Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина I «Алгебраїчні рівняння»

Valentyn Sobchuk
National Taras Shevchenko University of Kyiv

Svitlana Kushnirenko
National Taras Shevchenko University of Kyiv

Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики»

Частина І «Алгебраїчні рівняння»

для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

механіко-математичного факультету

Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В.

Київ – 2021

Рецензенти: Працьовитий М.В. доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України,

Радченко В.М., доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету
протокол № 4 від 21 жовтня 2021

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина І «Алгебраїчні рівняння» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету

Наведено короткі відомості про рівняння. Дано приклади розв’язання рівнянь з параметрами, рівнянь з абсолютними величинами та ірраціональних рівнянь. Запропоновано низку завдань для самостійного розв’язування. для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету

Зміст

Вступ

Методичний посібник адресований насамперед студентам освітньої програми 014 «Середня освіта» з предметною спеціалізацією спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» для самостійної роботи з «Методики навчання математики» з розділу «Алгебраїчні рівняння». Посібник дає змогу оптимально організувати повторення матеріалу з даного розділу. Даний матеріал корисний при підготовці студентами до занять з відповідного розділу елементарної математики під час виробничої практики з відривом від виробництва.

Слід зазначити, що до можливості систематизації різних задач людство йшло дуже довго, і лише на початку XX ст. І. Александров впровадив систематизацію задач за методами їх розв'язання і в окремих випадках – за змістом. Ця систематизація не позбавлена недоліків, однак вона дозволила не розв'язувати окремі задачі, а встановлювати загальні методи для різних типів задач. Саме з'ясування ідей загальних методів є головним при навчанні розв'язуванню задач.

Термін «метод», який застосовується в математичному середовищі, використовується в різних аспектах:

1. Навчальну діяльність прийнято розглядати як діяльність пізнавальну. Тому в навчанні знаходять відображення загальні методи пізнання. У навчанні математики найчастіше використовується аналіз і синтез, індукція і дедукція, аналогія і порівняння.

2. У шкільній математиці використовується до певної міри методи математики – науки. Це, наприклад, векторний метод, метод ГМТ, метод координат тощо. Якщо учні опановують зазначені методи, то вони зможуть самостійно застосувати їх до розв'язання задач, доведення теорем.

Таким чином, математичні методи в процесі навчання стають методами надбання і застосування знань, трансформуються в методи навчальної діяльності школярів.

3. Найчастіше, говорячи про методи стосовно до навчального процесу, мають на увазі методи навчання.

У педагогічній літературі відсутній єдиний підхід до визначення поняття «метод», «метод навчання», «метод пізнання». Для вибору трактування варто звернутися до філософської літератури. Але й тут аналіз підходів свідчить про відсутність загальноприйнятого трактування поняття «метод».

У деяких джерелах під методом мається на увазі спосіб досягнення мети, визначеним способом впорядкована діяльність. В енциклопедії з філософії метод означений як система результативних принципів, що перетворює практичну і пізнавальну діяльність. Метод (від грец. μέθοδος — «шлях крізь») — систематизована сукупність кроків, які потрібно здійснити, щоб виконати певну задачу чи досягти певної мети; поняття тотожне алгоритму дій і технологічному процесу.

Стосовно методу в математиці, слід зазначити, що в навчально-методичній літературі розглядають спеціальні прийоми (методи) розв'язування рівнянь.

Розрізняють чотири основні методи:

- метод переходу від рівності, що зв'язує функції, до рівності, що зв'язує аргументи;
- метод заміни змінної;
- метод розкладання на множники;
- функціонально-графічний метод

та їх різні модифікації. Власне нижче всі вони будуть детально розглянуті.

У посібнику виписано підходи до розв'язання рівнянь першого степеня з одним невідомим, систем лінійних рівнянь, квадратних, ірраціональних та інших типів алгебраїчних рівнянь.

Готуючись самостійно до модульної контрольної роботи № 1 з курсу «Методика навчання математики» кожен студент повинен розв'язати по одному прикладу з кожного з 15-ти типів, що містяться в завданнях для самостійної роботи.

В методичних вказівках представлено класифікацію рівнянь з курсу елементарної математики, наведено приклади розв'язування складніших рівнянь, а також дано короткі теоретичні відомості, на яких базуються методи розв'язування алгебраїчних рівнянь. При проходженні практики, розв'язуючи рівняння зі змінними слід вимагати від учнів визначити:

- при яких значеннях змінних, що входять у вираз невідомого, і при яких співвідношеннях між ними рівняння не втрачає числового смислу;
- при яких значеннях змінних, що входять у вираз невідомого, і при яких співвідношеннях між ними значення невідомого не втрачає числового смислу;
- при яких значеннях невідомого рівняння не втрачає числового смислу.

1. Загальні відомості про рівняння

Поняття про рівняння

Означення 1 *Рівність $f(x) = g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ – деякі дані функції, задані на тій самій області визначення, називається рівнянням з одним невідомим. Функції $f(x)$ та $g(x)$ називають лівою і правою частиною рівняння. Одна з частин рівняння може бути числом. Величина x називається невідомою.*

Якщо обидві частини рівняння є алгебраїчні функції, то рівняння називається *алгебраїчним*. Алгебраїчні рівняння поділяються на *раціональні* та *ірраціональні*. Якщо обидві частини рівняння є раціональні функції (такі, в яких над аргументом виконуються алгебраїчні операції, крім добування кореня), то рівняння називається *раціональним*. Якщо, принаймні, в одній з частин є дія добування кореня з виразу, що містить змінні, то рівняння називається *ірраціональним*.

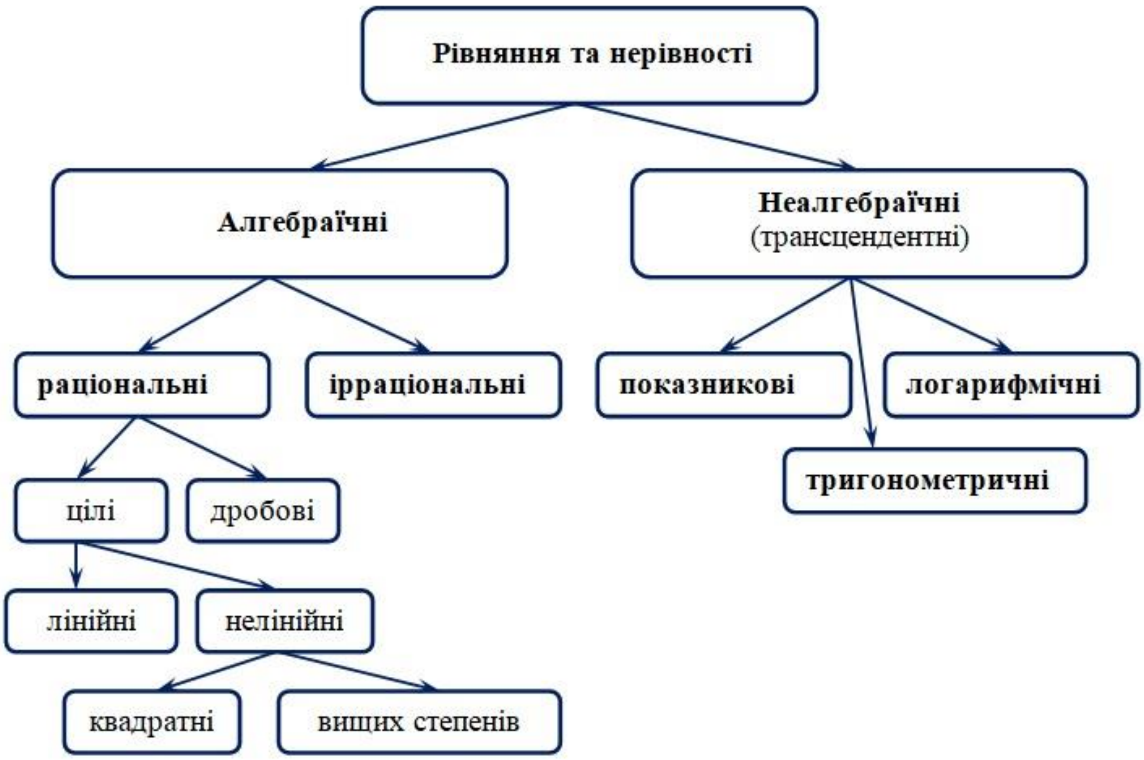

Рис. 1. Класифікація рівнянь та нерівностей

Загальну класифікацію алгебраїчних та неалгебраїчних рівнянь та нерівностей наведено на рис.1.

Означення 2 *Рівність $f(x) = g(x)$ назвемо тотожністю, якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ тотожні. Це означає, що в них однакові області визначення, і при кожному x з* *області визначення їх значення збігаються. Заміна функції на тотожну, називається тотожним перетворенням.*

Означення 3 *Те значення аргументу* x*, при якому функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *набувають однакових значень, називається коренем.*

Приклади:

рівність $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ є тотожністю;

рівність $(x+2)^2 = x^2 + 2x$ є рівнянням; $x = -2$ — корінь рівняння.

Рівняння може мати скінченну множину коренів, нескінченну множину коренів, або ж зовсім не мати коренів.

Наприклад, рівняння $x^2 + 1 = 0$ немає коренів на множині дійсних чисел.

Означення 4 *Розв'язати рівняння на даній числовій множині – значить знайти всі його корені, що належать цій множині або показати, що рівняння не має коренів на цій множині.*

Означення 5 *Областю визначення рівняння, або, інакше, областю допустимих значень коренів рівняння, називається множина всіх значень аргументу, при яких обидві частини рівняння мають зміст.*

Очевидно, що кожен корінь рівняння належить його області визначення і всяке число, яке не належить цій області, не може бути його коренем.

Для того щоб розв'язати рівняння, зводимо його тотожними перетвореннями до більш простого рівняння з тими самими розв'язками. У зв'язку з цим виникає важливе поняття рівносильності (еквівалентності) рівняння.

Означення 6 *Два рівняння називаються рівносильними (еквівалентними) на множині X; якщо вони мають ту саму множину коренів, які належать множині X. При тому будь-які рівняння, які не мають коренів, називаються еквівалентними.*

Приклади:

Рівняння $x = 3$ і $x^3 = 27$ еквівалентні в множині $\mathbb{R}$ (дійсних чисел);

Рівняння $x = 3$ і $x^3 = 27$ на множині $\mathbb{C}$ комплексних чисел не еквівалентні. Перше з них має тільки один корінь, а друге має три корені: $x_1 = 3$ і два комплексні $x_{2.3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{27}i}{2}$, $i = \sqrt{-1}$.

При розв'язуванні рівнянь фундаментальним є поняття еквівалентність рівнянь. Відтак приходимо до такого методу розв'язування рівнянь.

Нехай, потрібно розв’язати рівняння на деякій множині. Замінюємо це рівняння простішим еквівалентним на даній множині рівнянням. Нове рівняння знову замінюємо еквівалентним рівнянням і т. д. доти, поки не отримаємо рівняння, корені якого, що належать даній множині, знаходяться відомим методом.

В багатьох випадках буває складно переходити до більш простого еквівалентного рівняння, оскільки при цьому можливе розширення ОДЗ. В таких випадках серед отриманих коренів можуть бути сторонні, які слід відкинути, виконавши перевірку належності ОДЗ.

Теорема 1. *Якщо до обох частин рівняння*

$$f(x) = g(x)$$

додати одну і ту саму функцію $\varphi(x)$, *яка має зміст при всіх значеннях аргумента з області визначення рівняння, то рівняння*

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$$

еквівалентне (рівносильне) даному.

Наслідок. *З однієї частини рівняння в іншу можна перенести будь-який доданок з протилежним знаком. При цьому дістанемо рівняння, еквівалентне даному рівнянню.*

Теорема 2. *Якщо функція* $\varphi(x)$ *має зміст при всіх значеннях аргумента з області визначення рівняння*

$$f(x) = g(x),$$

і $\varphi(x) \neq 0$, *то рівняння* $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ *еквівалентне даному рівнянню.*

Наслідок 1. *Якщо знаки всіх членів рівняння змінили на протилежні, то отримаємо рівняння рівносильне даному.*

Наслідок 2. *Якщо обидві частини рівняння привести до спільного знаменника, який не включає в собі змінну, а пізніше отриману рівність помножити на цей знаменник, то одержане рівняння рівносильне даному.*

2. Метод заміни змінної

Суть методу заміни змінної полягає в тому, що шляхом заміни деякого виразу, який входить в рівняння та містить змінну, у вихідному рівнянні або понижується степінь, або від дробового переходять до цілого рівняння, або ірраціональне рівняння зводять до раціонального, тобто вихідне рівняння зводиться до найпростішого.

З методом заміни змінної в шкільному курсі математики учні знайомляться в 7-му класі в темі «Системи рівнянь». Даний метод використовується в рівняннях, де заміна змінної очевидна або стає очевидною після деяких елементарних тотожних перетворень.

Наприклад, спосіб реалізації: явна заміна (тобто заміна очевидна).

1) $(3x+2)^4 - 13(3x+2)^2 + 36 = 0.$

Використовуючи заміну $(3x+2)^2 = y,\ y \geq 0$, отримаємо квадратне рівняння вигляду

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Оскільки $D > 0$, знайдемо корені:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 4, \\ y_2 = 9. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (3x+2)^2 = 4, \\ (3x+2)^2 = 9. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = -{}^4\!/_3, \\ x_3 = {}^1\!/_3, \\ x_4 = -{}^5\!/_3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-1\frac{2}{3}; -1\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\}$.

2) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 9} = 3.$

Заміна очевидна $\sqrt{x^2 - x + 9} = y,\ y \geq 0$ (з врахуванням значення підкореневого виразу можна уточнити обмеження на «нову» змінну: $y \geq \sqrt{8\frac{3}{4}}$). Необхідно до обох частин додати по 9 та отримати y^2. Вихідне рівняння набере вигляду $y^2 + y - 12 = 0$. Знаходимо корені цього рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = -4, \\ y_2 = 3. \end{array}\right.$$

Враховуючи обмеження на «нову» змінну, $y = -4$ є стороннім коренем. Повертаємось до «старої» змінної:

$\sqrt{x^2 - x + 9} = 3.$

$x^2 - x + 9 = 9.$

ОДЗ: $x^2 - x + 9 \geq 0$.

$x(x-1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{0; 1\}$.

3) $(x^2 + 10x)^2 + (x+5)^2 = 157$.

Заміну змінної можна помітити, якщо скористатись формулою квадрата суми для другого члена рівняння:

$(x^2 + 10x)^2 + (x^2 + 10x + 25) = 157$.

$x^2 + 10x = y$.

$y^2 + y + 25 = 157$.

$y^2 + y - 132 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = -12, \\ y_2 = 11. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 10x + 12 = 0, \\ x^2 + 10x - 11 = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -5 - \sqrt{13}, \\ x_2 = -5 + \sqrt{13}, \\ x_3 = -11, \\ x_4 = 1. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-11; 1; -5 \pm \sqrt{13}\}$.

Матеріал, пов’язаний з рівняннями, займає значну частину шкільного курсу математики і викликає значний інтерес до вивчення, так як в даному випадку саме за допомогою рівнянь записуються найважливіші задачі, пов'язані з пізнанням реальної дійсності.

Формуючи в процесі навчання спеціальні уміння та навички щодо розв’язування алгебраїчних рівнянь методом заміни змінної, учні опановують новий потужний засіб розв’язування рівнянь.

При розв’язуванні рівнянь вдала заміна змінних дозволяє звести задачу до більш простої. Однак у багатьох випадках зручна заміна далеко не очевидна, і тому необхідно виконати деякі перетворення. Зокрема, стандартним прийомом розв’язування раціональних рівнянь є приведення до спільного знаменника, в ірраціональних – піднесення до степеня. Однак, досить часто це призводить до трудомістких обчислень.

Способи реалізації методу заміни змінної.

1. Використання основної властивості дробу.

Дана техніка застосовується в рівняннях вигляду:

$$\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} \pm \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = D, \qquad D \neq 0$$

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} \pm \frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c} = D, \qquad D \text{ – довільні значення,}$$

$$\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} \pm \frac{ax^2+b_2x+c}{ax^2+b_3x+c} = D, \qquad D \text{ – довільні значення,}$$

де a, b, c, A, B, D – сталі, $a \neq 0$.

Рівняння цього типу розв'язують наступним способом: перевіривши чи є $x = 0$ коренем рівняння, ділять чисельник та знаменник кожного дробу на $x \neq 0$ і роблять заміну:

$$ax + \frac{c}{x} = t.$$

Приклад:

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{3x}{x^2-8x+15}.$$

$x = 0$ – не є коренем рівняння. Розділимо чисельник і знаменник кожного дробу на $x \neq 0$. Отримаємо

$$\frac{x-10+\frac{15}{x}}{x-6+\frac{15}{x}} = \frac{3}{x-8+\frac{15}{x}}.$$

Зробимо заміну змінної $x-8+\frac{15}{x} = t$. Тоді

$$\frac{t-2}{t+2} = \frac{3}{t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t^2-5t-6=0, \\ t+2 \neq 0, \\ t \neq 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = 6. \end{array}\right.$$

Повернувшись до «старої» змінної:

$$\left[\begin{array}{l} x-8+\frac{15}{x} = -1 \\ x-8+\frac{15}{x} = 6 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2-7x+15=0, \\ x^2-14x+15=0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{34}.$$

Відповідь: $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{34}$.

2. Виділення квадрату двочлена.

$$(x)^2 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 5.$$

$$(x)^2 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2x}{x+2} - 2 \cdot x \cdot \frac{2x}{x+2} = 5.$$

Згрупуємо перший, другий і четвертий члени:

$$\left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5.$$

$$\left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x^2}{x+2} - 5 = 0.$$

Ввівши заміну змінної $\frac{x^2}{x+2} = t$, отримаємо:

$$t^2 + 4t - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = -5, \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$$

Повернувшись до «старої» змінної, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x+2} = -5, \\ \dfrac{x^2}{x+2} = 1, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 10 = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq -2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

3. Перехід до системи.

Рівняння вигляду

$$\sqrt[n]{af(x) + b} \pm \sqrt[n]{cf(x) + d} = m,$$

де $a = k \cdot c$ і де k приймає довільні дійсні значення.

Приклад:

3.1. $\sqrt[3]{8x + 4} - \sqrt[3]{8x - 4} = 2.$ (1)

Покладемо $u = \sqrt[3]{8x + 4}$, $v = \sqrt[3]{8x - 4}$. (2)

Тоді рівняння (1) запишеться матиме вигляд $u - v = 2$. Оскільки ми ввели дві нові функції, потрібно знайти ще одне рівняння, яке пов'язує u та v. Для цього піднесемо обидві рівності (2) до кубу і зазначимо, що $u^3 - v^3 = 8$. Відтак потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ u^3 - v^3 = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2) = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 2, \\ (u - v)^2 + 3uv = 4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ 3uv = 0, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2, \\ v = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0, \\ v = -2, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{8x + 4} = 2, \\ \sqrt[3]{8x - 4} = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{8x + 4} = 0, \\ \sqrt[3]{8x - 4} = -2, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь $x_{1,2} = \pm\, \frac{1}{2}$.

3.2. Розв'яжемо рівняння

$$x \cdot \left(\frac{5 - x}{x + 1}\right) \cdot \left(x + \frac{5 - x}{x + 1}\right) = 6 \qquad (3)$$

Нехай $x \cdot \left(\frac{5-x}{x+1}\right) = u$, $x + \frac{5-x}{x+1} = v$. (4)

Тоді рівняння (3) набере вигляду: $u \cdot v = 6$.

Складемо ще одне рівняння, що залежить від u та v. Для цього знайдемо суму u та v.

$$x \cdot \frac{5 - x}{x + 1} + \frac{5 - x}{x + 1} + x = \frac{5 - x}{x + 1} \cdot (x + 1) + x = 5 - x + x = 5.$$

Відтак потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} u \cdot v = 6, \\ u + v = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2, \\ v = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3, \\ v = 2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \cdot \left(\dfrac{5 - x}{x + 1}\right) = 2, \\ x + \dfrac{5 - x}{x + 1} = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \cdot \left(\dfrac{5 - x}{x + 1}\right) = 3, \\ x + \dfrac{5 - x}{x + 1} = -2, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

Відповідь $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

4. Групування множників парами.

Рівняння вигляду

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m,$$

де $a + b = c + d$ або $a + c = b + d$ або ж $a + d = b + c$.

Приклад:

$$(x - 1)(x - 7)(x - 4)(x + 2) = 40.$$

Перевіримо, чи є зміст застосовувати даний спосіб: $7 - 2 = 1 + 4$, тобто $5 = 5$. Отже потрібно перемножити перший множник з третім і другий множник з четвертим:

$$(x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 4) = 40.$$

Введемо заміну: $x^2 - 5x - 14 = t$, отримаємо: $t(t + 18) = 40$.

$$t^2+18t-40=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t_1=-20, \\ t_2=2, \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x^2-5x-14=-20, \\ x^2-5x-14=2, \end{array}\right. \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=0, \\ x^2-5x-16=0. \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=3, \\ x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=2, x_2=3, x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$.

5. Групування множників парами та ділення обох частин рівняння.

Розглянемо рівняння вигляду

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2, \qquad m\neq 0,$$

де $ab=cd$ або $ac=bd$ або ж $ad=bc$.

Приклад:

$$(x-1)(x-2)(x-8)(x-4)=4x^2.$$

Перевіримо, чи є зміст застосовувати даний спосіб: $-8\cdot(-1)=(-2)\cdot(-4)$, тобто $8=8$. Відтак потрібно перемножити перший множник з третім і другий множник з четвертим:

$$(x^2-9x+8)(x^2-6x+8)=4x^2.$$

З огляду на те, що $x=0$ не є коренем, розділимо обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$. Отримаємо:

$$\left(x-9+\frac{8}{x}\right)\left(x-6+\frac{8}{x}\right)=4.$$

Введемо заміну: $x-9+\frac{8}{x}=t$. Рівняння набуде вигляду:

$$t\cdot(t+3)=4 \quad\Rightarrow\quad t^2+3t-4=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t_1=-4, \\ t_2=1, \end{array}\right. \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x-9+\dfrac{8}{x}=-4, \\ x-9+\dfrac{8}{x}=1, \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x^2-5x+8=0, \\ x^2-10x+8=0. \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=5\pm\sqrt{17}$$

Відповідь: $x_{1,2}=5\pm\sqrt{17}$.

6. Зведення до однорідного рівняння.

Досить поширеними є однорідні рівняння другого степеня:

$$Af^2(x)+Bf(x)g(x)+Cg^2(x)=0,$$

де A, B, C – сталі, відмінні від нуля.

Наприклад,

$$2 \cdot (x^2 + x + 1)^2 - 7 \cdot (x - 1)^2 = 13 \cdot (x^3 - 1).$$

В даному випадку зручно скористатись заміною вигляду: $x^2 + x + 1 = u$ та $x - 1 = v$. Тоді рівняння набере вигляду $2u^2 - 7v^2 = 13uv$. Власне, ми отримали однорідне рівняння другого степеня.

Приклад:

Розглянемо детально рівняння вигляду:

$$(x^2 - 5x + 1) \cdot (x^2 - 4) = 6 \cdot (x - 1)^2 \qquad (5)$$

Вигляд даного рівняння не свідчить, що воно є однорідним. Перетворимо перший множник: виділимо з нього вираз, рівний другому множнику:

$$x^2 - 5x + 1 = x^2 - 4 - 5x + 5 = (x^2 - 4) - 5\,(x - 1). \qquad (6)$$

Підставляючи рівняння (6) в (5), отримаємо:

$$\big((x^2 - 4) - 5\,(x - 1)\big) \cdot (x^2 - 4) = 6 \cdot (x - 1)^2.$$

Розкриємо дужки:

$$(x^2 - 4)^2 - 5\,(x - 1) \cdot (x^2 - 4) = 6 \cdot (x - 1)^2.$$

Введемо заміну $x^2 - 4 = u$ та $x - 1 = v$, отримаємо:

$$u^2 - 5uv = 6v^2.$$

Отримали однорідне рівняння другого степеня відносно u та v. Ділимо його на $v^2 \neq 0$. Слід зауважити, що з рівняння випливає, що якщо $v = 0$, то й $u = 0$, тобто $\begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \end{cases}$ – дана система розв’язків не має.

Отримуємо розв’язок:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\left(\frac{u}{v}\right) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\frac{u}{v} = -1, \\ &\frac{u}{v} = 6, \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\frac{x^2 - 4}{x - 1} = -1, \\ &\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 6, \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 + x - 5 = 0, \\ &x^2 - 6x + 2 = 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}, \\ &x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{7}. \end{aligned}\right.$$

Відповідь: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{7}$.

7. Тригонометрична підстановка

Тригонометрична підстановка використовується у тих випадках, коли ірраціональне рівняння складно розв’язати іншим способом, тобто виникає складність позбутися ірраціональності. Вихідне ірраціональне рівняння зводиться до тригонометричного рівняння.

Приклад:

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

$D(f)\colon 1-x^2\geq 0 \;\;\Rightarrow\;\; x\in[-1{,}1]$. Відтак можна ввести заміну $x=\sin\alpha$ чи $x=\cos\alpha$. Нехай $x=\sin\alpha$, де $\alpha\in[-\pi/2\,,\pi/2]$ (на цьому інтервалі функція синуса набуває усіх своїх значень). Підставимо заміну у вихідне рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases}\sqrt{1-\sin^2\alpha}=4\sin^3\alpha-3\sin\alpha\,,\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\sqrt{\cos^2\alpha}=-\sin 3\alpha\,,\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}|\cos\alpha|+\sin 3\alpha=0\,,\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\cos\alpha+\sin 3\alpha=0,\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin 3\alpha=0\,,\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=0,\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{ll}\alpha+\frac{\pi}{4}=\pi n, & n\in\mathbb{Z},\\ 2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k, & k\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\alpha_1=-\frac{\pi}{4},\\ \alpha_2=-\frac{\pi}{8},\\ \alpha_3=\frac{3\pi}{8}.\end{array}\right.$$

Повернемося до «старої» змінної:

$$x_1=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad x_2=\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\quad x_3=\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},\;\; x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\;\; x_3=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

8. Зворотні і симетричні рівняння

Розглянемо рівняння четвертого степеня

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0,\quad a_0\neq 0.$$

Якщо рівновіддалені від кінців рівняння коефіцієнти задовольняють умову

$$\frac{a_3}{a_1}=\lambda\neq 0,\qquad \frac{a_4}{a_0}=\lambda^2,$$

то рівняння називається зворотним рівнянням четвертого степеня. Зворотні рівняння четвертого степеня розв’язують таким способом: обидві частини рівняння ділять на

$x^2 \neq 0$ ($x = 0$ – не корінь), після чого групують члени, рівновіддалені від кінців і проводять заміну змінних $x + \frac{\lambda}{x} = t$.

Приклад:

$$8x^4 - 10x^3 - 22x^2 + 15x + 18 = 0.$$

Перевіримо, чи рівняння зворотне:

$$-\frac{10}{15} = -\frac{2}{3}; \quad \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Рівняння оборотне. Розділивши обидві його частини на $x^2 \neq 0$, отримуємо:

$$8x^2 - 10x - 22 + \frac{15}{x} + \frac{18}{x^2} = 0.$$

Згрупуємо доданки:

$$\left(8x^2 + \frac{18}{x^2}\right) - \left(10x - \frac{15}{x}\right) - 22 = 0.$$

$$2\left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 5\left(2x - \frac{3}{x}\right) - 22 = 0. \qquad (7)$$

Введемо заміну: $2x - \frac{3}{x} = t$. Щоб виразити $4x^2 + \frac{9}{x^2}$ через t, піднесемо обидві частини заміни до квадрату і отримаємо: $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = t^2$ або

$$4x^2 - 12 + \frac{9}{x^2} = t^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 + 12.$$

Перепишемо рівняння (7) через t. Отримаємо:

$$2(t^2 + 12) - 5t - 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Коренями даного рівняння є $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Повертаючись до «старої» змінної отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{3}{x} = \frac{1}{2}, \\ 2x - \frac{3}{x} = 2, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 4x^2 - x - 6 = 0, \\ 2x^2 - 2x - 3 = 0, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{8}, \\ x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{8}$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Зазначимо, що симетричні рівняння є частковим випадком зворотних рівнянь при $\lambda = 1$ і, відповідно, розв’язуються аналогічним способом.

9. Рівняння вигляду

$$\boldsymbol{(x-a)^4 \pm (x-b)^4 = c, \quad c \neq 0.}$$

Рівняння такого типу зручно розв'язувати використовуючи заміну

$$x = y + \frac{a+b}{2}.$$

Заміна такого вигляду вводиться для того, щоб в основах степенів $(x-a, x-b)$ отримати спряжені вирази $(y-m, y+m)$. Після піднесення до степеня виразів в дужках

$$(y-m)^4 \pm (y+m)^4 = c$$

отримуємо рівняння, спосіб розв'язання якого відомий.

Зауваження. *Заміну вигляду*

$$x = y + \frac{a+b}{2}$$

можна застосовувати і до рівнянь вигляду:

$$(x-a)^n \pm (x-b)^n = c, \quad c \neq 0, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Приклад:

$$(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1.$$

Застосуємо заміну:

$$x = y + \frac{2+3}{2} = y + \frac{5}{2}.$$

Підставимо у вихідне рівняння і отримаємо:

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^4 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^4 = 1.$$

Після піднесення до степеня і зведення подібних доданків отримаємо:

$$4y^4 + 3y^2 - \frac{7}{8} = 0,$$

звідки $y = \pm\frac{1}{2}$. Повернемося до заміни. Тоді:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3, \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$,

3. Рівняння з параметром

Рівнянням з параметрами називається рівняння, вигляд та розв'язок якого залежить від значень одного або декількох параметрів.

Розв'язати рівняння з параметром означає, що потрібно навести у відповіді сімейство *розв'язків* відносно невідомої величини (невідомих величин) для всіх можливих значень сталих величин (параметрів).

«Рівняння з параметрами», як тема, в шкільному курсі алгебри є компонентом навчальної програми 10 класу. Проте, аналіз підручників з математики свідчить, що такі завдання пропонуються до розв'язування учням вже починаючи з 5 класу і закінчуючи завданнями на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики.

Починаючи з 5-го класу вчитель має можливість знайомити учнів з поняттям параметра та методами розв'язування рівнянь з параметрами. Наприклад, яке число треба підставити замість a, щоб коренем рівняння: $(x + a) - 7 = 42$ було число 22; $(a - x) + 4 = 15$ було число 3?

Відтак, навчаючись у закладі вищої освіти, майбутні фахівці – вчителі математики мають набувати компетентностей, які дозволять їм в процесі опанування різних розділів математики, відповідно до рівня знань школярів, знайомити їх з методами розв'язування рівнянь з параметрами.

Проте, розв'язування рівняння з параметром в загальному випадку є нетривіальною задачею. Тому, вчитель математики має бути здатним знаходити нові способи розв'язування задач, приймати обґрунтовані рішення на основі результатів використання математичних методів.

Алгебраїчні рівняння з параметрами можна класифікувати таким способом:

i. лінійні рівняння з параметрами;
ii. квадратні рівняння з параметрами;
iii. рівняння з параметрами вищих степенів;
iv. алгебраїчні рівняння з параметрами, що містять змінну під знаком модуля;
v. ірраціональні рівняння з параметрами.

Всі методи розв'язування рівнянь з параметрами умовно розділяють на аналітичні та графічні. Можливе також поєднання цих методів.

Незважаючи на те, що задачі з параметрами розв'язуються в шкільному курсі математики, для їх розв'язання іноді доцільно використовувати елементи вищої математики. Аналіз методичних розробок, присвячених рівнянням з параметрами, а також задач, які зводяться до розв'язування таких рівнянь та їх систем, показав, що для успішного розв'язування задач такого типу необхідним є знання та уміння, пов'язані, принаймні, з такими розділами математики: елементарні перетворення графіків функцій, елементи теорії функцій дійсної змінної, елементи лінійної алгебри, елементи диференціального та інтегрального числення, чисельні методи наближеного розв'язування рівнянь, елементи теорії оптимізації.

При розв'язуванні рівнянь аналітичним способом можна сформулювати деякі загальні положення, дотримання яких дає певні орієнтири в процесі досліджень. А саме:

1. Встановлюють ОДЗ змінної, а також ОДЗ параметрів.
2. Виражають змінну через параметри.
3. Для кожного допустимого значення параметра знаходять множину всіх коренів даного рівняння. Якщо параметрів кілька, то множину коренів шукають, звичайно, для певного співвідношення між параметрами.
4. Досліджують особливі значення параметра, при яких корені рівняння існують, але не виражаються формулами, які отримали.

Розв'язувати рівняння з параметрами графічним способом зручно за таким алгоритмом:

1. Знаходимо область допустимих значень рівняння.
2. Виражаємо a як функцію від x.
3. У прямокутній системі координат будуємо графік функції $a = f(x)$ для тих значень x, які входять в область допустимих значень даного рівняння.
4. Знаходимо точки перетину прямої $a = c$, де $c \in (-\infty, +\infty)$ з графіком функції $a = f(x)$ розглянемо в прямокутній декартовій системі координат xOa. Якщо пряма $a = c$ перетинає графік $a = f(x)$, то знаходимо абсциси точок перетину. Для цього досить розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно x.
5. Записуємо відповідь.

Графічний метод розв’язування рівнянь з параметром

Найпростішим для розуміння та найдоступнішим для учнів є графічний метод розв’язування рівнянь з параметрами, який зводиться до побудови відповідних графіків функцій і рівнянь та базується на основних прийомах перетворень графіків функцій. Основна ідея графічного методу, як правило, полягає у розбитті рівняння на дві функції, побудові їх графіків та знаходженні точок перетину за координатами яких можна визначити розв’язки рівняння.

Проілюструємо це на прикладі: Знайти скільки розв’язків має рівняння в залежності від значення параметра a:

$$|x^2 - 8|x| + 7\,| + 3 = a.$$

Розв’язання.

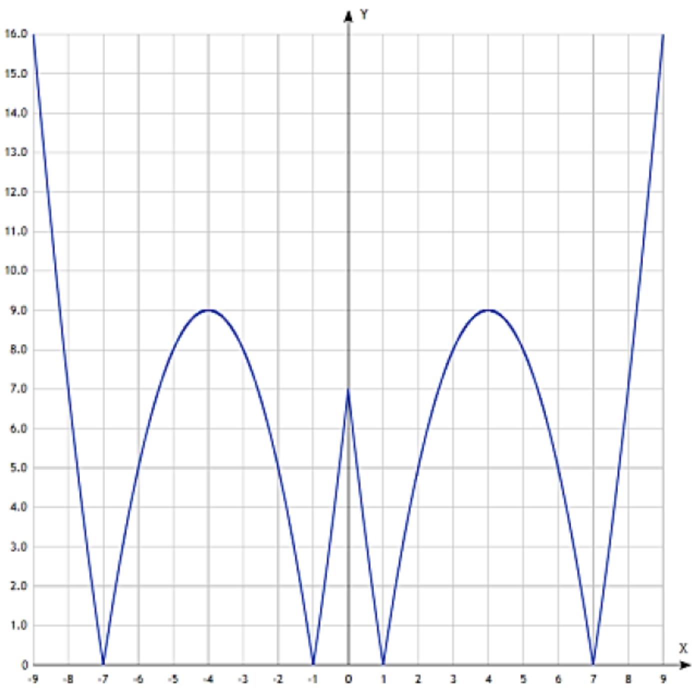

Рис. 2 Ескіз графіка функції $y = |x^2 - 8|x| + 7\,|$

Будуємо графік функції

$$y = |x^2 - 8|x| + 7\,|$$

$y = a - 3$ – пряма, паралельна осі OX.

Як видно з рис. 2, маємо такі випадки:

якщо $y < 0$, $a - 3 < 0$, $a \in (-\infty, 3)$, то графіки спільних точок не мають, тобто рівняння коренів немає;

якщо $y = 0$, $a - 3 = 0$, $a = 3$, то графіки мають 4 спільні точки, тобто рівняння має 4 корені, які легко встановлюються з графіка функції;

якщо $0 < y < 7$, $0 < a - 3 < 7$, $a \in (3{,}10)$, то рівняння має 8 коренів;

якщо $y = 7$, $a - 3 = 7$, $a = 10$, то рівняння має 7 коренів;

якщо $7 < y < 9$, $a \in (10{,}12)$, то рівняння має 6 коренів;

якщо $y = 9$, $a - 3 = 9$, $a = 12$, то рівняння має 4 корені;

якщо $y > 9$, $a - 3 > 9$, $a \in (12, +\infty)$, то рівняння має 2 корені.

Зауваження. *Важливим етапом розв'язування задач з параметрами є запис відповіді. Особливо це відноситься до тих прикладів, де розв'язки міняються в залежності від значення параметра. В подібних випадках складання відповіді – це збір одержаних результатів. І тут дуже важливо не забути відобразити у відповіді всі етапи розв'язку.*

Відповідь: при $a \in (-\infty, 3)$, рівняння коренів не має; при $a \in (3, +\infty)$ – рівняння має безліч коренів.

Коментар: необхідно відзначити, що при $a = 3$ рівняння має 4 корені $x \in \{-7;\ -1; 1; 7\}$; при $a \in (3,10)$ для кожного значення параметра a рівняння має 8 коренів, які відповідно поелементно належать одному з інтервалів: $x \in (-8; -7) \cup (-7; -4) \cup (-4; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 7) \cup (7; 8)$; при $a = 10$ рівняння має 7 корені $x \in \{-8;\ -5{,}5; -2{,}5; 0; 2{,}5; 5{,}5; 8\}$; при $a \in (10,12)$ для кожного значення параметра a рівняння має 6 коренів, які відповідно поелементно належать одному з інтервалів: $x \in (-8{,}2; -8) \cup (-5{,}5; -2{,}5) \cup (2{,}5; 5{,}5) \cup (8; 8{,}2)$, причому в першому і останньому по одному кореню , а в другому та третьому – по два; при $a = 12$ рівняння має 4 корені $x \in \{-8{,}2;\ -4; 4; 8{,}2\}$; при $a \in (12, +\infty)$ для кожного значення параметра a рівняння має 2 коренів, які відповідно поелементно належать одному з інтервалів: $x \in (-\infty; -8{,}2) \cup (8{,}2; +\infty)$.

Наведений приклад демонструє переваги та відносну простоту і наочність графічного методу, проте, не для кожної функції можна побудувати графік лише за допомогою елементарних перетворень графіків функцій. Часто, необхідним є залучення додаткових математичних прийомів, пов'язаних з дослідженням графіків функцій за допомогою похідних. Також є задачі, графічне дослідження яких не дасть відповіді на поставлені у них питання. Тому доцільним є використання деяких понять та тверджень вищої математики. Розглянемо найбільш уживані з них.

Теоретичні основи розв'язування деяких алгебраїчних рівнянь з параметрами

Елементи математичного аналізу. При розв'язуванні алгебраїчних рівнянь з параметрами часто використовують поняття похідної функції та її геометричний зміст. При цьому варто оперувати нижченаведеними поняттями.

Теорема 3. *Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на проміжку X і всередині цього проміжку має скінченну похідну $f'(x)$. Для того, щоб $f(x)$ була в X монотонно* *зростаючою* (*спадною*) *в строгому розумінні, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови*:

1) $f'(x) \geq 0$ *(*$f'(x) \leq 0$*) всередині* X;
2) $f'(x)$ *не перетворюється тотожно в* 0 *ні в одному з інтервалів, що є частиною* X.

Означення. *Точка* x_0 *з області визначення функції* $f(x)$ *називається точкою максимуму цієї функції, якщо існує такий окіл* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *що для всіх* $x \neq x_0$ *із цього околу виконується нерівність* $f(x) \leq f(x_0)$.

Точка x_0 *з області визначення функції* $f(x)$ *називається точкою мінімуму цієї функції, якщо існує такий окіл* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *що для всіх* $x \neq x_0$ *із цього околу виконується нерівність* $f(x) \geq f(x_0)$.

Теорема 4. (ознака точки максимуму функції). *Нехай функція* f *є диференційовною на кожному з проміжків* (a, x_0) *і* (x_0, b) *та неперервною в точці* x_0. *Якщо для всіх* $x \in (a, x_0)$ *виконується нерівність* $f'(x) \geq 0$, *а для всіх* $x \in (x_0, b)$ *виконується нерівність* $f'(x) < 0$, *то точка* x_0 *є точкою максимуму функції* f.

Теорема 5. (ознака точки мінімуму функції). *Нехай функція* f *є диференційовною на кожному з проміжків* (a, x_0) *і* (x_0, b) *та неперервною в точці* x_0. *Якщо для всіх* $x \in (a, x_0)$ *виконується нерівність* $f'(x) \leq 0$, *а для всіх* $x \in (x_0, b)$ *виконується нерівність* $f'(x) > 0$, *то точка* x_0 *є точкою максимуму функції* f.

З цього отримується ***правило*** для дослідження значення x_0, підозрілого на екстремум: *підставляємо в похідну* $f'(x)$ *спочатку* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, *а потім* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *встановлюємо знак похідної в околі точки* x_0 *– зліва та справа від неї; якщо при цьому похідна* $f'(x)$ *змінює знак плюс на мінус, то* x_0 *– точка максимуму, якщо знак міняється з мінуса на плюс, то* x_0 *– мінімум; якщо ж знак не змінюється, то екстремуму немає.*

Елементи лінійної алгебри. Для успішного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з параметрами доцільно використовувати апарат лінійної алгебри. Наведемо декілька понять та тверджень.

Нехай дано квадратну матрицю порядку n

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}. \tag{8}
$$

Означення. *Визначником n-го порядку, що відповідає матриці* (8)*, називається алгебраїчна сума $n!$ членів, складена таким чином: членами є всі можливі добутки n елементів матриці, взятих по одному з кожного рядка та кожного стовпця, причому член береться зі знаком плюс, якщо його індекси утворюють парну перестановку номерів, і зі знаком мінус – в протилежному випадку.*

Формули для обчислення визначників матриць другого та третього порядків наведені нижче:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.
$$

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

Для їх розв’язувань можна застосовувати теорему Крамера.

Теорема 6. *Якщо головний визначник Δ системи з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який знаходиться за правилом:*

$$
x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1, n}.
$$

Примітка:

$$
\frac{\begin{vmatrix} b_1\ a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_n\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad
\frac{\begin{vmatrix} a_{11}\ b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21}\ b_2 \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} b_n\ \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots
$$

Також, при $n = 2$ та $\Delta = 0$ справедливі такі твердження:

1) якщо $\forall i \in \{1,2\}$ $\Delta_i = 0$, то система має безліч розв'язків;

2) якщо $\forall i \in \{1,2\}$ $\Delta_i \neq 0$, то система не має розв'язків.

Також, в ряді задач, що зводяться до розв'язування алгебраїчних рівнянь з параметрами, доцільно використовувати апарати інших математичних дисциплін. Наприклад:

– на основі чисельних методів наближеного розв'язування алгебраїчних рівнянь можливим є відокремлення коренів рівнянь і знаходження їх наближених розв'язків;

– в оптимізаційних задачах з параметрами необхідним є застосування основних положень математичного програмування для знаходження екстремумів функцій на заданих областях та інші.

Приклади розв'язування деяких алгебраїчних рівнянь з параметрами та задач, що зводяться до них.

Приклад (*ілюстрація аналітичного методу*). Знайти всі значення параметра t, при яких рівняння $x^2 - x - 2t = 0$ і $t^2x^2 + tx - 2t = 0$ мають спільний корінь.

Для розв'язування даної задачі пропонується розглядати параметр t як ще одну рівноцінну змінну. Тоді можемо розглядати систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2t = 0, \\ t^2x^2 + tx - 2t = 0. \end{cases}$$

Коренями системи є такі пари (x, t): (0,0), (1,0), $\left(-\sqrt{2}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а відповіддю до задачі є: $t = 0$, $t = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Приклад (*прийоми застосування геометричного змісту похідної*). Знайти всі значення параметра a, при якому рівняння має рівно 4 корені:

$$6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 30x^2 = a.$$

Розглянемо функцію $y = 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 30x^2$. Дослідимо функцію та побудуємо ескіз її графіка.

Шукаємо похідну функції та розкладаємо її на множники:

$$y' = 30x(x + 2)(x + 1)(x - 1).$$

Побудуємо таблицю:

Таблиця 1.

x	$(-\infty,2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1{,}0)$	0	$(0{,}1)$	1	$(1,\infty)$
$f(x)$	>0	0	<0	0	>0	0	<0	0	>0
$f'(x)$	↗	8	↘	-11	↗	0	↘	-19	↗

Побудуємо ескіз графіка функції $y = 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 30x^2$ (рис. 2).

Функція $y = \ a$ – пряма, паралельна осі абсцис. Таким чином,

якщо $a \in (-\infty, -19) \cup (8, +\infty)$ – рівняння має один корінь;

якщо $a = -19$ або $a = 8$ – рівняння має два корені;

якщо $a \in (-19, -11) \cup (0{,}8)$ – рівняння має три корені;

якщо $a = -11$ або $a = 0$ – рівняння має 4 корені;

якщо $a \in (-11{,}0)$ – рівняння має 5 коренів.

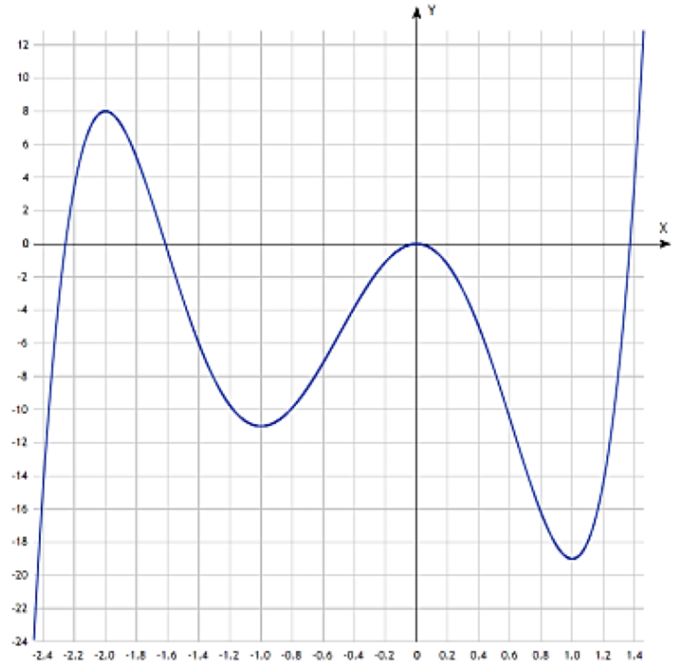

Рис. 2 Ескіз графіка функції $y = 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 30x^2$.

Відповідь: рівняння має рівно 4 коренів при $a = -11$ або $a = 0$.

Приклад (*використання понять лінійної алгебри*). Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = 1. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2), \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a-1)^2,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-1)^2.$$

При $a=1$ система має безліч розв'язків.

При $a=-2$ система не має розв'язків.

При $a\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{a+2},\qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{a+2},\qquad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{a+2}.$$

Розглянуті приклади ілюструють, що для успішного розв'язування рівнянь з параметрами зазвичай необхідно досконало володіти окремими елементами вищої математики. Таким чином, в процесі дослідження методичного підґрунтя розв'язування алгебраїчних рівнянь з параметрами в навчальному процесі шкіл з поглибленим вивчення математики, іноді необхідно спиратися на знання з таких основ дисциплін, як лінійна алгебра, теорія функцій дійсної змінної тощо.

Розглянемо ще низку прикладів на розв'язання рівнянь з параметрами.

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{3}{ax+2}-\frac{2}{3x+a}=0 \tag{9}$$

Розв'язування. Ліва частина рівняння має зміст при $ax+2\neq 0$ і $3x+a\neq 0$. Після простих перетворень початкового рівня маємо

$$3(3x+a)-2(ax+2)=0,\qquad x\neq-\frac{2}{a},\qquad x\neq-\frac{a}{3},$$

$$(2a-9)x=3a-4. \tag{10}$$

Якщо $a=4{,}5$, то рівняння (10) має вигляд

$$0\cdot x=9{,}5.$$

Це рівняння, а отже і рівняння (9), не має розв'язків. Нехай $a\neq 4{,}5$. Тоді $2a-9\neq 0$ і рівняння (10) має єдиний корінь $x=\frac{3a-4}{2a-9}$. Значення $x=\frac{3a-4}{2a-9}$ буде коренем рівняння (9) при тих значеннях a, при яких $ax+2\neq 0$ та $3x+a\neq 0$. Оскільки при $x=\frac{3a-4}{2a-9}$

$$ax+2=\frac{a(3a-4)}{2a-9}+2=\frac{3(a^2-6)}{2a-9},$$

$$3x+a=\frac{3(3a-4)}{2a-9}+a=\frac{2(a^2-6)}{2a-9},$$

то $ax+2\neq 0$ і $3x+a\neq 0$, якщо $a^2-6\neq 0$, тобто якщо $a\neq\pm\sqrt{6}$. Отже, якщо $a=4{,}5$ або $a=\pm\sqrt{6}$, то воно не має коренів.

Відповідь: $x=\frac{3a-4}{2a-9}$, $a\neq\pm\sqrt{6}$, $a=4{,}5$.

2. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (11)$$

відносно невідомого x.

Розв'язання: Очевидно $a\neq 0,\ b\neq 0$. Рівняння (11) запишеться так:

$$ab(x-b)+ab(x-a)=(a+b)(x^2-ax-bx+ab),$$

або

$$(a+b)x^2-(a^2+b^2+4ab)x+2ab(a+b)=0 \qquad (12)$$

Розглянемо такі випадки:

а) Нехай $b=-a\neq 0$. Тоді рівняння (11) має вигляд

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=0 \qquad (13)$$

звідки $2x=0$ і отже, $x=0$. Очевидно, $x=0$ є коренем рівняння (13);

b) Нехай $b\neq -a$, причому $a\neq 0,$ і $b\neq 0$. Тоді $a+b\neq 0$ і рівняння (12) є квадратним. Воно має два корені $x_1=a+b$ і $x_2=\dfrac{2ab}{a+b}$. Ці значення x_1 і x_2 будуть коренями (13) при тих значеннях a та b, при яких $x_1-a\neq 0$, $x_1-b\neq 0$ і $x_2-a\neq 0$ і $x_2-b\neq 0$. Оскільки $a\neq 0,$ $b\neq 0$, то $x_1-a=b\neq 0$ і $x_1-b=a\neq 0$. Тому $x_1=a+b$ є корінь рівняння (13) при будь-яких a та b, які задовольняють $b\neq -a$, $a\neq 0,\ b\neq 0.$ Далі x_2 буде коренем рівняння (11), якщо

$$x_2-a=\frac{2ab}{a+b}-a=\frac{a(b-a)}{a+b}\neq 0;$$

$$x_2-b=\frac{2ab}{a+b}-b=\frac{b(a-b)}{a+b}\neq 0,$$

звідки, оскільки $a\neq 0,\ b\neq 0$, виходить, що $a\neq b,$ отже;

якщо $a\neq 0,\ b\neq 0$ і $b\neq\pm a$, тобто $|b|\neq|a|$, то рівняння (11) має два корені $x_1=a+b$ і $x_2=\dfrac{2ab}{a+b}$;

якщо $b = a \neq 0$, то рівняння (11) має один корінь $x = 2a$;

якщо $b = -a \neq 0$, то рівняння (11) має один корінь $x = 0$;

якщо $a = 0$ або $b = 0$, то рівняння (11) не має коренів.

4. Рівняння з абсолютними величинами

Розглянемо рівняння, в яких невідома або функції від невідомої знаходяться під знаком абсолютної величини.

Найпростіше з таких рівнянь має вигляд $|f(x)| = a$, де $f(x)$ – деяка функція, a – стале число.

Якщо $a > 0$, то рівняння $|f(x)| = a$ еквівалентне сукупності двох рівнянь $f(x) = a$ і $f(x) = -a$, якщо $a = 0$, то рівняння $|f(x)| = a$ еквівалентне рівнянню $f(x) = 0$, а якщо $a < 0$, то це рівняння не має коренів.

«Розв'язати рівняння з модулями» або «Знайти усі розв'язки рівняння з модулями» – одні з найпопулярніших завдань в шкільному курсі математики. Завдання легко зводяться до звичайних рівнянь при знанні правил, а вони досить прості. При розкритті модуля потрібно знайти точки в яких підмодульна функція набуває нульового значення. Дійсну вісь розбити знайденими точками на інтервали та встановити знаки функції на кожному з них. Тоді розкривають модулі за правилом:

якщо підмодульна функція додатна, то модулі розкривають без змін;

якщо від'ємна, то розкриваючи модуль функцію беруть зі знаком мінус.

Все це безпосередньо випливає з *означення модуля* числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Після обчислень перевіряють, чи належить розв'язок розглядуваному інтервалу чи ні. В такий спосіб відсіюють зайві результати.

Для наочності перейдемо до розв'язування рівнянь з абсолютними величинами графічним методом та аналітично.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння:

$$|5x - 10| = 11.$$

Розв'язання. Задане завдання є найпростішим типом рівнянь з модулями. В першу чергу рівняння містить модуль один раз та під модульний вираз є лінійним відносно змінної.

Знаходимо точку, в якій вираз під знаком модуля перетворюється на нуль

$$5x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Справа від цієї точки вираз під модулем набуває додатного значення, зліва – від’ємного. Розкриваючи модуль, отримаємо два рівняння:

$$\left[\begin{array}{ll} 5x - 10 = 11, & x > 2, \\ -5x + 10 = 11, & x < 2. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{21}{5} = 4{,}2; \\ x = -\dfrac{1}{5} = -0{,}2. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = -0{,}2$, $x_2 = 4{,}2$.

Такого типу рівняння з модулем можна розв’язати графічним методом. В результаті отримаємо наступний вигляд графіків функцій (рис.4).

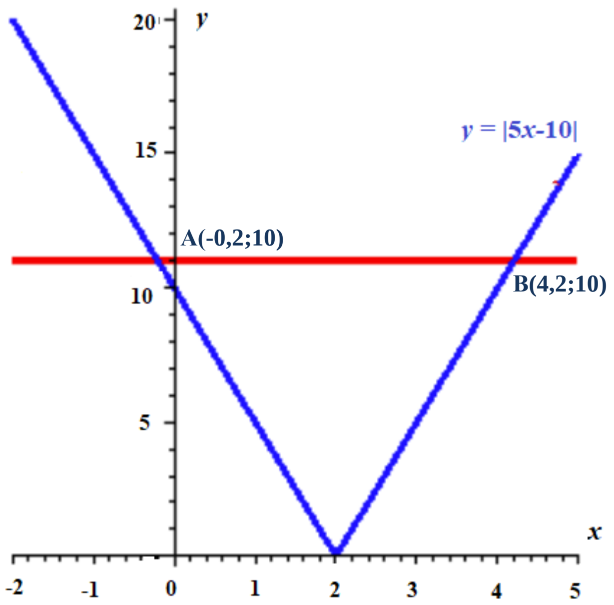

Рис. 4 Розв'язання рівняння $|5x - 10| = 11$ графічним способом.

Приклад. Знайти розв’язок рівняння:

$$|1 - 5x| = |2 - x|.$$

Розв’язання. Повторюючи міркування попереднього прикладу, знаходимо точки, в яких модулі перетворюються в нуль.

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 5x = 0, \\ 2 - x = 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0{,}2; \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Обидві точки розділяють дійсну вісь на інтервали: $(-\infty; 0{,}2)$; $(0{,}2; 2)$; $(2; +\infty)$.

Позначаємо знаки підмодульних функцій на знайдених інтервалах. Знаки встановлюємо простою підстановкою точок з інтервалу:

$$x \in (-\infty; 0{,}2) \quad \Rightarrow \quad [+,+],$$
$$x \in (0{,}2; 2) \quad \Rightarrow \quad [-,+],$$
$$x \in (2; +\infty) \quad \Rightarrow \quad [+,+].$$

Для зручності можна позначати інтервали графічно, декому це дуже допомагає, однак можна обійтися лише наведеними вище записами.

Розкриваємо модулі, враховуючи знаки та знаходимо розв'язки:

$$1 - 5x = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = -0{,}25,$$
$$1 - 5x = -2 + x \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}5,$$
$$-1 + 5x = -2 + x \quad \Rightarrow \quad x = -0{,}25.$$

Останній розв'язок не має змісту, оскільки не належить проміжку на якому його знаходимо. Таким чином рівняння задовольняють значення $x = -0{,}25$; $x = 0{,}5$.

Абсциси точок перетину графіків модуль-функцій є розв'язками рівняння (рис.5).

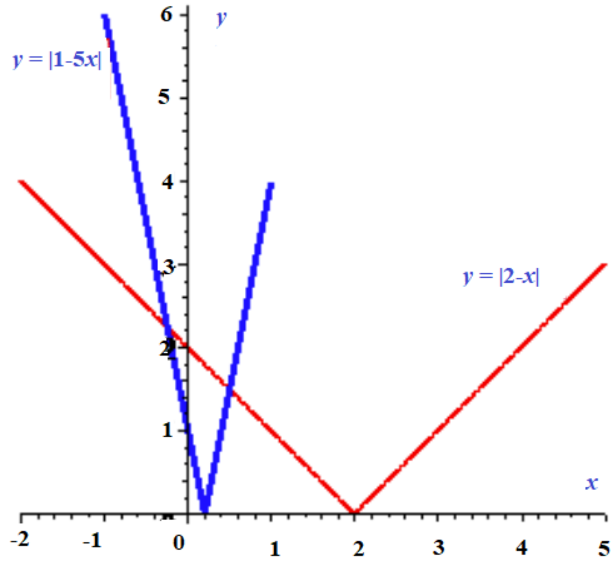

Рис. 5 Розв'язання рівняння $|1 - 5x| = |2 - x|$ графічним способом.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння:

$$|x + 3| - |x - 5| = 3x + 4.$$

Розв'язання. Знаходимо точки, які розбивають вісь на області занкосталості.

$$\left[\begin{array}{l} x + 3 = 0, \\ x - 5 = 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -3; \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Обидві точки розділяють дійсну вісь на інтервали: $(-\infty; -3)$; $(-3; 5)$; $(5; +\infty)$.

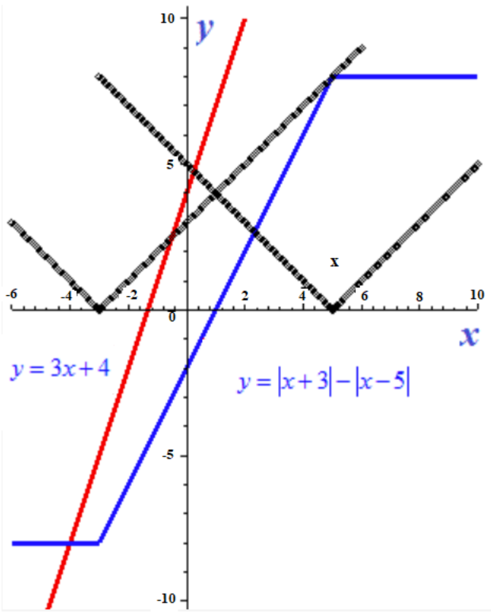

Рис. 6 Розв'язання рівняння $|x+3|-|x-5|=3x+4$ графічним способом.

Визначимо знаки підмодульних функцій на цих областях

$$x \in (-\infty;-3) \quad \Rightarrow \quad [-,-],$$
$$x \in (-3;5) \quad \Rightarrow \quad [+,-],$$
$$x \in (5;+\infty) \quad \Rightarrow \quad [+,+].$$

Розкриваємо модулі та обчислюємо:

$$-(x+3)+(x-5)=3x+4 \quad \Rightarrow \quad x=-4,$$
$$x+3+(x-5)=3x+4 \quad \Rightarrow \quad x=-6,$$
$$x+3-(x-5)=3x+4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{3}.$$

Другий і третій розв'язки не належать відповідним проміжкам, отже рівнянню відповідає лише $x=-4$. Графіки модулів зображено графічно на рис.6.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\left|x^2+3x-2\right|=2.$$

Розв'язання. Це рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь $x^2+2x-2=2$ і $x^2+2x-2=-2$, звідки знаходимо $x_1=1, x_2=-4$, $x_3=0$, $x_4=-3$.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння:

$$|x^2-6|x|+4|=1.$$

Розв'язання. Маємо квадратне рівняння під модулем, крім того змінна у ньому також міститься під модулем. Такого роду завдання викликають чимало труднощів при розв'язуванні у початківців, однак, за наявності практики, такі приклади не складні. В першу чергу позбуваємося модуля біля змінної

$$|x^2 - 6x + 4| = 1; \qquad x > 0,$$
$$|x^2 + 6x + 4| = 1; \qquad x < 0.$$

Такого роду приклади приводять до великої кількості областей, тому можна розв'язувати застосовуючи розбиття на проміжки, а можна розв'язувати самі рівняння, а після того перевіряти підстановкою. Обидва рівняння при розкритті модулів дають наступні

$$x^2 - 6x + 4 = 1,$$

$$-(x^2 - 6x + 4) = 1,$$

$$x^2 + 6x + 4 = 1,$$

$$-(x^2 + 6x + 4) = 1.$$

Знаходимо корені першого рівняння

$$x^2 - 6x + 3 = 0, \qquad x \in [0; 5{,}23)$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{6} \approx 5{,}44; \qquad x_2 = 3 - \sqrt{6} \approx 0{,}55.$$

Розв’яжемо друге квадратне рівняння

$$x^2 - 6x + 5 = 0, \qquad x \in (5{,}23;\ +\infty)$$

$$x_1 = 5; \qquad x_2 1.$$

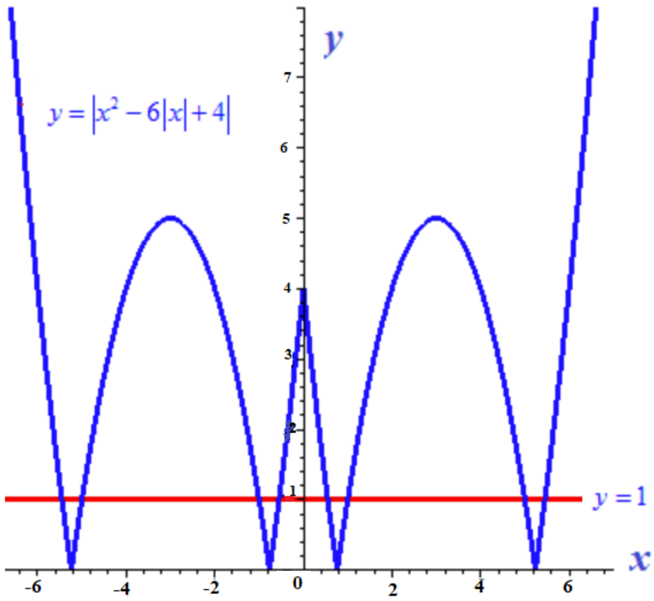

Рис. 7 Розв'язання рівняння $|x^2 - 6|x| + 4| = 1$ графічним способом.

З третього рівняння через дискримінант, отримаємо

$$x^2 + 6x + 3 = 0, \qquad x \in (-\infty;\ -5{,}23) \cup (-0{,}76; 0]$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{6} \approx -0{,}55; \qquad x_2 = -3 - \sqrt{6} \approx -5{,}45$$

отримуємо два розв'язки.

З останнього – четвертого рівняння

$$x^2 + 6x + 5 = 0, \qquad x \in (-5{,}23; -0{,}76)$$

$$x_1 = -5; \qquad x_2 = -1$$

отримуємо два корені. Загалом отримали 8 розв'язків рівняння з модулями. Перевірка підстановкою показує, що вони всі підходять. Також для підтвердження нижче наведено графік модуль функції рис.7.

Рівняння $|x^2 - 6|x| + 4| = 1$ можна розв'язати іншим способом. За означенням $|f(a)| = a$, відтак можемо записати рівняння у вигляді

$$|x|^2 - 6|x| + 4 = \pm 1.$$

Зробимо заміну: $t = |x|, t \geq 0$. Тоді

$$\left[\begin{array}{l} t^2 - 6t + 3 = 0, \\ t^2 - 6t + 5 = 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 3 \pm \sqrt{6}, \\ t = 5, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Повертаючись до заміни, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\left(3 + \sqrt{6}\right), \\ x = \pm\left(3 - \sqrt{6}\right), \\ x = \pm 5, \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

Після перевірки підстановкою отримаю: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Не наводитимемо загальних міркувань з приводу розв'язання складніших рівнянь з абсолютними величинами. Суть методу розв'язання рівнянь з абсолютними величинами з'ясуємо, розглядаючи приклад.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\left|x^2 - 2x - 3\right| = \left|2x - 5\right| + 1.$$

Розв'язання. Позначимо через y_1, y_2 функції, які входять в рівняння.

Функція $y_1 = 2x - 5$ має корінь $x = 2{,}5$; при $x > 2{,}5$ $y_1 > 0$, а при $x < 2{,}5$ $y_1 < 0$.

Функція $y_2 = x^2 - 2x - 3$ має два корені: $x = -1$ та $x = 3$; при $x < -1$ $y_2 > 0$, при $1 < x < 3$ $y_2 < 0$ і при $x > 3$ $y_2 > 0$.

Корені функцій y_1 і y_2 поділяють числову вісь на такі проміжки: $(-\infty;\ -1), [-1{:}\,2{,}5), [2{,}5; 3), [3; +\infty)$. Знайдемо корені даного рівняння, які належать цим проміжкам:

а) якщо $x \in (-\infty;\ -1)$, то $y_1 < 0$, $y_2 > 0$, і дане рівняння на $(-\infty;\ -1)$ еквівалентне рівнянню $x^2 - 2x - 3 = -(2x-5) + 1$, або $x^2 - 9 = 0$, яке має два корені $x = \pm 3$, але тільки один $x = -3$ належить $(-\infty;\ -1)$;

б) якщо $x \in [-1: 2{,}5)$, то $y_1 < 0$, $y_2 < 0$ і дане рівняння на $[-1: 2{,}5)$ еквівалентне рівнянню $-(x^2 - 2x - 3) = -(2x-5) + 1$ або $x^2 - 4x + 3 = 0$, яке має корені $x = 1, x = 3$. При цьому лише корінь $x = 1$ належить інтервалу $[-1: 2{,}5)$;

в) якщо $x \in [2{,}5; 3)$, то $y_1 \ge 0$, $y_2 < 0$, і дане рівняння на $[2{,}5; 3)$ еквівалентне рівнянню $-(x^2 - 2x - 3) = 2x - 5 + 1$, або $x^2 - 7 = 0$, яке на $[2{,}5; 3)$ має один корінь $x = \sqrt{7}$;

г) якщо $x \in [3; +\infty)$, то $y_1 > 0$, $y_2 \ge 0$, і дане рівняння на $[3; +\infty)$ еквівалентне рівнянню $x^2 - 2x - 3 = 2x - 5 + 1$, або $x^2 - 4x + 1 = 0$, яке на $[3; +\infty)$ має два корені $x = 2 \pm \sqrt{3}$, але тільки один корінь $x = 2 + \sqrt{3}$, належить інтервалу $[3; +\infty)$.

Відповідь: рівняння має чотири корені: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{7}$ і $x_4 = 2 + \sqrt{3}$.

5. Ірраціональні рівняння

Ірраціональні рівняння в шкільному курсі математики є однією з найскладніших тем. Її традиційне вивчення зосереджене в рамках курсу 8 – 10 класів, що дозволяє повноцінно враховувати вікові можливості учнів у формуванні ряду умінь і навиків, але часу на вивчення теми відведено небагато. Перш за все, потрібно відмітити, що при викладі даної теми реалізуються багато загальних методичних особливостей, характерних для курсу в цілому. У всіх підручниках при вивченні квадратного кореня і його властивостей (8 клас) розв'язуються прості ірраціональні рівняння вигляду

$$\sqrt{f(x)} = a,$$

де $f(x)$ – многочлен від x, a – деякі числа. Основні ж методи розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей розглянуті в підручниках 10 – 11 класів (академічного і профільного рівнів).

В основному ірраціональні рівняння вивчаються в 10 класі. У підручниках міститься весь теоретичний і практичний матеріал, необхідний для реалізації навчання на трьох рівнях. Включений різноманітний додатковий матеріал: тести по перевірці готовності вивчення тем, таблиці очікуваних результатів навчання, дослідницькі і лабораторні роботи, довідковий матеріал, контрольні завдання трьох рівнів складності, завдання на повторення, історичні відомості і інші матеріали.

У шкільній практиці при розв’язанні ірраціональних рівнянь найчастіше використовуються два основні методи:

– піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня;
– введення нових (допоміжних) змінних.

Ці методи вважаються стандартними, у шкільному курсі математики зазвичай ними і обмежуються. Проте іноді доводиться розв’язувати ірраціональні рівняння, які потребують застосування нестандартних методів та прийомів оскільки

– у більшості випадків відсутній чіткий алгоритм розв’язання;
– при розв’язанні рівнянь даного виду доводиться виконувати перетворення, що призводять до рівнянь, не рівносильних даним.

Тому досить часто виникають помилки, які зазвичай пов‘язані з втратою чи отриманням сторонніх коренів у процесі розв‘язування.

Однією з типових помилок є те, що школярі без додаткових пояснень використовують перетворення, що порушують рівносильність, що призводить до втрати коренів або появі сторонніх коренів, також учні не враховують область допустимих значень.

Тому необхідно навчати учнів знаходити спочатку область допустимих значень, так як в деяких випадках уже за її виглядом можна зробити висновок про існування розв’язків рівняння.

Отже, методика навчання розв’язання ірраціональних рівнянь має бути спрямована на формування загальних прийомів розв’язування рівнянь. Етапами загального прийому розв’язування рівнянь є:

– визначення виду рівняння;
– визначення стандартне (типове) воно чи ні;
– якщо стандартне, то розв’язання відповідно до відомих правил, алгоритмів;
– якщо нестандартне, то з’ясування, які перетворення необхідно виконати, щоб звести його до стандартного, або перейти до використання штучних прийомів розв’язання;
– виконання перетворень;
– виконання перевірки;

– запис відповіді.

Найчастіше розв'язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на зведенні заданого рівняння за допомогою деяких перетворень до раціонального рівняння. Як правило, цього досягають піднесенням обох частин ірраціонального рівняння до одного й того самого степеня, за потреби кілька разів.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\sqrt[3]{2x+1} = -3.$$

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння отримаємо рівняння, рівносильне даному. Маємо:

$$\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^3 = (-3)^3;$$

$$2x+1 = -27;$$

$$x = -14.$$

Відповідь: $x = -14$.

Оскільки, функція $y = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ – оборотна, то міркування використані при розв'язування рівняння узагальнимо у теоремі.

Теорема 7. *Якщо обидві частини ірраціонального рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння рівносильне даному (на його ОДЗ).*

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \tag{14}$$

та

$$\left(f(x)\right)^{2k-1} = \left(g(x)\right)^{2k-1}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{15}$$

є рівносильними. Нехай число α – корінь рівняння (14). Тоді маємо правильну числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$. Звідси можна записати:

$$\left(f(\alpha)\right)^{2k-1} = \left(g(\alpha)\right)^{2k-1}.$$

Отже, число α є коренем рівняння (15)

Нехай число β – корінь рівняння (15). Тоді отримаємо, що

$$\left(f(\beta)\right)^{2k-1} = \left(g(\beta)\right)^{2k-1}.$$

Оскільки функція $y = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то $f(\beta) = g(\beta)$. Отже, β корінь рівняння (14).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (14) є коренем рівнин (15) і навпаки. Це означає, що рівняння (14) і (15) рівносильні.

■

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\sqrt[7]{x^2-2} = \sqrt[7]{x}.$$

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{x}\right)^7;$$

$$x^2 - 2 = x;$$

$$x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\sqrt{3x+4} = \sqrt{x-2}.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату. Отримаємо:

$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 \qquad (16)$$

Розв’язання. ОДЗ: $3x + 4 \geq 0, x - 2 \geq 0$, відтак $x \geq 2$

Природно замінити це рівняння на таке:

$$3x + 4 = x - 2 \qquad (17)$$

Звідси $x = -3$.

Але перевіривши бачимо, що число -3 не є коренем початкового рівняння. Отже, рівняння (16) не має коренів. Причина появи стороннього кореня полягає в тому, що застосування формули $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ призводить до розширення області визначення рівняння. Тому рівняння (17) є наслідком рівняння (16).

Ще однією причиною появи сторонніх коренів при розв’язуванні ірраціональних рівнянь є необоротність функції $y = x^{2k},\ k \in \mathbb{N}$. Це означає, що з рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обов’язково випливає, що $x_1 = x_2$. Наприклад, $(-2)^4 = 2^4$, але $-2 \neq 2$. Водночас із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Наведені міркування сформулюємо теоремою.

Теорема 8. *При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного, в якому можуть виникати сторонні корені, що відсіюються перевіркою.*

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$\left(f(x)\right)^{2k} = \left(g(x)\right)^{2k}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{18}$$

є наслідком рівняння

$$f(x) = g(x). \tag{19}$$

Нехай числа α – корінь рівняння (19), тобто $f(\alpha) = g(\alpha)$. Тоді $\left(f(\alpha)\right)^{2k} = \left(g(\alpha)\right)^{2k}$. Отже, число α є коренем рівняння (18).

Ми показали, що кожен корінь рівняння (19) є коренем рівняння (18). Це означає, що рівняння (18) є наслідком рівняння (19).

■

Зауважимо, що якщо число β – корінь рівняння (18), то з рівності $\left(f(\beta)\right)^{2k} = \left(g(\beta)\right)^{2k}$ не обов'язково випливає, що $f(\beta) = g(\beta)$. Тому в результаті переходу від рівняння $f(x) = g(x)$ до рівняння $\left(f(x)\right)^{2k} = \left(g(x)\right)^{2k}$ можуть з'явитися сторонні корені, які можна виявити за допомогою перевірки.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\sqrt{4+3x} = x.$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4 + 3x = x^2;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 4.$$

Перевірка показує, що число -1 є стороннім коренем, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: $x = 4$.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4x+1} = 4.$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

Звідси $\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1} = 9 - 3x$.

Переходячи до рівняння-наслідку, отримуємо:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0;$$

$$x_1 = 42, \quad x_2 = 2.$$

Виконавши перевірку бачимо, що число 42 є стороннім коренем, а число 2 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: $x = 2$.

Розглянемо розв’язування ірраціональних рівнянь за допомогою заміни змінних.

Якщо рівняння містить вираз зі змінними, що повторюються, то зручно відповідний вираз замінити новою змінною.

Приклад. Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 2$.

Застосуємо заміну $\sqrt[3]{x} = t$. Тоді $\sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = t^2$. Одержуємо рівняння:

$$t^2 + t = 2;$$

$$t^2 + t - 2 = 0;$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2.$$

Виконуємо обернену заміну: $\sqrt[3]{x} = 1$, тоді $x = 1$ або $\sqrt[3]{x} = -2$, звідси $x =- 8$.

Відповідь: $x \in \{1; -8\}$.

Приклад. Розв’яжіть рівняння

$$\frac{8}{\sqrt{6-x}} - \sqrt{6-x} = 2.$$

Розв’язання. Нехай $\sqrt{6-x} = t$, $t \geq 0$. Одержуємо

$$\frac{8}{t} - t = 2$$

Тоді

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

Звідси

$$t_1 = 2, \quad t_2 = -4.$$

$t_1 = 2$ – задовольняє умові $t \geq 0$;

$t_2 = -4$ – не задовольняє умові $t \geq 0$.

Обернена заміна дає:

$$\sqrt{6-x} = 2;$$

$$6 - x = 4;$$

$$x = 2.$$

Відповідь: $x = 2$.

Приклад. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3.\end{cases}$$

Розв'язання. Заміна $\sqrt[4]{x}=u$ і $\sqrt[4]{y}=v$, $u\geq 0$, $v\geq 0$ дає систему

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^2-v^2=3.\end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи:

$$u=3-v.$$

Тоді з другого рівняння одержуємо

$$(3-v)^2-v^2=3.$$

Звідси $v = 1$, тоді $u = 2$.

Обернена заміна дає:

$$\sqrt[4]{y}=1 \quad\Rightarrow\quad y=1;$$

$$\sqrt[4]{x}=2 \quad\Rightarrow\quad x=16.$$

Відповідь: $(16;1)$.

Відомо, що сторонні корені рівняння можна виявити в результаті перевірки. Коли йдеться про перевірку як про етап розв'язування рівняння, неможливо уникнути проблеми її технічної реалізації. Наприклад, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$. Щоб у цьому переконатися треба провести значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування – метод рівносильних перетворень.

Теорема 9. *Рівняння вигляду* $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ *рівносильне системі*

$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\geq 0.\end{cases}$$

Доведення. Нехай число α є коренем даного рівняння. Тоді $\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{g(\alpha)}$. Звідси $f(\alpha)\geq 0$. Обидві частини числової рівності піднесемо до квадрата. Отримаємо правильну числову рівність $f(\alpha)=g(\alpha)$**.** Таким чином, число α є розв'язком системи.

Нехай число β є розв'язком системи, тобто

$$\begin{cases}f(\beta)=g(\beta),\\ f(\beta)\geq 0.\end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $g(\beta) \geq 0$. З того, що невід'ємні числа $f(\beta)$ та $g(\beta)$ рівні, випливає, що $\sqrt{f(\beta)} = \sqrt{g(\beta)}$. Отже, число β є коренем даного рівняння.

Таким чином, кожний розв'язок рівняння даного рівняння є розв'язком системи, і навпаки. Отже, множини розв'язків рівняння і системи рівні.

■

Зауваження. *Рівняння* $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ *також рівносильне системі*

$$\begin{cases} f(\beta) = g(\beta), \\ g(\beta) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 1}.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geq 1; \end{cases}$$

$$x = 2 + \sqrt{3}.$$

Відповідь. $x = 2 + \sqrt{3}.$

Теорема 10. *Рівняння виду* $\sqrt{f(x)} = g(x)$ *рівносильне системі*

$$\begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^2 \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x + 7} = x - 3.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x + 7 = (x - 3)^2 \\ x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geq 3; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2},\\ x=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2},\end{array}\right.\\ \quad x\geq 3;\end{array}\right.$$

$$x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}.$$

Відповідь: $x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}$.

Теореми 7 та 8 можна узагальнити, керуючись таким очевидним твердженням: якщо $a\geq 0$ та $b\geq 0$, то з рівності $a^{2k}=b^{2k}, k\in\mathbb{N}$, випливає, що $a=b$.

Теорема 11. *Якщо для будь-якого* $x\in M$ *виконуються нерівності* $f(x)\geq 0$ *і* $g(x)\geq 0$, *то рівняння* $f(x)=g(x)$ *і* $\left(f(x)\right)^2=\left(g(x)\right)^2, k\in\mathbb{N}$, *рівносильні на множині М.*

(Теореми 8 і 9 можна довести, користуючись ідеєю доведення теореми 7).

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$$

Розв'язання. Вигідно розкласти квадратні тричлени, які стоять під радикалами, на множники:

$$\sqrt{(x-1)(4x+5)}-\sqrt{(x+1)(2x-1)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

На цьому етапі є дуже поширена помилка: застосування теореми про корінь з добутку у вигляді $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. Наведений запис формули справедливий лише для $a\geq 0$ і $b\geq 0$, а якщо $a\leq 0$ і $b\leq 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$.

Рис. 8 Множина $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup[1;+\infty)\cup\{-1\}$.

Оскільки областю визначення даного рівняння є множина $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup[1;+\infty)\cup\{-1\}$ (рис. 8), то дане рівняння рівносильне сукупності двох систем і одного рівняння.

$$\begin{cases}x\geq 1,\\ \sqrt{x+1}\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+1}\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq 1,\\ \sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+5};\end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ 2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1} = x+7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2+14x+49; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ 7x^2-26x-45=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-\dfrac{9}{7}; \end{array}\right. \end{cases} \qquad x=5.$$

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-x-1}\sqrt{-4x-5} - \sqrt{-x-1}\sqrt{-2x+1} = \sqrt{-x+1}\sqrt{-x-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-2x+1} + \sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x-5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{5}{4}, \\ 2\sqrt{-2x+1}\sqrt{-x+1} = -x-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -7, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2+14x+49; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -7, \\ \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-\dfrac{9}{7}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Зрозуміло, що ця система розв’язків не має.

$$x+1=0; \quad x=-1.$$

Відповідь: $x \in \{-1;\ 5\}$.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x+3}+1=\sqrt{3x-1}.$$

Розв’язання. Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо:

$$x+4+2\sqrt{x+3}=3x-1;$$

$$2\sqrt{x+3}=2x-5;$$

$$4(x+3)=4x^2-20x+25;$$

$$4x^2-24x+13=0.$$

Звідки $x_1=\dfrac{6+\sqrt{23}}{2}, x_2=\dfrac{6-\sqrt{23}}{2}$.

Для встановлення того, чи дані значення x_1 і x_2 є коренями рівняння, слід зробити перевірку. Початкове рівняння має вигляд $\sqrt{x+3}+1=\sqrt{3x-1}.$

Підставляючи одержані значення маємо:

$$\sqrt{3x_1-1}-\sqrt{x_1+3}=\sqrt{\frac{18+3\sqrt{23}}{2}-1}-\sqrt{\frac{6+\sqrt{23}}{2}+3}$$

$$=\sqrt{\frac{32+6\sqrt{23}}{4}}-\sqrt{\frac{24+2\sqrt{23}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{23}+3}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{23}+1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{23}+3}{2}-\frac{\sqrt{23}+1}{2}=1.$$

Аналогічно

$$\sqrt{3x_2-1}-\sqrt{x_2+3}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{23}-3}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{23}-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{23}-3}{2}-\frac{\sqrt{23}-1}{2}=-1\neq 1$$

Отже, $x=\frac{6+\sqrt{23}}{2}$ є коренем рівняння, $x_2=\frac{6-\sqrt{23}}{2}$ – сторонній корінь для нього.

Відповідь: $x=\frac{6+\sqrt{23}}{2}$

6. Завдання для самостійної роботи

1. Розв’язати рівняння:

a) $\frac{x+4}{5}-x+5=\frac{x+3}{3}-\frac{x-2}{2};$

b) $\frac{2x-10}{3}-15=\frac{3x-40}{11}-\frac{57-x}{5};$

c) $14\frac{1}{2}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{3x}{2}-\frac{2(x-7)}{5};$

d) $x-\frac{3}{17}(2x-1)=\frac{7}{34}(1-2x)+\frac{10x-3}{2};$

e) $\frac{9x-0.7}{4}-\frac{5x-1.5}{7}=\frac{7x-1{,}1}{3}-\frac{5(0{,}4-2x)}{6};$

f) $\frac{2}{3}y-\frac{5}{6}(12y-18)+\frac{1}{12}(4y-8)=\frac{1}{9}(3-9y)-2;$

g) $\frac{1}{3}(t-2)-\frac{1}{7}(5t-6)=\frac{22t-63}{105}-\frac{1}{5}(3t-4);$

h) $x-\frac{1-\frac{3}{2}x}{4}-\frac{2-\frac{x}{4}}{3}=2;$

i) $x+2-\frac{2x-\frac{4-3x}{5}}{5}=\frac{7x-\frac{x-3}{2}}{5};$

j) $\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}-\frac{1{,}3-3x}{2}=\frac{5x-0{,}4}{0{,}3};$

k) $\frac{3{,}6-3x}{1{,}5}+2\frac{1}{4}=\frac{-\frac{5}{6}x+1{,}4}{2}-4;$

l) $\frac{3}{5}-\frac{2{,}7x-1{,}4}{2{,}5}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right)-1\frac{1}{4};$

m) $1\frac{7}{9}+\frac{1\frac{3}{4}x+\frac{1}{3}}{1{,}25}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x-2\right)+\frac{139}{36};$

n) $\frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{10}{11}+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}\div\frac{5}{7}-\frac{\left(x+\frac{14}{3}\right)0{,}375}{1{,}25}=7-x;$

o) $$\frac{\left(x+3{,}75+9\frac{1}{6}\right)1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\frac{5}{9}}+\frac{\left(x-6\frac{4}{5}\right)5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)56}=x+18\frac{1}{6};$$

2. Розв’язати залежно від параметрів рівняння, в яких змінну позначено однією з таких букв: x, y, z, t:

a) $$\frac{z-a}{a}-m=\frac{z-b}{b}-n$$

b) $$\frac{t+p}{q}-\frac{q}{p}=\frac{t-q}{p}+\frac{p}{q};$$

c) $$\frac{2x-m}{n+m}=\frac{2x+n}{m-n};$$

d) $$\frac{y}{a-b}-\frac{3}{a+b}=\frac{4by}{a^2-b^2};$$

e) $$\frac{z}{a}+\frac{z}{b-a}=\frac{a}{a+b};$$

f) $$\frac{x+n}{m+n}+\frac{x-n}{m-n}=\frac{1}{m+n}-\frac{x-n}{m^2-n^2}+\frac{2x}{m};$$

g) $$\frac{x+b}{a-b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{1}{a+b}-\frac{x-b}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a};$$

h) $$\frac{a-x}{b-a}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2;}$$

i) $$\frac{x}{b-a}=\frac{2bx}{b^2-a^2}-\frac{5a}{a+b};$$

j) $$\frac{a-x}{b-a}+\frac{3x}{a+b}=\frac{3a^2-ab-4b^2}{a^2-b^2};$$

k) $$\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x};$$

l) $$\frac{6b+7b}{6b}-\frac{3ay}{2b^2}=1-\frac{ay}{b^2-ab};$$

m) $$\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2};$$

n) $$\frac{3ab+1}{a}x=\frac{3ab}{a+1}+\frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}+\frac{a^2}{(a+1)^3};$$

o) $\dfrac{c+3z}{4c^2+6cd}-\dfrac{c-2z}{9d^2-6cd}=\dfrac{2c+z}{4c^2-9z^2}.$

3. Розв'язати рівняння і виконати перевірку з'ясувавши, чи задовольняють знайдені значення змінної відповідне рівняння:

a) $\dfrac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}=\dfrac{3x-7}{3-4x}+\dfrac{6x+5}{4x+3};$

b) $5+\dfrac{96}{x^2-16}=\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x};$

c) $\dfrac{6}{1-6x}=\dfrac{2}{6x+1}-\dfrac{8-9x}{36x^2-1};$

d) $\dfrac{3}{1-x^2}=\dfrac{2}{(1+x)^2}-\dfrac{5}{(1-x)^2};$

e) $\dfrac{1}{(3-2x)^2}-\dfrac{3}{9-4x^2}=\dfrac{4}{(3+2x)^2};$

f) $\dfrac{y+5}{3y-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2y-3}{2y-4};$

g) $\dfrac{10}{3}-\dfrac{7y+2}{6y+18}=2+\dfrac{3y-1}{4y+12};$

h) $\dfrac{9x-7}{3x-2}-\dfrac{4x-5}{2x-3}=1;$

i) $\dfrac{8}{3x-3}+\dfrac{2+x}{1-x}=\dfrac{5}{2-2x}-\dfrac{5}{18};$

j) $\dfrac{3}{(2x+5)^2}+\dfrac{4}{(2x+1)^2}=\dfrac{7}{(2x+5)(2x+1)};$

k) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+6}{x+2}+\dfrac{x-6}{x-2};$

l) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{3x-4}{x+1}=\dfrac{3-x}{2x+3}+\dfrac{107}{84};$

m) $4x+\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{4x^3-12}{x^2-4}-\dfrac{14}{5};$

n) $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+6}{x+3}+\dfrac{x+10}{x+5}=6;$

o) $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{28}{15};$

4. Розв'язати рівняння з параметрами, в яких змінну позначено через x і знайдені корені перевірити:

a) $\dfrac{c+x}{cx}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{c}{c+x}$;

b) $\dfrac{x-2a}{x+3a}=3-\dfrac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}$;

c) $\dfrac{x}{3a+x}-\dfrac{x}{x-3a}=\dfrac{a^2}{9a^2-x^2}$;

d) $\dfrac{1}{bc-bx}-\dfrac{1}{ac-ax}=\dfrac{2}{b^2-bx}-\dfrac{2}{ab-ax}$;

e) $\dfrac{a}{c-x}+\dfrac{c}{a-x}=\dfrac{a+c}{b-x}$;

f) $\dfrac{3}{x-a}-\dfrac{2}{x+a}=\dfrac{3x-7a}{x^2-a^2}$;

g) $\dfrac{n+x}{d+x}=\dfrac{n}{d}+\dfrac{1}{6}$;

h) $\dfrac{m}{m-x}-\dfrac{b^2}{(m-x)c}=\dfrac{mc-b^2}{c}$;

i) $\dfrac{a}{ac+bc}+\dfrac{a-b}{2bx}=\dfrac{a+b}{2bc}-\dfrac{b}{ax+bx}$;

j) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ac}+\dfrac{x-c}{ab}=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$;

k) $1-\dfrac{2b}{x-a}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}$;

l) $\dfrac{n-p+1}{nx+px}=\dfrac{1}{(n+p)^2}+\dfrac{n-p}{x^2}$;

m) $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n}+\dfrac{1}{nx-2}=\dfrac{x}{n}$;

n) $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{2a-x}{a-b}-\dfrac{a+b}{x}=1$;

o) $\dfrac{x+n}{m+n}-\dfrac{m-n}{x-n}=\dfrac{x+p}{m+p}-\dfrac{m-p}{x-p}$.

5. Розв’язати систему рівнянь:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5}; \\ \dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x, \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1; \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+3}{3}-\dfrac{x-2y+3}{4}=4; \\ \dfrac{3x-4y+3}{4}+\dfrac{4x-2y-9}{3}=4, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7+\dfrac{x-3y}{4}=2x-\dfrac{y+5}{3}; \\ \dfrac{10(x-y)-4(1-x)}{3}=y, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 1-0{,}3(y-2)=\dfrac{1}{5}(x+1); \\ \dfrac{y-3}{4}=\dfrac{4x+9}{20}-1{,}5, \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4(0{,}1x+1)+5=1{,}1y; \\ \dfrac{1{,}1+0{,}3y-x}{x}-5=4\left(\dfrac{1}{x}-1\right); \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-6}{y+2}; \\ \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{y-1}, \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{1}{8}(3x+2y-1)=3-\dfrac{0{,}8x-5y}{41}; \\ \dfrac{1}{2}(0{,}2x+0{,}1y)-\dfrac{1}{10}(4x-y)=\dfrac{1}{30}(3x+0{,}5y)+\dfrac{1}{5}(x-y); \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{3}+1{,}6=\dfrac{8x}{15}-\dfrac{3y-10}{5}; \\ \dfrac{3x+4}{4}+\dfrac{y}{8}=\dfrac{5x}{6}-\dfrac{y-17}{12}, \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{y+9}{2} = -2x, \\ \dfrac{3(x-y)}{4} + 0{,}25 = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{y+19}{5} \end{cases}$

k) $\begin{cases} u^2 + uv = 15; \\ v^2 + uv = 10, \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65; \\ x^2 y + xy^2 = 20, \end{cases}$

m) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0; \\ x + y + 8 = 0, \end{cases}$

n) $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65; \\ x^4 - x^2 y^2 + y^4 = 13, \end{cases}$

o) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158; \\ 3x^2 y + y^3 = -185. \end{cases}$

6. Розв'язати систему рівнянь відносно x та y, використовуючи в тих випадках, в яких це доцільно, метод заміни змінної:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{1-x-y} = 0{,}1; \\ \dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{x+y-1} = 0{,}3, \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{10}{x-5} + \dfrac{1}{y+2} = 1; \\ \dfrac{25}{x-5} + \dfrac{3}{y+2} = 2, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y} + \dfrac{32}{x+3y} = 7; \\ \dfrac{45}{2x-y} - \dfrac{48}{x+3y} = -1, \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+2y} - \dfrac{1}{x-2y} = 1; \\ \dfrac{20}{x+2y} + \dfrac{3}{x-2y} = 1, \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=1{,}1; \\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{9}{x+y}=0{,}1, \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8}; \\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}, \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{4}-\left(x-\dfrac{1}{3}y\right)=1+y; \\ \dfrac{y+3}{6}+\dfrac{2-x}{8}=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13; \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1, \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{11}{20}y-0{,}8\left(\dfrac{1}{4}x+2{,}5\right)=2\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{6x-0{,}3y}{2}-1\dfrac{1}{2}=2(1+x), \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1{,}5x-1\dfrac{1}{4}=\dfrac{3(2x+3)}{4}-\dfrac{3x+5y}{2(3-2x)}; \\ \dfrac{3(2x-y)}{2(y-4)}-4+\dfrac{8y+7}{10}=0{,}8y-1{,}8, \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9; \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20, \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6; \\ xy+x+y=5, \end{cases}$

m) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3; \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20, \end{cases}$

n) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6}; \\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5}, \end{cases}$

o) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7; \\ \dfrac{(x+y)x^2}{y^2}=12. \end{cases}$

7. Розв'язати рівняння:

a) $3x+\dfrac{(x-3)^2}{4}=\dfrac{(x+3)^2}{8}+\dfrac{(x+1)(x-1)}{3};$

b) $x-7+\dfrac{(x-6)^2}{3}=\dfrac{(x+4)^2}{2}-\dfrac{(x+2)(x+6)}{4};$

c) $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{x+4}{2x-2}=\dfrac{3x^2-38}{x^2-1};$

d) $\dfrac{x+0{,}5}{9x+3}=\dfrac{x+2}{3x-1}-\dfrac{8x^2+3}{9x^2-1};$

e) $\dfrac{13-x}{3+x}+\dfrac{6}{x^2-9}=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{3-x};$

f) $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{7+18x}{x^3-1};$

g) $\dfrac{13}{x^3+1}-\dfrac{17x+10}{5x^2-5x+5}=-\dfrac{5}{x+1};$

h) $\dfrac{2}{x^2+4}-\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0;$

i) $\dfrac{1}{x-9}+\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{x+18}+\dfrac{1}{x-10};$

j) $\dfrac{5}{x^2-4}-\dfrac{8}{x^2-1}=\dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{20}{x^2+3x+2};$

k) $\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)^2}+\dfrac{3}{x(x-3)};$

l) $\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{8}{x^3-4x};$

m) $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1};$

n) $-\dfrac{1}{8+4x}+\dfrac{1}{x^2-2x}=-\dfrac{2}{x^3-4x};$

o) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+6}{x+2}+\dfrac{x-6}{x-2}.$

8. Розв'язати задачі:

a. Різниця коренів рівняння $25x^2+30x+c=0$ дорівнює 2. Знайти c.

b. Відношення коренів рівняння $32x^2+bx+75=0$ дорівнює 6. Знайти b.

c. В рівнянні $24x^2+bx+25=0$ $x_2=1{,}5x_1$. Знайти b.

d. Різниця квадратів коренів квадратного рівняння $2x^2+7x+c=0$ дорівнює 1,75. Знайти c.

e. Квадратне рівняння $3x^2+bx+c=0$ має єдиний корінь, який дорівнює 1. Чому дорівнюють b та c?

f. При яких значеннях a корені квадратного рівняння $x^2-4x-\log_2 a=0$ дійсні?

g. При якому значенні λ рівняння $(\lambda-1)x^2+2(\lambda+1)x+\lambda-2=0$ має рівні корені?

h. При якому дійсному значенні m вираз $x^2+(m-1)mx+36$ є повним квадратом?

i. При якому значенні k квадратне рівняння $(2k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$ має рівні корені?

j. При яких дійсних значеннях m в рівнянні $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ один корінь буде в 2 рази більший від другого; знайти ці корені.

k. При якому цілому значенні k один з коренів рівняння $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втроє менший від другого?

l. Скласти рівняння третього степеня з дійсними коефіцієнтами, якщо відомо, що числа 1 та $2+i$ — два з його коренів.

m. При якому цілому значенні p рівняння $3x^2-4x+p-2=0$ і $x^2-2px+5=0$ мають спільний корінь? Знайти цей корінь.

n. При якому значенні p відношення коренів рівняння $x^2+px-16=0$ дорівнює –4?

o. Не розв'язуючи рівняння $3x^2-5x-2=0$, знайти суму кубів його коренів.

9. Розв'язати рівняння:

а) $4|x+2=(4-x)(x+6);|$

b) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1;$

c) $|3x^2-x-1|=1;$

d) $|2x^2-7x|+6=0;$

e) $|3x^2+2x-8|+3=8;$

f) $|5x^2-8x|+3=0;$

g) $|x+2|-1=|2x^2-x-1|;$

h) $x^2+2|x-3|-2=0;$

i) $|x^2+2x-8|=x^2+|x-4|-1;$

j) $|4x^2-17x|-15=0;$

k) $|2x^2+x-5|=5;$

l) $|x^2-1|-4x+x^2=-3;$

m) $\dfrac{|x+3|+5}{|x|+3}=4-x;$

n) $\dfrac{|x-4|+x^2}{|x+5|+3}=x-3;$

o) $|x^2-7|-|x+2|=x-1;$

10. Розв’язати рівняння:

a) $\sqrt{x+6}=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+5};$

b) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=-8;$

c) $\sqrt{x-2}-\sqrt{6x-11}+\sqrt{x+3}=0;$

d) $\sqrt{x+15}+\sqrt{x-24}-\sqrt{x-13}=\sqrt{x};$

e) $\sqrt{x^2-7x+8}+x^2-7x=24;$

f) $\dfrac{1}{x+\sqrt{5+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{5-x^2}}=\dfrac{4}{3};$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{11-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{4}{3};$

h) $x^2 - \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = \sqrt{4x + 6}$;

i) $\sqrt{4x^2 - 7x - 15} - \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x^2 - 9}$;

j) $\sqrt{4x + 2} + \sqrt{4x - 2} = 4$;

k) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x}$;

l) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 3} = \dfrac{7}{\sqrt{x - 3}}$;

m) $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{5x + 6} = \sqrt{12x + 25}$;

n) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{9 - x} = \sqrt{2x - 12}$;

o) $\sqrt{2\sqrt{7} + \sqrt{x}} - \sqrt{2\sqrt{7} - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{28}$.

11. Розв’язати ірраціональні рівняння, в яких підкореневі вирази є точними квадратами:

a) $\sqrt{x^2 + 10x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 7$;

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 14x + 49} = 9$;

c) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2$;

d) $\sqrt{x^2 + 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$;

e) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 7$;

f) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 4$;

g) $\sqrt{x^2 + 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 7$;

h) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3 + x$;

i) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2 - x$;

j) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 15 - x$;

k) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 3$;

l) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 9 - x$;

m) $\sqrt{x^2 + 12x + 36} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3x + 1$;

n) $\sqrt{x^2 - 14x + 49} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{3x + 8}$;

o) $\sqrt{9x^2 + 12x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x + 1$;

12. Розв'язати рівняння, що містять радикали третього степеня:

a) $\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{3-x}=4;$

b) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)};$

c) $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1;$

d) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1;$

e) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1;$

f) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0;$

g) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11};$

h) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-4}=\sqrt[3]{4(x+2)};$

i) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8};$

j) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4;$

k) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2;$

l) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{9-x}=\sqrt[3]{29-2x};$

m) $\sqrt[3]{6+x}-\sqrt[3]{2x+23}=\sqrt[3]{3-2x};$

n) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x+1}}-\sqrt[3]{3-\sqrt{x+1}}=2;$

o) $\sqrt[3]{16x}-2\sqrt[3]{5x+7}=-\sqrt[3]{x+4};$

13. Розв'язати ірраціональні рівняння способом заміни змінної:

a) $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}}=\dfrac{5}{2};$

b) $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2;$

c) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12};$

d) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9};$

e) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7;$

f) $\dfrac{z}{z+1}-2\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}=3;$

g) $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2=2;$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{20x+1}{x-1}}+3\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{20x+1}}=4;$

i) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7};$

j) $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0;$

k) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2;$

l) $\dfrac{1}{\sqrt{11-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{4}{5};$

m) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3;$

n) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2;$

o) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

14. Розв’язати системи ірраціональних рівнянь:

a) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2};\\ xy-x-y=0,\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=3;\\ x+xy+y=7,\end{cases}$

c) $\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y};\\ x^2+y^2=34,\end{cases}$

d) $\begin{cases}\sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2;\\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8,\end{cases}$

e) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6;\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8,\end{cases}$

f) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1;\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4,\end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+a}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x+a}} = 2; \\ x + y = xy + a, \end{cases}$

h) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3; \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3, \end{cases}$

i) $\begin{cases} \sqrt[4]{u} - \sqrt[4]{v} = 1; \\ \sqrt{u} + \sqrt{v} = 5, \end{cases}$

j) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} + \sqrt{\dfrac{x-y}{3}} = 14; \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}} - \sqrt{\dfrac{x-y}{12}} = 3, \end{cases}$

k) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10; \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4, \end{cases}$

l) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{\sqrt{xy}}{2}; \\ x - y = 5, \end{cases}$

m) $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1; \\ 2x + y = 2, \end{cases}$

n) $\begin{cases} \sqrt[3]{x + 2y} + \sqrt[3]{x - y + 2} = 3; \\ 2x + y = 7, \end{cases}$

o) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}; \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}, \end{cases}$

15. Визначити значення параметрів, при яких система:

A. має рівно одну впорядковану пару розв’язків;

B. не має розв’язків;

C. має безліч розв’язків:

a) $\begin{cases} (m+5)x + (2m+3)y = 3m+2; \\ (3m+10)x + (5m+6)y = 4m+4, \end{cases}$

b) $\begin{cases} kx + y = 2; \\ x - y = 3, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + (k-1)y = k+1; \\ (k+1)x + y = 3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} kx + 4y = 4; \\ 3x + y = 1, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + (9x^2 - 2)y = 3m; \\ x + y = 1, \end{cases}$

f) $\begin{cases} m^2 x + (2-m)y = m^3 + 4; \\ mx + (2m-1)y = m^5 - 2, \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2mx + y = 6m^2 - 5m + 1; \\ x + 2my = 0, \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + ay = 2; \\ 3x - 2y = 6, \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + ay = 8; \\ 3x - 5y = 6, \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 1{,}5y = 4; \\ 4x + 6y = a, \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - y = 3; \\ ax + 2y = -6, \end{cases}$

l) $\begin{cases} x - y = 2; \\ 2x - 2y = a, \end{cases}$

m) $\begin{cases} x - 5y = 7; \\ ax + y = -3, \end{cases}$

n) $\begin{cases} x + 2y = a; \\ 2x + 4y = 5, \end{cases}$

o) $\begin{cases} 3x - 2y = 6; \\ ax + y = -3. \end{cases}$

Список рекомендованої літератури

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. Навч. Закладів: профільний рівень / Є.С. Нелін. Х.: Гімназія, 2010.
2. Бевз Г. П. Методика розв’язування алгебраїчних задач. К.: Рад. школа, 1975. 240 с.

3. Бевз Г.П. Методика викладання математики.– К.: Вища школа, 1989.
4. Белешко Д.Т. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. Пос. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 80 с.
5. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1987. 240с.
6. Валєєв К. Г., Джалладова І.А. Математика на вступних випробуваннях: Навч. посіб. К.: КНЕУ, 2006.
7. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. Розв'язування алгебраїчних задач: Посібник для вчителів. К.: Рад. школа, 1991. 203 с.
8. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: В-во «Shark», 2015. 238с.
9. Істер О. С. «Алгебра» підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти 2021.
10. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А.В.Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.
11. Збірник задач з математики для вступників до вузів / В. К. Єгерєв, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; За ред. М. І. Сканаві. К.: Вища школа, 1992. 445с.
12. Капіносов А. Математика : збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / уклад. А. Капіносов, Г. Гап'юк, О. Мартинюк, С. Мартинюк. Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. 336 с.
13. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.
14. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия : учебн. пособие для студентов физ-мат. спец. пед. ин-тов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 1991. 352 с.
15. Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Харків : ББН, 1999. 172 с.
16. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. «Алгебра» підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. 2015.
17. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. «Алгебра» підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. 2015

18. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. «Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики» підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. 2016.
19. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. «Алгебра» підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. 2017.
20. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б, Якір М.С. «Алгебра» підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. 2020.
21. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Номирський Д.А., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу загальноосвіт. закладів. Академічний рівень. К.: Гімназія, 2010.
22. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Номирський Д.А., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної освіти. 2019.
23. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Збірник задач і контрольних робіт. Х.: Гімназія, 2010.
24. Нелін Є.П. «Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)» підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. 2018.
25. Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. К.: А.С.К., 2004. 192 с.
26. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук. - метод. пос. К.: Вид-во А.С.К. 2003.
27. Репета В.К., Клешня Н.О., Коробова М.В., Репета Л.А. Задачі з параметрами: Навч. Посіб. К.: Вища школа, 2006.
28. Романюк В.Я., Дутко Л.І. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. Львів: Тріада плюс, 2004.
29. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Навчальний посібник. К.: Техніка, 2003. 416 с.
30. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пос. для 10 кл. сред. шк. М.: Просвещение, 1989. 252 с.