв'язати за участю учнів детально коментуючи кожен етап.

Зверніть увагу, що обравши для ілюстрації квадратичну функцію, ми формуємо в учнів досвід, який може бути використаний при вивчені наступної теми.

Приклад 11. Побудуйте графік функції $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Розв'язання.

1. *Звести вираз, що задає функцію до вигляду, у якому змінна включена лише один раз.*

$$y = -2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x+5)^2 + 3$$
$$= 3 - 2(x+5)^2.$$

2. *Визначити вид елементарної функції, геометричними перетвореннями якої можна отримати задану.*

Ми представили формулу, що задає дану функцію, у вигляді

$$y = kf(x+a) + b, \quad \text{де} \quad f(x) = x^2, \quad k = -2, \quad a = 5, \quad b = 3.$$

Отже, графік заданої функції модна отримати послідовним перетворення графіка квадратичної функції.

3. *Визначити послідовність геометричних перетворень, які необхідно виконати для перетворення графіка елементарної функції на заданий.*

Схема побудови має такий вигляд:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{дзеркально навколо } Ox} y = -x^2 \xrightarrow{\text{розтягнути від осі } Ox} y = -2x^2$$

$$y = -2x^2 \xrightarrow{\text{вліво на 5 одиниць}} y = -2(x+5)^2 \xrightarrow{\text{вгору на 3 од.}} y = -2(x+5)^2 + 3$$

4. *Виконати послідовно необхідні геометричні перетворення на координатній площині.*

Побудований графік є параболою, яка співпадає з параболою $y = -2x^2$ і вершиною якої є точка $(-5; 3)$ (рис. 23).

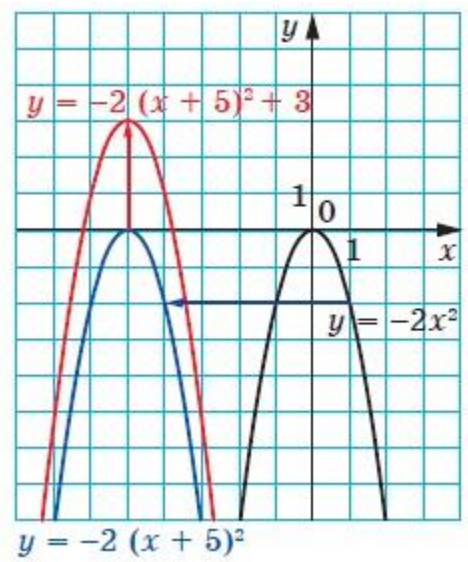


Рис. 23. Графік функції $y = -2(x+5)^2 + 3$

6.4. Квадратична функція, її графік і властивості

Квадратична функція для дев'ятикласників не є новою. Так, у 8 класі учні вивчали її елементарний вигляд, а саме функцію $y = x^2$. Потрібно зауважити, що вигляд $y = x^2$ є лише частковим випадком квадратичної функції.

З метою мотивації навчальної діяльності можна повернути учнів до раніше наведеної задачі про стрибки(п.6.2), зауваживши, що можна регулювати траєкторію стрибка змінюючи його швидкість, силу трибка та початок стрибка:

- збільшення початкової швидкості призведе до подовження стрибка;
- збільшення сили стрибка – до збільшення висоти стрибка;
- а зі зміною точки відриву відповідно зміниться і точка приземлення.

Так само і відома учням парабола може змінюватись.

Означення 12. *Функцію, яку можна задати формулою виду* $y = ax^2 + bx + c$, *де* x *— незалежна змінна,* a, b *і* c *— деякі числа, причому* $a \neq 0$, *називають* ***квадратичною***.

Отже, загальний вигляд квадратичної функції містить три параметри – a, b і c, що впливають на зовнішній вигляд її графіка.

Можна навести, ще кілька прикладів застосування квадратичної функції.

Функціональна залежність площі S круга від його радіуса r визначає квадратичну функцію $S(r) = \pi r^2$, яка є функцією виду $y = ax^2$.

На уроках фізики учні ознайомилися з формулою $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, яка задає залежність висоти h, на якій знаходиться тіло, що його кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 , від часу руху t . Ця формула задає квадратичну функцію $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Наступним етапом вивчення функції є побудова її графіка. Як правило, вчитель подає цей матеріал абстрактно-дедуктивним методом, проте корисно постійно звертатись до учнівського досвіду, пропонуючи учням проілюструвати або передбачити наступний крок розв'язку.

Покажемо, як можна отримати графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ з графіка функції $y = ax^2$.

Оскільки, ми вже будували графіки функцій виду $y = ax^2 + bx + c$, виділяючи квадрат двочлена (див. приклад 11), то використаємо то й самий прийом у загальному вигляді. Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

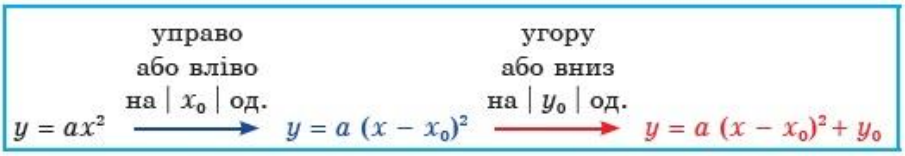
Увівши позначення

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

можна подати формулу $y = ax^2 + bx + c$ у вигляді

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Отже, схема побудови шуканого графіка є такою:



Важливо ще раз звернути увагу учнів, що при різних параметрах графіки функції будуть різними. Так, на рисунку 24.а) показано побудову для випадку, коли $a > 0$, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$, а на рисунку 24.б) показано побудову для випадку, коли $a < 0$, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$ [25].

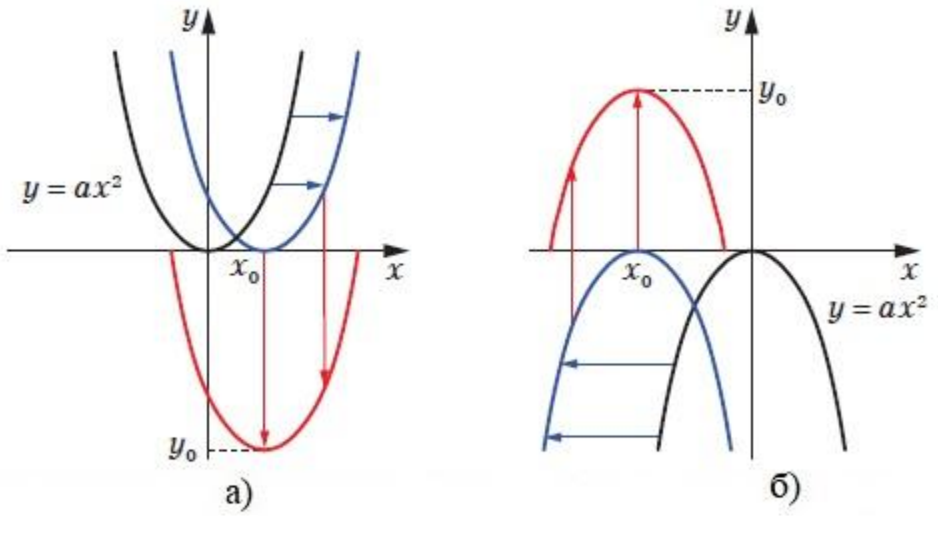


Рис. 24. Графік функції $y = ax^2$

Тепер можна зробити такий висновок: графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, яка співпадає з параболою $y = ax^2$, з вершиною в точці $(x_0; y_0)$, де

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені так само, як і вітки параболи $y = ax^2$: якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Потрібно зауважити, що загальне уявлення про графік квадратичної функції дають координати вершини параболи та напрям її віток. Це уявлення буде тим повнішим, чим більше точок, які належать графіку, ми знатимемо. Тому можна будувати графік квадратичної функції, не використовуючи паралельних перенесень, за такою схемою:

1) *знайти абсцису вершини параболи за формулою* $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
2) *знайти ординату вершини параболи за формулою*
$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a},$$
де D *— дискримінант квадратного тричлена* $ax^2 + bx + c$, *і позначити на координатній площині вершину параболи;*
3) *визначити напрям віток параболи* ($a > 0$ *або* $a < 0$)*;*
4) *знайти координати ще кількох точок, які належать шуканому графіку, зокрема координати точок перетину параболи з віссю абсцис (якщо дана функція має нулі), координати точки перетину параболи з віссю ординат* ($(0, c)$, *де* c *– коефіцієнт квадратного тричлена* $ax^2 + bx + c$)*; позначити ці точки на координатній площині;*
5) *провести через усі позначені точки плавну неперервну лінію.*

Такий підхід націлений на формування математичної та ключових компетентностей, сприяє встановленню та реалізації у навчанні математики міжпредметних і внутрішньопредметних зв’язків, а саме: змістово-інформаційних і організаційно-методичних, що посилює пізнавальний інтерес учнів до навчання і підвищує рівень їхньої загальної культури, створює умови для систематизації навчального матеріалу і формування наукового світогляду. Більше того, в даному випадку ілюструється використання алгоритмічного підходу до розв’язування алгебраїчних задач.

6.5. Про деякі перетворення графіків функцій

Для формування поглиблених знань про графіки функцій програма вивчення алгебри у 9 класі включає й інші перетворення графіків [25].

Як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Покажемо, що коли точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Справді, $y = f\big(-(-x_0)\big) = f(x_0) = y_0$.

Тоді покоординатне правило можна сформулювати у вигляді: ***Всі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з такою самою ординатою та протилежною абсцисою.*** Вчителю варто зазначити, що таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називається *осьовою симетрією*. Детальніше з цим перетворенням учні познайомляться на уроках геометрії.

Для ілюстрації можна запропонувати учням за допомогою графіка

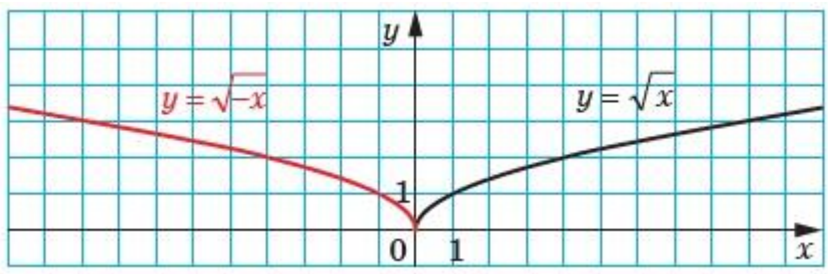


Рис. 25. Графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$

функції $y = \sqrt{x}$ побудувати графік функції $y = \sqrt{-x}$ як показано на рисунку 25.

Як побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Перед тим, як розпочати пояснення принципів дії геометричного перетворення $f(x) \to f(kx)$, варто, аналогічно до п.6.3, розділити дане перетворення на два окремих випадки:

- $f(x) \to f(-x)$;
- $f(x) \to f(kx), k > 0$.

Послідовне застосування цих перетворень забезпечить виконання геометричного перетворення $f(x) \to f(kx), k < 0$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ належить графіку функції $y = f(kx)$. Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо:

$$f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0.$$

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графіка функції $y = f(kx)$. Аналогічно кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$.

Узагальнимо правило покоординатної побудови такого графіка: ***У наслідок перетворення функції $\boldsymbol{f(x) \to f(kx)}$, де $\boldsymbol{k > 0}$, ордината кожної точки залишається без змін, а абсциса ділиться на $\boldsymbol{k}$.***

На рисунку 26 показано, як можна використати це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

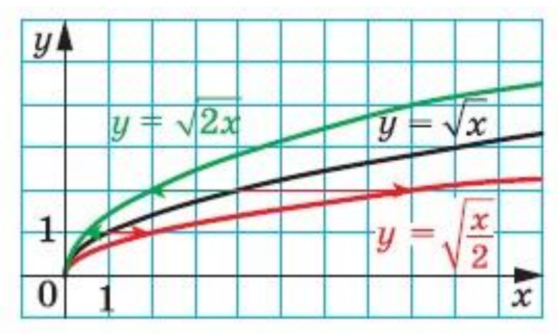


Рис. 26. Графіки функцій $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{2x}, y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

Говорять, що графік функції $y = f(kx)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті ***стискання в $\boldsymbol{k}$ разів до осі ординат***, якщо $k > 1$, або в результаті ***розтягнення в $\boldsymbol{\frac{1}{k}}$ рази від осі ординат***, якщо $0 < k < 1$.

Так, графік функції $y = \sqrt{2x}$ отримано в результаті стискання графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази до осі ординат, а графік функції $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ — у результаті розтягнення графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази від осі ординат.

Наступний приклад використаємо для детальної числової демонстрації.

Приклад 12. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{3x - 2}$ за допомогою перетворення графіка функції $y = \sqrt{x - 2}$.

Графік функції $y = \sqrt{x - 2}$ перетворимо на графік функції $y = \sqrt{3x - 2}$. Складемо таблицю значень цих функцій, проте дещо інакше, ніж ми робили до цього.

Важливо звернути увагу учнів на те, що оскільки $f(x) \to f(kx)$ – є перетворенням аргументу, тому відслідковувати потрібно саме відмінності аргументів при однакових значеннях функції. Нехай у наступній таблиці x_0 – аргумент функції $y = \sqrt{x - 2}$, а x_1 – аргумент функції $y = \sqrt{3x - 2}$.

x_0	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11	18	27	38	51	66
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2,25}{3}$	1	$\frac{4,25}{3}$	2	$\frac{8,25}{3}$	$\frac{11}{3}$	6	9	$\frac{38}{3}$	17	22
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8

На основі даних таблиці потрібно запропонувати учням помітити закономірність, яку вона містить, а саме, що кожну точку графіка функції $y = \sqrt{3x - 2}$ можна отримати з відповідної точки графіка функції $y = \sqrt{x - 2}$ шляхом зменшення абсциси у 3 рази. Тоді графічно перетворення графіків матимуть вигляд як на рисунку 27.

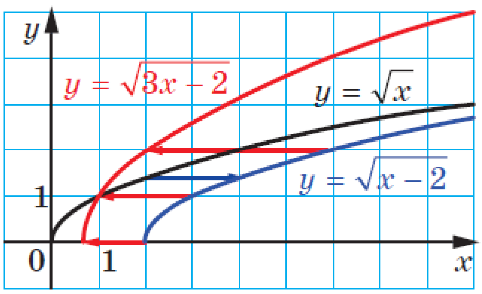


Рис. 27. Графіки функцій $y = \sqrt{x - 2}$, $y = \sqrt{3x - 2}$

Потрібно зауважити, що при перетворенні елементарних функцій, які відомі на етапі вивчення теми

$$y = x, \qquad y = \frac{1}{x}, \qquad y = x^2 \quad \text{та} \quad y = \sqrt{x},$$

дане перетворення без особливих зусиль може бути приведене до перетворення $f(x) \to kf(x)$, шляхом винесення коефіцієнта за межі функції. Проте не всі функції мають подібну властивість. У курсі математики в старших класах переважно вивчаються такі функції, для яких перетворення $f(x) \to f(kx)$, де $k > 0$, не може бути замінене комбінацією інших перетворень.

Таким чином, ***графік функції*** $\boldsymbol{y = f(-x)}$ ***можна отримати, відобразивши графік функції*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***симетрично відносно осі ординат***.

Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають ***симетрією відносно осі ординат***.

Наведемо приклад побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$. Після перетворення графіка функції $y = f(x)$ на графік $y = f(-x)$, наступне перетворення є виконується для випадку $k > 0$. Наприклад, на рисунку 28 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ можна побудувати графіки функцій $y = \sqrt{-3x}$, $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

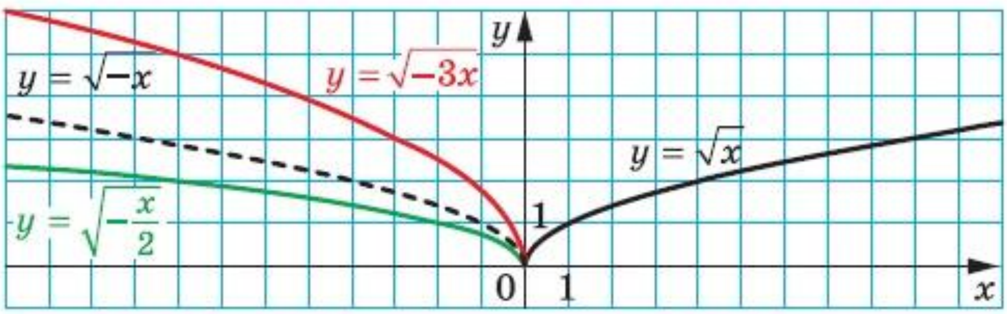
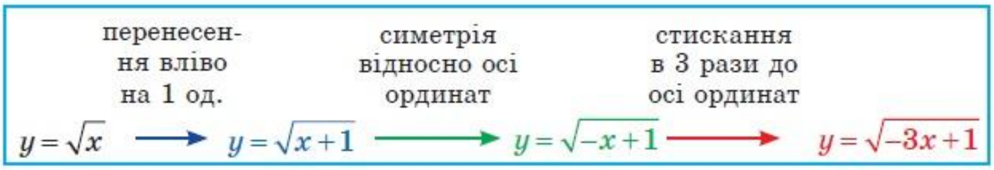


Рис. 28. Графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{-3x}$, $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$

Приклад 13. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{1 - 3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою:



На рисунку 29 показано побудову шуканого графіка.

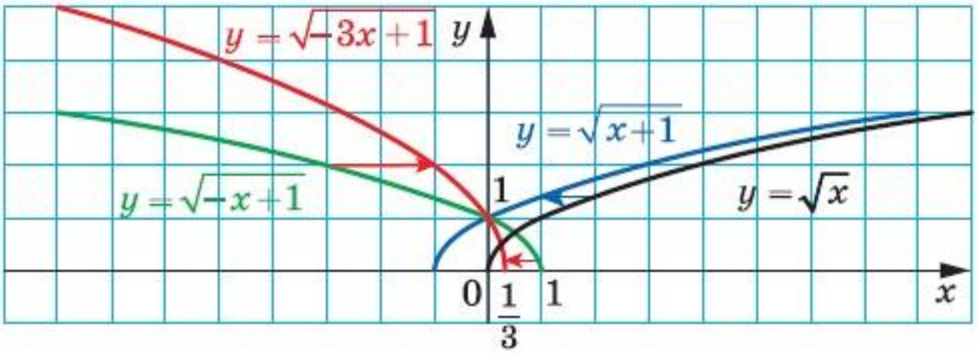
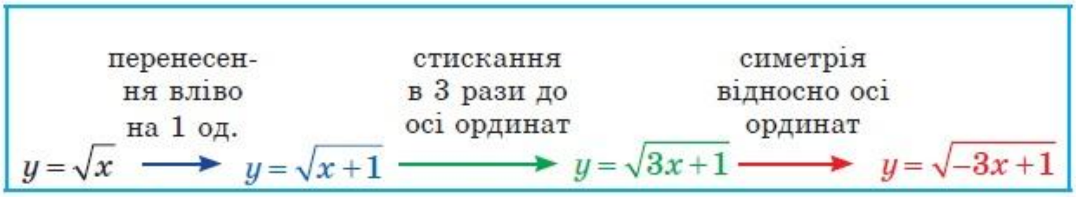


Рис. 29. Побудова графіка функції $y = \sqrt{1-3x}$

Зауважимо, що можливі й інші схеми розв’язування цієї задачі, наприклад така:



Цій схемі відповідає рисунок 30.

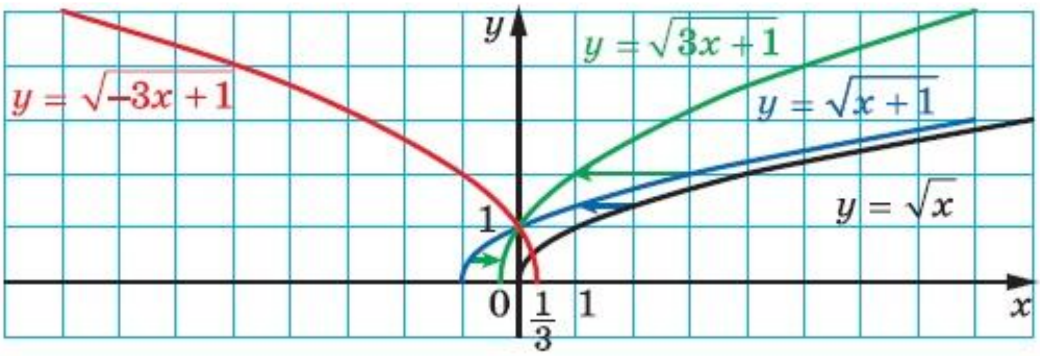


Рис. 30. Побудова графіка функції $y = \sqrt{1-3x}$

Як побудувати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Для знайомства з перетворенням модуля доцільно нагадати учням його означення:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$

Використавши означення модуля, запишемо:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad x \geq 0, \\ f(-x), & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$

Звідси робимо висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geq 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді разом з учнями розробляємо алгоритм побудови графіка функції $y = f(|x|)$. Побудову можна проводити за такою схемою:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, *усі точки якої мають невід'ємні абсциси;*

2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, *усі точки якої мають від'ємні абсциси.*

Об'єднання цих двох частин і складатиме графік функції $y = f(|x|)$.

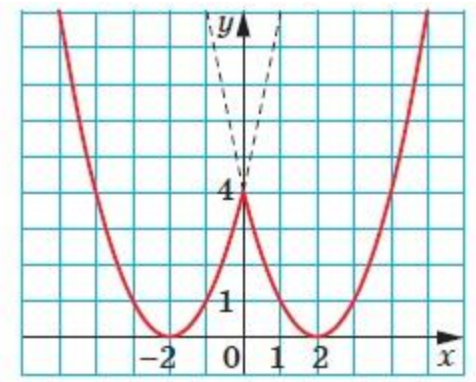


Рис. 31. Графік функції $y = (|x| - 2)^2$

Для кращого запам'ятовування також можна привести аналогію з віддзеркаленням. Як людина як стоїть перед дзеркалом бачить у ньому точні відображення предметів, що знаходяться навпроти дзеркала, але не може бачити ті предмети, що знаходяться за ним, так і функція віддзеркалюється з додатного напрямку осі Ox на від'ємний відносно осі ординат.

Отже, побудова такого графіка є нічим іншим як симетричне відображення правої півплощини відносно осі ординат.

Також важливо навести приклад такої побудови. На рисунку 31 показано як за допомогою графіка функції $y = (x - 2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x| - 2)^2$.

Як побудувати графік функції $y = |f(x)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geq 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді разом з учнями можемо сформулювати кроки побудови графіка функції $y = |f(x)|$. Наприклад, побудову можна проводити за такою схемою:

1) усі точки графіка функції $y = f(x)$ з невід'ємними ординатами залишити незмінними;

2) точки з від'ємними ординатами замінити на точки з тими самими абсцисами, але протилежними ординатами.

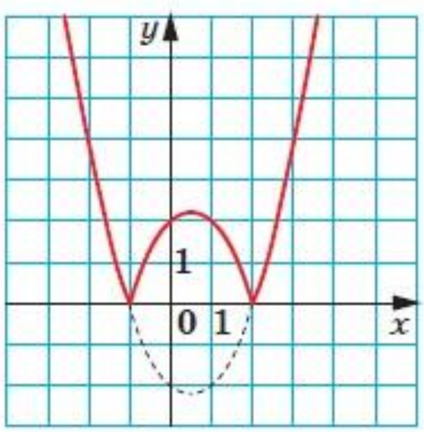


Рис. 32. Графік функції $y = |x^2 - x - 2|$

Для кращого запам'ятовування можна навести аналогію з м'ячиком, що стрибає по поверхні, або промінь світла, що відбивається від дзеркальної поверхні. Аналогічним чином і графік функції відбиватиметься від осі Ox

дзеркально у верхню півплощину.

Побудувавши за допомогою графіка функції $y = x^2 - x - 2$ графік функції $y = |x^2 - x - 2|$ проілюструємо використання даного перетворення, як показано на рисунку 32.

Поєднуючи викладені вище підходи до побудови, учні засвоюють методику, яка дозволяє будувати графіки функції високої складності.

Опрацьовуючи побудову графіків за допомогою послідовних багатократних геометричних перетворень графіків функцій, слід звернути увагу учнів на те, що вони відбуваються внаслідок перетворення функції ($f(x) + b$, $kf(x)$ та $|f(x)|$) або перетворення аргументу ($f(x + a)$, $f(kx)$ та $f(|x|)$), причому ці види перетворень є незалежними одне від одного. Проте при формуванні алгоритму побудови графіка бажано спочатку послідовно виконати усі перетворення одного виду, а згодом усі перетворення іншого. Розглянемо на прикладі.

Приклад 14. Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$.

Розв'язання. Використовуючи попередньо описаний принцип, побудову шуканого графіка можна провести за одним з двох способів.

Побудова перетворень аргументу з наступною побудовою перетворень функції.

$$y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{x + 1} \to y = \sqrt{|x| + 1} \to y = \sqrt{|x| + 1} - 2 \to y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$$

Отримана послідовність побудов зображена на рисунку 33.

Побудова перетворень функції з наступною побудовою перетворень аргументу.

$$y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{x} - 2 \to y = \left|\sqrt{x} - 2\right| \to y = \left|\sqrt{x + 1} - 2\right| \to y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$$

Можна запропонувати учням виконати перетворення другої схеми самостійно.

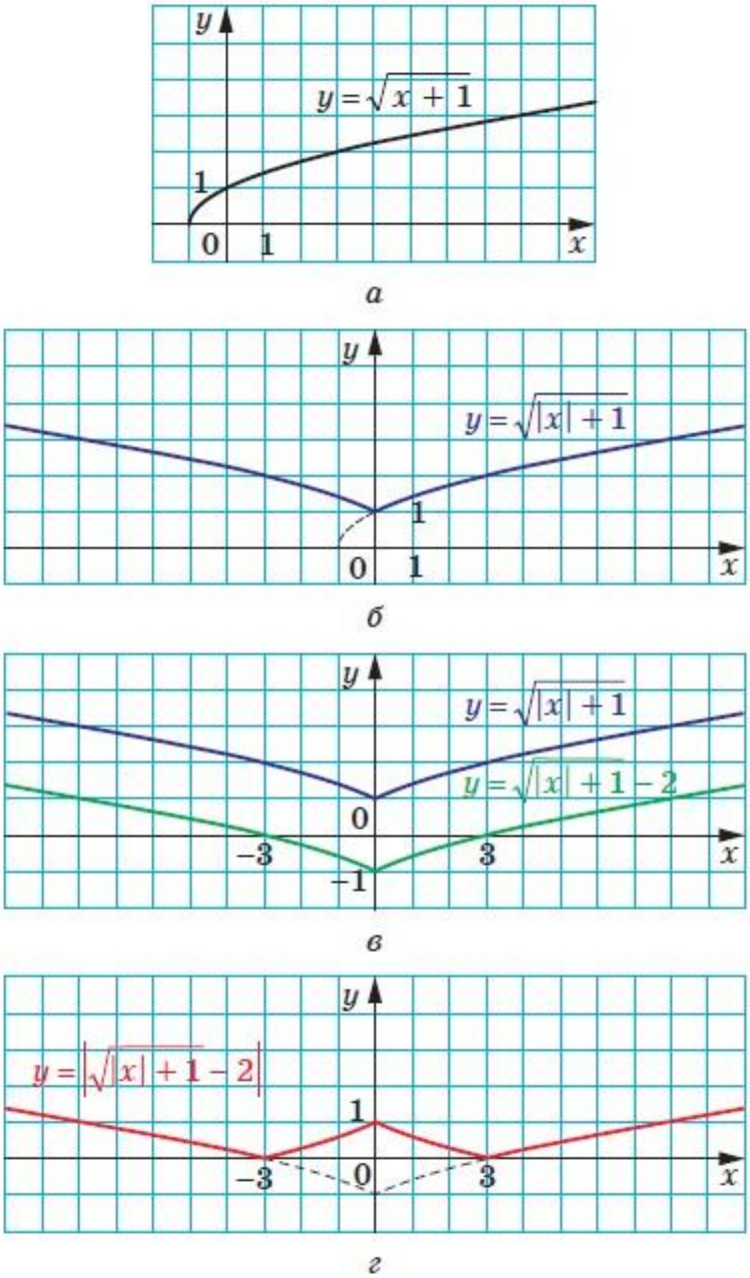


Рис. 33. Графік функції $y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайдіть нулі функції:

а) $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$; б) $g(x) = x^4 - 9x^2$; в) $h(x) = \frac{5-0{,}25x}{x+20}$.

2. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

а) $y = -5x + 15$; б) $y = -x^2 + 4x - 4$; в) $y = \frac{1}{4-2x}$.

3. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x \le -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x \le 1, \\ -x+2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання та спадання.

4. Доведіть, що функція:

а) $y = \frac{10}{5-x}$ зростає на проміжку $(5;\ +\infty)$;

б) $y = -x^2 + 6x - 5$ спадає на проміжку $(3;\ +\infty)$.

5. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

а) $y = 3\sqrt{x}$; б) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

6. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -4x, & \text{якщо } x < -1, \\ 4x^2, & \text{якщо } -1 \le x < 1, \\ 4x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

7. При яких значеннях a точка $A(a; 20)$ належить графіку функції $y = 5x^2$?

8. На рисунку 34 зображено графік функції $y = f(x)$.

Побудуйте графік функції:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = -\frac{1}{2}f(x)$.

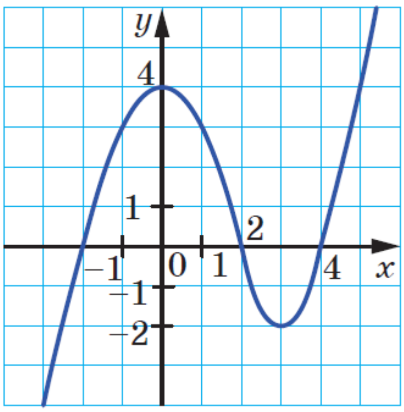


Рис. 34. Графік функції $y = f(x)$

9. Побудуйте графік функції $y = 2\sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

а) $y = 2\sqrt{x} - 1$; б) $y = 2\sqrt{x+1}$; в) $y = 2\sqrt{x-2} + 1$.

10. Побудуйте графік функції $y = -\frac{3}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

а) $y = -\frac{3}{x} + 1$; б) $y = -\frac{3}{x+2}$; в) $y = -\frac{3}{x-1} - 2$.

11. Розв'яжіть графічно рівняння $5 - x^2 = \sqrt{x} + 3$.

12. Побудуйте графік функції $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) $f(3); f(0)$;

б) значення x, при яких $f(x) = 7;\ f(x) = 6$;

в) найбільше і найменше значення функції;

г) область значень функції;

д) проміжок зростання та проміжок спадання функції;

е) при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень, а при яких – від'ємних.

13. Знайдіть координати точки параболи $y = x^2 - 5x + 5$, у якої:

а) абсциса й ордината рівні;

б) сума абсциси й ординати дорівнює 10.

14. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = 2x^2 - 10x + 23$ на проміжку:

а) $[-2; 1]$; б) $[0; 4]$.

15. При яких значеннях a і b нулями функції $y = ax^2 + bx - 6$ є числа -1 і 2?

16. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x^2 + 3|x| - 4|$; б) $y = \left|\frac{1}{|x|-2} + 2\right|$.

7. Функція та її властивості в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи

Для курсу «Алгебра і початки аналізу» однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна, тому у процесі навчання приділяється особлива увага дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі. Важливо при цьому демонструвати взаємозв'язок між основними поняттями курсу: функція, рівняння та нерівність. Зокрема, розв'язування рівняння $f(x) = 0$, нерівностей $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, як раніше зазначалось (див.п.6.1. Загальні властивості функцій), є окремими випадками задачі на дослідження функції (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості тощо).

Функціональна змістова лінія у профільній школі узагальнюється, систематизується, поглиблюється та розширюється. При вивченні функцій у цей період значна увага приділяється використанню теоретико-множинного підходу до визначення функцій. Основна частина навчального матеріалу присвячена вивченню нових класів функцій та розширенню інструментів дослідження функцій.

Змістова лінія пронизує курс і висвітлюється в темах «*Функції, многочлени, рівняння і нерівності*» (відсутня у програмі для класів з вивченням на поглибленому рівні з 8 класу)[28, 33], «*Степенева функція*», «*Тригонометричні функції*», «*Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування*» та «*Показникова та логарифмічна функції*». Основною ідеєю функціональної лінії має бути моделювання реальних процесів за допомогою функцій. Оскільки діяльність людини сучасного світу нерозривно пов'язана з графічною інформацією, її аналізом і прогнозуванням процесів на її основі, розвиток графічної культури учнів є одним з пріоритетних завдань математичної освіти.

Вивчення елементарних функцій в курсі алгебри і початків аналізу розпочинається з повторення загальнофункціональних понять, систематизації і узагальнення системи знань про функцію. У процесі розв'язування задач учні мають можливість повторити означення функції, підготуватися до сприйняття означення числової функції, пригадати основні способи задання функції, повторити властивості деяких основних видів функцій, відомих учням з курсу алгебри основної школи.

Схема подання окремого виду функції залишається загалом незмінною(див.п.3.4.Методика вивчення окремих видів функцій), проте вносяться деякі корективи відповідно до математичного досвіду учнів, їх вікових особливостей, психологічної готовності до роботи з абстрактними величинами і з врахуванням усвідомленого вибору учнем профільного навчання за природничим напрямом, невід'ємною частиною якого є профільне вивчення математики.

Для огляду властивостей певного виду функцій, з метою мотивації пізнавальної діяльності та формування міжпредметних зв'язків, корисно розглядати залежність, яка має місце в біології, хімії, екології, медицині, або закономірність деякого життєвого процесу, зрозумілу і просту для сприйняття. Вибрана залежність є функцією певного виду, а отже вивчення властивостей, які притаманні обраній залежності, дозволяє узагальнити їх до властивостей функцій даного виду. Іншою метою введення залежностей на основі реальних процесів та явищ є сприяння більшій залученості учнів у процес пізнання, оскільки самостійно помічати властивості функцій учневі переважно простіше на конкретній закономірності, ніж виходячи з абстрактного аналітичного виразу функції.

Вибрану залежність необхідно подати не лише аналітично, а й графічно з урахуванням наочності, дослідити властивості залежності. Після виявлення властивостей конкретної залежності і проведення їх аналізу вони узагальнюються для всього виду функцій.

7.1. Способи задання та основні властивості функції

З поняттям функції та з деякими її властивостями учні ознайомились у курсі алгебри 7–9 класів. Оскільки на цьому етапі вивчення функцій важливо звернути особливу увагу на поняття області визначення та області значення з позиції теорії множин, то означення функції подається в новій редакції [25].

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.

Іншими словами: ***функція — це правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y***.

Якщо функція f задає відповідність незалежної змінної $x \in X$ залежній змінній $y \in Y$, то кажуть, що змінна y ***функціонально залежить*** від змінної x. У такому випадку записують: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають ***аргументом функції***.

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають ***областю визначення функції*** та позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, тобто множину Y, називають ***областю значень функції*** та позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Як уже зазначалось раніше(див.п.4.1.Способи задання функції), функцію можна задати одним із таких способів:

- *описово;*
- *за допомогою формули;*
- *за допомогою таблиці;*
- *графічно.*

Не зайвим буде повторно наголосити на тому, що коли при заданні функції формулою не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є множина всіх значень аргументу, при яких формула має зміст.

Наприклад, якщо функцію задано формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$, тобто проміжок $(3;\ +\infty)$.

У курсі алгебри 9 класу при дослідженні функції учні навчились розпізнавати такі властивості функцій, як *нулі функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання і спадання*.

Наприклад, для функції $y = x^2 + 2x$, маємо:

- нулі — числа -2 і 0;
- проміжки знакосталості — функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$ і $(0; +\infty)$, а від'ємних значень — на проміжку $(-2;\ 0)$;
- функція спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[-1; +\infty)$.

Наведений вище перелік аж ніяк не вичерпує тих властивостей, які доцільно досліджувати під час вивчення функції. Тому на профільному рівні даний перелік властивостей функції доповнюється. Розглянемо нові поняття, які допомагають повніше охарактеризувати функцію.

Означення 13. *Число $f(x_0)$ називають* ***найбільшим значенням функції f на множині M*** $\subset D(f)$, *якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.*

Позначають:

$$\max_M f(x) = f(x_0).$$

Означення 14. *Число $f(x_0)$ називають* ***найменшим значенням функції f на множині M*** $\subset D(f)$, *якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$, виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.*

Позначають:

$$\min_M f(x) = f(x_0).$$

Надалі необхідно навести кілька прикладів, що ілюструють дані поняття на основі попереднього математичного досвіду учнів та акцентують увагу учнів на особливих випадках.

Наприклад, для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$. Оскільки функція зростаюча, то своїх найбільшого і найменшого значення вона набуває на кінцях відрізка:

$$\min_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0, \qquad \max_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2.$$

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є одночасно *і найбільшим, і найменшим значеннями функції* f на множині M.

Тут можна підкреслити, якщо б в означеннях найбільшого і найменшого значення функції нестрогі нерівності заміти строгими, то вважалось би, що така функція не досягає ані найбільшого, ані найменшого значення. Таке зауваження сприятиме кращому запам’ятовуванню означень і стане орієнтиром для самоперевірки учнів під час розв’язування завдань.

Не будь-яка функція на заданій множині M має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо $\max x^2 = 0$. Найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ця функція не матиме.

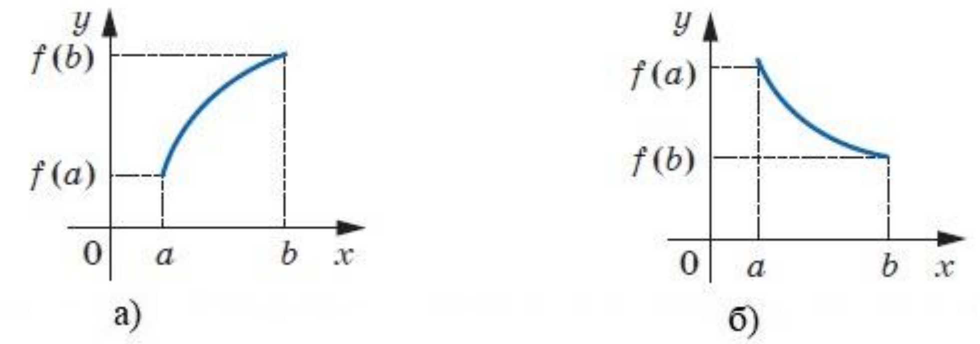


Рис. 35. Вигляд графіків функції $y = f(x)$

Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися такими очевидними фактами:

- *якщо функція* f *зростає на проміжку* $[a; b]$ (рисунок 35.а), *то*

$$\min_{[a;b]} f(x) = f(a), \qquad \max_{[a;b]} f(x) = f(b);$$

- *якщо функція* f *спадає на проміжку* $[a; b]$ (рисунок 35.б), *то*

$$\min_{[a;b]} f(x) = f(b), \qquad \max_{[a;b]} f(x) = f(a)$$

Наступна властивість, що вивчається на рівні профільної освіти – це парність функції.

Означення 15. *Функцію f називають **парною**, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність* $f(-x) = f(x)$.

Означення 16. *Функцію f називають **непарною**, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність* $f\left(-x\right) = -f(x)$.

Наприклад, функція $f(x) = x^2$ — парна, а функція $g(x) = x^3$ — непарна. Справді, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ і $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною.

Слід зауважити, що окрім того, що парність і непарність є сумісними, як показано в попередньому прикладі, ці властивості сповна не охоплюють всі функції. Якщо для деякою функції не виконуються ані ознака парності, ані ознака непарності, то про таку функцію говорять, що вона ***ні парна, ні непарна.***

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку область визначення функції називають ***симетричною відносно початку координат***.

З наведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути ані парною, ані непарною.

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{x-2}{x^2-2x}$ є множина $\mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$, яка не є симетричною відносно початку координат. Таким чином, не зважаючи на те, що значення цієї функції при всіх допустимих значеннях аргументу співпадає з відповідними значеннями непарної функції $y = \frac{1}{x}$, дана функція не є ні парною, ні непарною.

Дана властивість часто суттєво пришвидшує процес дослідження функції на парність.

Важливо також зауважити деякі властивості графіків парних та непарних функцій.

Теорема 1. *Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції*.

Теорема 2. *Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції*.

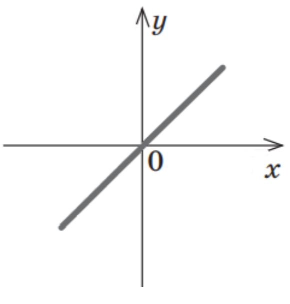
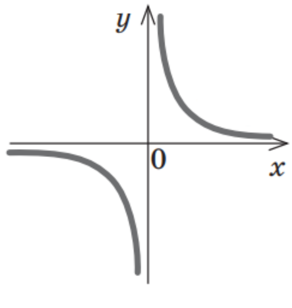
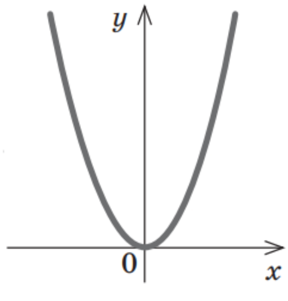
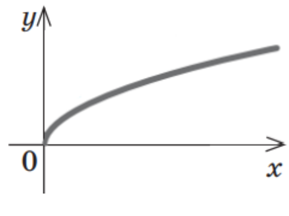
Ці важливі властивості можна запропонувати довести учням самостійно.

7.2. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

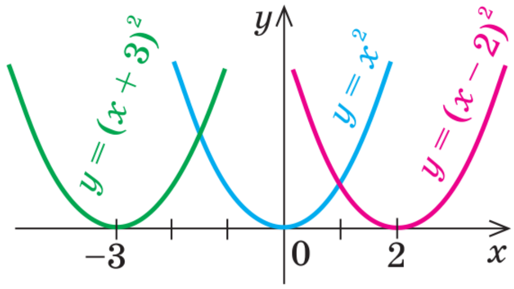
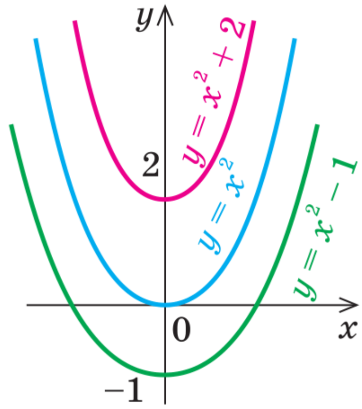
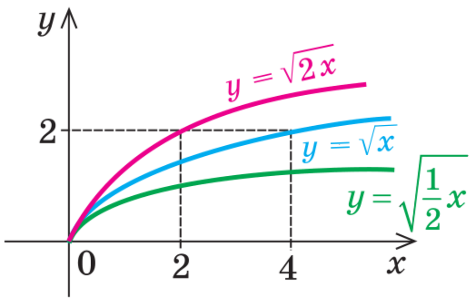
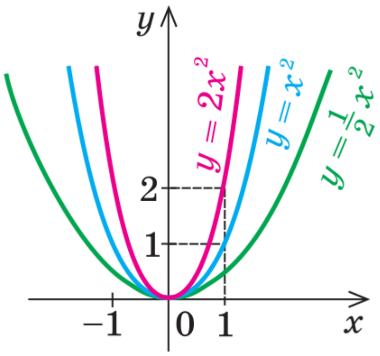
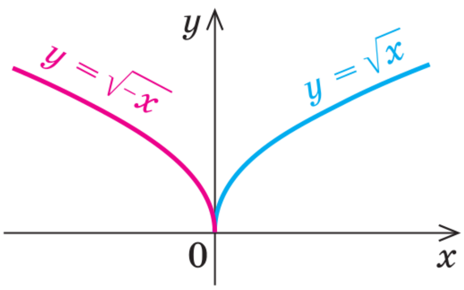
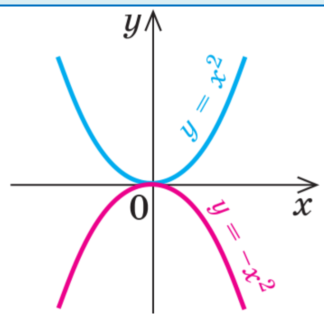
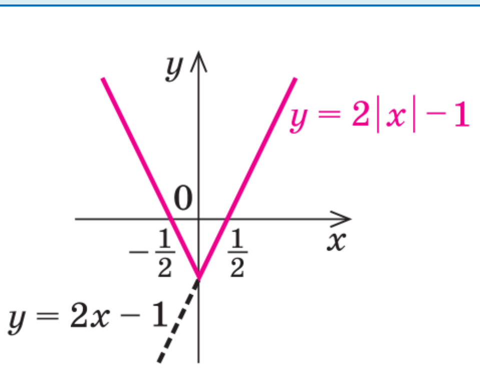
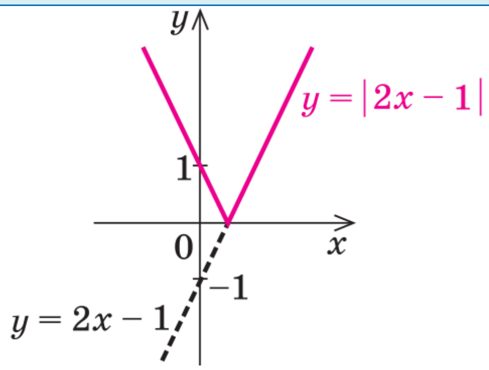
У 9 класі учні навчилися за допомогою графіка функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$.

Продовжуючи вивчати дану тематику у 10 класі варто розпочати з того, що показати, як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$, а згодом ввести й інші перетворення $f(-x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$[27]. Докладніше ці перетворення ми розглянули у п.6.5.

Тут узагальнимо у вигляді таблиць.

Елементарні функції відомі на момент вивчення			
$y = x$	$y = \dfrac{1}{x}$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
			

Перетворення графіків функцій	
Перетворення аргументу	**Перетворення функції**
$f(x) \to f(x + a)$	$f(x) \to f(x) + b$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x) \to f(kx)$</td>
<td>$f(x) \to kf(x)$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x) \to f(-x)$</td>
<td>$f(x) \to -f(x)$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x) \to f(|x|)$</td>
<td>$f(x) \to |f(x)|$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

7.3. Обернена функція

З оберненими функціями при вивченні алгебри та початків аналізу учні зустрічаються щонайменше тричі: при вивченні степеневих, обернених тригонометричних функцій та логарифмічної функції, як оберненої до показникової. Цей матеріал зазвичай важко засвоюється з першого разу переважною більшістю учнів, тому і виникла необхідність введення поняття оберненої функції на етапі узагальнення знань про функцію та демонстрації властивостей обернених функцій на вже опанованих учнями функціях.

Знайомство з оберненими функціями можна поділити на три етапи:

1. Формування в учнів розуміння, як вирізняти з-поміж інших функцій ті, які мають обернені.
2. Формування та усвідомлення поняття обернена функція.
3. Розвиток навичок знаходження оберненої функції та її графіка.

З метою мотивації пізнавальної діяльності можна розглянути приклад. Увімо собі, що ми зібрались поїхати на відпочинок автомобілем, який споживає в середньому 11 л пального на 100 км. Тоді об'єм пального, що знадобиться нам для здійснення нашої поїздки, можна описати у вигляді залежності: $p = \frac{s}{100} \cdot 11$, де p – шуканий об'єм пального в літрах, а s – шлях, який ми плануємо подолати у кілометрах.

Тепер розглянемо обернену задачу: ми маємо каністру, яка містить p л пального. Як обчислити шлях, на який нам вистачить цього пального, якщо ми їхатимемо на тому ж авто? Отже, тепер нам необхідно побудувати залежність шляху від об'єму палива, яке у нас є: $s = \frac{p}{11} \cdot 100$.

Очевидно, що обидві формули описують один і той самий процес. Крім того, величини s і p такі, що для кожного шляху s однозначно можна визначити об'єм пального p, необхідного для його подолання, і для кожного об'єму пального p однозначно визначається шлях s, на який його вистачить.

Якщо у першій формулі позначити незалежну величину за x, а залежну величину за y, то отримаємо функцію $y = 0{,}11x$. При аналогічній заміні друга формула перетворюється на функцію $y = \frac{100}{11}x$. Дві отримані функції розв'язують обернені задачі і відносно одне одного ми їх називатимемо оберненими.

Поряд розглянемо потрібно розглянути й інший приклад. За календарем знаючи дату завжди можна визначити на який день тижня вона випаде, проте знаючи день тижня однозначно визначити дату неможливо. Так само і деякі функції не мають обернених. Функції, для яких можна знайти обернену називають оборотними.

Можна також навести цілком аналітичні приклади. Наприклад, розглянути графіки двох функцій f і g, таких як на рисунку 36.

Варто зауважити, що будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 36.б) видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$ [27].

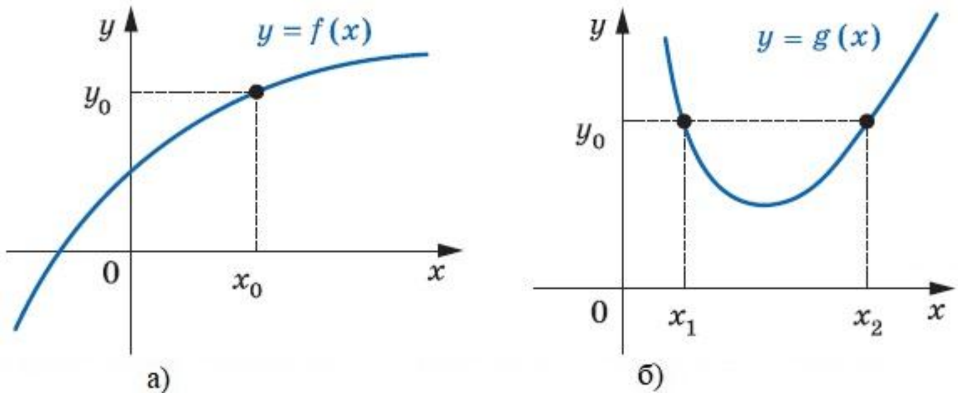


Рис. 36. Графіки функцій f і g

Означення 17. *Функцію $y = f(x)$ називають **оборотною**, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.*

Функція f (рис. 36.а) є оборотною. Функція g (рис.36.б) не є оборотною.

Потрібно запропонувати учням з відомих їм функцій навести приклади оборотних функцій та функцій, що не є оборотними. Таким чином, функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 37)

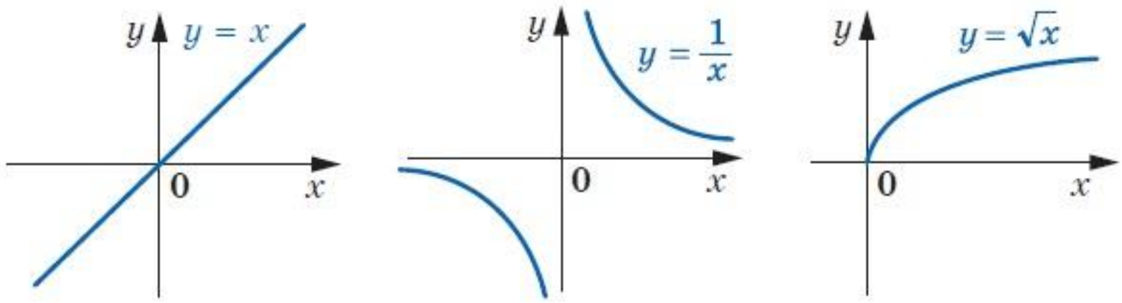


Рис. 37. Графіки функцій $y = x, y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}$

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Сформулюємо достатню умову оборотності функції.

Теорема 3. *Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.*

Потрібно підкреслити, що твердження, обернене до сформульованого в теоремі 3, не є правильним, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною).

Означення 18. *Функції f і g називають* ***взаємно оберненими****, якщо:*

1) $D(f) = E(g)$ *і* $E(f) = D(g)$*;*

2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ *із рівності* $f(x_0) = y_0$ *випливає, що* $g(y_0) = x_0$*, тобто* $g\big(f(x_0)\big) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є оберненою до функції f, а функція f — оберненою до функції g. Функції f і g називають взаємно оберненими.

Зазначимо, що другу умову в означенні взаємно обернених функцій можна замінити на таку: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ із рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f\big(g(x_0)\big) = x_0$.

Для кращого усвідомлення означення наведемо числовий приклад.

Приклад 15. Доведіть, що функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \frac{x+1}{2}$ є взаємно оберненими.

Розв'язання. Для цього необхідно послідовно перевірити умови означення 18. Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$. Отже, перша умова виконується.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$. Дійсно,

$$g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{(2x_0 - 1) + 1}{2} = x_0.$$

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

Нехай f — оборотна функція, а функція g — обернена до неї. Функція f — це деяке правило, що дає змогу за значеннями змінної x із множини $D(f)$ знайти відповідне значення змінної y із множини $E(f)$. Тоді з означення взаємно обернених функцій випливає, що обернена функція g — це правило, згідно з яким за значеннями змінної y можна знайти відповідне значення змінної x.

У прикладі 15 доведено, що оберненою до функції $y = 2x - 1$ є функція $y = \frac{x+1}{2}$. Проте розв'язання цієї задачі не розкриває, як за даною функцією знайти обернену до неї. Покажемо, як це можна зробити, на прикладі функції $y = 2x - 1$.

Функція $y = 2x - 1$ зростаюча, тому вона є оборотною.

Щоб визначити обернену функцію, треба задати правило, згідно з яким за кожним значенням змінної у можна знайти таке значення змінної x, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$, $x = \frac{y+1}{2}$.

Остання рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають літерою x, а залежну — літерою y. Замінивши позначення згідно цього принципу, можна сказати, що ми знайшли функцію, яку задано формулою $y = \frac{x+1}{2}$. Вона і є шуканою.

Хоча графік оберненої функції можна побудувати і покоординатно, проте його можна отримати і з графіка самої функції користуючись наступною теоремою.

Теорема 3. *Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої* $y = x$.

Можна запропонувати учням побудувати різними способами графіки вище описаних функцій (рис.38).

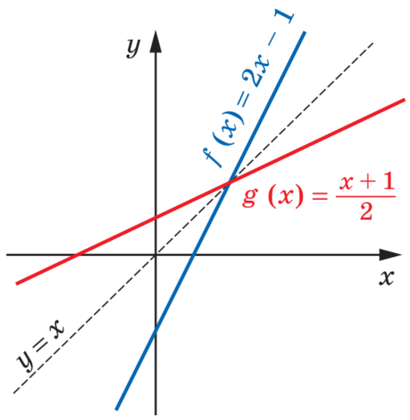


Рис. 38. Графіки функцій $y = 2x - 1, y = \frac{x+1}{2}$

Теорема 4. *Якщо функція* f *є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція* g *є також зростаючою (спадною).*

Дані властивості взаємно обернених функцій доводяться у [27] і дозволяють вивчати властивості нових функцій на основі властивостей уже відомих нам функцій обернених до них.

7.4. Метод інтервалів

Метод інтервалів широко використовується для розв'язування нерівностей та дослідження проміжків знакосталості деякої функції.

Розглянемо зображений на рисунку 39.а) графік деякої функції f, у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

Важливо показати учням, що це не завжди так. Наприклад, навівши приклад функції g, яка має стрибок, як показано на рисунку 39.б). Для даної функції проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in [x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$ [27].

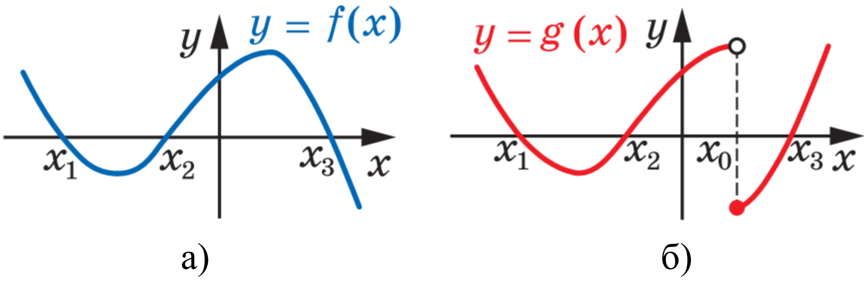


Рис. 39. Графіки функцій $y = f(x), y = g(x)$

Запропонуйте учням пояснити, чому для функції g, дана властивість не виконується. І відповісти на запитання, якою має бути функція, щоб властивість виконувалась.

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є ***неперервна крива***, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f ***неперервна в кожній точці області визначення***, або ***неперервна на*** $D(f)$. Функція g у ***точці*** $x_0 \in D(g)$ ***має розрив***.

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Детальніше з неперервними функціями учні ознайомляться при вивченні теми «*Похідна та її застосування*».

Отже, учні мають прийти до думки, що для того, щоб область визначення функції розбивалась її нулями на проміжки знакосталості, функція має бути неперервною лінією.

Тоді звернемо увагу на поведінку такої функції на кожному окремому проміжку.

Теорема 5. *Якщо функція неперервна на деякому проміжку і не має на ньому нулів, то вона на цьому проміжку зберігає сталий знак*.

Теорема 5 є основою загального методу розв'язування нерівностей виду $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$, де f — функція, неперервна на $D(f)$.

Роз'яснимо застосування цього методу на прикладі функції, графік якої зображено на рисунку 39.а).

Уявимо собі, що із цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f, за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 40). Кожний із проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f.

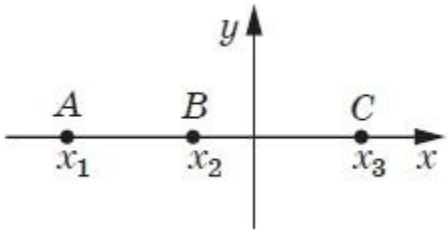


Рис. 40. Точки A, B, C

Функція f є неперервною на цих проміжках. Отже, за теоремою 5 зазначені проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на кожному із зазначених проміжків. Це можна зробити за допомогою «*пробних точок*».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty; x_1)$ і $f(a) > 0$. Оскільки $(-\infty; x_1)$ — проміжок знакосталості функції, то для будь-якого $x \in (-\infty; x1)$ значення функції має той самий знак, що $f(a)$, отже, виконується нерівність $f(x) > 0$. Вибираючи по одній точці на кожному проміжку знакосталості та знаходячи значення функції в цій точці, можна визначити знак функції на розглядуваних проміжках.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають ***методом інтервалів***.

Наведена нижче теорема дає змогу застосовувати метод інтервалів для нерівностей виду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

Теорема 6. *Функція* $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, *де* $f(x)$ *і* $g(x)$ — *многочлени є неперервною на* $D(y)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{2x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$, тобто на $D(y)$.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Знайдіть область визначення функції:

а) $f(x) = \frac{2x}{|x|-4}$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} + \frac{3x-5}{x^2-5x+4}$.

2. Знайдіть область значень функції:

а) $f(x) = x^2 - 4$; б) $f(x) = 1-|x+2|$; в) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$.

3. Доведіть, що функція є парною:

а) $f(x) = x^2 + 2|x| - 3$; б) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}}$.

4. Доведіть, що функція є непарною:

а) $f(x) = \frac{|x-1|-|x+1|}{x^2}$; б) $(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+3}$.

5. Побудуйте графік функції:

а) $f(x) = \sqrt{1-3x}$; б) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}+4}$; в) $f(x) = 2\sqrt{3x-2} - 1$.

6. Побудуйте графік функції:

а) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; б) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$; в) $f(x) = 2(2x-1)^2 + 2$.

7. При яких значеннях параметра a рівняння –$2(x-4)^2 = \sqrt{2x-4} + a$ має 2 корені?

8. Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими.

а) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, $g(x) = 2x - 1$;

б) $f(x) = (x-4)^2$, $D(f) = [4;\ +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$.

9. Знайдіть функцію, обернену до даної:

а) $y = 0{,}5x - 3$; б) $y = \frac{2}{x+3}$; в) $y = 4\sqrt{x} - 1$.

10. Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

а) $y = -0{,}5x + 1$; б) $y = x^2 - 1$, якщо $x \geq 0$.

11. Розв’яжіть нерівність:

а) $x(x-1)(x+4) > 0$; б) $(2-x)(x+3)(2x+1) \geq 0$.

12. Знайдіть множину розв’язків нерівності:

а) $\frac{x+3}{x-4} > 0$; б) $\frac{1-x}{(x-3)(x+2)} > 0$; в) $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-5)} \leq 0$.

13. Знайдіть множину розв’язків нерівності:

а) $(x^2 - 2x)(x^2 + 5x + 4) \geq 0$; б) $\frac{(x-1)^2}{(x+2)(x+4)} < 0$.

8. Степенева функція

Під час вивчення теми «Степенева функція» в курсі «Алгебра і початки аналізу» передбачається знайомство учнів з питаннями: узагальнення поняття про степінь; поняття про степінь з ірраціональним показником; розв’язування ірраціональних рівнянь і їх систем; степенева функція, її властивості і графік.

Під час вивчення різних природних процесів, зокрема біологічних та хімічних, часто зустрічаються залежності між змінними величинами, які описуються степеневою функцією. Приклади таких залежностей варто включити до складу прикладних задач природничого характеру. Це допоможе учням глибше усвідомлювати властивості степеневої функції і засвоювати пов’язані з цією функцією поняття.

8.1. Степенева функція з натуральним показником

Властивості та графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ відомі учням з курсу математики попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають ***степеневою функцією з натуральним показником*** [27].

Проведемо аналітичне дослідження відомих на цьому етапі навчання властивостей даної функції за наступним переліком:

1. Область визначення функції;
2. Нулі функції;
3. Область значення функції;
4. Проміжки знакосталості функції;
5. Парність функції;

6. Зростання або спадання функції;
7. Графік функції.

Область визначення функції. Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Нулі функції. Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, потрібно проводити для двох окремих випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Область значення функції. Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$ [27].

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Проміжки знакосталості функції. Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$. Отже, *проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.*

Парність функції. Функція $y = x^n$, *де n — парне натуральне число, є парною*. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Зростання/спадання функції. Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо:

$(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція* $y = x^n$*, де* n *— парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

Рис. 41. Графіки функцій $y = x^n$ **і** $y = x^4$

Графік функції. Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 41.а). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 41.б).

Другий випадок: $\boldsymbol{n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}}$ **або** $\boldsymbol{k = 0}$

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 7 класу.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Область значення функції. Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$ [27].

Сказане означає, що *областю визначення функції* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.

Область проміжки знакосталості функції. Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число*.

Парність функції. *Функція* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = x^{2k+1}$.

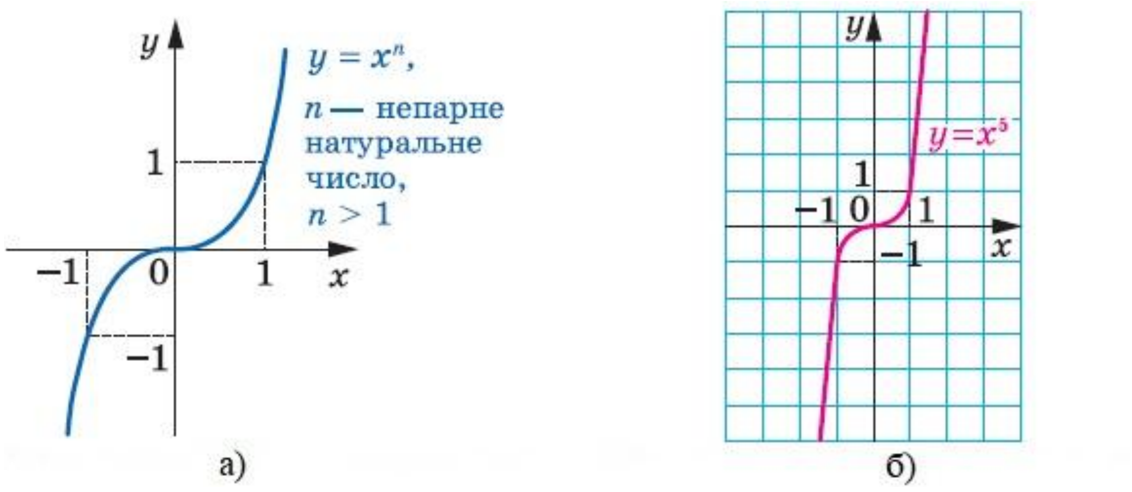


Рис. 42. Графіки функцій $y = x^n$ і $y = x^5$

Зростання/спадання функції. Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є зростаючою.*

Графік функції. Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 42.а). Зокрема, графік функції $y = x^5$ зображено на рисунку 42.б).

Можна запропонувати учням побудувати графіки функцій з різними показниками та порівняти їх. Крім звичайної побудови графіка від руки, можна запропонувати учням використати різні графічні калькулятори такі як Desmos та Geogebra, або скористатись можливостями таблиці Excel.

Узагальнимо властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ у вигляді таблиці.

Властивість	n — парне натуральнее число	n — непарне натуральнее число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з	$y < 0$ на проміжку

	проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання	на проміжку $[0; +\infty)$	на проміжку $(-\infty; +\infty)$
Спадання	на проміжку $(-\infty; 0]$	—

8.2. Степенева функція із цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають степеневою ***функцією із цілим показником*** [27].

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 43.

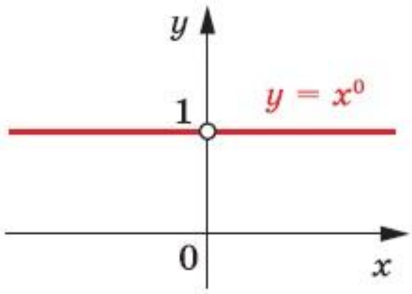


Рис. 43. Графік функцій $y = x^0$

Проведемо аналітичне дослідження відомих на цьому етапі навчання властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$ за тим самим переліком, що і раніше.

Окремий випадок цієї функції, коли $n = 1$, тобто функція $y = \frac{1}{x}$, відомий з курсу алгебри 8 класу.

Область визначення функції. Представимо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \frac{1}{x^n}$. Тоді стає зрозуміло, що *областю визначення функції* $y = x^{-n}, n \in \mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Нулі функції. Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

Перший випадок: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$

Область значення функції. Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять ні від'ємні числа, ні число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$ [27].

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$*, де* n *— непарне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.

Проміжки знакосталості функції. Очевидно, що *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$*, де* n *— непарне натуральне число*.

Парність функції. *Функція* $y = x^{-n}$*, де* n *— непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Зростання/спадання функції. Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$.

Звідси

$$\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}, \qquad \frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}, \qquad x_1^{-2k} < x_2^{-2k}.$$

Отже, *функція* $y = x^{-n}$*, де* n *— парне натуральне число, зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Аналогічно можна показати, що *функція* $y = x^{-n}$ *, де* n *— парне натуральне число, спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Графік функції. Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$ стають усе меншими й меншими. Через це відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується зі збільшенням модуля абсциси точки та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Також можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка функції до осі ординат зменшується та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

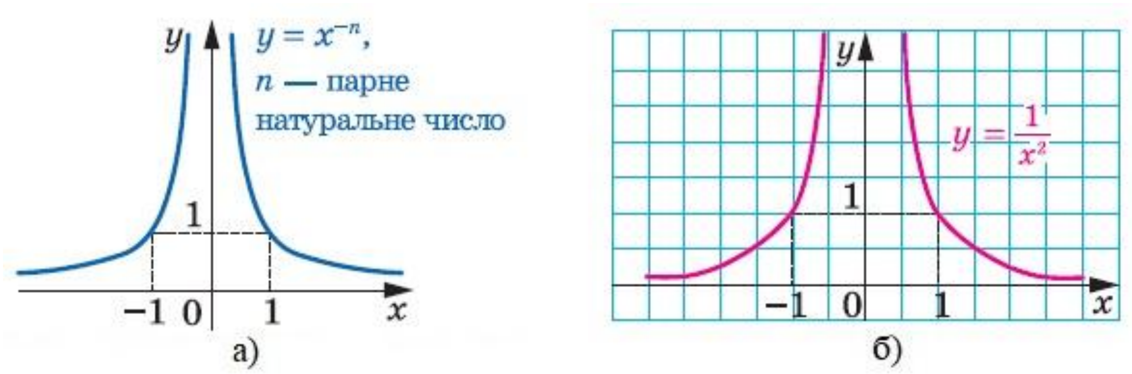


Рис. 44. Графіки функцій $y = x^{-n}$ **і** $y = \frac{1}{x^2}$

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 44.а). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 44.б).

Другий випадок: $\boldsymbol{n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}}$

Область значення функції. Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$ [27].

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$*, де* n *— непарне* *натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Проміжки знакосталості функції. Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число*.

Парність функції. *Функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність

$$(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}.$$

Зростання/спадання функції. Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$.

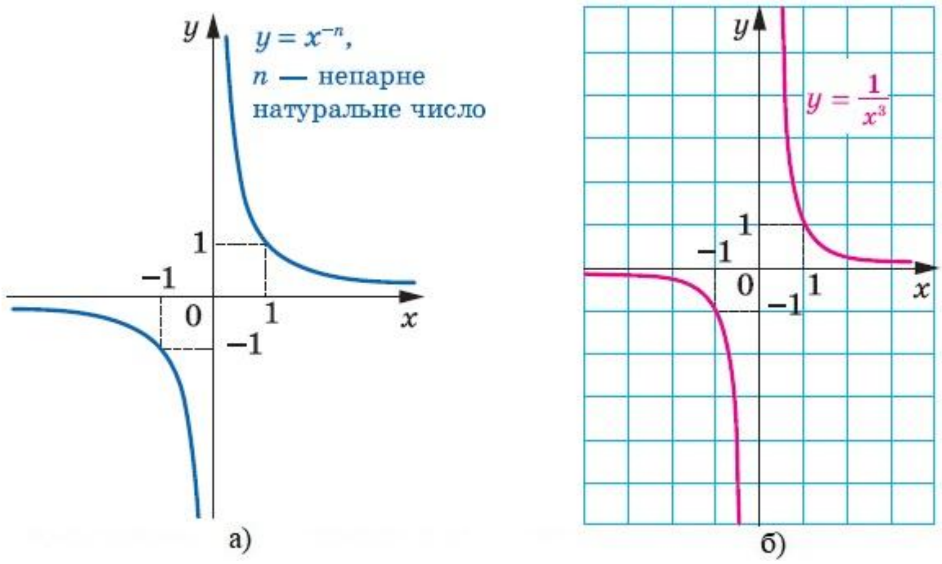


Рис. 45. Графіки функцій $y = x^{-n}$ **і** $y = \frac{1}{x^3}$

Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо:

$$-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}, \qquad \left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1},$$

$$-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}, \qquad \frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}.$$

Отже, розглядувана функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0; +\infty)$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Графік функції. Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 45.а). Зокрема, графік функції 3 зображено на рисунку 45.б).

Узагальнимо властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ у вигляді таблиці.

Властивість	n — парне натуральнее число	n — непарне натуральнее число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	—	—
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання	на проміжку $(-\infty; 0)$	—
Спадання	на проміжку $(0; +\infty)$	на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

8.3. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

Відомо, що коренем другого степеня (квадратним коренем) із числа a називають таке число, другий степінь якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ [27].

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем n-го степеня із числа a і, навпаки, будь-який корінь n-го степеня із числа a є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо n — непарне натуральне число, то функція $y = x^n$ є зростаючою і, оскільки її областю значень є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a.

Рисунок 46.а) ілюструє останнє твердження: при будь-якому значенні a графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ мають одну спільну точку. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то з будь-якого числа існує корінь n-го степеня, причому тільки один.

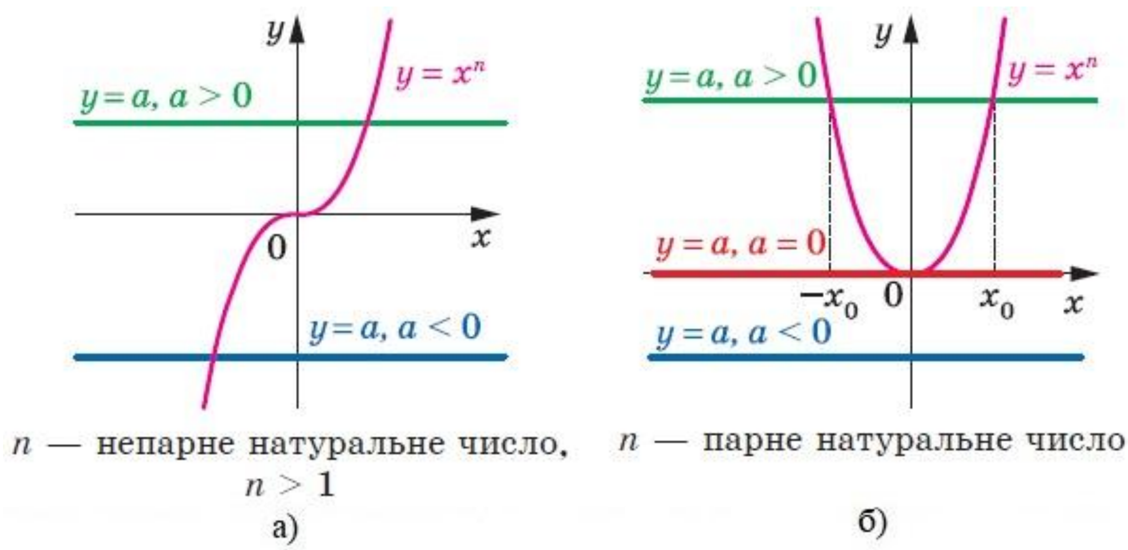


Рис. 46. Графіки функцій $y = x^n$

Оскільки областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ дане рівняння не має розв'язків.

Очевидно, що при $a = 0$ рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і набуває всіх додатних значень. Отже, при $a \geq 0$ рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число, на проміжку $[0; +\infty)$ має єдиний корінь.

Оскільки розглядувана функція є парною, то при $a > 0$ дане рівняння має два корені, які є протилежними числами.

Наведені твердження мають просту геометричну інтерпретацію (рис. 46.б). Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їхні абсциси — протилежні числа.

Тепер можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при $a < 0$ корінь n-го степеня із числа a не існує; при $a = 0$ корінь n-го степеня із числа a дорівнює 0; при $a > 0$ існують два протилежних числа, які є коренями n-го степеня із числа a.

Відомо, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує та набуває єдиного значення. Отже, кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Тим самим для всіх $k \in \mathbb{N}$ задано функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ з областю визначення $\mathbb{R}$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при будь-якому a має корінь $x = a^{2k+1}$, то областю значень функції f є множина $\mathbb{R}$.

Маємо:

$$D(f) = E(g) = \mathbb{R},$$
$$E(f) = D(g) = \mathbb{R}.$$

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)^{2k+1} = x$. Іншими словами, $g\big(f(x)\big) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Проведемо дослідження функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$ за раніше описаним переліком властивостей опираючись на обернену до неї функцію.

Область визначення функції. Зі сказаного раніше *областю визначення функції* $y = \sqrt[2k+1]{x}$ є множина $\mathbb{R}$.

Нулі функції. Оскільки функція $y = x^{2k+1}$ проходить через точку $(0; 0)$ і виходячи з симетрії графіків обернених функцій відносно прямої $y = x$, точка $(0; 0)$ також є нулем і для $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Інших нулів функція кореня не має, оскільки $y = x^{2k+1}$ не має інших точок перетину з віссю ординат окрім нуля.

Область значення функції. Зі сказаного раніше *областю значення функції* $y = \sqrt[2k+1]{x}$ є множина $\mathbb{R}$.

Проміжки знакосталості функції. Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f.

Парність функції. Для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності

$$f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -f(x)$$

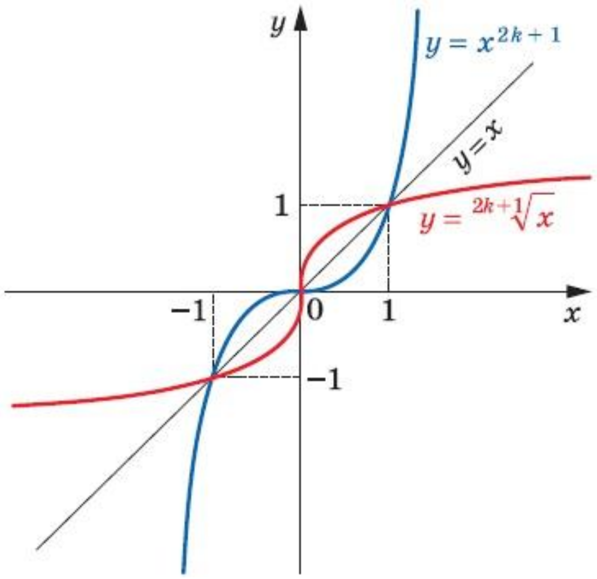


Рис. 47. Графіки функцій $y = x^{2k+1}$, $y = x$, $y = \sqrt[2k+1]{x}$

Отже, функція f є непарною.

Зростання/спадання функції. Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою 4 функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою.

Графік функції. Використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ (рис. 47) і теорему 3, можна побудувати графік функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Зокрема, на рисунку 48 зображено графік функції $y = \sqrt[3]{x}$.

Аналогічно означають функцію $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x} = a$ при будь-якому $a \geq 0$ має корінь $x = a^{2k}$, а при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції f є проміжок $[0; +\infty)$.

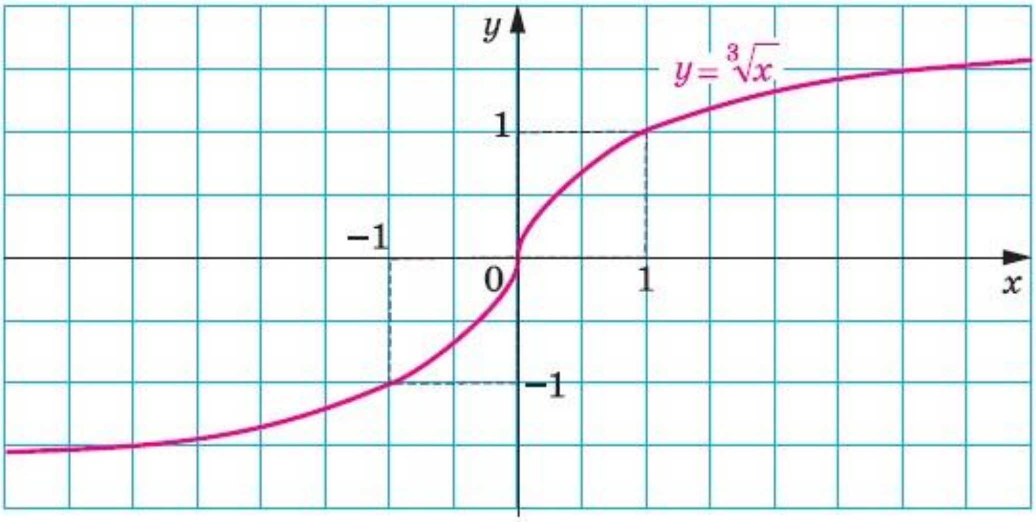


Рис. 48. Графік функції $y = \sqrt[3]{x}$

Маємо:

$$D(f) = E(g) = [0; +\infty),$$
$$E(f) = D(g) = [0; +\infty).$$

Для будь-якого $x \in [0; +\infty)$ виконується рівність $\left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k} = x$. Іншими словами, $g\big(f(x)\big) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Проведемо дослідження функції $y = \sqrt[2k]{x}$ опираючись на обернену до неї функцію.

Область визначення функції. Зі сказаного раніше *областю визначення функції* $y = \sqrt[2k]{x}$ є множина $[0; +\infty)$.

Нулі функції. Оскільки функція $y = x^{2k}$ проходить через точку $(0; 0)$ і виходячи з симетрії графіків обернених функцій відносно прямої $y = x$, точка $(0; 0)$ також є нулем і для $y = \sqrt[2k]{x}$. Інших нулів функція кореня не має, оскільки $y = x^{2k}$ не має інших точок перетину з віссю ординат окрім нуля на $[0; +\infty)$.

Область значення функції. Зі сказаного раніше *областю значення функції* $y = \sqrt[2k]{x}$ є множина $[0; +\infty)$.

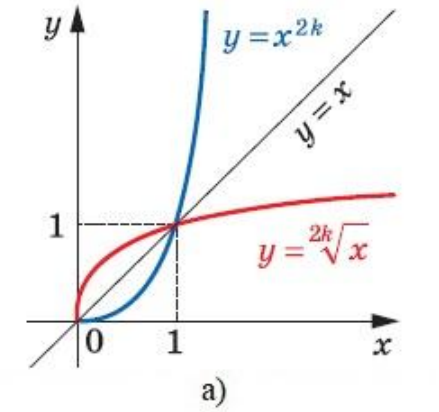
Проміжки знакосталості функції. Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції f.

Парність функції. Оскільки область визначення функції f не є симетричною відносно початку координат, то функція f не є ні парною, ні непарною.

Зростання/спадання функції. Оскільки функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Графік функції.

На рисунку 49.а) показано, як за допомогою графіка функції $y = x^{2k}$, де $x \geq 0$, побудувати графік функції $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$.



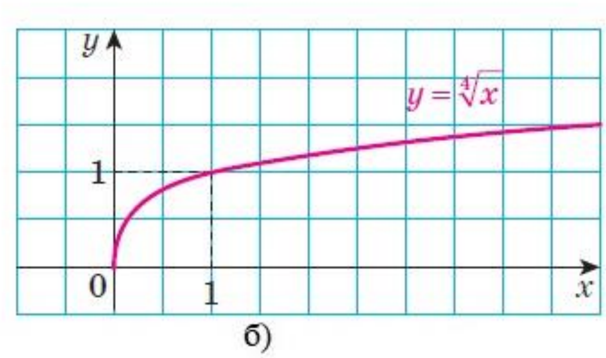


Рис. 49. Графіки функцій $y = x^{2k}$, $y = \sqrt[2k]{x}$, $y = x$, $y = \sqrt[4]{x}$

На рисунку 49.б) зображено графік функції $y = \sqrt[4]{x}$.

Узагальнимо властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$ у вигляді таблиці.

Властивість	n — парне натуральнее число	n — непарне натуральнее число $n > 1$
Область визначення	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$,

		$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання/ Спадання	Зростаюча	Зростаюча

8.4. Степенева функція з раціональним показником

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають ***степеневою функцією з раціональним показником.*** Означення вводиться в 10 класі при вивченні теми «*Степінь з раціональним показником та його властивості*» [27].

На етапі актуалізації необхідних знань необхідно повторити з учнями означення функції та способи її задання. Під час ознайомлення учнів зі даним видом функцій важливо, щоб учні не ототожнювали степеневу функцію з раціональним показником та функцію кореня.

Якщо нескоротний дріб $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є додатним числом, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то проміжок $(0; +\infty)$.

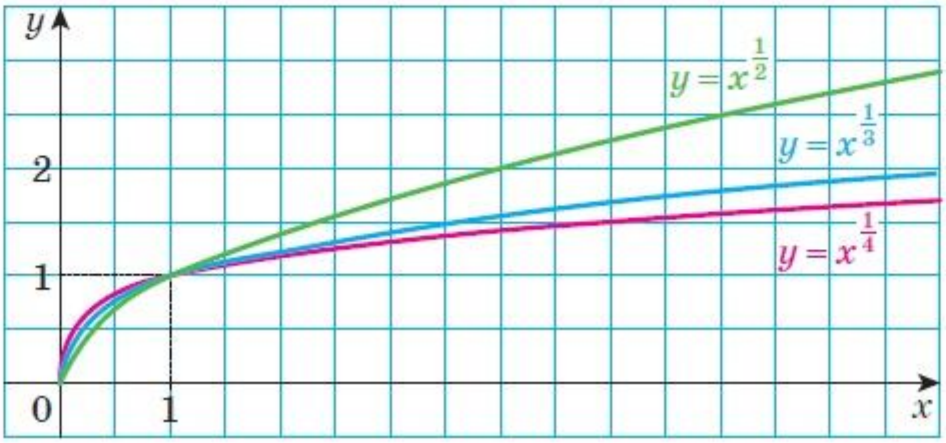


Рис. 50. Графіки функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$

Функція $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, нічим не відрізняється від функції $y = \sqrt[2k]{x}$ і обидві мають область визначення $[0; +\infty)$. Функції ж $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ і $y =$

$\sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, мають різні області визначення, тому це різні функції. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ обидві ці функції збігаються, але на проміжку $(-\infty;\ 0)$ визначена лише функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунку 50 зображено графіки функцій низки степеневих функцій.

Серед інших прикладів, що використовуватимуться для ілюстрації даної функції обов'язково має бути хоча б один на властивості області визначення функції $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$. Наприклад, такий.

Приклад 16. Побудуйте графік функції

$$f(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}.$$

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина $(0; +\infty)$. Дану функцію можна задати такими умовами: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. Графік функції зображено на рисунку 51.

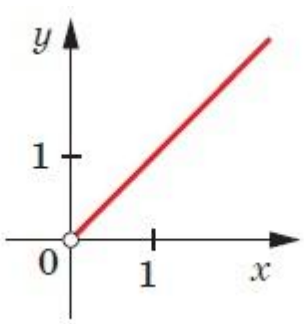
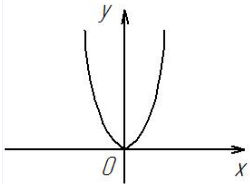
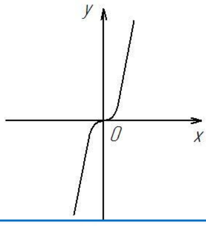
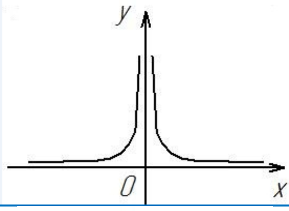
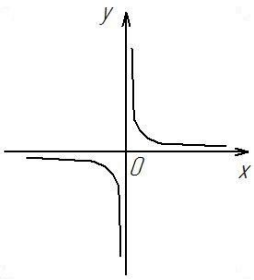
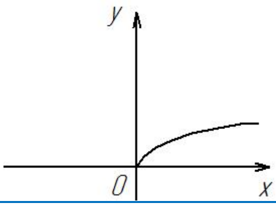
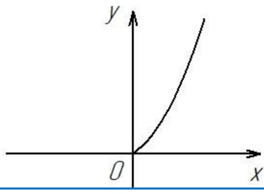
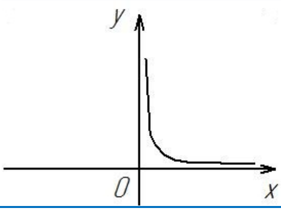


Рис. 51. Графік функції $y = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$

Для наочності можна узагальнити та проілюструвати функцію $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, у вигляді зведеної таблиці, що містить властивості різних виглядів степеневої функції.

№	$f(x)$	Графік	$D(y)$	$E(y)$	Парність	Монотонність
1	x^{2k}, $k \in \mathbb{N}$		$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$	парна	спадає при $x \in (-\infty; 0]$ зростає при $x \in [0; +\infty)$
2	x^{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	непарна	зростає
3	$x^{-(2k)}$, $k \in \mathbb{N}$		$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	парна	зростає при $x \in (-\infty; 0)$, спадає при $x \in (0; +\infty)$
4	$x^{-(2k-1)}$, $k \in \mathbb{N}$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	непарна	спадає при $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; +\infty)$
5	x^r, $0 < r < 1$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	ні парна, ні непарна	зростає
6	x^r, $r > 1$, $r \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	ні парна, ні непарна	зростає
7	x^r $r < 0$, $r \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$		$(0; +\infty)$	$(0;\ +\infty)$	ні парна, ні непарна	спадає

Задачі для самостійного розв'язання

1. Функцію задано формулою $f(x) = x^{28}$. Порівняйте:

а) $f(-4{,}3)$ і $f(-4{,}1)$; б) $f(-10)$ і $f(10)$; в) $f(0{,}8)$ і $f(-1{,}2)$.

2. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x|x^2$; б) $y = |x|x^3 + x^4$.

3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4$ на проміжку:

а) $[0; 3]$; б) $[-2; -1]$; в) $[-3; 2]$; г) $[1; +\infty)$.

4. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-27}$. Порівняйте:

а) $f(-2{,}2)$ і $f(-2{,}1)$; б) $f(-12)$ і $f(12)$; в) $f(-9)$ і $f(7)$.

5. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x+5)^0$; б) $y = (x^2 - 7x + 6)^0$; в) $y = \left(\frac{1}{x-4}\right)^{-1}$.

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-5}$ на проміжку:

а) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; б) $[-2; -1]$; в) $(-\infty; -2]$; г) $[1; +\infty)$.

7. Визначне графічно кількість розв’язків системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y = x^{-5}, \\ y = x^3 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^{-4}, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$

8. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt[3]{x+8}$; б) $y = \sqrt[4]{x^2 - 4}$; в) $y = \sqrt[8]{x^4(x-1)}$.

9. Знайдіть область значень функції:

а) $y = \sqrt[3]{x} + 8$; б) $y = \sqrt[4]{x} - 3$; в) $y = \left|\sqrt[6]{x} - 2\right|$.

10. Побудуйте графік функції:

а) $y = \left(\sqrt[5]{x}\right)^5$; б) $y = \left(\sqrt[6]{x}\right)^6$; в) $y = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^4 + \left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[5]{|x|}$ на проміжку:

а) $[-5; -2]$; б) $[-1; 4]$; в) $[2; +\infty)$.

12. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = x^{\frac{4}{5}}$; б) $y = (x+2)^{-2{,}4}$; в) $y = (x^2 - x - 6)^{\frac{2}{9}}$.

13. Побудуйте графік функції:

а) $y = \left(x^{\frac{1}{7}}\right)^7$; б) $y = \left((x+1)^{\frac{1}{6}}\right)^6$; в) $y = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}}$.

9. Тригонометричні функції

Важливою частиною вчення про функції є тригонометричні функції. Тригонометрія виникла і розвивалась в давнину як один з розділів астрономії, як її обчислювальний апарат, що відповідав практичним потребам людей. І саме астрономія визначила той факт, що сферична тригонометрія виникла раніше прямолінійної.

Для розвитку математики дуже важливими були праці індійських вчених з тригонометрії, хоч великих досягнень в цій галузі в них ще небагато.

У зв’язку з розквітом астрономії в елліністичних країнах (пізніше провінціях Риму) були досягнуті значні успіхи в розробці як графічних засобів розв’язування її задач, так і обрахунку хорд. В «Аналемі» Птоломея були викладені графічні прийоми побудови для виготовлення сонячного годинника, тобто для встановлення місця положення Сонця в залежності від часу, прийоми, які також можна використовувати для визначення часу доби. В основі побудов лежало ортогональне проектування сфери на три взаємно перпендикулярні площини меридіана, горизонту і вертикального кола. Дуги, які шукались при цьому, будувались по півхордам відомих кіл. В «Аналемі» Птолемея міститься відносно розвинута тригонометрія хорд. Індійці спирались на праці елліністичних астрономів, але внесли і багато нового. Очевидно, що на розвиток астрономії в Індії вплинули більш ранні методи, які ввійшли в «Аналему», і були перетворені тут в систему розрахункових правил. Головною була заміна хорд синусами. Така заміна сама по собі ніби й не помітна, адже хорда дуги r дорівнює подвоєному синусу дуги $2r$, тобто відрізняється від синуса лише сталим множником. Але в дійсності перехід від хорди до півхорди мав важливе значення, тому що дозволив природно ввести різні функції, пов’язані зі сторонами і кутами прямокутного трикутника. В Індії було покладено початок тригонометрії, як вченню про тригонометричні величини, хоч і було відведено мало уваги саме розв'язанню трикутників. Саме індійські вчені першими ввели поняття синуса і косинус. В Індії, по суті, і зароджується вчення про тригонометричні величини, яке пізніше було названо гоніометрією («*гоніа*» — кут, «*метрео*» — вимірюю).

Подальший розвиток вчення про тригонометричні величини отримало в IX-XV століттях у країнах Середнього і Близького Сходу. Ал-Хабаш, Абу-л-Вафа, ал-Баттані, ал-Біруні та інші вводять нові тригонометричні величини: тангенс, котангенс, секанс, косеканс, встановлюють основні співвідношення між ними, використовують їх під час різних обчислень.

Цікавим є той факт, що поняття «*тангенс*» і «*котангенс*», як і перші таблиці цих величин, з'явились не внаслідок розгляду тригонометричного кола, а із вчення про сонячний годинник.

Тангенси (від латинського *tanger* — дотикатися) вперше було введено у десятому столітті, так як і котангенс, секанс і косеканс арабським математиком Абу–л–Вафою. Взагалі тангенси виникли у зв'язку з розв'язуванням задачі на визначення довжини тіні. Абу–л–Вафа першим склав таблиці для знаходження тангенсів і котангенсів. Але ці відкриття європейцям довгий час були невідомі, тому тангенси були наново відкриті в чотирнадцятому столітті спочатку англійським вченим Т. Бравердином, а потім ще й німецьким математиком, астрономом Регіомонтаном (1467 р.)

Праця Регіомонтана «П'ять книг про трикутники всіх видів»(1462 – 1466), в якій тригонометрія розглядається як самостійний, незалежний від астрономії, розділ математики, була першою у Європі.

Зміст курсу тригонометрії складався до початку XVIII століття, але сучасна форма її викладу і загальноприйнята тепер символіка встановились лише з часів Ейлера, тобто в другій половині XVIII століття, зокрема, у 1748 році в його праці «Вступ до аналізу нескінченно малих».

Вивчення теми «Тригонометричні функції» в курсі «Алгебра і початки аналізу» передбачає знайомство учнів з основними тригонометричними функціями, їх властивостями та графіками. Цей матеріал розкриває учням, відомі з геометрії поняття із зовсім іншого боку. На початкових етапах вивчення цієї теми необхідно постійно тримати в полі уваги уже відомі з геометрії тригонометричні властивості, і звертатись до них за потреби. Також важливо, щоб учні розуміли, що новий алгебраїчний зміст тригонометричних функцій не суперечить їх геометричному змісту, лише є його поглибленням і узагальненням.

9.1. Тригонометричні функції числового аргументу

Вивчення тригонометричних функцій починається в курсі геометрії 8 класу, де «синус», «косинус» і «тангенс» розглядаються як функції гострого кута прямокутного трикутника. Згодом, у 9 класі, учнів було ознайомлено зі значеннями і властивостями тригонометричних функцій від 0° до 180°. Тоді ж вони вперше зустрілись з тригонометричним півколом.

На початку вивчення теми варто актуалізувати раніше отримані знання, оскільки, по-перше вони мають пропедевтичний характер, по-друге, є ілюстрацією міжпредметних зв'язків. Отже, узагальнимо ці поняття для довільного кута повороту α . Вводячи означення тригонометричних функцій кутів від $0°$ до $180°$, використовувалось одиничне півколо. Для довільних кутів повороту природно звернутися до одиничного кола [27].

Учні раніше уже зустрічалися з радіанними вимірами кутів у темі «Довжина кола і його дуги», якщо на цьому етапі було проведено пропедевтику тригонометричних функцій. Проте часто не маючи достатнього досвіду розв'язування задач на переведення міри кута з градусної в радіанну, і навпаки, учні нелегко переходять до нового поняття.

Мотивуючи учнів до вивчення радіанної міри кута, можна навести наступні аргументи:

- Радіани дають змогу зв'язати лінійну міру з мірою кута.

- Радіани зберігають виміри тригонометричних функцій в одному масштабі, тобто при побудові графіків одиниця на осі абсцис відповідає одиниці на осі ординат.
- Деякі тригонометричні обчислення математичного аналізу значно спрощуються з використанням запису виміру кута в радіанах. Наприклад, обчислення деяких границь тригонометричної функції.

Як наслідок, переважна більшість мов програмування сприймає в якості аргументу тригонометричної функції виключно величини в радіанах, та й поза межами шкільного курсу, при вивченні математики, фізики, техніки також в якості аргументу тригонометричної функції використовуються переважно радіани.

Визначимо радіани як одиницю виміру кутів.

Означення 19. ***Кутом в один радіан*** *називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола*.

Одразу потрібно зауважити, що радіан є безрозмірною одиницею виміру. Однак, за потреби наголосити на тому, в яких одиницях відбувається вимір, використовують позначення «*рад*». Наприклад, 1 радіан записують 1 *рад*;

Якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR, то говорять, що ***радіанна міра цього центрального кута дорівнює $\boldsymbol{\alpha}$ рад***. Зауважимо, що радіус і довжина дуги мають однакову розмірність, а отже множних α дійсно не має розмірності.

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад. Градусна міра півкола становить $180°$. Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 1\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.$$

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR. Якщо довжину дуги, що містить α рад, позначити l, то можна записати:

$$l = \alpha R.$$

У таблиці наведено градусні та радіанні міри кутів, які зустрічаються найчастіше:

Градусна міра кута	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса із центром у початку координат. Таке коло називають ***одиничним***.

Одиничне, або тригонометричне, коло є важливим аналітичним інструментом тригонометрії. Його використання суттєво пришвидшує тригонометричні обчислення.

Зауважимо, що на одиничному колі кут повороту вважається додатним, якщо відкладається *проти годинникової стрілки* від додатного напрямку осі Ox, і від'ємним – якщо *за годинниковою стрілкою*. Крім того, поворот не обмежується обертанням в межах одного кола $\pm 2\pi$, а може бути здійснено на будь-який кут. Наприклад, на рисунках 52.а), 52.б) зображені повороти на кути $\frac{5\pi}{2}$ і $-\frac{5\pi}{2}$ відповідно, можна запропонувати учням визначити кути поворотів зображених на рисунках 52.в), 52.г).

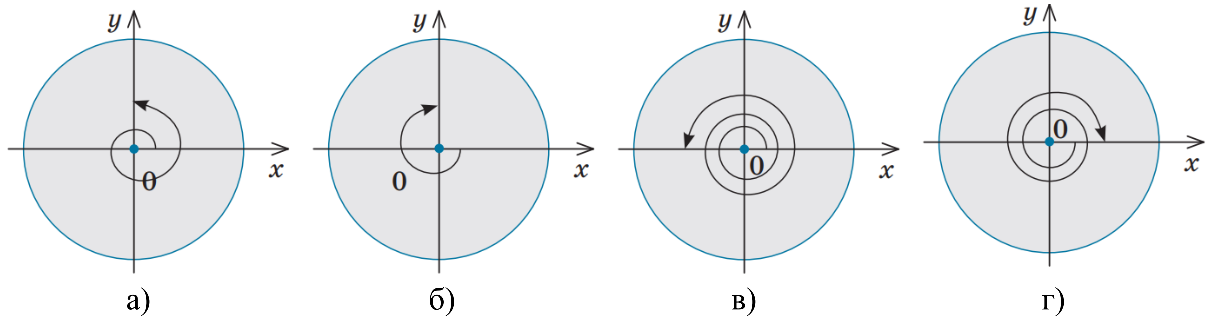


Рис. 52. Ілюстрація поворотів на одиничному колі

Учні важко сприймають кути повороту більші за $360°$, тому важливо приділити деякий час для пояснення того факту, що тут кут не є геометричною фігурою, а відношення між точками кола і кутом не є взаємно однозначним.

Наводячи означення тригонометричних функцій у термінах одиничного кола, варто посилатись на попередні означення надані у курсі геометрії 8-9 класів, наголошуючи, що нові означення є їх узагальненням, оскільки поворот на кут не більший за $180°$ є елементом множини кутів повороту.

Означення 20.1. ***Косинусом*** *і* ***синусом*** *кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P(x;y)$ одиничного кола такої, що $P = R_0^\alpha\ (P_0)$* (рис. 53.а).

Записують: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

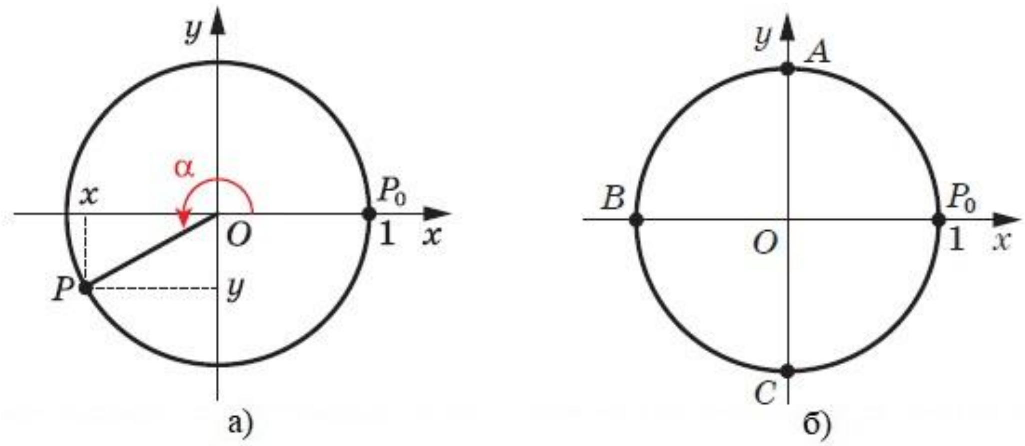


Рис. 53. Ілюстрація одиничного кола та $\cos\alpha$ **і** $\sin\alpha$

Точки P_0, A, B і C (рис. 53.б) мають координати $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$ відповідно. Ці точки отримано в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ відповідно на кути 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Отже, користуючись даним означенням, можна скласти таблицю

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

Важливо акцентувати увагу на тому, що значення $\sin x$ і $\cos x$ повторюється з певною закономірністю. Це помітно з таблиці. Корисно проілюструвати це на прикладі.

Приклад 17. Знайдіть усі кути повороту α, при яких: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Розв'язання. 1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис.53.б). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \quad \text{або} \quad -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots .$$

Усі ці кути можна записати узагальненою формулою $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\sin \alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Зверніть увагу, що запис множини кутів повороту, що відповідає заданій точці є базовим умінням для розв'язування тригонометричних рівнянь. Отже, необхідно приділити певний час на відпрацювання і закріплення цієї навички.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 53.б). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 3\pi, \ldots \quad \text{або} \quad \frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 3\pi, \ldots .$$

Усі ці кути можна записати узагальненою формулою $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\cos \alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Означення 21. ***Тангенсом*** *кута повороту а називають відношення синуса цього кута до його косинуса:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Означення 22. ***Котангенсом*** *кута повороту а називають відношення косинуса цього кута до його синуса:*

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

З означення тангенса випливає, що тангенс визначений для тих кутів повороту α, для яких $\cos \alpha \neq 0$, тобто $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

З означення котангенса випливає, що котангенс визначений для тих кутів повороту α, для яких $\sin \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Відтак учням відомо, що кожному куту повороту α відповідає ***єдина*** точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає *єдине* число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

котангенса для $\alpha \neq \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$) кута α. Через це *залежність значення синуса* (*косинуса, тангенса, котангенса*) *від величини кута повороту є функціональною*.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(a) = \text{tg}\,\alpha$, $p(a) = \text{ctg}\,\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають ***тригонометричними функціями*** кута повороту α.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дає змогу розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Оскільки абсциси й ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то областю значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1;\ 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n), \qquad n \in \mathbb{Z},$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Областю визначення функції $y = \text{tg}\,x$ є множина

$$\left\{x \in \mathbb{R}\ \middle|\, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Областю визначення функції $y = \text{ctg}\,x$ є множина

$$\{x \in \mathbb{R}\ |x \neq \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}\}.$$

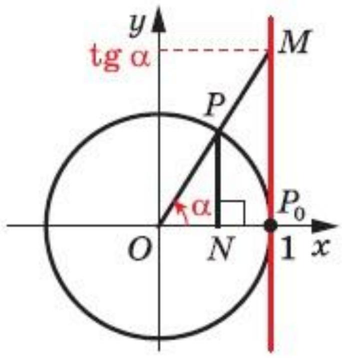


Рис. 54. Геометрична інтерпретація області значення функції $y = \text{tg}\,x$

Щоб знайти області значень цих функцій, звернемося до геометричної інтерпретації на одиничному колі, для чого побудуємо допоміжні осі тангенсів і котангенсів.

Зауважимо, що одичичне коло є універсальним інструментом, що допомагає визначити властивості тригонометричних функцій.

Проведемо пряму $x = 1$ (рис. 54). Вона проходить через точку $P_0(1; 0)$ і дотикається до одиничного кола.

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут α і розміщено так, як показано на рисунку 54. Пряма OP перетинає пряму $x = 1$ у точці M. Проведемо $PN \perp OP_0$.

Із подібності трикутників OPN і OMP_0 випливає, що $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$. Оскільки $PN = \sin\alpha$, $ON = \cos\alpha$, $OP_0 = 1$, то $MP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Можна показати, що й при будь-якому іншому положенні точки P на одиничному колі виконується таке: якщо пряма OP перетинає пряму $x = 1$, то ордината точки перетину дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Тому пряму $x = 1$ називають ***віссю тангенсів***.

Зрозуміло, що внаслідок зміни положення точки P на одиничному колі (рис.55.а) точка M може зайняти довільне положення на прямій $x = 1$, тобто ординатою точки M може бути будь-яке число. Це означає, що областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

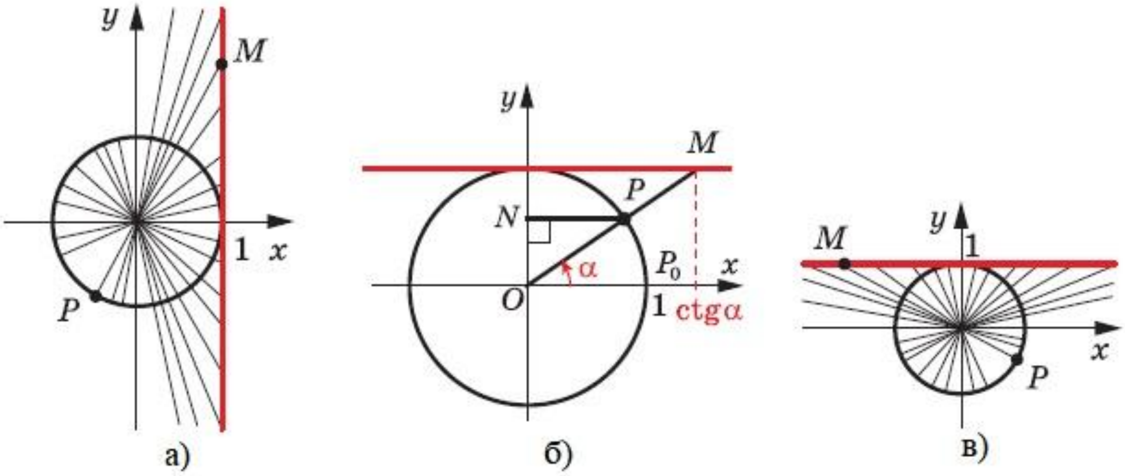


Рис. 55. Геометрична інтерпретація областей значень функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут α і розміщено так, як показано на рисунку 55.б). Можна показати, що коли пряма OP перетинає пряму $y = 1$, то абсциса точки перетину дорівнює $\operatorname{ctg} \alpha$ (рис.55.б), тому пряму $y = 1$ називають ***віссю котангенсів***.

З рисунка 55.в) зрозуміло, що областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Якщо точки P_1, O і P_2 лежать на одній прямій, то прямі OP_1 і OP_2 перетинають вісь тангенсів (котангенсів) в одній і тій самій точці M (рис. 56.а, 56.б). Це означає, що тангенси (котангенси) кутів, які відрізняються на π, 2π, 3π і т. д., рівні. Звідси

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

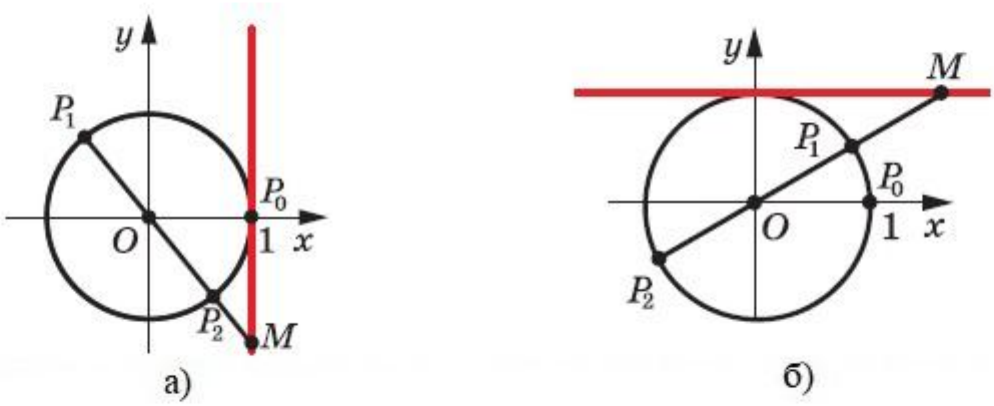


Рис. 56. Геометрична інтерпретація областей визначення функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

Важливо приділити особливу увагу наступному прикладові, його розуміння дозволить учням уникнути багатьох помилок у майбутньому.

Приклад 18. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$\frac{(2 - \sin \alpha) \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{(2 - \sin \alpha) \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 - \sin \alpha.$$

Зрозуміло, що вираз $2 - \sin \alpha$ набуває всіх значень від 1 до 3. Найменше значення виразу $2 - \sin \alpha$, яке дорівнює 1, досягається лише при $\sin \alpha = 1$, проте при цьому $\cos \alpha = 0$ і вираз

$$\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

не визначений. Отже, найменшого значення не існує.

Аналогічно, вираз $2-\sin\alpha$ набуває найбільшого значення лише при $\sin\alpha=-1$, проте при цьому також $\cos\alpha=0$. Отже, і найбільшого значення не існує.

Відповідь: не існують.

9.2. Знаки тригонометричних функцій, парність та непарність

Дослідження тригонометричних функцій на парність та знакосталість спирається розуміння, значень якого знаку набувають функції при різних значеннях аргументу. Використання одиничного кола значно полегшує процес вивчення цих властивостей. Для його використання учням варто розуміти дві речі: у якій чверті знаходитиметься точка при повороті на кут α і значень якого знаку набуває кожна функція у цій чверті.

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ навколо початку координат на кут α. Якщо точка P належить I координатній чверті, то говорять, що α є кутом I чверті. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\frac{\pi}{7}$ і $-300°$ — кути I чверті, $\frac{2\pi}{3}$ і $-185°$ — кути II чверті, $\frac{5\pi}{4}$ і $-96°$ — кути III чверті, $\frac{\pi}{8}$ і $355°$ — кути IV чверті.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису й ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$.

Аналогічним чином, визначаються знаки синусів і косинусів у інших чвертях:

- якщо α — кут II чверті, то $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$;
- якщо α — кут III чверті, то $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$;
- якщо α — кут IV чверті, то $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$.

Знаки значень синуса та косинуса схематично показано на рисунку 57.

Дані схеми легко сприймаються та запам'ятовуються учнями.

Рис. 57. Знаки значень синуса і косинуса

Оскільки

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

то тангенси й котангенси кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис.58.а). Також можна визначати знаки $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ за допомогою осей тангенса і котангенса, але, як правило, визначення знаків функцій виходячи з їх означення учні засвоюють краще.

Наступну схему зручно використовувати для обгрунтування властивостей парності тригонометричних функцій. Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис.58.б).

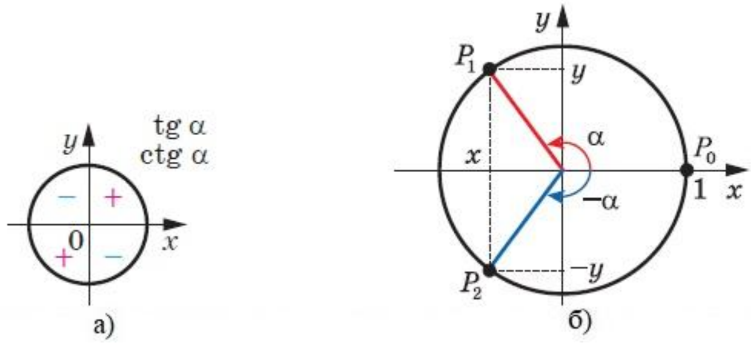


Рис. 58. Знаки значень тангенса і котангенса

Для будь-якого кута α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси та протилежні ординати. Тоді з означень синуса та косинуса випливає, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Звідси отримаємо, що $\cos\alpha$ є функцією ***парною***, а $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ та $\operatorname{ctg}\alpha$ –

непарними.

9.3. Періодичні функції

Поняття «синус», «косинус» і «тангенс» кутів від 0° до 180° відомі учням.

Багато процесів і подій, які відбуваються в навколишньому світі, повторюються через рівні проміжки часу. Наприклад, через 27,3 доби повторюється значення відстані від Землі до Місяця; якщо сьогодні субота, то через 7 діб знову настане субота.

Подібні явища та процеси називають ***періодичними***, а функції, які є їхніми математичними моделями, — ***періодичними функціями***.

Важливо акцентувати увагу учнів на міжпредметні зв’язки, які яскраво виявляються при вивченні даної теми. Більше того, ця тематика тісно пов’язана зі змістовою лінією математичного моделювання в шкільному курсі математики і вчителю корисно приділити увагу цим аспектам як при поясненні нового матеріалу так і при закріпленні знань на уроках алгебри і початків аналізу.

Відомо, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x-2\pi)=\sin x=\sin(x+2\pi);$$

$$\cos(x-2\pi)=\cos x=\cos(x+2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються зі зміною аргументу на 2π. Функції $y=\sin x$ і $y=\cos x$ є прикладами періодичних функцій.

Означення 23. *Функцію f називають* ***періодичною****, якщо існує таке число $T\neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності*

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

Число T називають ***періодом*** *функції f.*

Виконання рівностей $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$ для будь-якого $x\in D(f)$ означає, що область визначення періодичної функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ і $(x_0 + T) \in D(f)$.

Раніше було показано, що для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x \;=\; \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Також для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ виконуються рівності:

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x \;=\; \operatorname{ctg}(x + \pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс і котангенс є періодичними з періодом π.

Варто також показати, що не лише тригонометричні функції можуть мати властивість періодичності. Залежно від рівня класу можна навести різні приклади такі як дробова частина числа, функція Діріхле, стала функція або, наприклад, функція

$$y = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x - \text{парне}, \\ 1, & \text{якщо } x - \text{непарне}, \end{cases} \quad \text{де } x \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо деякі властивості періодичних функцій. Для кращого сприйняття учнями матеріалу варто ілюструвати твердження.

Теорема 8. *Якщо число T є періодом функції f, то й число $-T$ також є періодом функції f.*

Справедливість цієї теореми випливає з означення періодичної функції.

Справді, розглянемо наприклад функцію

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Значення $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, але можна розглянути і цю ж рівність і в іншому вигляді $\operatorname{tg}\big(x + (-\pi)\big) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\big(x - (-\pi)\big)$, отже число $-\pi$ також період.

Слід зауважити, що тоді для довільної функції достатньо довести рівність $f(x) = f(x + T)$ при довільних x із області визначення, щоб стверджувати, що функція періодична.

Твердження. *Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції f, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції f.*

Наслідок. *Якщо число* T *є періодом функції* f, *то будь-яке число виду* nT, *де* $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, *також є її періодом*.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, є періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Перевіримо це твердження для $y = \sin x$:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x + 2\pi n - 2\pi) = \sin(x + 2\pi(n-1)).$$

Продовжуючи аналогічно, віднімемо період ще $n - 1$ раз, отримаємо:

$$\sin(x + 2\pi(n-1)) = \sin(x + 2\pi(n-1) - 2\pi) = \sin\big(x + 2\pi(n-2)\big) = \cdots = \sin\big(x - 2\pi(n-n)\big) = \sin x.$$

Отже, дійсно $T = 2\pi n$ при будь-яких цілих n є періодом функції $y = \sin x$.

Можна показати, що будь-яке число виду $\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, є періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Наступне твердження спирається на геометричні перетворення графіків функцій, тому перед його формулюванням варто повторити з учнями властивості геометричного перетворень $f(x) \to f(kx)$ та $f(x) \to f(x + b)$, звернувши увагу на те, що при перетворенні $f(x) \to f(kx)$ всі абсциси діляться на k.

Теорема 9. *Якщо число* T *є періодом функції* $y = f(x)$, *то число* $\frac{T}{k}$, *де* $k \neq 0$, *є періодом функції* $y = f(kx + b)$.

Якщо серед усіх періодів функції існує найменший додатний період, то його називають ***головним періодом*** функції.

Теорема 10. *Головним періодом функцій* $y = \sin x$ *і* $y = \cos x$ *є число* 2π; *головним періодом функцій* $y = \operatorname{tg} x$ *і* $y = \operatorname{ctg} x$ *є число* π.

Зазначимо, що не будь-яка періодична функція має головний період. Наприклад, функція $y = c$, де c — деяке число, є періодичною. Очевидно, що будь-яке дійсне число, відмінне від нуля, є її періодом. Отже, ця функція не має головного періоду.

Теорема 11. *Якщо* T *— головний період функції* f, *то будь-який період функції* f *має вигляд* nT, *де* $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Теореми 8 – 11 даються з доведенням [27].

На рисунку 59 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

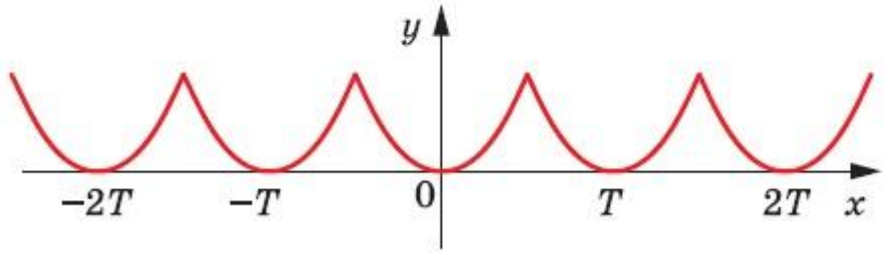


Рис. 59. Ілюстрація графіка періодичної функції з періодом T

Фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0;\ T]$, $[T;\ 2T]$, $[2T;\ 3T]$ і т. д., а також на проміжках $\left[-T;\ 0\right]$, $\left[-2T;\ -T\right]$, $\left[-3T;\ -2T\right]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яку із цих фігур можна отримати з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT;\ 0)$, де n — деяке ціле число.

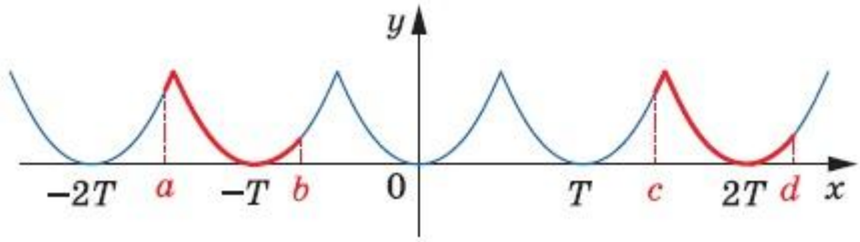


Рис. 60. Ілюстрація графіка періодичної функцій

Узагалі, якщо проміжки $[a;\ b]$ і $[c;\ d]$ є такими, що $c = a + Tn$, $d = b + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, то частини графіка функції f на цих проміжках є рівними фігурами (рис. 60).

Означення 24. *Додатні числа a і b називають **сумірними** (**спільномірними**), якщо $\frac{a}{b}$ — раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ — ірраціональне число, то числа a і b є **несумірними**.*

Наприклад, числа в парах 3 і 5, $\sqrt{5}$ і $\sqrt{32}$ є сумірними, а числа 1 і $\sqrt{2}$ є несумірними.

Означення 25. *Число T, що є як періодом функції f, так і періодом функції g, називають **спільним періодом** функцій f і g.*

Наприклад, число $T = 2\pi$ є спільним періодом функцій $y = \sin x$ і

$y = \mathrm{ctg}\, x$.

Теорема 12. *Якщо існують період T_f функції f і період T_g функції g такі, що числа T_f і T_g є сумірними, то функції f і g мають спільний період*.

Слід зауважити, що для пошуку спільного періоду функцій з сумірними періодами можна використати один з наступних принципів.

Якщо потрібно знайти спільний період двох функцій і оскільки за означенням $\frac{T_f}{T_g} = \frac{a}{b}$, то

$$T_{\text{спільний}} = b \cdot T_f = a \cdot T_g.$$

Для пошуку спільного періоду кількох функцій f_1 , f_2 , … , f_k з сумірними періодами $T_1 = \frac{m_1}{n_1} \cdot p$, $T_2 = \frac{m_2}{n_2} \cdot p$, … $T_k = \frac{m_k}{n_k} \cdot p$, де $\frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{R}$ відповідно можна скористатись наступною формулою

$$T_{\text{спільний}} = \frac{\text{НСК}(m_1, m_2, \dots, m_k)}{\text{НСД}(n_1, n_2, \dots, n_k)} \cdot p.$$

Наприклад, спільним періодом функцій, періодами яких є $\frac{4\sqrt{2}}{15}, \frac{9\sqrt{2}}{25}, \frac{6\sqrt{2}}{35}$, буде

$$T_{\text{спільний}} = \frac{\text{НСК}(4,9,6)}{\text{НСД}(15,25,35)} \cdot \sqrt{2} = \frac{36\sqrt{2}}{5}.$$

Приклад 19. Знайдіть період функції

$$y = \cos\frac{6x}{5} + \mathrm{tg}\frac{6x}{7}.$$

Розв'язання. Якщо ми знайдемо спільний період функцій

$$f(x) = \cos\frac{6x}{5} \quad і \quad g(x) = \mathrm{tg}\frac{6x}{7},$$

то цим самим знайдемо період даної функції.

Скориставшись теоремою 12, запишемо:

$$T_f = 2\pi : \frac{6}{5} = \frac{5}{3} \cdot \pi, \qquad T_g = \pi : \frac{6}{7} = \frac{7}{6} \cdot \pi.$$

Тоді

$$\frac{T_f}{T_g} = \frac{10}{7}.$$

Отже, періоди T_f і T_g є сумірними, а тому функції f і g мають спільний період T. Він дорівнює $7T_f$ або $10T_g$, тобто $T = \frac{35\pi}{3}$.

Використовуючи другий спосіб маємо

$$T = \frac{\text{НСК}(5{,}7)}{\text{НСД}(3{,}6)} \cdot \pi = \frac{35}{3}\pi.$$

Відповідь: $\frac{35\pi}{3}$.

9.4. Властивості і графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу досліджувати їхні властивості та будувати графіки за такою схемою.

Крок 1. *Розглянути проміжок виду* $[a;\ a+T]$, *тобто довільний проміжок завдовжки в період* T (*найчастіше вибирають проміжок* $[0;\ T]$ *або проміжок* $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$).

Крок 2. *Дослідити властивості функції на вибраному проміжку*.

Крок 3. *Побудувати графік функції на цьому проміжку*.

Крок 4. *Здійснити паралельне перенесення отриманої фігури на вектори з координатами* $(nT;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції [27].

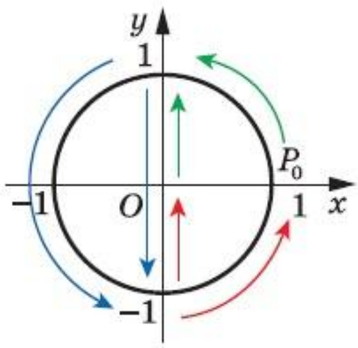


Рис. 61. Ілюстрація повороту точки P_0 на одиничному колі

Під час повороту точки $P_0(1;\ 0)$ навколо початку координат на кути від

0 до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола збільшується від 0 до 1 (рис. 61). Це означає, що функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Під час повороту точки $P_0(1;\ 0)$ на кути від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола зменшується від 1 до -1 (рис. 58). Отже, функція $y = \sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Під час повороту точки $P_0(1;\ 0)$ на кути від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π ордината точки одиничного кола збільшується від -1 до 0 (рис. 61). Таким чином, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ має три нулі: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; якщо $x \in (\pi;\ 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ досягає найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Функція $y = \sin x$ при значеннях аргументу на відрізку $[0;\ 2\pi]$ набуває всіх значень із проміжку $[-1;\ 1]$.

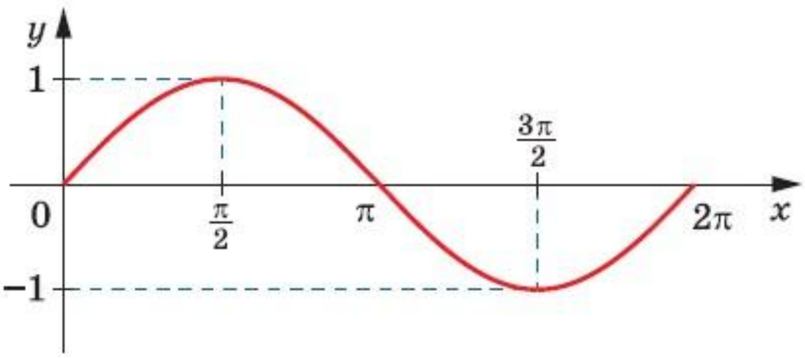


Рис. 62. Графік функції $y = \sin x$ **на проміжку** $[0;\ 2\pi]$

Отримані властивості функції $y = \sin x$ дають змогу побудувати її графік на відрізку $[0;\ 2\pi]$ (рис. 62). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких аргументів, наприклад, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$ та $\left(\frac{11\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$.

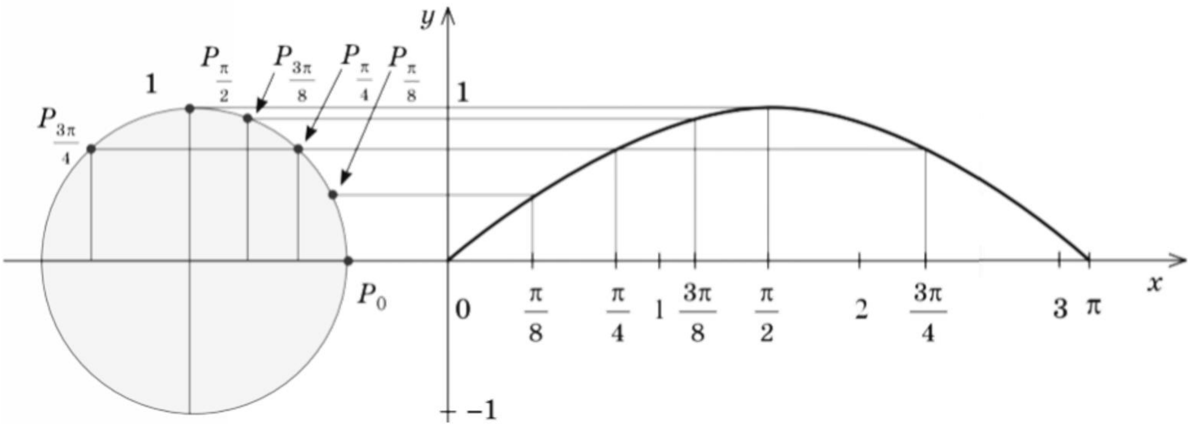


Рис. 63. Графік функції $y = \sin x$

Ще один спосіб достатньо точної побудови графіка синуса проілюстровано на рисунку 63. Його головний принцип полягає в тому, що значення синуса – це ордината відповідної точки одиничного кола, отже можна за допомогою лінійки перенести значення з одиничного кола на графік. Враховуючи непарність, можна обійтись і півколом, відобразивши симетрично відносно початку координат криву побудовану на проміжку $[0; \pi]$ на проміжок $[-\pi; 0]$. Запропонуйте учням виготовити трафарет у вигляді одиничного кола, який пришвидшить побудову графіка синуса.

На всій області визначення графік функції $y = \sin x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 64).

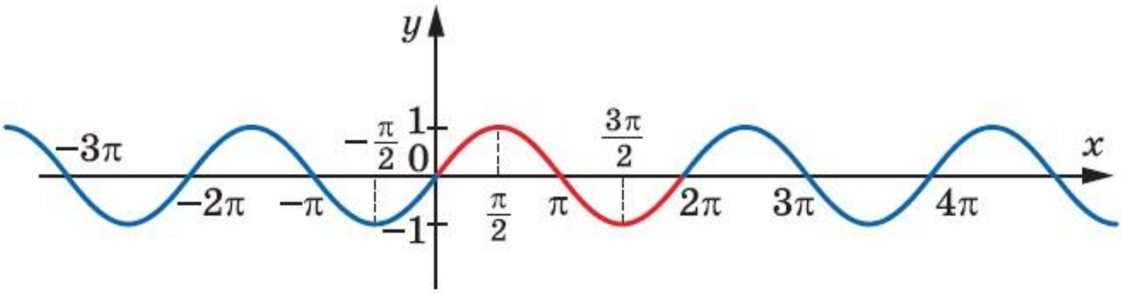


Рис. 64. Графік функції $y = \sin x$

Графік функції $y = \sin x$ називають ***синусоїдою***.

Вище було встановлено, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Це означає, що ***функція синус є непарною***.

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

Розглядаючи повороти точки $P_0(1;\ 0)$ навколо початку координат, можна дійти таких висновків.

Функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і зростає на проміжку $[\pi;\ 2\pi]$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має два нулі $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

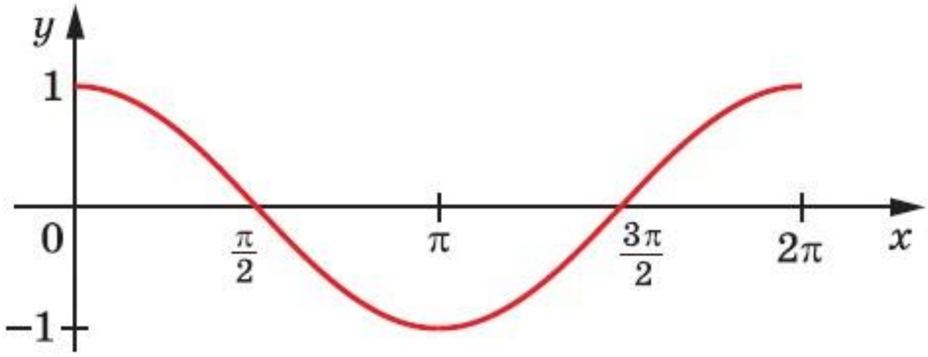


Рис. 65. Графік функції $y = \cos x$ **на проміжку** $[0;\ 2\pi]$

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ досягає найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = 0$ або $x = 2\pi$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \pi$.

Функція $y = \cos x$ при значеннях аргументу на відрізку $[0;\ 2\pi]$ набуває всіх значень із проміжку $[-1;\ 1]$.

Графік функції $y = \cos x$ на відрізку $[0;\ 2\pi]$ зображено на рисунку 65.

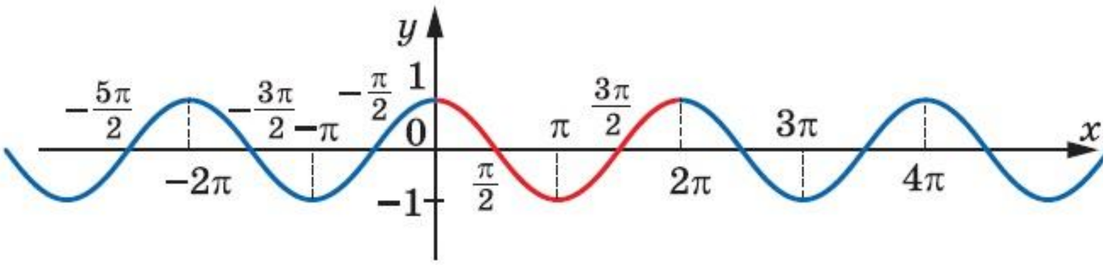


Рис. 66. Графік функції $y = \cos x$

На всій області визначення графік функції $y = \cos x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис.66).

Графік функції $y = \cos x$ називають ***косинусоїдою***.

Вище було встановлено, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Це означає, що ***функція косинус є парною***.

Зважаючи, що $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ і геометричні перетворення графіків функцій є універсальними, то стає зрозуміло, що графік функції $y = \cos x$ можна отримати як результат паралельного перенесення графіка функції $y = \sin x$ на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ (рис. 67). Це означає, що графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є рівними фігурами.

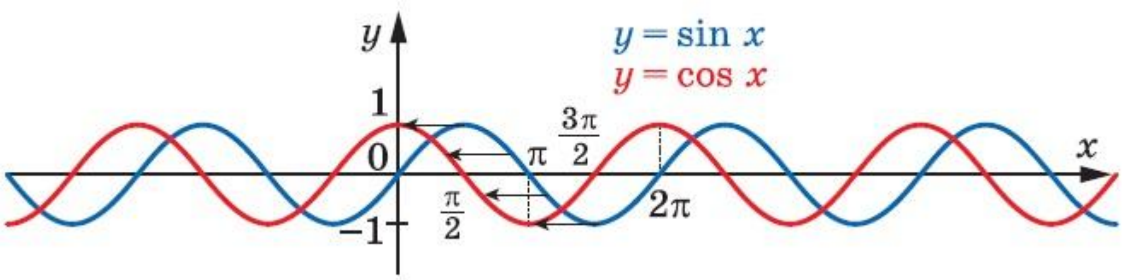


Рис. 67. Ілюстрація як з графіка функції $y = \sin x$ **отримати** $y = \cos x$

Узагальнимо властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ у вигляді таблиці.

Властивість	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом 2π	Періодична з головним періодом 2π
Нулі функції	Числа виду $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	Числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\sin x < 0$ на кожному	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\cos x < 0$ на кожному з

	з проміжків виду $(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.	проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Парність	Непарна	Парна
Зростання/ Спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n;\ \ 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$; Спадає на кожному з проміжків виду $[\ 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для кращого засвоєння теми наведені приклади мають, з одного боку, йти у порядку зростання рівня їх складності, а з іншого, звертати увагу на ті властивості тригонометричних функцій, які поєднують даний матеріал з іншими темами, що вивчались або будуть вивчатись у курсі алгебри.

Наприклад, при розв’язуванні прикладів на побудову графіків тригонометричних функцій можна виконати побудову за допомогою геометричних перетворень графіка функції.

Приклад 20. Побудуйте графік функції

$$y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|.$$

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1. $y = \sin x \longrightarrow y = \sin|x|$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$;
2. $y = \sin|x| \longrightarrow y = \sin|2x|$ — стискання до осі ординат у 2 рази; $y = \sin|2x| \longrightarrow y = \sin\left|2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ паралельне перенесення вздовж

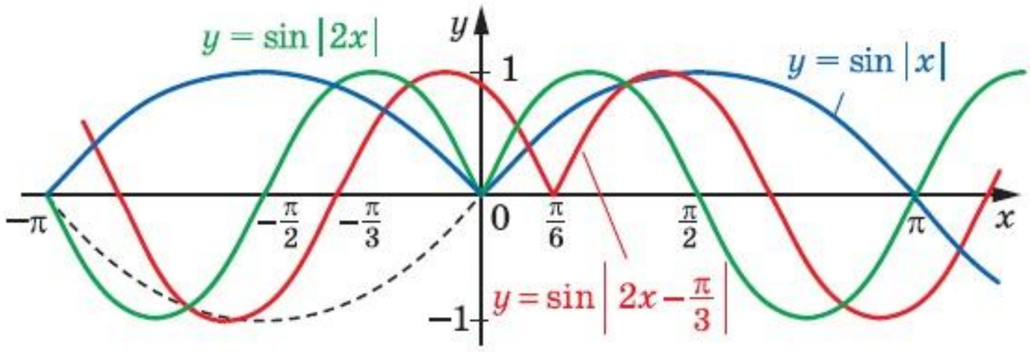


Рис. 68. Ілюстрація побудови графіка функції $y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|$

осі абсцис управо на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 68).

Після побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень корисно звернути увагу учнів на те, як конкретні геометричні перетворення впливають на область визначення та область значення тригонометричної функції.

9.5. Властивості і графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{tg} x$ у точках $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ невизначена) [27]. Важливо зауважити, що вибір такого проміжку зумовлюється тим, що функція тангенса визначена у кожній точці інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Використання одиничного кола з осями тангенса і котангенса забезпечує наочність при дослідженні властивостей функцій.

З рисунка 69.а) видно, що зі зміною кута повороту x від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значення тангенса збільшуються. Це означає, що функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Також з рисунка 69.а) видно, що функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $(-\infty; +\infty)$.

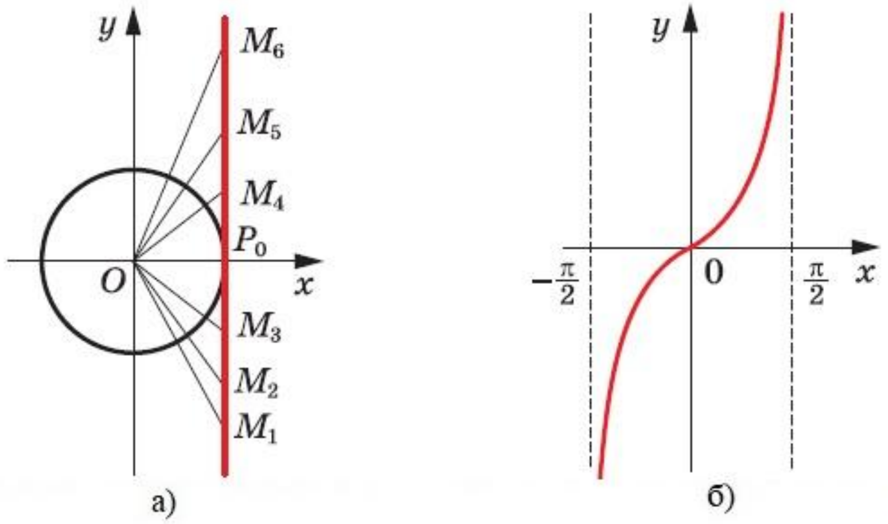


Рис. 69. Ілюстрація побудови графіка функції $y = \operatorname{tg} x$

Функція $y = tg\ x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має один нуль: $x = 0$.

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\operatorname{tg} x < 0$; якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

При наближенні аргументу функції до $-\frac{\pi}{2}$ справа значення функції стають нескінченно малими, а при наближенні до $\frac{\pi}{2}$ зліва – нескінченно великими, а графік даної функції не має спільних точок з прямими $x = -\frac{\pi}{2}$ та $x = \frac{\pi}{2}$.

Отримані властивості функції $y = \operatorname{tg} x$ дають змогу побудувати її графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 69.б). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів.

На всій області визначення графік функції $y = \operatorname{tg} x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 70).

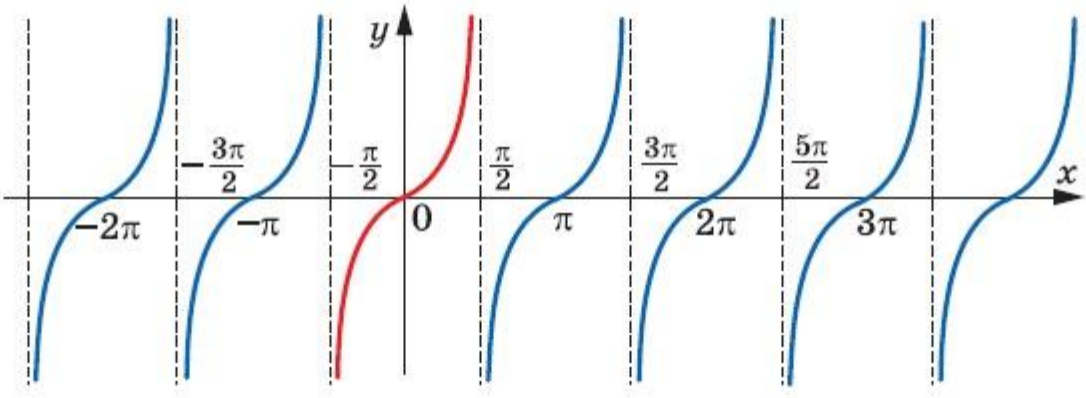


Рис. 70. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ у точках 0 і π невизначена). Важливо зауважити, що вибір такого проміжку зумовлюється тим, що функція котангенса визначена у кожній точці інтервалу $(0; \pi)$.

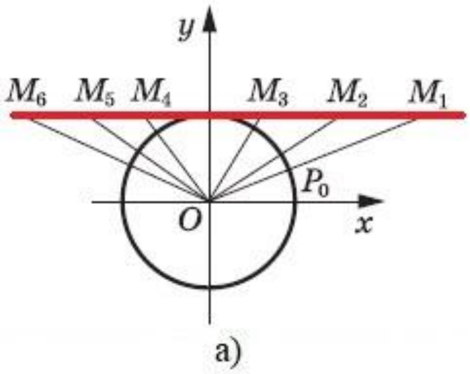
З рисунка 71.а) видно, що зі зміною кута повороту x від 0 до π значення котангенса зменшуються. Це означає, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на проміжку $(0;\ \pi)$.

Також з рисунка 71.а) видно, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0;\ \pi)$ набуває всіх значень із проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0;\ \pi)$ має один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{ctg} x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\operatorname{ctg} x < 0$.

При наближенні аргументу функції до 0 справа значення функції стають нескінченно великими, а при наближенні π зліва – нескінченно малими, а графік даної функції не має спільних точок з прямими $x = 0$ та $x = \pi$.



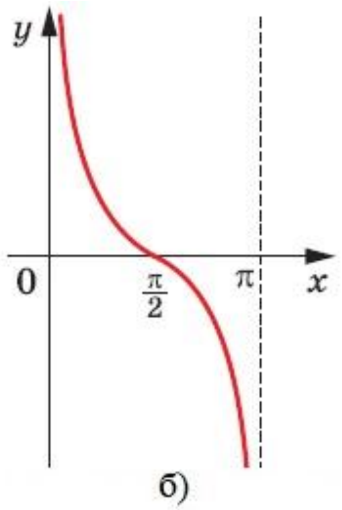


Рис. 71. Ілюстрація побудови графіка функції $y = \text{ctg}\,x$

Графік функції $y = \text{ctg}\,x$ на проміжку $(0; \pi)$ зображено на рисунку 71.б).

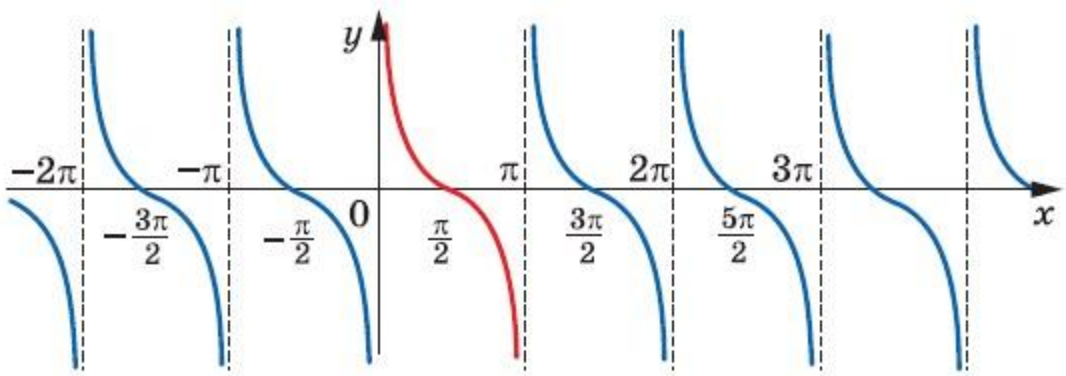


Рис. 72. Графік функції $y = \text{ctg}\,x$

На всій області визначення графік функції $y = \text{ctg}\,x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 72).

Області визначення кожної з функцій $y = \text{tg}\,x$ і $y = \text{ctg}\,x$ є симетричними відносно початку координат (перевірте це самостійно).

Крім того, справедливі рівності:

$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha;$$

$$\text{ctg}\,(-\alpha) = -\text{ctg}\,\alpha.$$

Отже, ***функції тангенс і котангенс — непарні***.

У таблиці наведено основні властивості функцій $y = \text{tg}\,x$ і $y = \text{ctg}\,x$.

Властивість	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область визначення	$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle\|\, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$
Область значень	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом π	Періодична з головним періодом π
Нулі функції	Числа виду πn, $n \in \mathbb{Z}$	Числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}\pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Парність	Непарна	Непарна
Зростання/ Спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває.	Найбільшого і найменшого значень не набуває.

Означення 26. *Функцію f називають **обмеженою**, якщо існує число M таке, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.*

Зрозуміло, що функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є обмеженими, а функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ не є обмеженими.

9.6. Властивості і графіки обернених тригонометричних функцій

Оскільки введення поняття обернених тригонометричних функцій безпосередньо пов'язаний з властивостями взаємно обернених функцій, то вивчення варто розпочати з їх повторення.

Оскільки областю значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1;\ 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leq 1$, це рівняння має корені, причому їх безліч.

Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом 2π, то кожен з коренів рівняння $\sin x = b$ відрізняється від одного зі знайдених коренів на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Винятком є лише нулі функції $y = \sin x$, які відрізняються одне від одного на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ на якому функція синуса є монотонною і набуває всіх своїх можливих значень. Тоді на цьому проміжку для кожного значення ординати знайдеться і єдине значення аргументу функції, що йому відповідає. Таким чином, для кожного значення b знайдеться єдине значення $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що при $\sin \alpha = b$.

Тоді корені рівняння $\sin x = b$ можна задати формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \ \text{ і } \ x = \pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ці дві формули можна замінити одним записом:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Остання формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\sin x = b$. Корінь α має спеціальну назву — *арксинус*.

Означення 27. ***Арксинусом*** *числа b, де $|b| \leq 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.*

Повторення аналогічних міркувань для функцій $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ приводять до таких означень [27].

Означення 28. ***Арккосинусом*** *числа b, де $|b| \leq 1$, називають таке* *число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, косинус якого дорівнює b.*

Означення 29. ***Арктангенсом*** *числа b, називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.*

Означення 30. ***Арккотангенсом*** *числа b, де $|b| \leq 1$, називають таке число α з проміжку $(0;\ \pi)$, котангенс якого дорівнює b.*

Дослідимо відповідні обернені тригонометричні функції.

Для будь-якого $\alpha \in [-1;\ 1]$ рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arcsin a$ (рис. 73). Отже, кожному числу x із проміжку $[-1;\ 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що $y = \arcsin x$ [27].

Область визначення та область значення функції. Указане правило задає функцію $f(x) = \arcsin x$ із областю визначення $D(f) = [-1;\ 1]$ та областю значень $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \sin x$ із областю визначення $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

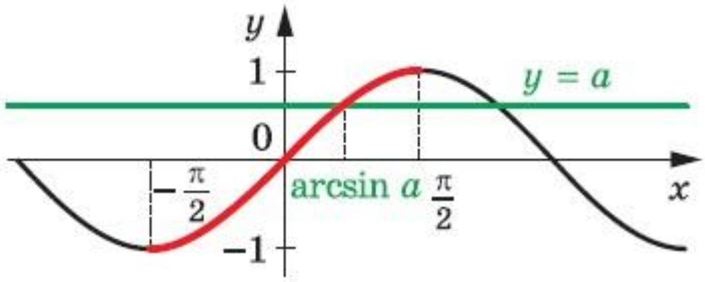


Рис. 73. Графік функції $y = \sin x$

Справді, $D(f) = E(g) = [-1;\ 1]$; $E(f) = D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

З означення арксинуса випливає, що для всіх x із проміжку $[-1;\ 1]$ виконується рівність

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f\big(g(x)\big) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ виконується рівність

$$\arcsin(\sin x\ ) = x.$$

Визначимо інші властивості функції $f(x) = \arcsin x$.

Нулі функції. Оскільки $\sin 0 = 0$, то і $\arcsin 0 = 0$. Звідси $x_0 = 0$ – є нулем функції $f(x) = \arcsin x$.

Проміжки знакосталості функції. Оскільки при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $\sin x > 0$, а при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ функція $\sin x < 0$, то функція $\arcsin x > 0$ при $x(0; 1]$, а функція $\arcsin x < 0$ при $x \in [-1; 0)$.

Парність функції. Оскільки функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є непарною, то функція $f(x) = \arcsin x$ також є непарною. Інакше кажучи, для будь-якого $x \in [-1;\ 1]$ виконується рівність

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Наприклад,

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Зростання/спадання функції. Функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є зростаючою. Отже, функція $f(x) = \arcsin x$ також є зростаючою (див. теорему 5).

Графік функції. Знову скористаємося тим, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (див. теорему 4).

На рисунку 74 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ побудувати графік функції $f(x) = \arcsin x$.

Для будь-якого $a \in [-1;\ 1]$ рівняння $\cos x = a$ на проміжку $[0;\ \pi]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arccos a$ (рис. 75). Отже, кожному числу x із проміжку $[-1;\ 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $[0; \pi]$ таке, що $y = \arccos x$.

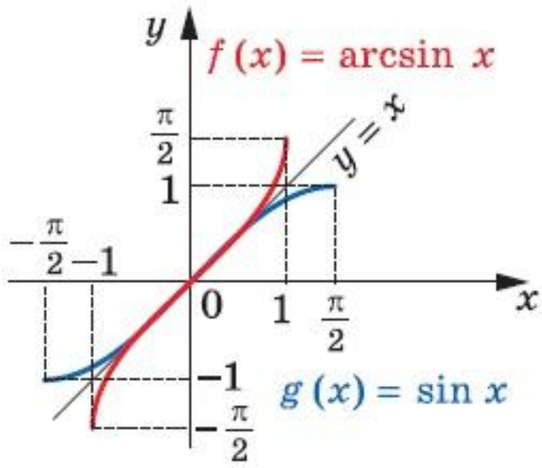


Рис. 74. Графік функції $y = \arcsin x$

Указане правило задає функцію $f(x) = \arccos x$ із областю визначення $D(f) = [-1;\ 1]$ та областю значень $E(f) = [0;\ \pi]$.

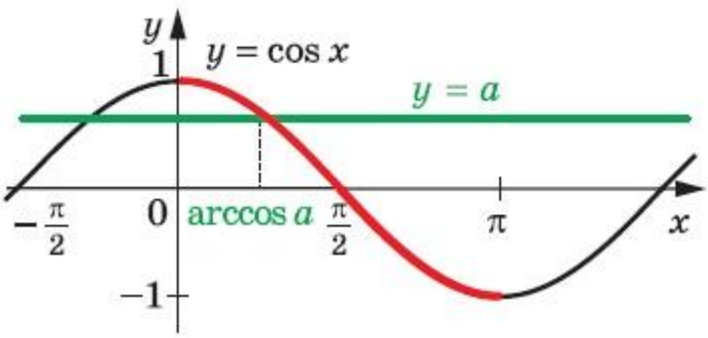


Рис. 75. Графіки функцій $y = \cos x$ **і** $y = a$

Область визначення та область значення функції. Функція f є оберненою до функції $g(x) = \cos x$ із областю визначення $D(g) = [0;\ \pi]$.

Справді, $D(f) = E(g) = [-1;\ 1]$; $E(f) = D(g) = [0;\ \pi]$.

З означення арккосинуса випливає, що для всіх x із проміжку $[-1;\ 1]$ виконується рівність

$$\cos(\arccos x) = x.$$

Іншими словами, $g\big(f(x)\big) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f\big(g(x)\big) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in [0;\ \pi]$ виконується рівність

$$\arccos(\cos x) = x.$$

Нулі функції. Оскільки $\cos 0 = 1$, то $\arccos 1 = 0$. Звідси $x_0 = 1$ – є нулем функції $f(x) = \arccos x$.

Проміжки знакосталості функції. З області значення і визначеного нуля функції випливає, що $\arccos x > 0$ при $x \in [-1; 1)$.

Парність функції. Для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Наприклад,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Отже, функція не є ні парною, ні непарною.

Зростання/спадання функції. Оскільки функція $g(x) = \cos x$, $D(g) = [0; \pi]$, є спадною, то з теореми 5 випливає, що функція $f(x) = \arccos x$ також є спадною.

Графік функції. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Спираючись на це, можна побудувати графік функції $f(x) = \arccos x$ (рис.76.а).

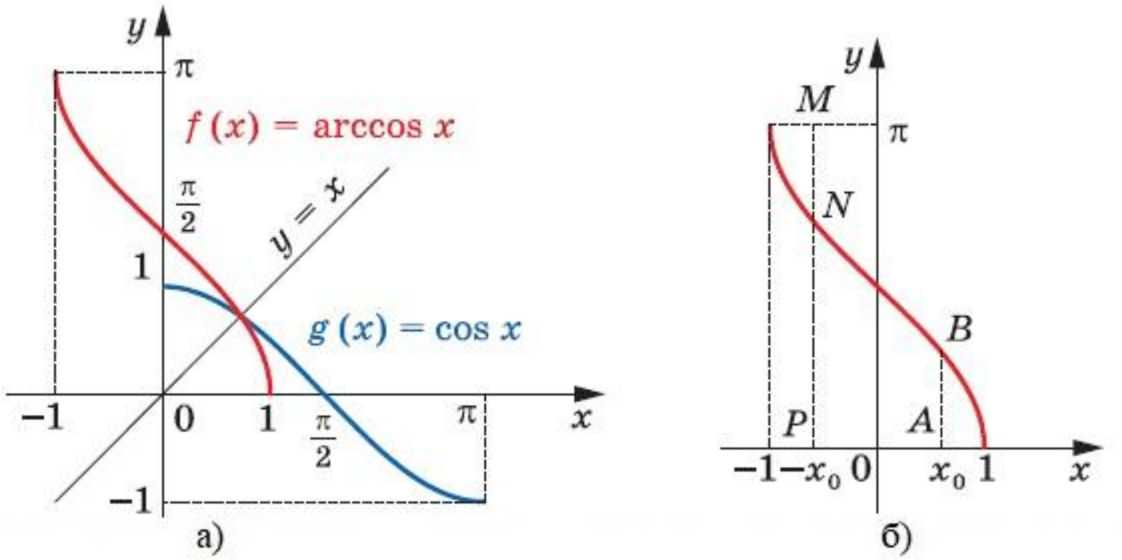


Рис. 76. Графік функції $y = \arccos x$

Ця властивість має просту графічну ілюстрацію. На рисунку 74.б) $AB = MN = \arccos x_0$, $NP = \arccos(-x_0)$, а $MN + NP = \pi$.

Приклад 21. Побудуйте графік функції

$$y = \arcsin(\sin x).$$

Розв'язання. Здається природним припустити, що шуканим графіком є пряма $y = x$. Проте це неправильно, оскільки $\arcsin(\sin x) = x$ лише за умови $|x| \leq \frac{\pi}{2}$.

Дана функція є періодичною з періодом $T = 2\pi$, тому достатньо побудувати її графік на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ завдовжки в період.

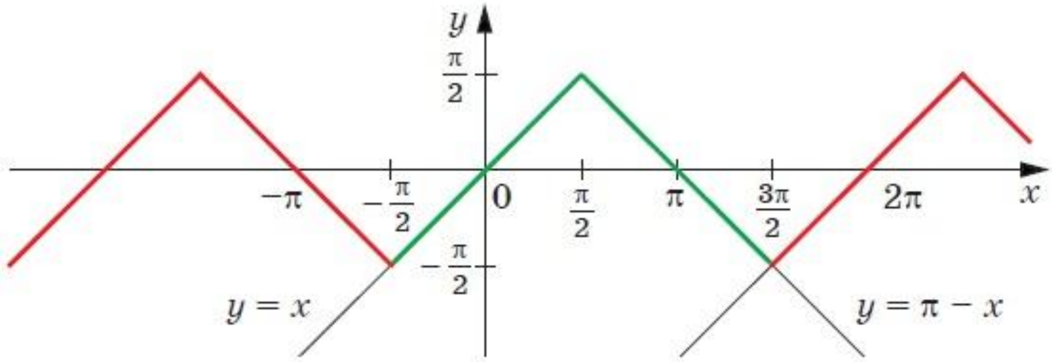


Рис. 77. Графік функції $y = \arcsin(\sin x)$

Якщо $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x$.

Отже, на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = x$.

Якщо $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$, отже, $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

Графік функції $y = \arcsin(\sin x)$ зображено на рисунку 77.

Узагальнимо властивості функцій $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$ у вигляді таблиці.

Властивість	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$
Область визначення	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Область значень	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Нулі функції	$x = 1$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$.	Якщо $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; якщо $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$.

Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання/ Спадання	Спадна	Зростаюча

Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\operatorname{arctg} a$ (рис. 78). Отже, кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $y = \operatorname{arctg} x$ [27].

Область визначення та область значення функції. Указане правило задає функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$ із областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ та областю значень $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \operatorname{tg} x$ із областю визначення $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

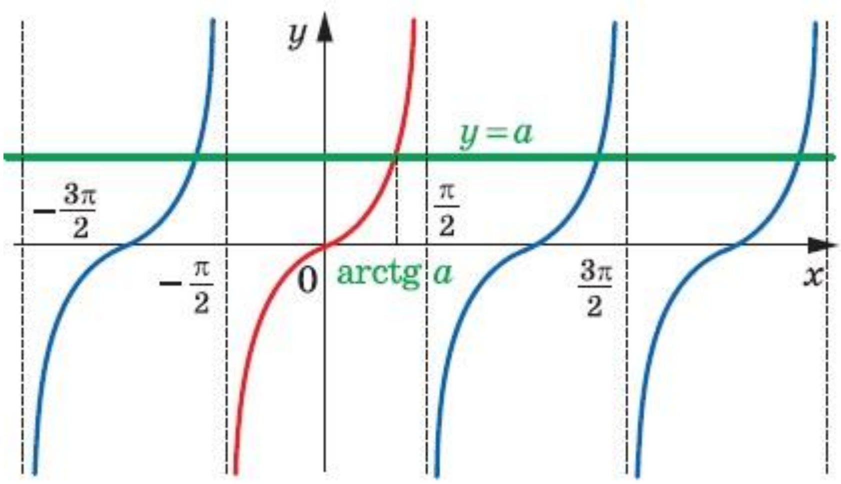


Рис. 78. Ілюстрація розв'язку рівняння $y = \operatorname{arctg} x$

Справді, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$; $E(f) = D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

З означення арктангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо: $f\big(g(x)\big) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується рівність

$$\operatorname{arctg}\,(\operatorname{tg} x) = x.$$

Визначимо інші властивості функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Нулі функції. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ перетинає вісь ординат у точці $(0; 0)$, отже $x_0 = 0$ є нулем функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Проміжки знакосталості функції. При $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $\operatorname{tg} x > 0$, а при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ функція $\operatorname{tg} x < 0$, звідки $\operatorname{arctg} x > 0$ при $x \in (0; 1)$, а $\operatorname{arctg} x < 0$ при $x \in (-1; 0)$.

Парність функції. Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є непарною, то функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є непарною. Інакше кажучи, для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\operatorname{arctg}\,(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Наприклад,

$$\operatorname{arctg}\big(-\sqrt{3}\big) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

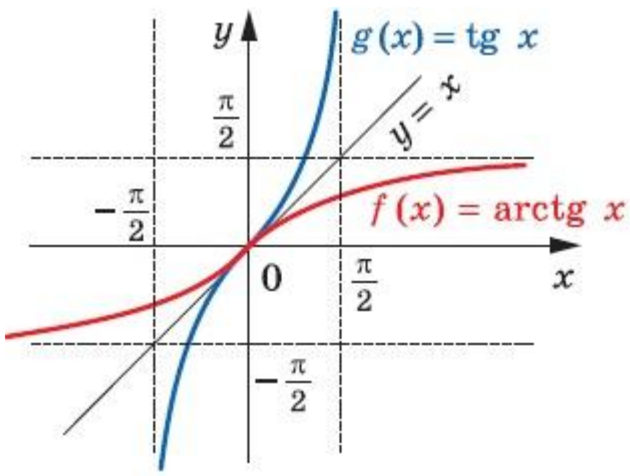


Рис. 79. Побудова графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$

Зростання/спадання функції. Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є зростаючою, то з теореми 5 випливає, що функція

$f(x) = \text{arct}g\, x$ також є зростаючою.

Графік функції. Нагадаємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. На рисунку 79 показано як за допомогою графіка функції $g(x) = \text{tg}\, x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ побудувати графік функції $f(x) = \text{arctg}\, x$.

Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ рівняння $\text{ctg}\, x = a$ на проміжку $(0; \pi)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\text{arcctg}\, a$ (рис. 80). Отже, кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $(0; \pi)$ таке, що $y = \text{arcctg}\, x$ [27].

Область визначення та область значення функції. Указане правило задає функцію $f(x) = \text{arcctg}\, x$ із областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ та областю значень $E(f) = (0; \pi)$.

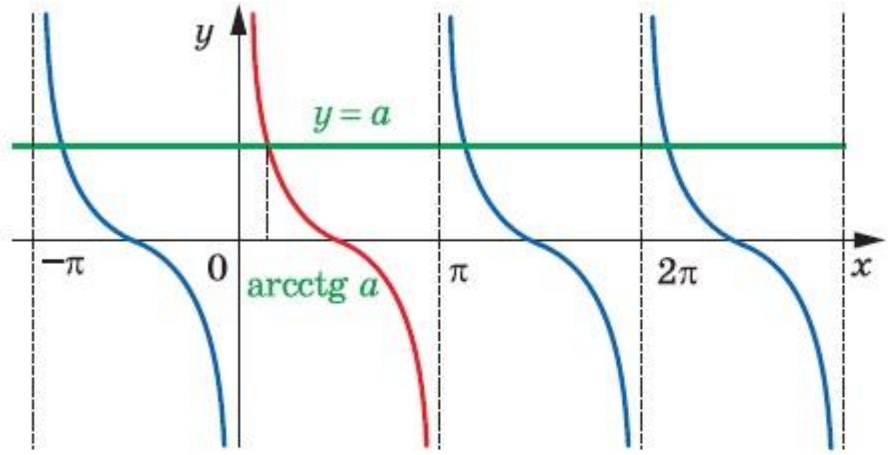


Рис. 80. Ілюстрація розв'язку рівняння $y = \text{arcctg}\, x$

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \text{ctg}\, x$ із областю визначення $D(g) = (0; \pi)$.

Справді, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$; $E(f) = D(g) = (0; \pi)$.

З означення арккотангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\text{ctg}(\text{arcctg}\, x) = x.$$

Іншими словами, $g\big(f(x)\big) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо: $f\big(g(x)\big) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in (0;\pi)$ виконується рівність

$$\operatorname{arcctg}\,(\operatorname{ctg}x) = x.$$

Визначимо інші властивості функції $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Нулі функції. Оскільки графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ не перетинає вісь ординат, то функція $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ не має нулів.

Проміжки знакосталості функції. З області значення випливає, що $\operatorname{arcctg} x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$.

Парність функції. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\operatorname{arcctg}\,(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Наприклад,

$$\operatorname{arcctg}\big(-\sqrt{3}\big) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Отже, функція не є ні парною, ні непарною.

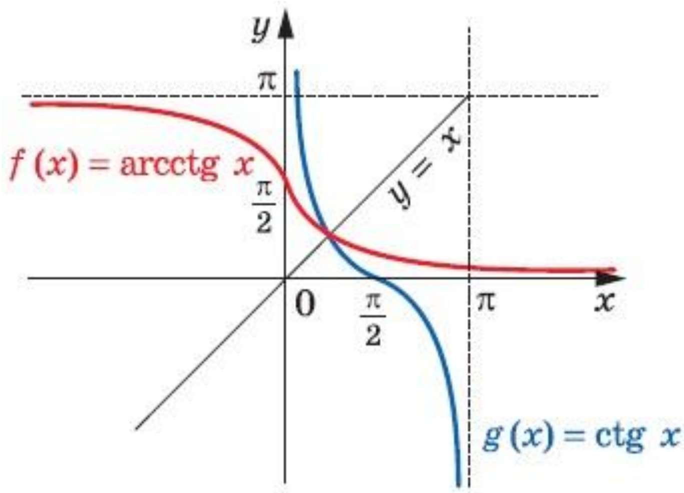


Рис. 81. Побудова графіка функції $y = \operatorname{arcctg} x$

Зростання/спадання функції. Оскільки функція $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0;\pi)$, є спадною, то функція $f(x) = \operatorname{arcct}g\, x$ також є спадною.

Графік функції. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. На рисунку 81 показано як за допомогою графіка функції $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0;\pi)$ побудувати графік функції $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

У таблиці наведено основні властивості функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і

$y = \text{arcctg } x$.

Властивість	$y = \text{arctg}\, x$	$y = \text{arcctg}\, x$
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Нулі функції	$x = 0$	$-$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\text{arctg}\, x < 0$; якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\text{arctg}\, x > 0$.	$\text{arcctg}\, x > 0$ для всіх x.
Парність	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання/ Спадання	Зростаюча	Спадна

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

а) $7 - 5\cos\alpha$; б) $1 + 3\sin^2\alpha$; в) $\frac{1}{1-\cos\alpha}$.

2. При яких значеннях a можлива рівність:

а) $\cos x = a - 4$; б) $\sin x = a^2 - 1$; в) $\cos x = a^2 - 5a + 5$?

3. Знайдіть значення виразу:

а) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\text{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos(-\pi) + 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos^2(-45°) + \sin(-30°) + \sin^2(-60°)$.

4. Відомо, що $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Порівняйте з нулем значення виразу:

а) $\text{tg}\,\alpha\sin\alpha$; б) $\frac{\text{ctg}^3\alpha}{\cos\alpha}$; в) $\cos\alpha - \sin\alpha$.

5. Знайдіть головний період функції:

а) $f(x) = \text{tg}\,(3x + 1)$; б) $f(x) = \sin\sqrt{2}x$; в) $f(x) = \cos 4\pi x$.

6. Знайдіть період функції:

а) $f(x) = \cos\frac{5x}{2} + \operatorname{tg} 4x$; б) $f(x) = \cos 2\pi x - 3\cos\frac{\pi x}{2}$.

7. Дослідіть на парність функцію:

а) $f(x) = \frac{x\sin x}{1+\cos x}$; б) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3 \sin x$; в) $f(x) = \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.

8. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$; б) $y = 3\cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$.

9. Побудуйте графік функції:

а) $y = -\operatorname{ctg} x + 1$; б) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = 2\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \arcsin(x+1)$; б) $y = \arccos\sqrt{1-x}$;

в) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; г) $y = \sqrt{\pi - \operatorname{arcctg} x}$.

11. Знайдіть область значень функції:

а) $y = \operatorname{arctg} x + 4$; б) $y = 2\sqrt{\operatorname{arcctg} x}$; в) $y = \frac{1}{\arccos x}$.

12. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2\operatorname{arctg} x + \pi$; б) $y = -\operatorname{arcctg} x + 2\pi$;

в) $y = 2\arcsin x - \frac{\pi}{2}$; г) $y = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

10. Похідна та її застосування для дослідження функцій

Математика займає особливе місце у системі знань людства, виконуючи роль універсального та потужного методу сучасної науки. Тому особливу увагу варто приділити з’ясуванню ролі математики в сферах її застосувань. Зокрема, забезпечити засобами математики формування в учнів правильних уявлень про математичне моделювання та навчити школярів застосувати його до розв’язування широкого кола прикладних задач.

Для курсу «Алгебра і початки аналізу» однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна, тому у процесі навчання приділяється особлива увага дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі. Як вже зазначалося раніше, одним із головних завдань вивчення математики на профільному рівні є також розвиток графічної культури учнів, що зумовлено практичними потребами, тому особливу увагу при вивченні функцій слід приділити формуванню в учнів умінь будувати ескіз графіка функції, заданої аналітичним виразом, встановлювати її неперервність, точки розриву, проміжки зростання та спадання, знакосталості, найбільше та найменше значення.

До поняття похідної приводять багато задач природознавства, математики, техніки. Тому його доцільно вводити як узагальнення результатів розв'язування відповідних прикладних задач. Це одразу виділяє головний прикладний зміст поняття, робить його більш природним і доступним для сприйняття. При формуванні поняття похідної слід виробляти розуміння того, що похідна моделює не лише швидкість механічного руху, а й швидкість зміни будь-якого процесу з часом (наприклад, швидкість нагрівання тіла, швидкість випаровування тощо). Одночасне вивчення фізичного та геометричного змісту похідної дає можливість показати учням зв'язок між швидкістю протікання процесу та «крутизною» його графіка.

Відтак саме вивчення теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» в 10 класі націлене на формування у школярів цілісної картини щодо властивостей функцій, методології їх дослідження та побудови графіків. Це одна з ключових тем в курсі «Алгебра та початки аналізу», на вивчення якої навчальною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів відводиться 54 години.

10.1. Означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці

Для початку наочне уявлення про границю формується за допомогою графіків диференційовних функцій, тому питання про існування границі в учнів не виникає.

Розглянемо функцію $f(x) = x + 1$ і точку $x_0 = 1$. Якщо значення аргументу x прямують до числа 1 (позначають: $x \to 1$), то відповідні значення функції f прямують до числа 2 (позначають: $f(x) \to 2$) (рис. 82).

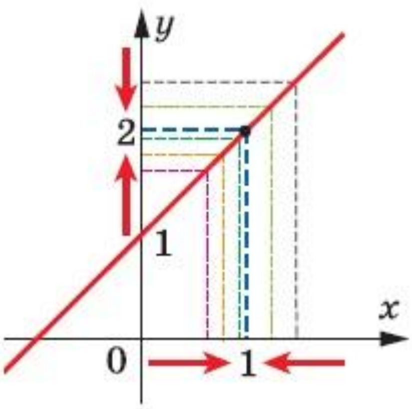


Рис. 82. Ілюстрація границі функції в точці

Іншими словами: якщо значення аргументу брати все ближче й ближче до числа 1, то відповідні значення функції f усе менше й менше відрізнятимуться від числа 2 [27].

У цьому разі говорять, що число 2 є ***границею функції*** f ***у точці*** 1, і записують:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{або} \quad \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

Також використовують такий запис: $f(x) \to 2$ при $x \to 1$.

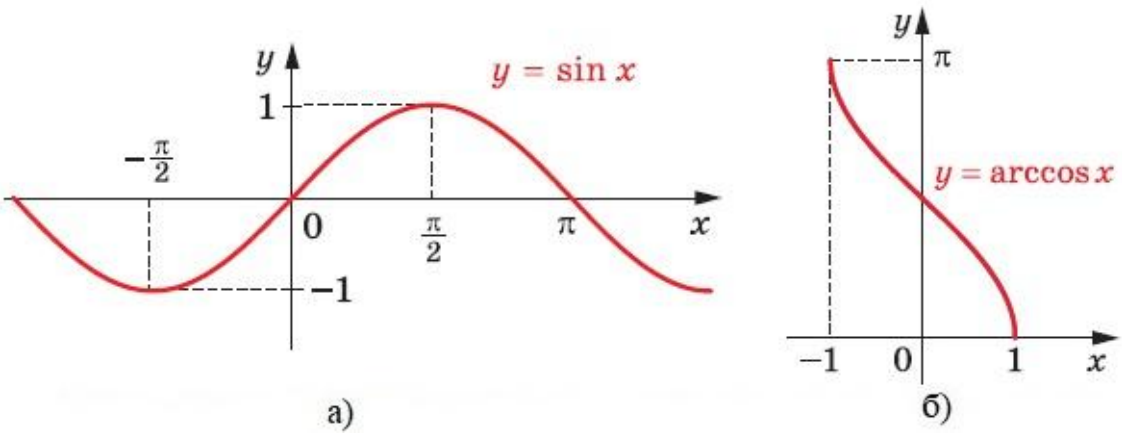


Рис. 83. Графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \arccos x$

Якщо звернутися до рисунків 83, то можна записати:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \sin x = -1, \qquad \lim_{x\to 0} \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Важливо звернути увагу учнів на те, що функція, яка має границю у деякій точці, може і не мати значення в цій точці. Так, наприклад, на рисунку 84.а) зображено графік функції $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. Ця функція невизначена в точці $x_0 = 1$, а в усіх інших точках збігається з функцією $y = x + 1$ (порівняйте рис. 82 і рис. 84.а). Проте якщо значення аргументу x, де $x \neq 1$, прямують до числа 1, то відповідні значення функції $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ прямують до числа 2, тобто

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

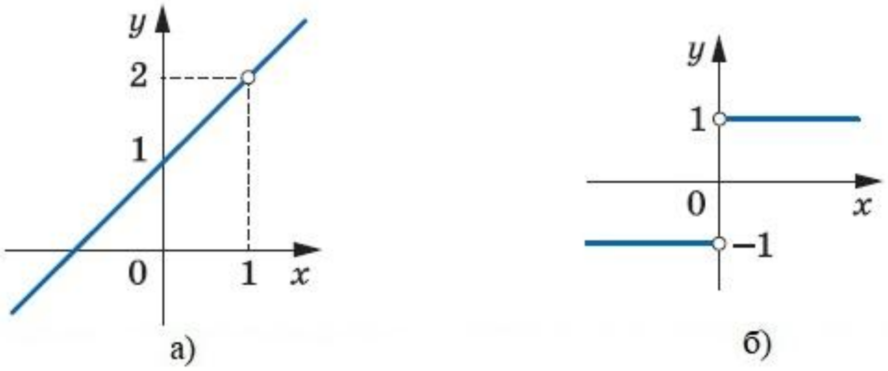


Рис. 84. Графіки функцій $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ і $y = \frac{|x|}{x}$

Отже, що функція $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ невизначена в точці $x = 1$, проте має границю в цій точці, яка дорівнює 2.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{|x|}{x}$. При $x > 0$ отримуємо $f(x) = 1$, при $x < 0$ отримуємо $f(x) =- 1$. Графік функції f зображено на рисунку 84.б).

Якщо значення аргументу x, де $x \neq 0$, прямують до 0, то неможливо стверджувати, що значення функції f прямують до якогось певного числа. Справді, якщо значення аргументу прямують до нуля та є від’ємними, то відповідні значення функції прямують до -1, а якщо значення аргументу прямують до нуля та є додатними, то відповідні значення функції прямують до 1.

Отже, функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ точці $x_0 = 0$ не має границі.

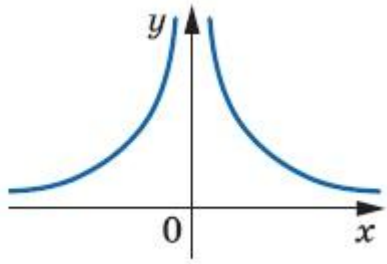


Рис. 85. Графік функції $y = \frac{1}{x^2}$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (рис. 85). Якщо значення x, де $x \neq 0$, прямують до 0, то відповідні значення функції стають усе більшими й більшими та необмежено збільшуються. Це означає, що не існує числа, до якого прямують значення функції f за умови, що значення аргументу прямують до 0.

Отже, функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Ми навели приклади двох функцій, які не визначені в деякій точці та не мають границі в цій точці.

Помилковим було б вважати, що коли функція визначена в деякій точці x_0, то вона обов'язково має границю в цій точці. На рисунку 86 зображено графік функції f, яка визначена в точці x_0, але не має границі в цій точці.

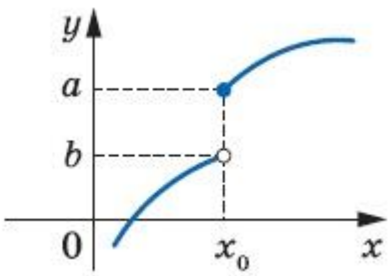


Рис. 86. Ілюстрація випадку, коли функція визначена в точці, але не має в цій точці границі.

Коли учні отримали наочне уявлення про границю функції в точці,можна перейти до формування строгого означення.

Нехай задано функцію f і точку x_0. Далі вважатимемо, що в будь-якому інтервалі, який містить точку x_0, знайдуться точки області визначення функції f, відмінні від точки x_0. Зауважимо, що проміжок виду $(a;\ b)$ називають *інтервалом*, а проміжок виду $[a;\ b]$ — *відрізком*.

Наприклад, на рисунку 87 зображено графік функції f, яка має границю в точці x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Зазначимо, що $f(x_0) \neq a$.

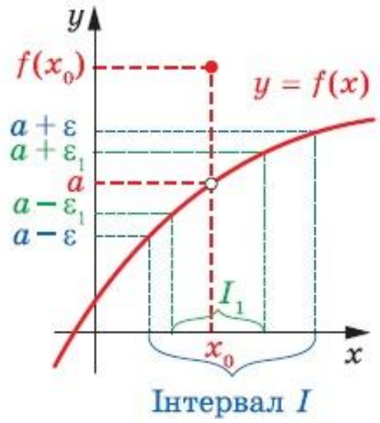


Рис. 87. Ілюстрація функції, яка має границю в точці x_0

Нехай ε — деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. На осі абсцис йому відповідає такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, відповідні значення функції f належать проміжку $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, тобто виконуються нерівності $a-\varepsilon < f(x) < a+\varepsilon$. Іншими словами, для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x)-a| < \varepsilon$.

Звузимо проміжок на осі ординат, тобто розглянемо інтервал $(a-\varepsilon_1;\ a+\varepsilon_1)$, де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тоді й для числа ε_1 можна вказати такий інтервал I_1 осі абсцис, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x)-a| < \varepsilon_1$ (рис. 87).

На рисунку 88.а) зображено графік такої функції f, що $x_0 \notin D(f)$. Рисунок 88.б) відповідає функції f, для якої $f(x_0) = a$.

У кожному з випадків, зображених на рисунках 87–88, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I, який містить точку x_0, що для всіх $x \in I \cap D(f)$ виконується нерівність $|f(x)-a| < \varepsilon$.

Наведені міркування дозволяють дати таке означення границі функції f у точці x_0.

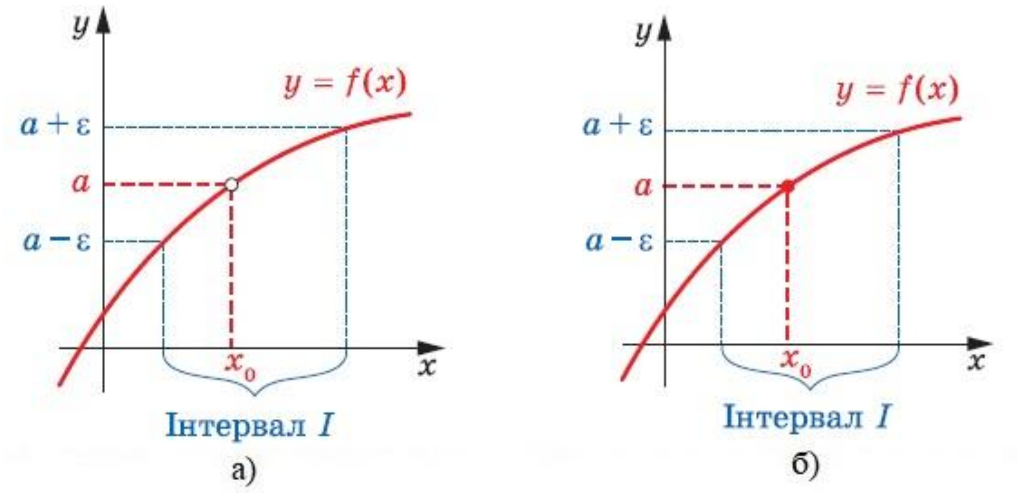


Рис. 88. Ілюстрація графіків функцій, що мають границю в точці x_0

Означення 31. *Число а називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

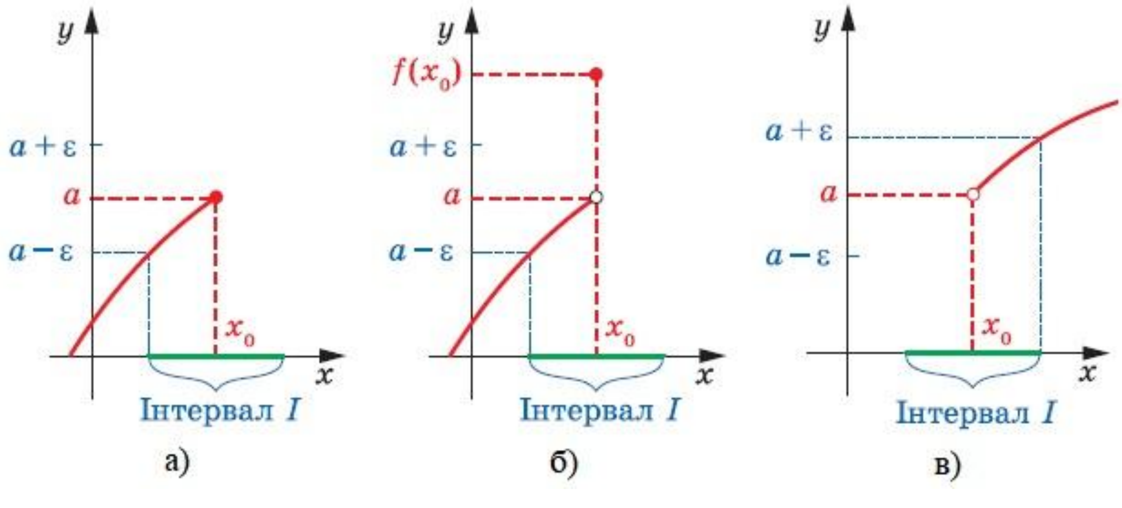


Рис. 89. Ілюстрація графіків функцій і їх границь в точці x_0

Зазначимо, що границя функції в точці x_0 характеризує значення функції навколо точки x_0, тоді як поведінка функції в самій точці x_0 не впливає на значення границі (зверніть увагу на умову $x \neq x_0$ в означенні границі). Отже, для кожної з функцій f, графіки яких зображено на рисунках 87–88, можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

На рисунку 89 точка x_0 є такою, що праворуч (рис. 89.а, 89.б) або ліворуч (рис. 89.в) від неї немає точок, які належать області визначення функції f. При цьому в кожному з випадків для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I, який містить точку x_0, що для всіх $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$. Це означає, що число a є границею функції f у точці x_0.

Знаходити границю функції в точці допомагає така теорема. У ній розглядаються функції, які визначені в одних і тих самих точках деякого інтервалу, який містить точку x_0.

Теорема 13 (про арифметичні дії з границями функцій). *Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають границі в точці x_0, то функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)g(x)$ також мають границі в точці x_0, причому*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Якщо, крім цього, границя функції $y = g(x)$ у точці x_0 відмінна від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0 і

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

Фактично теорема 13 складається із чотирьох теорем, які називають теоремами про границю суми, границю різниці, границю добутку та границю частки.

Варто навести кілька декілька прикладів знаходження границь функцій з використанням даної теореми та описати деякі правила, які можуть полегшити учням їх обчислення.

Приклад 22. Знайти границю $\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3}$.

Розв'язання. На основі згаданих властивостей і рівності $\lim_{x\to 1} x = 1$ маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2)+3} = \frac{4\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x)}{\left(\lim\limits_{x\to 1}(x)\right)^2+3} = \frac{4}{1^2+3} = 1.$$

Відповідь: 1.

Цей самий результат можна дістати, підставляючи у вираз граничне значення х. Тому сформулюємо **перше правило** обчислення границь: *підставити у вираз граничне значення* x. *Якщо отримане скінченне число, границя знайдена*.

Приклад 23. Знайти границю $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}$.

Підставляючи $x = 2$ у вираз, дістанемо $\frac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеністю, оскільки після знаходження границь чисельника і знаменника обидві дорівнюють нулю, а границя усього виразу може бути як конкретним числом, так і нескінченністю, або взагалі може не існувати. Знайти подібну границю означає розкрити невизначеність. Є інші види невизначеностей: $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0\cdot\infty$ тощо.

Друге правило обчислення границь:

У виразі під знаком границі можна виконувати будь-які спрощення, що не суперечать правилам алгебри.

Розв'язання. Розкладемо знаменник на множники. У чисельнику винесемо за дужки число -1 і скоротимо на вираз $(x-2)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

Наведемо ще кілька прикладів із застосуванням другого правила обчислення границь.

Приклад 24. Знайти границю $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}=\frac{5}{3}.$$

Відповідь: $\frac{5}{3}$.

Приклад 25. Знайти границю $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Розв'язання. Домножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

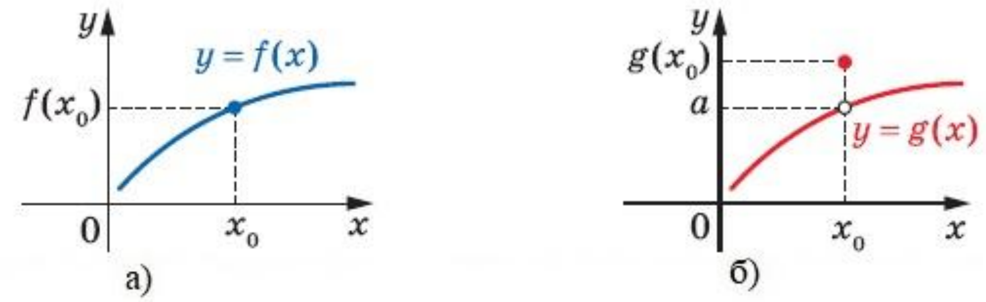


Рис. 90. Ілюстрація графіків функцій і їх границь в точці x_0

На рисунку 90 зображено графіки функцій f і g, які визначені в точці x_0 і мають границю в цій точці. Проте поведінка цих функцій у точці x_0 істотно різниться. Графік функції g, на відміну від графіка функції f, у точці x_0 має розрив. Таку відмінність у поведінці функцій f і g у точці x_0 можна охарактеризувати за допомогою границі.

Для функції g маємо:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0).$$

Для функції f можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Іншими словами: *границя функції f у точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці.* У такому разі говорять, що ***функція f є неперервною в точці*** x_0.

Означення 32. *Якщо виконується рівність*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

*то функцію f називають **неперервною в точці*** x_0.

З рівності

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

випливає, що коли функція f не має границі в точці x_0 або не визначена в цій точці, то вона не може бути неперервною в точці x_0.

Наприклад, функція, графік якої зображено на рисунку 90.б), не є неперервною в точці x_0.

Якщо функція f є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset \mathbb{R}$, то говорять, що вона ***неперервна на множині*** M.

Якщо функція f є неперервною на $D(f)$, то таку функцію називають ***неперервною***.

Наприклад, функція $y = x^2$ неперервна на $\mathbb{R}$, а функція $y = \frac{1}{x^2}$ є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0; +\infty)$, тобто ці функції є неперервними.

Знаходити границю функції в точці та встановлювати неперервність функції в точці за допомогою означень цих понять — задачі трудомісткі. Часто полегшує розв’язування таких задач те, що більшість функцій, якими оперують в шкільному курсі математики, є неперервними. Так, усі тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції, степенева функція, раціональна функція є неперервними.

Неперервні функції мають багато важливих властивостей. Розглянемо деякі з них.

Теорема 14 (перша теорема Больцано – Коші). *Якщо функція* f *є неперервною на відрізку* $[a;\ b]$ *і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка* $c \in (a;\ b)$*, що* $f(c) = 0$ (рис. 91.а).

Наслідок. *Якщо функція неперервна та не має нулів на деякому проміжку* I*, то вона на цьому проміжку зберігає знак* (рис. 91.б).

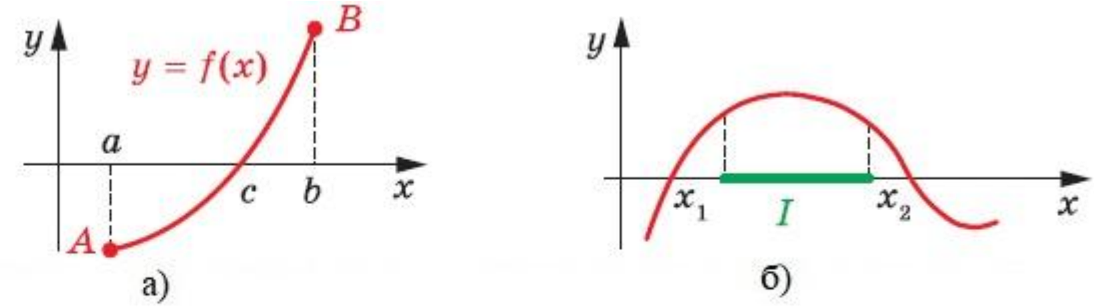


Рис. 91. Ілюстрація теореми Больцано-Коші

Нагадаємо, що цей наслідок лежить в основі методу інтервалів для розв’язування нерівностей.

Теорема 15 (друга теорема Больцано – Коші про проміжне значення). *Якщо функція* f *є неперервною на відрізку* $[a;\ b]$*, то вона набуває всіх значень між* $f(a)$ *і* $f(b)$.

Наслідок. *Якщо областю визначення неперервної функції* f *є деякий проміжок,*

$$\min_{D(f)} f(x) = a, \quad \max_{D(f)} f(x) = b, \quad a \neq b,$$

то $E(f) = [a; b]$.

Вчителю варто підкреслити, що саме цим наслідком ми нерідко користувалися, знаходячи, наприклад, області значень функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$.

Функція $f(x) = \sin x$ є такою, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|\sin x| \leq 1$. Функція $g(x) = x^2$ є такою, що для будь-якого $x \in [-1;\ 2]$ виконується нерівність $|g(x)| < 5$. Говорять, що функція f ***обмежена*** на $D(f)$, а функція g обмежена на відрізку $[-1;\ 2]$.

Узагалі, функцію f називають ***обмеженою на множині*** M, якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$.

Функцію f, обмежену на $D(f)$, називають ***обмеженою***.

Теорема 16 (перша теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона є обмеженою на цьому відрізку.*

Зауважимо, що для проміжків виду $(a;\ b]$, $[a;\ b)$, $(a;\ b)$ твердження теореми не є справедливим. Так, функція $y = \frac{1}{x}$ є неперервною на будь-якому проміжку виду $(0;\ a]$, однак вона не є обмеженою на цьому проміжку. Не будь-яка функція, визначена й обмежена на відрізку $[a;\ b]$, досягає на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень.

Проте для неперервних функцій справедлива така теорема.

Теорема 17 (друга теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то на цьому відрізку вона набуває найбільшого і найменшого значень.*

Доведення цієї теореми виходить за межі шкільного курсу.

Зазначимо, що коли в теоремі 17 відрізок $[a;\ b]$ замінити проміжком іншого виду, наприклад інтервалом $(a;\ b)$, то неперервна на цьому проміжку функція може не набувати найбільшого і найменшого значень. Так, функція $y = x$, яка є неперервною на проміжку $(0;\ 1)$, не досягає на ньому найбільшого і найменшого значень.

10.2. Дотична до графіка функції

З метою формування правильного розуміння поняття приросту, важливо розглянути приклади, які вимагають пошуку різниці значень в двох точках. Особливу увагу варто звернути на приклади, де точки розташовані достатньо близько одне одної.

Якщо функція є математичною моделлю реального процесу, то часто виникає потреба знаходити різницю значень цієї функції у двох точках. Наприклад, позначимо через $f(t)$ і $f(t_0)$ суми коштів, які накопичилися на депозитному рахунку вкладника до моментів часу t і t_0. Тоді різниця $f(t) - f(t_0)$, де $t > t_0$, показує прибуток, який отримає вкладник за час $t - t_0$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f.

Якщо x — довільна точка області визначення функції f така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають ***приростом аргументу функції f у точці*** x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»). Говорячи про приріст аргументу функції f у точці x_0, тут і далі припускатимемо, що в будь-якому інтервалі $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ є точки області визначення функції f, відмінні від x_0. Маємо:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Звідси

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорять, що аргумент отримав приріст Δx у точці x_0.

Зазначимо, що приріст аргументу може бути як додатним, так і від'ємним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Якщо аргумент у точці x_0 отримав приріст Δx, то значення функції f змінилося на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

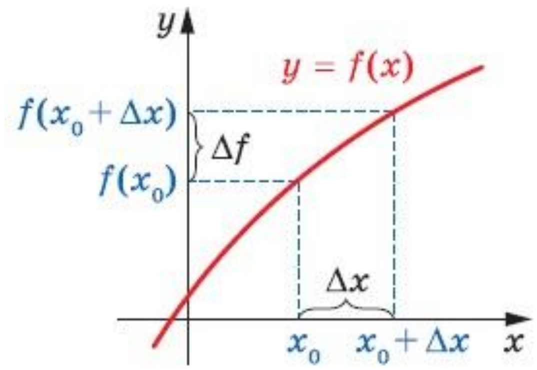


Рис. 92. Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції

Цю різницю називають ***приростом функції f у точці*** x_0, що відповідає приросту аргумента Δx і позначають Δf (читають: «дельта еф»). Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad \text{або} \quad \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Для приросту функції $y = f(x)$ прийнято також позначення Δy, тобто

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \quad \text{або} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δy функції показано на рисунку 92.

Зауважимо, що для фіксованої точки x_0 приріст функції f у точці x_0 є функцією з аргументом Δx.

Приклад 26. Знайдіть приріст функції $y = x^2$ у точці x_0, який відповідає приросту Δx аргументу.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Відповідь: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

Задача про дотичну до графіка функції

Відоме означення дотичної до кола як прямої, що має з колом тільки одну спільну точку, незастосовне у випадку довільної кривої.

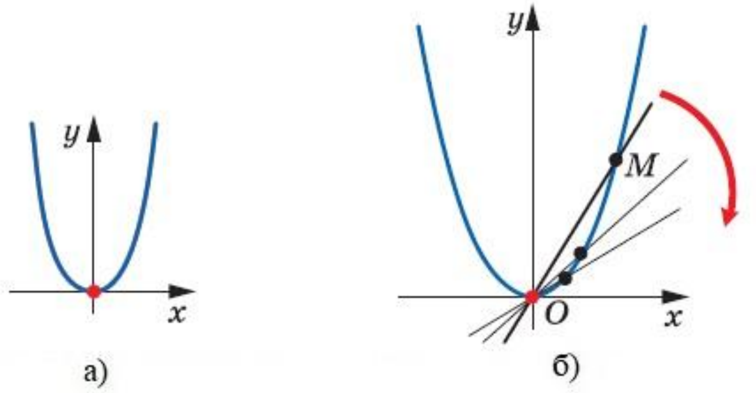


Рис. 93. Графік функції $y = x^2$

Наприклад, вісь ординат має з параболою $y = x^2$ тільки одну спільну точку (рис.93.а). Проте інтуїція підказує, що неприродно вважати цю пряму дотичною до цієї параболи. Разом з тим у курсі алгебри ми нерідко казали, що парабола $y = x^2$ дотикається до осі абсцис у точці $x_0 = 0$.

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай M — деяка точка, що лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM, яку назвемо січною (рис. 93.б). Уявимо собі, що точка M, рухаючись по параболі, наближається до точки O. При цьому січна OM буде повертатися навколо точки O. Тоді кут між прямою OM та віссю абсцис ставатиме все меншим і меншим, а січна OM прагнутиме зайняти положення осі абсцис. Пряму, положення якої прагне зайняти січна OM з наближенням точки M до точки O, називатимемо дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O.

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точку $M_0\big(x_0; f(x_0)\big)$.

У точці x_0 надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку $M\big(x; f(x)\big)$, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 94).

З рисунка видно, що коли Δx стає все менше й менше, то точка M, рухаючись по графіку, наближається до точки M_0. Якщо при $\Delta x \to 0$ січна M_0M прагне зайняти положення деякої прямої (на рисунку 94 це пряма M_0T), то таку пряму називають ***дотичною до графіка функції*** f ***у точці*** M_0.

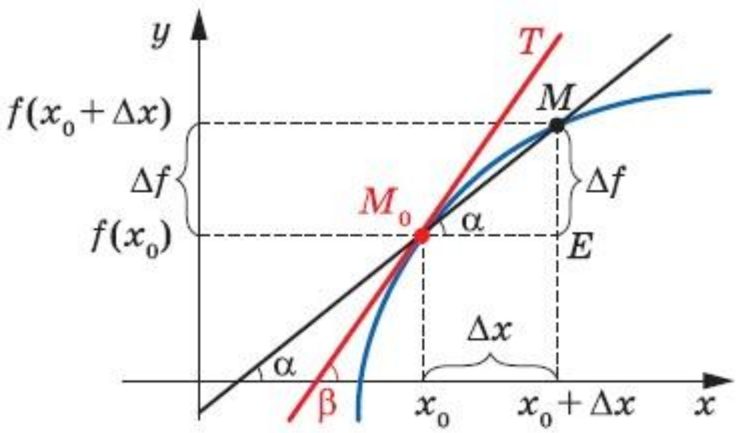


Рис. 94. Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α. Як відомо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$, тобто $k = \operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, що $\angle MM_0E = \alpha$ (рис.94). Тоді з трикутника MM_0E отримуємо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Уведемо позначення $k_{\text{січ}}(\Delta x)$ для кутового коефіцієнта січної M_0M, тим самим підкреслюючи, що для даної функції f і фіксованої точки x_0

кутовий коефіцієнт січної M_0M залежить від приросту Δx аргументу.

Маємо:

$$k_{\text{січ}}\,(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Нехай дотична M_0T утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β ($\beta \neq 90°$). Тоді її кутовий коефіцієнт $k\ (x_0)$ дорівнює $\operatorname{tg}\beta$.

Природно вважати, що чим менше Δx, то тим менше значення кутового коефіцієнта січної відрізняється від значення кутового коефіцієнта дотичної. Іншими словами, якщо $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{січ}}\,(\Delta x) \to k(x_0)$.

Узагалі, кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 визначають за допомогою формули

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{січ}}\,(\Delta x),$$

тобто

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Потрібно звернути увагу учнів на те, що нас цікавить поведінка дотичної в деякому околі заданої точки x_0, при цьому не важливо, чи перетинає дана пряма графік функції $f(x)$ в іншій точці.

Ще однією важливою задачею є задача про миттєву швидкість, яка детально розглянута у [27]. Пропонуємо самостійно ознайомитися з нею.

При цьому при демонстрації прикладів важливо підкреслити, попри те, що дані задачі мають різну природу, вони мають спільну математичну модель, яка має важливе значення при дослідженні процесів.

Приклад 27. Знайдіть формулу для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою x_0. Який кут з додатним напрямом осі абсцис утворює дотична, проведена до цього графіка в точці з абсцисою x_0.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2.$$

Тоді, скориставшись формулою для обчислення кутового коефіцієнта дотичної, можна записати:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то значення виразу $-2x_0 - \Delta x$ прямують до числа $-2x_0$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0.$$

Звідси $k(x_0) = -2x_0$.

Ця формула дає змогу обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = -x^2$ у будь-якій точці, зокрема в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Маємо: $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Нехай дотична до параболи в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$ утворює кут α $\left(0 \leq \alpha \leq \pi,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ з додатним напрямом осі абсцис. Тоді її кутовий коефіцієнт дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$. Звідси $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Оскільки $0 \leq \alpha \leq \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

10.3. Поняття похідної

Перед вивченням цієї теми учні, розв'язуючи задачі про миттєву швидкість матеріальної точки та про кутовий коефіцієнт дотичної, дійшли до однієї і тієї самої математичної моделі — границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

До аналогічних формул приводить розв'язування багатьох задач фізики, хімії, біології, економіки тощо. Це свідчить про те, що розглядувана модель заслуговує на особливу увагу. Їй варто дати назву, увести позначення, вивчити її властивості та навчитися їх застосовувати.

Означення 33. ***Похідною функції*** f ***у точці*** x_0 *називають число, яке* *дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «*еф штрих від ікс нульового*») або $y'(x_0)$. Можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

або

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Похідну функції f у точці x_0 можна обчислити за такою схемою [27]:

1. надавши в точці x_0 аргументу приріст Δx, знайти відповідний приріст Δf функції: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;
2. знайти відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
3. з'ясувати, до якого числа прямує відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто знайти границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Зазначимо, що у прикладі 27 знайшовши кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$, ми тим самим знайшли значення похідної в цій точці $f'(-\frac{1}{2})$.

Узагалі, можна зробити такий висновок: *кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, дорівнює значенню похідної функції f у точці x_0*, тобто

$$k(x_0) = f'(x_0).$$

Ця рівність виражає ***геометричний зміст похідної***.

Зважаючи на означення миттєвої швидкості, можна зробити такий висновок: *якщо $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по* *координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу* t_0 *дорівнює значенню похідної функції* $y = s(t)$ *у точці* t_0, тобто

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Ця рівність виражає ***механічний зміст похідної***.

Якщо функція f має похідну в точці x_0, то цю функцію називають ***диференційовною в точці*** x_0.

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0. З геометричного змісту похідної випливає, що до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести *невертикальну* дотичну (рис.95.а). І навпаки, якщо до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну, то функція f є диференційованою в точці x_0.

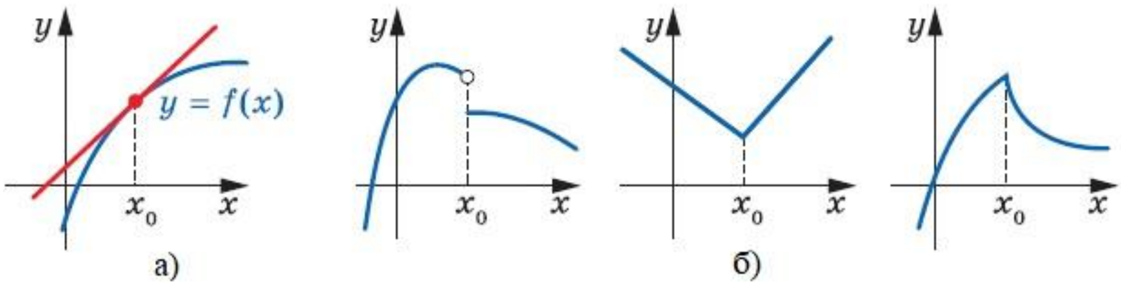


Рис. 95. Ілюстрація геометричного змісту похідної а); приклади недиференційованих в точці x_0 функцій б)

На рисунку 95.б) зображено графіки функцій, які в точці x_0 мають розрив або «*злом*». До цих графіків у точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичну. Ці функції недиференційовні в точці x_0.

Рис. 96. Ілюстрація недиференційовних в точці x_0 функцій

На рисунку 96 зображено графіки функцій, які в точці з абсцисою x_0 мають вертикальну дотичну. Отже, ці функції не диференційовні в точці x_0.

Теорема 18. *Якщо функція* f *є диференційовною в точці* x_0*, то вона є* *неперервною в цій точці.*

Зазначимо, що неперервна в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ не є диференційовною в цій точці. Цей приклад показує, що неперервність функції в точці є необхідною, але не є достатньою умовою диференційовності функції в цій точці.

Нехай M — множина точок, у яких функція f диференційовна. Кожному числу $x \in M$ поставимо у відповідність число $f'(x)$. Таке правило задає функцію з областю визначення M. Цю функцію називають ***похідною функції*** $y = f(x)$ і позначають f' або y'.

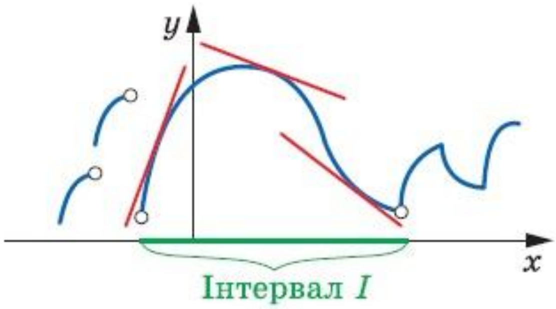


Рис. 97. Ілюстрація диференційовної функції на інтервалі *I*

Якщо функція f диференційовна в кожній точці деякої множини M, то говорять, що вона ***диференційовна на множині*** M. Наприклад, на рисунку 97 зображено графік функції, диференційовної на інтервалі I. На інтервалі I цей графік не має розривів і «*зломів*».

Якщо функція f диференційовна на $D(f)$, то її називають ***диференційовною***.

Знаходження похідної функції f називають ***диференціюванням*** функції f.

Приклад 28. Продиференціюйте функцію $f(x) = kx + b$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;
2. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;
3. за означенням похідної

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k.$$

Отже, $f'(x_0) = k$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то остання рівність означає, що для будь-якого $x_0 \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f'(x) = k$.

Висновок про те, що похідна лінійної функції $f(x) = kx + b$ дорівнює k, записують також у вигляді

$$(kx + b)' = k.$$

Звідки отримуємо:

$$(x)' = 1; \ (b)' = 0.$$

Ця рівність означає, що похідна функції, яка є константою, у кожній точці дорівнює нулю.

Важливо сказати, аналогічним чином можна обрахувати інші похідні вивчених раніше функцій, та правила обчислення похідних суми, добутку і частки. У класах з поглибленим або профільним вивченням арифметичні дії над похідними виводяться повністю. Також учням можна продемонструвати обчислення похідних основних функції через границю, запропонувавши деякі подібні за принципами функції знайти самостійно.

У класах з вивченням математики на рівні стандарту, доведення не подаються і таблицю похідних подають як основу без доведення. Правила знаходження похідних основних функцій і правила обчислення похідних, описано у [27].

Для розв’язку більшості задач на застосування похідної використовують таблицю похідних, використовуючи означення лише у задачах, які цього вимагають.

Важливо звернути увагу учнів на алгоритм обчислення похідної функції у точці, а саме, що спочатку потрібно, використовуючи правила диференціювання та таблицю похідних основних функцій, обчислити похідну заданої функції і спростити вираз, і лише потім підставити відповідне значення аргументу в отриманий вираз і знайти значення похідної.

10.4. Рівняння дотичної

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0. Тоді до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (рис. 98).

Із курсу геометрії 9 класу учні знають, що рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої.

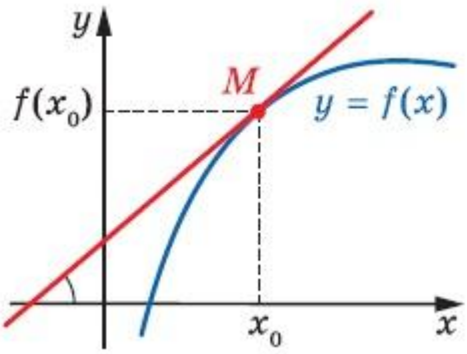


Рис. 98. Ілюстрація дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0

Зважаючи на геометричний зміст похідної, отримуємо: $k = f'(x_0)$.

Тоді *рівняння дотичної* можна записати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Ця пряма проходить через точку $M\big(x_0; f(x_0)\big)$. Отже, координати цієї точки задовольняють отримане рівняння.

Маємо:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Підставимо знайдене значення b у рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Перетворивши праву частину отриманої рівності, можна зробити висновок: якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то ***рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0***, має вигляд

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Приклад 29. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -4$.

Розв'язання. Маємо:

$$f(x_0) = f(4) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}; \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f'(-4) = -\frac{1}{16}.$$

Підставимо отримані значення в рівняння дотичної, отримаємо

$$y = -\frac{1}{16}(x+4) - \frac{1}{4}.$$

Спростивши вираз у цьому рівнянні, матимемо:

$$y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}$.

10.5. Ознаки зростання і спадання функції

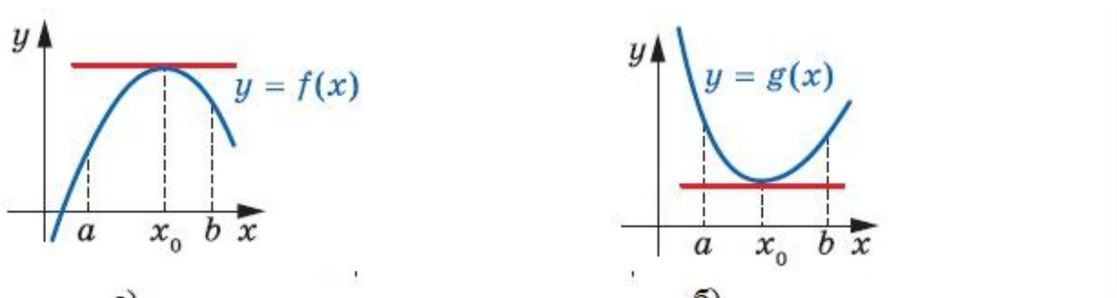
Похідна функції є потужним інструментом дослідження її властивостей. Тому розглянемо ті властивості функцій, які досліджуються за допомогою похідної, і алгоритми подібних досліджень.

Розглянемо функцію f і таку точку x_0 інтервалу $(a;\ b)$, що

$$\max_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$$

(рис. 99.а). На рисунку 99.б) зображено графік функції g такої, що

$$\min_{[a;b]} g(x) = g(x_0).$$



а) б)

Рис. 99. Ілюстрація функцій, які досягають
на інтервалі $(a;\ b)$ **максимуму а); мінімуму б)**

Нехай функції f і g є диференційовними в точці x_0. Тоді до графіків цих функцій у точці з абсцисою x_0 можна провести дотичні. З наочних міркувань очевидно, що ці дотичні будуть горизонтальними прямими. Оскільки кутовий коефіцієнт горизонтальної прямої дорівнює нулю, то $f'(x_0) = 0$ і $g'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a;\ b]$, і функція $y = s(t)$ набуває в точці $t_0 \in (a;\ b)$ найбільшого (найменшого) значення, то це означає, що в момент часу t_0 матеріальна точка змінює напрям руху на протилежний. Зрозуміло, що в цей момент часу швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема [27].

Теорема 19 (теорема Ферма). *Нехай функція f, визначена на проміжку $[a;\ b]$, у точці $x_0 \in (a;\ b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

На рисунку 100 зображено графік функції f, диференційовної на проміжку $[a;\ b]$, яка в точках a і b набуває однакових значень.

З рисунка видно: існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a;\ b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$.

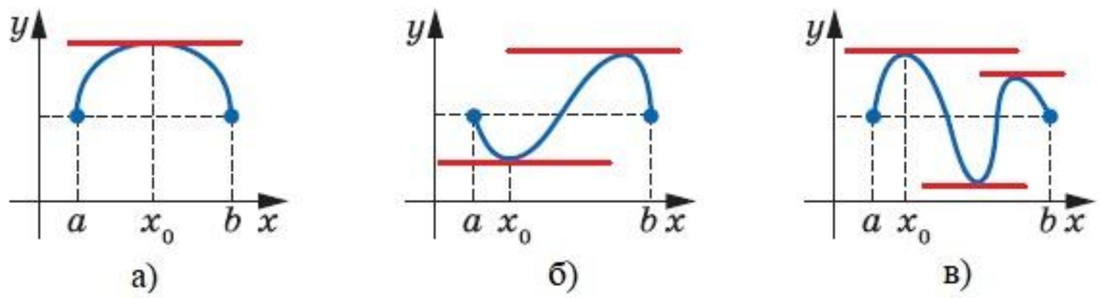


Рис. 100. Ілюстрація функцій, диференційовних на відрізку $[a;\ b]$

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом

$y = s(t)$, $t \in [a;\ b]$, то рівність $s(a) = s(b)$ означає, що в момент часу $t = b$ матеріальна точка повернулася в початкове положення. Отже, у деякий момент часу $t_0 \in (a;\ b)$ вона змінила напрям руху на протилежний, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема [27].

Теорема 20 (теорема Ролля). *Якщо функція f є диференційовною на відрізку $[a;\ b]$, тобто неперервна на цьому відрізку і в кожній його точці має скінченну похідну, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a;\ b)$, що $f'(x_0) = 0$.*

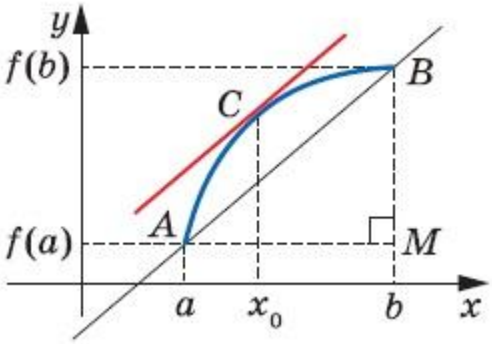


Рис. 101. Графік функції, диференційовної на відрізку $[a;\ b]$

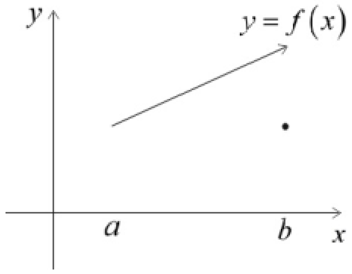
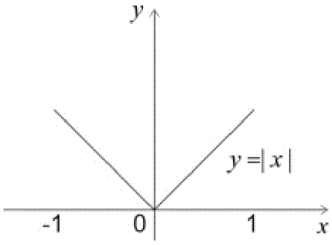
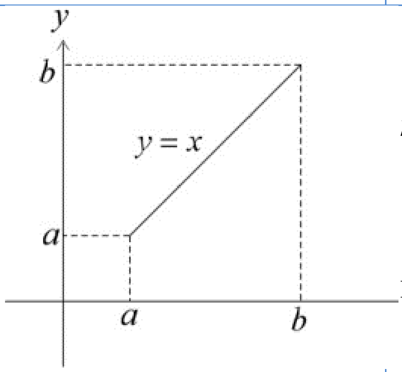
На рисунку 101 зображено графік функції, диференційовної на відрізку $[a;\ b]$.

З рисунка видно: на дузі AB існує така точка C, що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій AB.

Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB, тобто існує точка $x \in (a; b)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Важливо зазначити, що кожна умова теореми Ролля істотна. Наведемо у таблиці випадки порушення умов у теореми Ролля.

	*Порушена умова неперервності функції на відрізку* $[a; b]$. При цьому хоч значення у крайніх точках і рівні, але у кожній точці інтервалу $(a; b)$: $f'(c) \neq 0$.
	*Порушена умова існування похідної в кожній точці відрізка* $[a; b]$. При цьому хоч значення у крайніх точках і рівні, а функція неперервна, проте не існує такої точки на інтервалі $(-1; 1)$, що $f'(c) = 0$.
	*Порушена умова рівності значень функції на кінцях відрізка.* При цьому, хоч функція диференційовна на відрізку, але в кожній точці $f'(x) = 1$.

Отримані висновки підтверджує така теорема [27].

Теорема 21 (теорема Лагранжа). *Якщо функція* f *є диференційовною на відрізку* $[a;\ b]$, *то існує така точка* $x_0 \in (a;\ b)$, *що*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Звернемо увагу, що теореми Ролля і Лагранжа не вказують, як знайти точку x_0. Вони лише гарантують, що існує точка з певною властивістю.

Перед переходом до властивості зростання і спадання функції на відрізку, з учнями необхідно повторити метод інтервалів розв’язування нерівностей, який буде корисним при розв’язуванні задач.

Відомо, коли функція є константою, то її похідна дорівнює нулю. Виникає запитання: якщо функція f є такою, що для всіх x із проміжку I

виконується рівність $f'(x_0) = 0$, то чи є функція f константою на проміжку I?

Справедливою є така теорема.

Теорема 22 (ознака сталості функції). *Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x_0) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.*

Крайня теорема в [27] наведена з доведення.

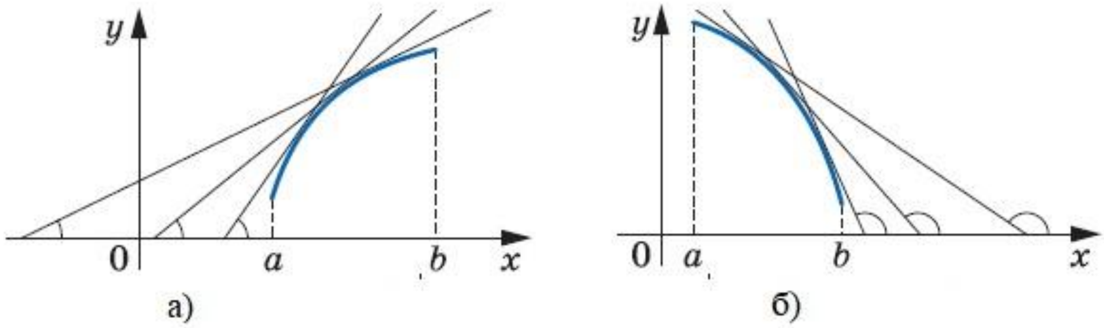


Рис. 102. Графіки функцій, диференційовних на проміжку $[a;\ b]$

На рисунку 102.а) зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a;\ b]$. Цей графік має таку властивість: будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс гострого кута є додатним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є додатним. Тоді, виходячи з геометричного змісту похідної, можна зробити такий висновок: для будь-якого $x \in [a;\ b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$.

З рисунка 102.а) видно, що функція f зростає на розглядуваному проміжку.

На рисунку 102.б) зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a;\ b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс тупого кута є від'ємним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є від'ємним. Тоді для будь-якого

$x \in [a;\ b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$.

З рисунка 102.б) видно, що функція f спадає на розглядуваному проміжку.

Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому проміжку I пов'язаний з тим, чи є ця функція *зростаючою* (*спадною*) на проміжку I.

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції установлюють такі теореми.

Теорема 23 (ознака зростання функції). *Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.*

Теорема 24 (ознака спадання функції). *Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.*

Теорема 23 доводиться в [27].

Справедливе й таке твердження: *якщо диференційовна на проміжку I функція f зростає (спадає), то для всіх x із цього проміжку виконується нерівність $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).*

Якщо функція f визначена на проміжку $[a;\ b)$ і зростає на інтервалі $(a;\ b)$, то це не означає, що вона зростає на проміжку $[a;\ b)$ (рис. 103). Дослідити зростання і спадання функції на різних проміжках допомагає така ключова задача.

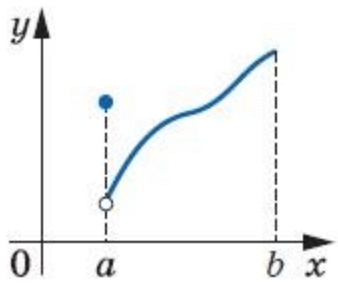


Рис. 103. Графік функції, що не зростає на проміжку $[a;\ b)$

Важливою частиною розв'язку задач на пошук проміжків монотонномті є запис відповіді. Слід звернути увагу учнів, що якщо функція зростає або спадає на інтервалі (a, b) і, наприклад, у точці a функція неперервна, то цю точку потрібно включити у відповідь, якщо ж, наприклад, у точці b функція розривна, то її, як правило, не включають. Тобто в такому разі проміжок монотонності буде мати вигляд $[a; b)$, що ілюструє наступний приклад.

Приклад 30. Нехай для довільного $x \in (a;\ b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ і функція f має похідну в точці a. Доведіть, що функція f зростає на проміжку $[a;\ b)$.

Розв'язання. З теореми 20 випливає тільки те, що функція f зростає на інтервалі $(a;\ b)$. Для доведення того, що функція f зростає на проміжку $[a;\ b)$, потрібно додаткове дослідження.

Нехай x — довільна точка проміжку $(a;\ b)$. Доведемо, що $f(x) > f(a)$. З теореми Лагранжа для функції f на відрізку $[a;\ x]$ випливає існування такої точки $x_0 \in (a; x)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Оскільки $x_0 \in (a; b)$, то $f'(x_0) > 0$. Звідси $f(x) > f(a)$.

Таким чином, доведено, що функція f зростає на проміжку $[a;\ b)$.

Зауваження 1. Насправді сформульовану в даному прикладі умову можна послабити, замінивши вимогу диференційованості функції f у точці $x = a$ на її неперервність у цій точці. Можна довести, що справедливе таке твердження: *якщо для всіх* $x \in (a;\ b)$ *виконується нерівність* $f'(x) > 0$ *і функція* f *є неперервною в точці* $x = a$, *то функція* f *зростає на проміжку* $[a;\ b)$.

Зауваження 2. Використовуючи відповідні твердження, можна обґрунтувати зростання (спадання) функції f на проміжках іншого виду, наприклад $[a; +\infty)$, $(-\infty;\ b]$, $[a;\ b]$. Так, якщо для всіх $x \in (a; +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ і функція f неперервна в точці $x = a$, то функція f зростає на проміжку $[a; +\infty)$.

Приклад 31. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

$$1)\ f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5; \qquad 2)\ f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}.$$

Розв'язання.

1) Маємо:

$$f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) = -3x(x-2)^2.$$

Дослідивши знак похідної (рис.104.а), отримуємо, що функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на кожному з проміжків $[0;\ 2]$ і $[2; +\infty)$, тобто спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

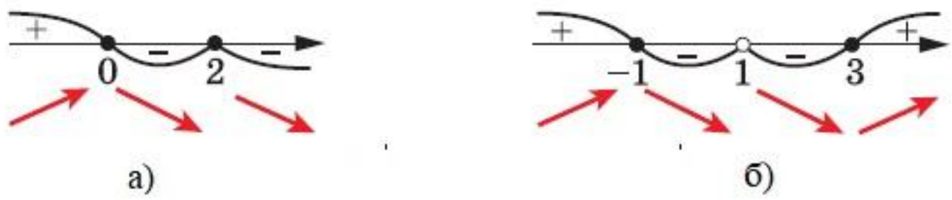


Рис. 104. Ілюстрація проміжків зростання і спадання функцій прикладу 31

2) Маємо: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Знайшовши похідну функції f, отримуємо:

$$f'^{(x)} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$

Дослідимо знак функції $y = f'(x)$ (рис.104.б)). Отже, дана функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;\ -1]$ і $[3; +\infty)$ та спадає на кожному з проміжків $[-1;\ 1)$ і $(1;\ 3]$.

10.6. Точки екстремуму функції

Ознайомлюючись з такими поняттями, як границя та неперервність функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, у її ***околі***.

Означення 34. *Проміжок $(a;\ b)$, який містить точку x_0, називають* ***околом*** *точки x_0.*

Важливо звернути увагу на те, що за означенням окіл є відкритим проміжком, а отже, сама точка x_0 не може бути його крайньою точкою.

Зрозуміло, що будь-яка точка має безліч околів. Наприклад, проміжок

$(-1;\ 2)$ — один з околів точки 1,5. Разом з тим цей проміжок не є околом точки 2.

На рисунку 105 зображено графіки чотирьох функцій. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

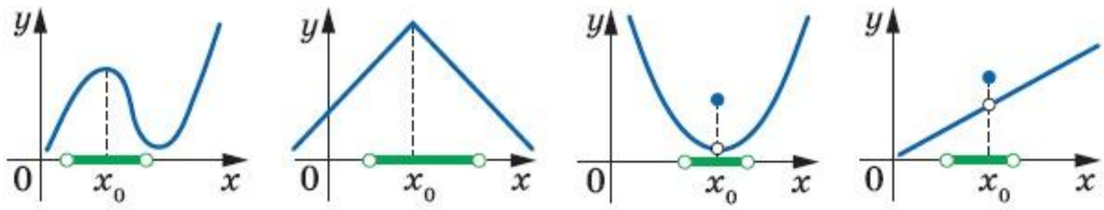


Рис. 105. Графіки функцій, для яких x_0 є точкою максимуму

Означення 35. *Точку x_0 називають **точкою максимуму** функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.*

На рисунку 105 $x_{\max} = x_0$.

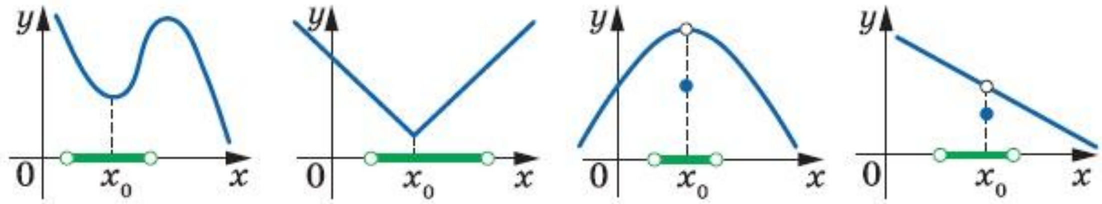


Рис. 106. Графіки функцій для яких точка x_0 є точкою мінімуму

Означення 36. *Точку x_0 називають **точкою мінімуму** функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.*

На рисунку 106 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = x_0$.

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають ***точками екстремуму*** функції (від латин. *extremum* — край, кінець).

На рисунку 107 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 є точками екстремуму функції f.

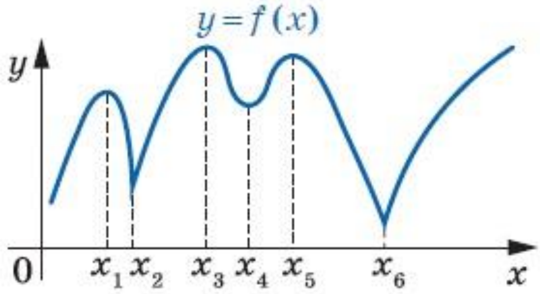


Рис. 107. Ілюстрація точок екстремуму функції $y = f(x)$

З означень точок максимуму і мінімуму випливає, що точки екстремуму є ***внутрішніми точками*** (*точку* $x_0 \in M$ *називають внутрішньою точкою множини* M, *якщо існує окіл точки* x_0, *який є підмножиною множини* M) області визначення функції. Це означає, що, наприклад, точка $x_0 = 0$ не є точкою мінімуму функції $y = \sqrt{x}$, а точка $x_0 = 1$ не є точкою максимуму функції $y = \arcsin x$. Пропонуємо переконатися у цьому самостійно, зобразивши графіки відповідних функцій.

На рисунку 108 зображено графік деякої функції f, яка на проміжку $[x_1;\ x_2]$ є константою. Точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка інтервалу $(x_1;\ x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f.

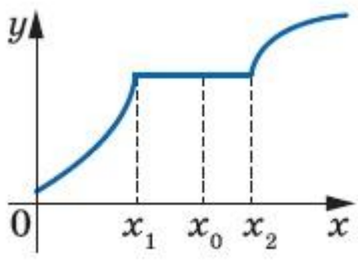


Рис. 108. Графік функції, для якої точка x_0 **є точкою як мінімуму, так і максимуму**

Графіки функцій, зображені на рисунку 109, показують, що точки екстремуму можна поділити на два види: ті, у яких похідна дорівнює нулю (на рисунках 109.а, 109.б) дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою), і ті, у яких функція є недиференційовною (рис. 109.в, 109.г).

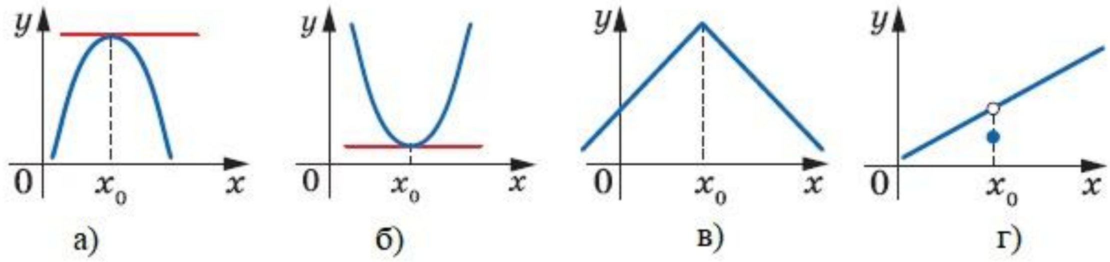


Рис. 109. Ілюстрація точок екстремуму різних видів

Справедливою є така теорема.

Теорема 25. *Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0.*

Справедливість цієї теореми випливає з теореми Ферма.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує?

Відповідь на це запитання заперечна.

Рис. 110. Ілюстрація функцій, для яких точка x_0 не є точкою екстремуму

Так, на рисунку 110.а) зображено графік функції, недиференційовної в точці x_0. Проте точка x_0 не є точкою екстремуму.

Наведемо ще один приклад. Для функції $f(x) = x^3$ маємо: $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(0) = 0$. Проте точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму функції f (рис. 110.б).

Ці приклади показують, що рівність нулю похідної в точці x_0 або недиференційовність функції в цій точці є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму в точці x_0.

Означення 37. *Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають* ***критичними точками***

функції.

Зі сказаного вище випливає, що *кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна критична точка є точкою екстремуму*. Іншими словами, *точки екстремуму слід шукати серед критичних точок*.

На рисунку 111 зображено графіки функцій, для яких x_0 є критичною точкою.

На рисунках 111.а)–г) критична точка x_0 є точкою екстремуму, на рисунках 111.ґ), 111.д) критична точка x_0 не є точкою екстремуму

Наявність екстремуму функції в точці x_0 зумовлена поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунках 110.а)–г), маємо: функція *зростає* (*спадає*) на проміжку $(a;\ x_0]$ і *спадає* (*зростає*) на проміжку $[x_0;\ b)$.

Функції, графіки яких зображено на рисунках 111.ґ), 111.д), такої властивості не мають: перша з них зростає на кожному з проміжків $(a;\ x_0]$ і $[x_0;\ b)$, друга спадає на цих проміжках.

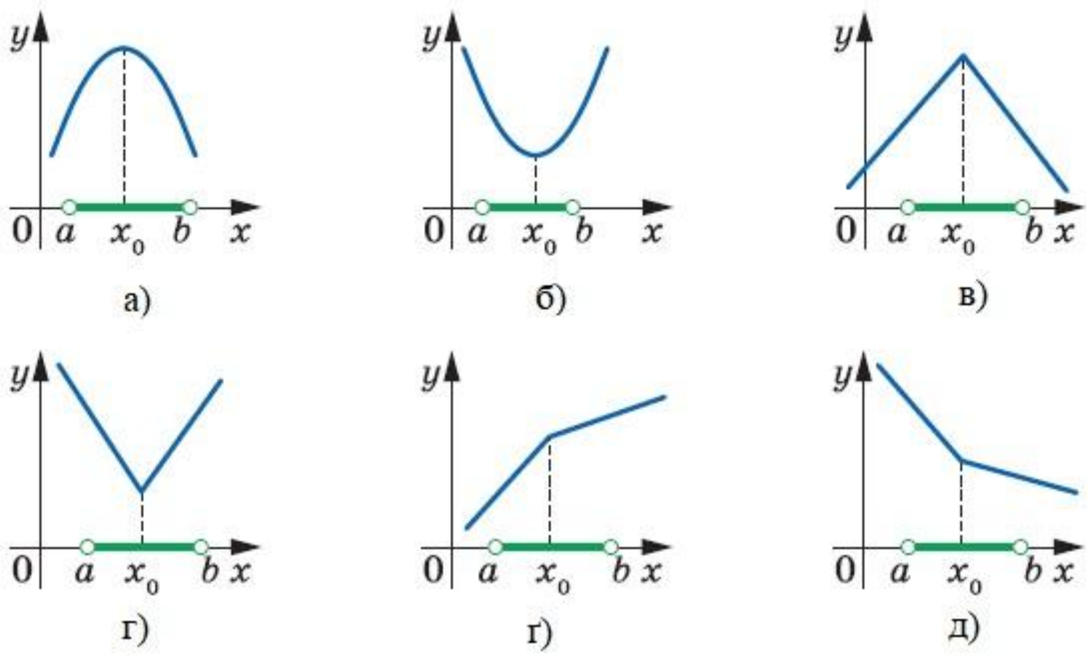


Рис. 111. Графіки функцій, для яких x_0 є критичною точкою

Узагалі, якщо область визначення неперервної функції розбито на скінченну кількість проміжків зростання і спадання, то легко знайти всі точки екстремуму.

Учням відомо, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 26 (ознака точки максимуму функції). *Нехай функція* f *є диференційовною на інтервалі* $(a;\ b)$ *і* x_0 *— деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх* $x \in (a;\ x_0]$ *виконується нерівність* $f'(x_0) \geq 0$*, а для всіх* $x \in [x_0;\ b)$ *виконується нерівність* $f'(x_0) \leq 0$*, то точка* x_0 *є точкою максимуму функції* f (рис.111.а).

Теорема 27 (ознака точки мінімуму функції). *Нехай функція* f *є диференційовною на інтервалі* $(a;\ b)$ *і* x_0 *— деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх* $x \in (a;\ x_0]$ *виконується нерівність* $f'(x_0) \leq 0$*, а для всіх* $x \in [x_0;\ b)$ *виконується нерівність* $f'(x_0) \geq 0$*, то точка* x_0 *є точкою мінімуму функції* f (рис.111.б).

Теорему 26 у [27] доведено, а теорему 27 рекомендовано довести учням самостійно повторюючи міркування доведення теореми 26.

Інколи зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: *якщо при переході через точку* x_0 *похідна змінює знак із плюса на мінус, то* x_0 *— точка максимуму; якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то* x_0 *— точка мінімуму*.

Для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

1) Знайти $f'(x)$.

2) Дослідити знак похідної в околах критичних точок.

3) Користуючись відповідними теоремами, стосовно кожної критичної точки з'ясувати, чи є вона точкою екстремуму.

Приклад 32. Знайдіть точки екстремуму функції:

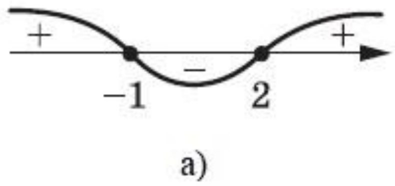
$$1)\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x; \qquad 2)\ f(x) = 2x^2 - x^4.$$

Розв'язання.

1) Маємо:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2).$$

Методом інтервалів дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис.112.а). Отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.



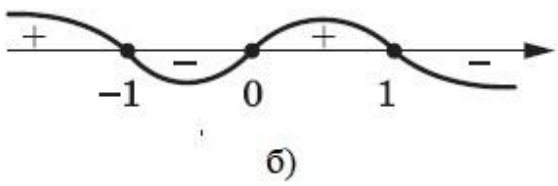


Рис. 112. Дослідження знаку похідної в околах критичних точок прикладу 32

2) Маємо:

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1).$$

Дослідивши знак похідної в околах критичних точок (рис.112.б), отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 0$ і $x_{\max} = 1$.

10.7. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Яку кількість продукції треба випустити підприємству, щоб отримати найбільший прибуток? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання за найменший час? Як доставити товар у торговельні точки так, щоб витрати палива були найменшими?

З такими й подібними задачами на пошук найкращого або, як говорять, оптимального розв’язку людині досить часто доводиться стикатися у своїй діяльності.

Уявимо, що відомо функцію, яка описує, наприклад, залежність прибутку підприємства від кількості виготовленої продукції. Тоді задача зводиться до пошуку аргументу, при якому функція набуває найбільшого значення [27].

З’ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a;\ b]$. Обмежимося розглядом лише неперервних функцій.

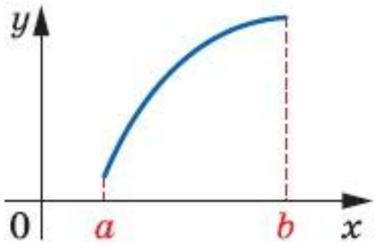


Рис. 113. Ілюстрація випадку, коли функція не має точок мінімуму на $[a;b]$

Зауважимо, що точка, у якій функція набуває найменшого значення, не обов'язково є точкою мінімуму. Наприклад, на рисунку 113 $\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$, а точок мінімуму функція f не має. Також точка мінімуму не обов'язково є точкою, у якій функція набуває найменшого значення. На рисунку 113.а) точка x_2 — єдина точка мінімуму, а найменше значення $\min_{[a;b]} f(x)$ досягається в точці a.

Аналогічне зауваження стосується і точок максимуму та точок, у яких функція досягає найбільшого значення.

На рисунку 114 подано різні випадки розташування точок екстремумів і точок, у яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.

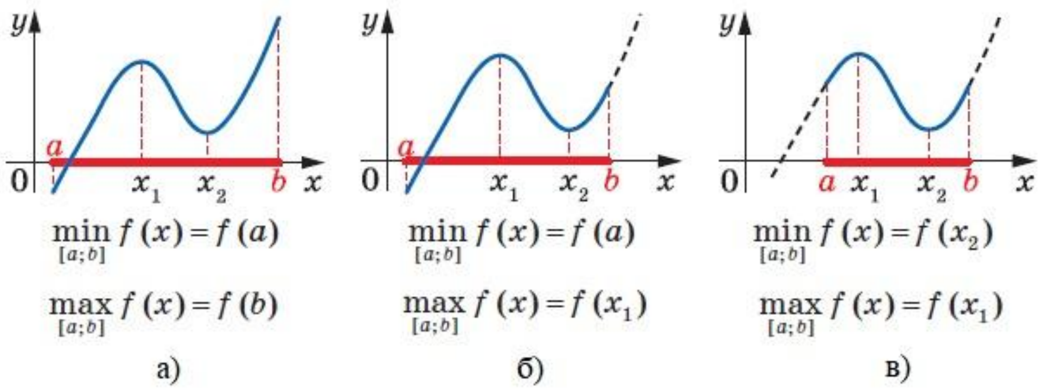


Рис. 114. Різні випадки розташування точок екстремуму

Тут важливо зрозуміти, що властивість функції мати точку екстремуму x_0 означає таке: *функція набуває в точці x_0 найбільшого* (*найменшого*) *значення порівняно зі значеннями функції в усіх точках деякого, можливо, дуже малого околу точки x_0*. Щоб наголосити на цьому факті, точки екстремуму називають ще ***точками локального максимуму*** або ***точками локального мінімуму*** (від латин. *locus* — місце).

Неперервна на відрізку $[a;\ b]$ функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 114).

Зважаючи на це, для такої функції пошук найбільшого і найменшого значень на відрізку $[a;\ b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти похідну $f'(x)$.
2. Знайти критичні точки ($f'(x) = 0$ або не існує).
3. Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку.
4. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.
5. Порівняти одержані значення і обрати з них найменше і найбільше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція f має скінченну кількість критичних точок на відрізку $[a;\ b]$.

Якщо визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких треба шукати значення функції, можна зменшити. Проте щоб виявити точки екстремуму, зазвичай потрібна більша технічна робота, ніж для обчислення значень функції в критичних точках.

Приклад 34. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на відрізку $[-2; 0]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки даної функції

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$

$$12x^2 - 18x - 12 = 0;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \quad \text{або} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2;\ 0]$ належить одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Маємо:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, \qquad f(-2) = -38, \qquad f(0) = 6.$$

Отже,

$$\max_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, \quad \min_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38.$$

Відповідь: $\frac{37}{4}$; -38.

10.8. Поняття опуклості функції

Дану тему варто вивчати в контексті знайомства учнів з другою похідною через її механічний зміст.

Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Тоді *миттєву швидкість* $v(t)$ у момент часу t визначають за формулою

$$v(t) = s'(t).$$

Розглянемо функцію $y = v(t)$. Її похідну в момент часу t називають *прискоренням руху* та позначають $a(t)$, тобто

$$a(t) = v'(t).$$

Таким чином, *функція прискорення руху — це похідна функції швидкості руху, яка у свою чергу є похідною функції закону руху*, тобто

$$a(t) = v'(t) = \left(s'(t)\right)'.$$

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху $y = a(t)$ є ***другою похідною функції*** $y = s(t)$. Записують:

(запис $s''(t)$ читають: «*ес два штрихи від те*»).

Наприклад, якщо закон руху матеріальної точки задано формулою $s(t) = t^2 - 4t$, то маємо:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$
$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Відтак, ми отримали, що матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням. З курсу фізики учням відомо, що такий рух називають рівноприскореним. На цьому факті слід обов'язково сконцентрувати увагу, оскільки це є прикладом як ілюстрації міжпредметних зв'язків при вивченні алгебри та початків аналізу з фізикою, так і прикладом змістової лінії математичного моделювання реальних процесів на уроках алгебри.

Узагальнимо сказане.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, диференційовну на деякій множині M. Тоді її похідна також є деякою функцією, заданою на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною в деякій точці $x_0 \in M$, то похідну функції f' у точці x_0 ***називають другою похідною функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0 і позначають $f''(x_0)$ або $y''(x_0)$. Саму функцію f називають ***двічі диференційовною в точці*** x_0.

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають ***другою похідною функції*** $y = f(x)$ і позначають f'' або y''.

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Якщо функція f є двічі диференційовною в кожній точці множини M, то її ***називають двічі диференційовною на множині*** M.

Якщо функція f двічі диференційовна на $D(f)$, то її називають ***двічі диференційовною***.

Потрібно нагадати, що учням відомо, що функцію характеризують такі властивості, як парність (непарність), періодичність, зростання (спадання) тощо. Ще однією важливою характеристикою функції є опуклість угору (опуклість униз).

Корисно звернутися до прикладів.

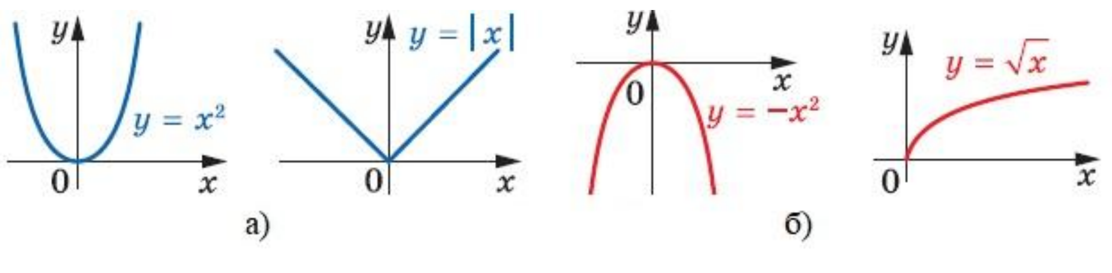


Рис. 115. Графіки функцій $y = x^2$, $y = |x|$, $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$

Про функції $y = x^2$, $y = |x|$ говорять, що вони є ***опуклими вниз*** (рис. 115.а), а функції $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ є опуклими вгору (рис. 115.б).

Функція $y = \sin x$ є опуклою вгору на проміжку $[0; \pi]$ та опуклою вниз на проміжку $[\pi; 2\pi]$. Лінійну функцію вважають як опуклою вгору, так і опуклою вниз.

Надалі, вивчаючи поняття опуклості функції на проміжку I , обмежимося випадком, коли функція f є диференційовною на цьому проміжку.

Нехай функція f диференційовна на проміжку I. Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести невертикальну дотичну. Якщо при цьому графік функції на проміжку I розміщений не вище будь-якої такої дотичної (рис. 116.а), то функцію f називають ***опуклою вгору на проміжку*** I; якщо ж графік на проміжку I розміщено не нижче від кожної такої дотичної (рис. 116.б) — ***опуклою вниз на проміжку*** I.

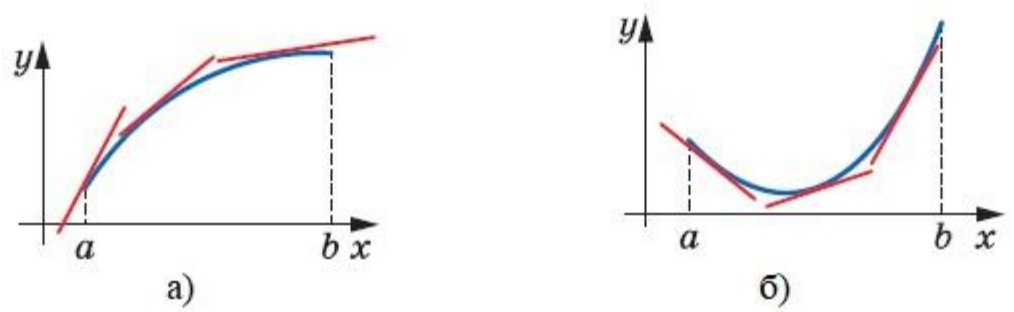


Рис. 116. Графіки функцій опуклих вгору та вниз

На рисунку 117.а), зображено графік функції f, яка є опуклою вниз на проміжку $[a;\ b]$. З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на проміжку $[a;\ b]$.

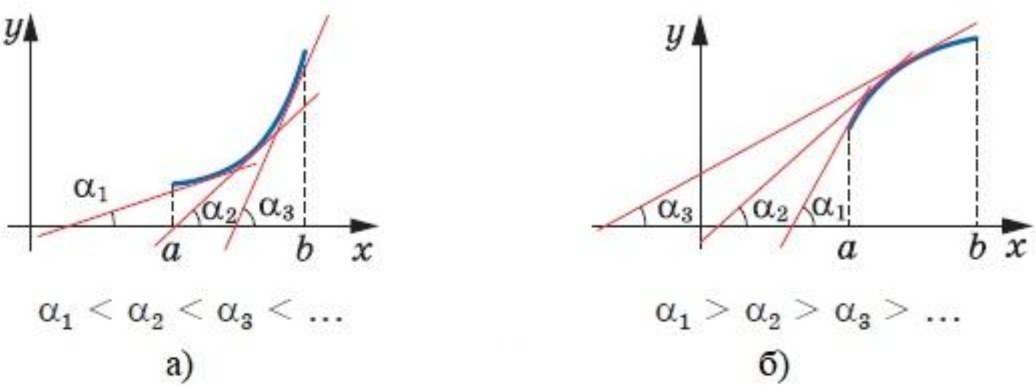


Рис. 117. Графіки функцій опуклих вгору та вниз на проміжку $[a; b]$

Нехай функція f є опуклою вгору на проміжку $[a;\ b]$ (рис. 117.б). З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' спадає на проміжку $[a;\ b]$.

Ці приклади показують, що характер опуклості функції f на деякому проміжку I пов'язаний зі зростанням (спаданням) функції f' на цьому проміжку.

Для двічі диференційовної на проміжку I функції f зростання (спадання) функції f' визначається знаком другої похідної функції f на проміжку I . Таким чином, характер опуклості двічі диференційовної функції пов'язаний зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок установлюють такі дві теореми.

Теорема 28 (ознака опуклості функції вниз). *Якщо для всіх* $x \in I$ *виконується нерівність* $f''(x) \geq 0$ *, то функція* f *є опуклою вниз на проміжку* I.

Теорема 29 (ознака опуклості функції вгору). *Якщо для всіх* $x \in I$ *виконується нерівність* $f''(x) \leq 0$ *, то функція* f *є опуклою вгору на проміжку* I.

У [27] теорема 28 дається з доведенням. Теорему 29 можна довести повторюючи аналогічні міркування. Власне учні мають розібратися з доведеннями обох тверджень, при чому доведення теореми 28 бажано розібрати на уроці, а доведення теореми 29 варто включити в домашнє завдання відповідного уроку.

Приклад 35. Дослідіть на опуклість функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Звідси

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Нерівність $f''(x) \geq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вниз на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 118).

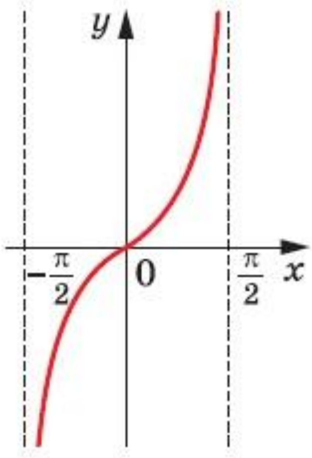


Рис. 118. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$

Нерівність $f''(x) \leq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$. Таким чином, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вгору на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (рис. 118).

На рисунку 119.а) зображено графіки функцій і дотичні, проведені до них у точках з абсцисою x_0. Кожна з наведених функцій на проміжках $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$ має різний характер опуклості. Отже, на цих проміжках графік функції розташований у різних півплощинах відносно дотичної. У такому разі говорять, що точка x_0 є ***точкою перегину*** функції.

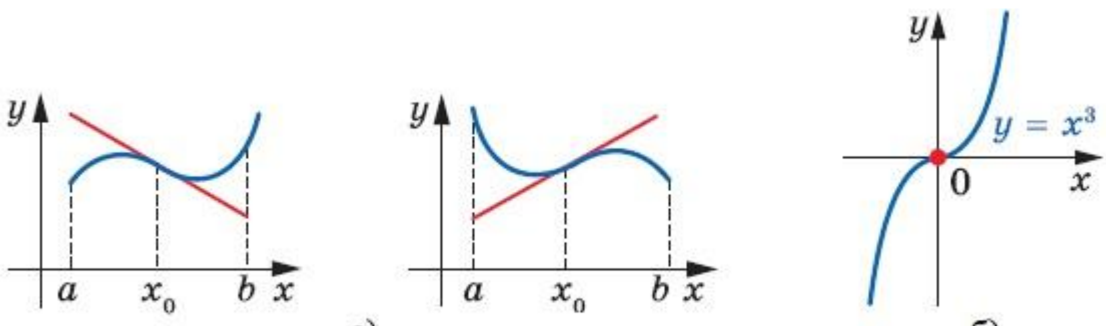


Рис. 119. Ілюстрація графіків функцій з точками перегину

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою перегину функції $y = x^3$ (рис. 119.б); точки виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є точками перегину функції $y = \cos x$.

10.9. Побудова графіків функцій

Коли учням доводилося будувати графіки, вони зазвичай робили так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім сполучали їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок [27].

На рисунку 120.а) зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції $y = f(x)$. Ці точки можна сполучити по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 120.б) і 120.в).

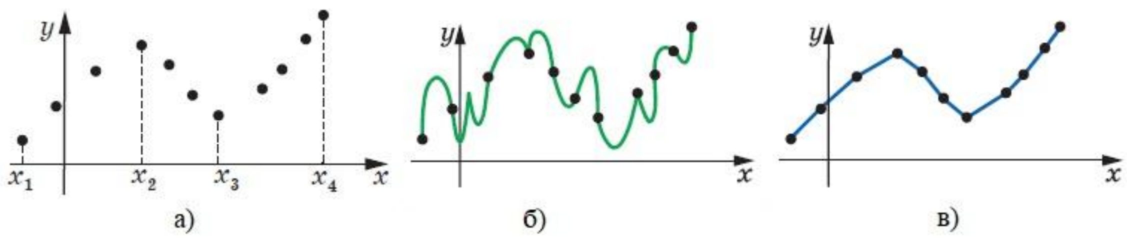


Рис. 120. Ілюстрація побудови графіків функцій

Проте якщо знати, що функція f зростає на кожному з проміжків $[x_1; x_2]$ і $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_2; x_3]$ та є диференційовною, то, скоріше за все, буде побудовано графік, зображений на рисунку 121.

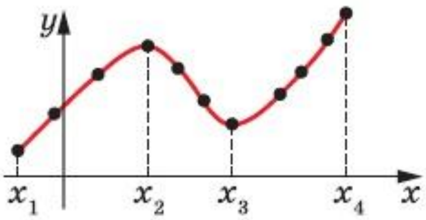


Рис. 121. Ілюстрація побудови графіка функції

Ви знаєте, які особливості притаманні графікам парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдалося з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік.

Дослідження властивостей функції проводитимемо за таким планом.

1. *Знайти область визначення функції.*

2. *Дослідити функцію на парність.*

3. *Знайти нулі функції та точку перетину з віссю ординат.*

4. *Знайти проміжки знакосталості функції.*

5. *Знайти проміжки зростання і спадання функції.*

6. *Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.*

7. *Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в граничних точках області визначення).*

Зауважимо, що наведений план дослідження має рекомендаційний характер і не є незмінним та вичерпним. Під час дослідження функції важливо виявити такі її властивості, які дадуть змогу коректно побудувати графік

Приклад 36. Дослідіть функцію

$$f(x)=\frac{4}{x^2+4x}$$

і побудуйте її графік.

Розв'язання.

1. Функція визначена на множині $(-\infty;-4)\cup(-4;0)\cup(0;+\infty)$.

2. Область визначення функції несиметрична відносно початку координат, отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3. Функція не має нулів і перетину з віссю ординат.

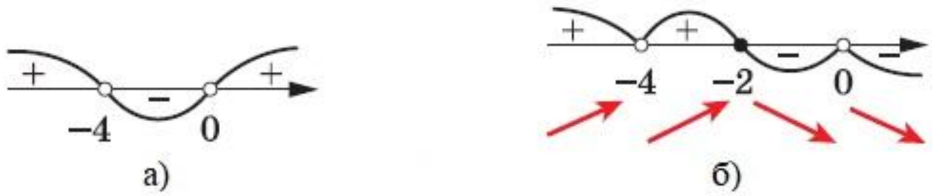


Рис. 122. Дослідження поведінки функції прикладу 36

4. Знайдемо проміжки знакосталості функції. Маємо:

$$f(x)=\frac{4}{x(x+4)}.$$

Звідси $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$, $f(x)<0$ при $x\in(-4;0)$ (рис. 122.а).

5–6. Маємо:

$$f'(x)=\frac{(4)'\cdot(x^2+4x)-4\cdot(x^2+4x)'}{x^2(x+4)^2}=-\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2}=-\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}.$$

Дослідивши знак f' (рис. 122.б), отримуємо, що функція f спадає на кожному з проміжків $[-2; 0)$ і $(0; +\infty)$, зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -4)$ і $(-4; -2]$, $x_{\max} = -2$, $f(-2) = -1$.

7. Зауважимо, що коли значення аргументу x вибирати все більшими й більшими, то відповідні значення функції $f(x) = \frac{4}{x^2+4x}$ все менше й менше відрізнятимуться від числа 0 і можуть стати як завгодно малими. Цю властивість прийнято записувати так:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2+4x} = 0$$

або так:

$$\frac{4}{x^2+4x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

У такому разі пряму $y = 0$ називають ***горизонтальною асимптотою*** графіка функції f при $x \to +\infty$. Аналогічно можна встановити, що пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x \to -\infty$.

Якщо значення аргументу x прямують до нуля, залишаючись додатними, то відповідні значення функції стають усе більшими й більшими та можуть стати більшими за довільне наперед задане додатне число. У такому разі пряму $x = 0$ називають ***вертикальною асимптотою*** графіка функції f, коли x прямує до нуля справа. Пряма $x = 0$ також є вертикальною асимптотою графіка функції f, коли x прямує до нуля зліва. Функція f має ще одну вертикальну асимптоту — пряму $x = -4$, коли x прямує до -4 як зліва, так і справа.

Маємо:

$$f''(x) = \frac{8x^2(x+4)^2 - 8(x+2)\left(2x(x+4)^2 + 2x^2(x+4)\right)}{x^4(x+4)^4}.$$

Спростивши дріб, отримаємо:

$$f''(x) = \frac{8(3x^2+12x+16)}{x^3(x+4)^3}.$$

Дослідивши знак f'' (рис. 123), отримуємо, що функція f є опуклою вниз на проміжках $(-\infty; -4)$ і $(0; +\infty)$, опуклою вгору на проміжку $(-4;\ 0)$, точок перегину не має.

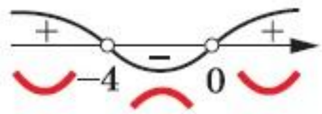


Рис. 123. Дослідження знаку f'' функції прикладу 36

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції f (рис. 124).

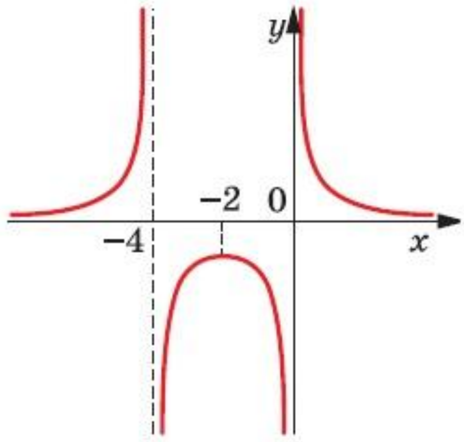


Рис. 124. Графік функції $f(x) = \frac{4}{x^2+4x}$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувавши графік функції f, з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0:

а) $f(x) = 4x + 1, x_0 = 0$;

б) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, x_0 = -1$;

в) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, x_0 = 1$;

г) $f(x) = \frac{|x-3|}{3-x}, x_0 = 3$.

2. Обчисліть границю:

а) $\lim_{x\to -1}(x^3 + x^2 - x - 1)$;

б) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+2x+3}$;

в) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$;

г) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x$.

3. Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:

а) $f(x) = 4x^2 + x,\ x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}2$;

б) $f(x) = \frac{2}{x},\ x_0 = 0{,}4,\ \Delta x = -0{,}2$.

4. Знайдіть кутовий коефіцієнт:

а) січної графіка функції $y = 2x^2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = -1$ і $x_1 = 0$;

б) дотичної до графіка функції $y = 2x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

5. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 4x + 5$; б) $y = x^{-18}$; в) $y = x^9$; г) $y = \sqrt[10]{x^7}$.

6. Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

а) $f(x) = \sin x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$; б) $y = \frac{x}{\sqrt[5]{x}},\ \ x_0 = 32$.

7. Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

а) $f(x) = \frac{2}{x}$; б) $f(x) = x^2 + x$.

8. Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

а) $f(x) = x^2 - 5x,\ \ x_0 = 1$; б) $f(x) = 2\sin x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

9. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x - 2$; б) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;

в) $f(x) = x - 2\sin x$.

10. Знайдіть точки екстремуму функції:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$; б) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;

в) $f(x) = 6\sqrt{x} - x$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2,\ \ [-2; 0]$; б) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9,\ \ [1; 3]$;

в) $f(x) = \sin x + \cos x,\ \ [0; \pi]$.

12. Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$; б) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 2x + 6$;

в) $f(x) = 2x^2 + 4\cos x$.

13. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$;   б) $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

11. Показникова та логарифмічна функції

Змістова лінія функції вивчається в курсі «Алгебра і початки аналізу» в 11 класі в межах теми «Показникова та логарифмічна функції».

У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені, корені та їх властивості, поняття показникової функції, засвоюють властивості логарифмічної функції, навички та вміння виконувати тотожні перетворення логарифмічних виразів, здійснювати обчислення числових виразів з логарифмами, розв'язувати логарифмічні рівняння та нерівності. Учні повинні навчитися схематично зображати графіки логарифмічних функцій за різними основами, пам'ятати основні властивості цих функцій та навчитися використовувати їх під час розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем.

11.1. Показникова функція та її властивості

У 10 класі учні ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер з'ясуємо чим є степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі навчальної програми. В підручнику [29] відповідний пункт містить лише загальні пояснення того як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з розгляду окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots .$$

Розглянемо послідовність раціональних чисел

$$3;\ 3,1;\ 3,14;\ 3,141;\ 3,1415; \ldots.$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π. Відповідно до цієї послідовності побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками:

$$2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}, 2^{3,1415}, \ldots.$$

Можна показати, що члени останньої послідовності зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^α, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Далі розглядають послідовність b^{α_1}, b^{α_2}, b^{α_3}, ... степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел α_1, α_2, α_3, ... Число c називають ***степенем додатного числа*** b ***з дійсним показником*** α і позначають b^α.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Виберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Тим самим задамо функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Цю функцію називають ***показниковою функцією***.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

Область визначення та область значень функції. При $a > 0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x > 0$, тому область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x = b$.

Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$. *А область визначення* $\mathbb{R}$.

Нулі і проміжки знакосталості функції. *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*

Показникова функція є неперервною.

Зростання/спадання функції. *Покажемо, що при* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою.*

Для цього скористаємося лемою.

Лема. *Якщо* $a > 1$ *і* $x > 0$, *то* $a^x > 1$; *якщо* $0 < a < 1$ *і* $x > 0$, *то* $0 < a^x < 1$.

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$, тобто $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною*.

Точки екстремуму функції та значення функції в цих точках. Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.

Показникова функція є диференційовною.

Графік функції. На рисунках 125.а)–б) схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

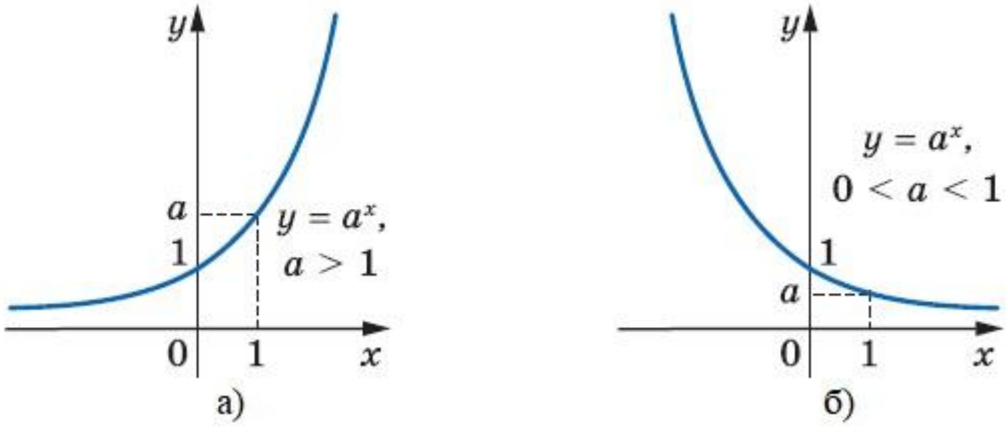


Рис. 125. Графіки функції $y = a^x$

Інші особливості функції. Зауважимо, що при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t = 0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t = 1$ маса дорівнювала a, то в моменти часу $t = 2$, $t = 3, \ldots$, $t = n$, ... маса дорівнюватиме відповідно a^2, a^3, ..., a^n, ... Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t) = a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t) = a^t$.

З фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші в банк під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Отже, показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, описані вище.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання/спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперевність	Неперевна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Приклад 37. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на проміжку $[-4;\ 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-4;\ 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27.

11.2. Логарифмічна функція та її властивості

Продовжуючи міркування попереднього пункту, оберемо додатне число a, відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити y відповідність число у таке, що $y = \log_a x$. Тим самим буде задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають ***логарифмічною***.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Область визначення та область значень функції. Для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}). Це означає, що *областю значень логарифмічної функції є множина* $\mathbb{R}$.

Маємо:

$$D(f) = E(g) = (0; +\infty);$$
$$E(f) = D(g) = \mathbb{R}.$$

Для будь-якого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Іншими словами, $g\big(f(x)\big) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Графік функції. Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової функції $y = a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ (рис. 126).

Нулі функції. *Функція* $y = \log_a x$ *має єдиний нуль* $x = 1$.

Проміжки знакосталості функції. *Функція* $y = \log_a x$ *має два проміжки знакосталості:*

якщо $a > 1$, *то* $y < 0$ *на проміжку* $(0; 1)$; $y > 0$ *на проміжку* $(1; +\infty)$;

якщо $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *на проміжку* $(1; +\infty)$; $y > 0$ *на проміжку* $(0; 1)$.

Зростання/спадання функції. Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція також зростаюча (спадна). Показникова функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ та спадною при $0 < a < 1$.

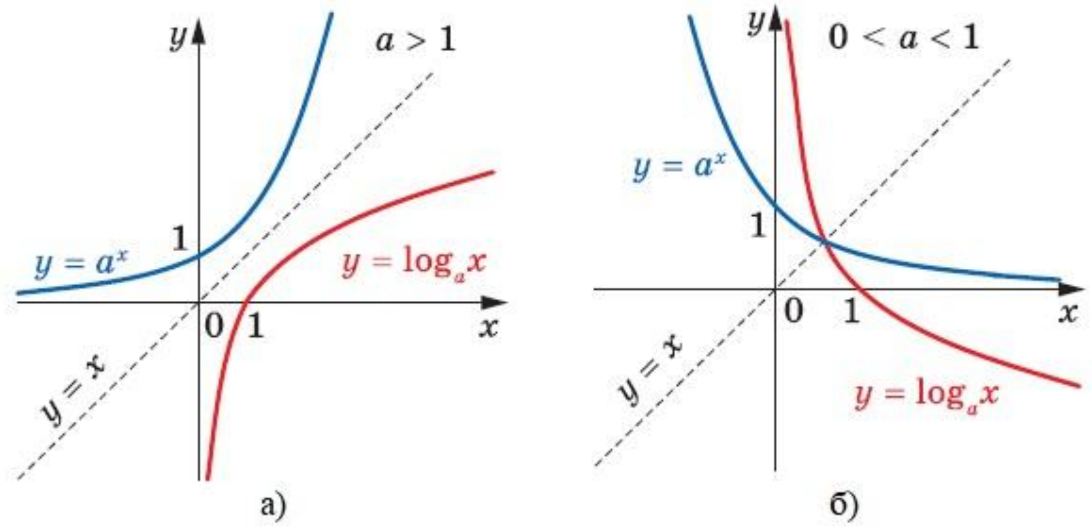


Рис. 126. Графіки функції $y = a^x$, $y = \log_a x$

Тому *функція* $y = \log_a x$ *є зростаючою при* $a > 1$ *та спадною при* $0 < a < 1$.

Точки екстремуму функції та значення функції в цих точках.

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою (при $a > 1$) або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.

Відомо, що коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною та неперервною, то обернена до неї функція також є неперервною. Показникова функція $y = a^x$ є неперервною.

Тому *функція* $y = \log_a x$ *є неперервною*.

Логарифмічна функція є диференційовною.

Інші особливості функції. *Графік функції* $y = \log_a x$ *має вертикальну асимптоту* $x = 0$, *коли* x *прямує до нуля справа*.

У таблиці наведено властивості функції $y = \log_a x$.

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$

Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	якщо $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$; $y > 0$ на $(1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$; $y > 0$ на $(0; 1)$
Зростання/спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперевність	Неперевна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

Приклад 38. Знайдіть область визначення функції:

$$f(x) = \frac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}.$$

Розв'язання. Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати нулю, тому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ даної функції є множиною розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

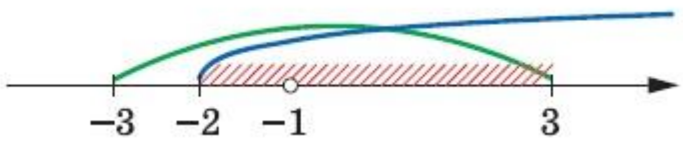


Рис. 127. Область визначення функції $f(x) = \frac{\lg(9-x^2)}{\lg(x+2)}$

Звернувшись до рисунка 127, отримуємо, що остання система рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l}-2 < x < -1,\\ -1 < x < 3.\end{array}\right.$$

Відповідь: $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які – спадними:

а) $y = 7^x$; б) $y = 3^{-x}$; в) $y = \left(\frac{4}{7}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$.

2. Побудуйте графік заданої функції. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -3 до 3 включно?

а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3. Знайдіть область значень функції:

а) $y = -3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$; в) $y = 5^x - 4$; г) $y = 4^{|x|}$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-3; 2]$.

5. Побудуйте графік функції:

а) $y = -3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$; в) $y = 3^{x-2}$; г) $y = 4^x - 3$.

6. Установіть графічно кількість коренів рівняння:

а) $4^x = x$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \sin x$; в) $4^{-x} = 1 - x^2$.

7. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = \log_4 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$; в) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; г) $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$?

8. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

а) $y = \log_3 x$, $\left[\frac{1}{9}; 27\right]$; б) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, $\left[\frac{1}{64}; 16\right]$.

9. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \log_4(3 - x)$;   б) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 6)$;   в) $y = \lg\frac{3x-1}{x+2}$.

10. Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = \log_3 \frac{1}{x}$. Яке взаємне розміщення побудованих графіків?

11. Побудуйте графік функції:

а) $y = \log_4(x - 2)$;   б) $y = \log_4 x + 2$;   в) $y = \log_{\frac{1}{4}}(-x) - 1$.

Список рекомендованої літератури

1. Бевз Г. П. Методика розв'язування алгебраїчних задач. К.: Рад. школа, 1975. – 240 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики.– К.: Вища школа, 1989.
3. Белешко Д.Т. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. пос. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 80 с.
4. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1987. – 240с.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І.А. Математика на вступних випробуваннях: Навч. посіб. К.: КНЕУ, 2006.
6. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: В-во «Shark», 2015. – 238с.
7. Істер О. С. Математика. 5 кл.: підруч. для закл. заг. серед. освіти. 2-ге видання доопрацьоване, К.: Генеза. 2018.
8. Істер О. С. Математика: підруч для 6-го кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза. 2014.
9. Істер О. С. Алгебра: підруч для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Освіта. 2015.
10. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8-го кл. закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза. 2021.
11. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза. 2017.
12. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. 2018.
13. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. К.: Генеза. 2019.
14. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А.В.Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.

15.Збірник задач з математики для вступників до вузів / В. К. Єгерєв, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; За ред. М. І. Сканаві. К.: Вища школа, 1992. 445с.

16.Капіносов А. Математика: збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / уклад. А. Капіносов, Г. Гап'юк, О. Мартинюк, С. Мартинюк. Тернопіль: Підручники і посібники, 2017. – 336 с.

17.Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

18.Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия: учебн. пособие для студентов физ-мат. спец. пед. ин-тов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1991. – 352 с.

19.Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Харків: ББН, 1999. – 172 с.

20.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 5 клас: підруч. для закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018.

21.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. Навч. закладів. Х.: Гімназія, 2014.

22.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, перероб. Х.: Гімназія, 2020.

23.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, перероб. Х.: Гімназія, 2021.

24.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручн. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики. Х.: Гімназія, 2016.

25.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія. 2017.

26. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія, 2017.
27. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018.
28. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018.
29. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2019.
30. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. 2019.
31. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Збірник задач і контрольних робіт. Х.: Гімназія, 2010.
32. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Х.: Гімназія, 2019.
33. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Х.: Ранок, 2018.
34. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Х.: Гімназія, 2019.
35. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук. - метод. пос. К.: Вид-во А.С.К., 2003.
36. Репета В.К., Клешня Н.О., Коробова М.В., Репета Л.А. Задачі з параметрами: Навч. посіб. К.: Вища школа, 2006.

37. Романюк В.Я., Дутко Л.І. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. Львів: Тріада плюс, 2004.
38. Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина І «Алгебраїчні рівняння» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2021. – 62 с.
39. Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Цань В.Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІ «Нерівності в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» механіко-математичного факультету, 2022. – 123 с.
40. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Навчальний посібник. К.: Техніка, 2003. – 416 с.