Лекція 3.1

Принципи екологічного моделювання

При побудові моделей екологічних процесів застосовують наступні основні принципи.

1) Принцип системності.

Внаслідок пересиченості екосистем зв'язками екологічні об'єкти являють собою єдину систему. З цієї причини в екології виявилося необхідним злиття методів системного аналізу і математичного моделювання. Це призвело до створення інтегрального методу системного моделювання — вищого етапу в розвитку екологічного моделювання.

Принцип системності полягає в усвідомленні цілісності об'єктів світу, "їхньої стійкості, взаємодії із зовнішнім світом тощо; інший аспект цього принципу — динамічна багатогранність, єдність якості й кількості, теорії та практики.

2) Принцип єдності структурності та ієрархічності.

Фундаментальна риса екосистем — наявність у них складних ієрархічних структур. Звідси випливає вимога єдності структурності й ієрархічності системних екологічних моделей. Відповідно виникає проблема структурування моделі, тобто виділення істотних підсистем і елементів із сукупності всіх зв'язків і компонентів.

Звичайно систему організують найбільш залежні одне від одного елементи (підсистеми). Інші впливають на поводження системи слабко, а через їхню велику кількість — неузгоджено; отже, їх можна розглядати як інтегровані зовнішні чи внутрішні фактори впливу.

3) Принцип багатомодельного опису.

Через динамізм і складність екологічних об'єктів, що виникають у результаті множинності мети антропогенного втручання, на сьогодні немає можливості побудови єдиної теорії соціоекосистеми в класичному розумінні, тобто як дедуктивної моделі, з якої можна вивести всі можливі наслідки. Тому наука йде по шляху створення множинних взаємодоповнюючих моделей.

4) Принцип єдності формалізованого і неформалізованого опису.

Досвід перших глобальних моделей розвитку світової соціоекосистеми, побудованих за замовленням Римського клуба, показав: єдиного формалізованого (математичного) опису недостатньо для адекватного моделювання соціоекосистеми. Для цього необхідно враховувати неформальні фактори і доповнювати формалізований опис (з позицій історичного, психологічного та ін. підходів) неформалізованим описом.

5) Принцип визнання фундаментальності екологічних процесів.

Екологічні процеси неможливо звести до простої сукупності біологічних, фізичних, економічних процесів, оскільки всі вони тісно переплетені між собою. У цьому переплетенні виникають нові, екологічні закономірності. Звідси випливає самостійна значимість екологічних цінностей.

6) Принцип єдності теорії та практики.

Благополуччя соціоекосистеми, частиною якої є Людина, має для неї найважливіше значення. Тому екологія є не тільки фундаментальною, але і прикладною наукою, що поєднує пізнання екологічних закономірностей із практичним їхнім застосуванням у повсякденній діяльності Людини. Ця єдність виражається у вигляді принципу: "Не тільки дивися і думай — роби".

Значення моделювання в екології

За допомогою моделювання одержують можливість оцінювання потенційних наслідків застосування різних стратегій оперативного керування, впливу на екосистему, користування природними ресурсами (біотичними й абіотичними), оптимізації екосистем. Моделювання дозволяє глибоко проникнути в сутність явищ, зрозуміти їхню справжню природу.

Класифікації і методи дослідження математичних моделей

Типовими завданнями моделювання можуть бути пошук оптимальних чи наближених до оптимальних рішень; визначення властивостей системи; встановлення взаємозв'язків між її елементами або характеристиками, а також між характеристиками системи та зовнішнього середовища тощо.

Складні системи можна охарактеризувати функціями, що вони виконують (процесами, які відбуваються в них), структурою, а також поведінкою в часі. Відповідно розрізняють функціональні, структурні, інформаційні та поведінкові (подійні) моделі систем.

Функціональна модель системи описує сукупність функцій, що їх виконує система (сукупність процесів, які відбуваються в ній), характеризує склад та взаємозв’язки її функціональних підсистем.

Структурна модель відображає побудову системі; інформаційна - відношення між елементами системи, а також між системою і зовнішнім середовищем. Остання будується у вигляді структур даних, що характеризують елементи системи, зовнішнє середовище та взаємозв’язки між ними.

Інформаційна модель також може мати вигляд рівнянь регресії або кореляційних рівнянь, які відображають зв'язок між рядами даних, статистичного опису сукупності даних, порівняльних статистичних характеристик наборів даних тощо.

Поведінкова модель відображає динаміку функціонування системи, зміни її станів, події, що відбуваються в ній, тощо.

Основні властивості математичних моделей

До основних властивостей математичних моделей належать їх скінченність, спрощеність, наближеність, повнота, адекватність та істинність.

Скінченність моделі означає, що вона відображає лише деякі з характеристик та відношень, властивих оригіналу. її зумовлено обмеженістю ресурсів часу, пам'яті ЕОМ тощо, потрібних для розробки й аналізу моделі.

Спрощеність моделі означає, що в деяких відношеннях вона має бути простішою за оригінал. У цьому полягає сенс моделювання, оскільки у противному разі доцільніше досліджувати оригінал. Спрощення досягають шляхом нехтування другорядними, несуттєвими для досягнення мети моделювання властивостями оригіналу. При побудові моделей використовують принцип руху від простого до складного. Тобто, спочатку будують найпростішу можливу модель досліджуваної системи (як правило, такі моделі можна знайти у фаховій літературі). Потім перевіряють її адекватність. Якщо простіша модель неадекватна, то визначають, чим зумовлено її неадекватність. Зазвичай причинами є нехтування у змістовній моделі деякими факторами, що істотно впливають на досліджувану систему, або надмірна спрощеність математичної моделі.

Наближеність моделі означає, що вона лише наближено відображає досліджувані характеристики та відношення. Типовими прикладами наближень, які використовують при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними та навпаки, завдання обмежень на точність чисельних розрахунків, заміна нелінійних залежностей лінійними тощо. Ступінь наближеності моделі визначається компромісом між необхідністю відображення всіх суттєвих властивостей оригіналу й обмеженістю часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів.

Зі скінченності та наближеності моделі випливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь повноти моделі визначається метою та завданнями моделювання.

Адекватність моделі характеризує можливість реалізації мети моделювання, а істинність - її відповідність сукупності наявних знань про об'єкт дослідження. Критеріями адекватності є відображення всіх істотних властивостей та параметрів об'єкта дослідження, якісно правильне відображення суттєвих зв'язків між параметрами, а при кількісному дослідженні також мала різниця між результатами моделювання та наявними емпіричними даними. Адекватність є обов'язковою вимогою до будь-якої моделі, що використовується для дослідження реальних систем. Але в деяких випадках застосовують відносно прості моделі, що не є адекватними. Це доцільно, зокрема, під час розробки алгоритмів аналізу моделей (на першому етапі розробляють алгоритми аналізу неадекватних моделей, які потім використовують як елементи більш складної моделі), у навчальному процесі (зокрема, коли треба дослідити явища, які в реальних системах та процесах спотворюються іншими ефектами) тощо. Слід пам'ятати, що істинність моделі не є гарантією її адекватності. Зокрема, це може бути зумовлено накопиченням похибок за необхідності виконання великого обсягу розрахунків. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Типовими прикладами є регресійні моделі, які дають змогу прогнозувати поведінку досліджуваної системи в деякому діапазоні зміни вхідних параметрів, але не відображають наявних знань про побудову, зв'язки та внутрішні процеси в ній.

Загальна схема математичного моделювання

Загальна схема побудови математичної моделі є такою. Насамперед необхідно визначити, для чого необхідна модель. Це має принципове значення для обрання методу її побудови. Існують два основні підходи. У першому випадку математична модель ґрунтується на основі відомих теоретичних даних про закономірності поведінки системи або протікання процесу. У цьому разі одержувана математична модель буде системою відомих з теорії моделей. Перевагами такого підходу є відповідність структури моделі реальній структурі об'єкта дослідження. Завдяки цьому всі параметри моделі мають реальний фізичний, економічний, технічний або інший зміст. Такі моделі дають змогу аналізувати не тільки загальні властивості системи як цілого, але також і поведінку окремих її елементів, зміни структури, визначати відносні вклади різних факторів у властивості, що спостерігаються, тощо. Недоліками цього підходу зазвичай є складність одержуваних моделей і, внаслідок цього, можливість накопичення похибок при розрахунку вихідних характеристик об'єкта дослідження.

У другому випадку моделлю є рівняння регресії (або система таких рівнянь), за допомогою якого можна прогнозувати, як будуть змінюватися характеристики системи або процесу при зміні вхідних змінних. Рівняння регресії відповідає розгляду досліджуваної системи як чорного ящика. Тому такі моделі принципово неможливо використовувати для оцінювання вкладу окремих підсистем у формування загальних властивостей системи, аналізу структури системи, зв'язків між її елементами тощо. Коефіцієнти рівнянь регресії часто не мають якогось реального змісту. Проте регресійні моделі відрізняються простотою і у багатьох випадках дають можливість одержувати більш точні оцінки вихідних характеристик досліджуваних систем та процесів.

У багатьох випадках при побудові моделей складних систем і процесів використовують комбінації цих підходів. Зокрема, часто базову модель будують як систему відомих теоретичних моделей, параметри яких визначають за допомогою регресійного аналізу.

Якщо модель будують у вигляді системи відомих теоретичних моделей, то наступним етапом її розробки є визначення концептуальної або змістовної (фізичної, технічної, економічної тощо) моделі об'єкта дослідження. Змістовну модель будують на основі відомих теоретичних та емпіричних даних про досліджуваний об'єкт. На цьому етапі визначають суттєві для розв'язуваної задачі елементи системи, взаємозв'язки між ними, взаємозв'язки системи й навколишнього середовища, можливі стани системи, закономірності поведінки системи в цілому та її окремих елементів тощо. Потім переходять від змістовного до формального опису, тобто відбирають теоретичні моделі, з яких будуватиметься загальна математична модель об'єкта дослідження, визначають межі застосування зроблених у них припущень і спрощень.

Далі процедура розробки моделі залежить від обрання методики її подальшого аналізу. На сьогодні найбільш поширеним методом дослідження математичних моделей є їх чисельний аналіз за допомогою ЕОМ. Для цього можна використовувати різноманітні математичні, статистичні та інші прикладні пакети програмного забезпечення, зокрема Microsoft Excel, MathCad, MathLab, Mathematica, Statistica тощо. Але слід мати на увазі, що не існує алгоритмів чисельних розрахунків, які б давали змогу одержати задовільні розв'язки для всіх задач деякого класу. Якість роботи алгоритму залежить не тільки від типу задачі, але й від її конкретних умов та параметрів. Тому обрання алгоритму є нетривіальним завданням. Як правило, якість алгоритму (й моделі взагалі) визначають порівнянням результатів, одержуваних за різними алгоритмами розрахунків, зокрема виконанням розрахунків для моделей з відомими характеристиками, а також порівнянням результатів моделювання з відомими даними про модельовану систему (якісними закономірностями її поведінки, кількісними значеннями її параметрів тощо). У типових прикладних пакетах, як правило, не вказується конкретний алгоритм, за яким виконуються розрахунки. Більше того, досить часто не вказується також математичний метод, на якому базується цей алгоритм. Це суттєво ускладнює попередній аналіз можливості застосування прикладних пакетів у дослідженні тієї чи іншої моделі, а також пошук джерел похибок моделювання

Важливою характеристикою результатів моделювання є похибка одержуваних результатів. Можна виділити такі її основні складові: похибка математичної моделі, похибка вихідних даних, похибка розрахункового алгоритму та похибка обчислень.

Похибка математичної моделі пов'язана з тим, що будь-яка модель є лише наближеним відображенням об'єкта моделювання. Джерелами цієї похибки є припущення, що роблять при розробці змістовної моделі об'єкта дослідження, а також наближеність при побудові її математичної моделі. Зокрема, наближеність моделі визначається припущеннями про однорідність твердого тіла, незалежність коефіцієнта дифузії від концентрації домішки та від часу, нехтуванням впливу внутрішніх та зовнішніх електромагнітних полів на поведінку електрично заряджених домішок тощо. Якщо необхідно, похибку моделі можна зменшити шляхом урахування додаткових факторів, що впливають на вимірювані характеристики.

Похибка вихідних даних пов'язана з погрішностями вимірювань, використанням наближених значень параметрів досліджуваної системи, заміною генеральних сукупностей вибірками обмеженого обсягу, використанням даних, підданих попередній статистичній обробці, тощо. Вона може бути зменшена тільки шляхом виконання повторних або додаткових експериментів та спостережень.

Похибка розрахункового алгоритму пов'язана зі спрощеннями та припущеннями, що роблять при заміні вихідної математичної моделі алгоритмом обчислень. Зокрема, більшість методів чисельного знаходження інтегралів використовує заміну площі під кривою, що інтегрується, на суму площ відносно простих фігур. При цьому похибка інтегрування суттєво залежить від того, які саме фігури буде обрано для наближення, а також від кількості ділянок, на які розбивають інтервал інтегрування. Багато алгоритмів використовують ітераційні процедури, що теоретично можуть виконуватися нескінченно довго, поступово наближуючись до точного розв'язку. Але у практиці час виконання ітерацій має бути обмеженим. Тому необхідно заздалегідь встановити точність результату, яка задовольняє дослідника.

Похибка обчислень пов'язана з необхідністю обмеження кількості значущих цифр у числах, з якими виконують розрахунки.

Похибки розрахункового алгоритму та обчислень належать до усувних похибок, оскільки вони можуть бути зменшені до необхідного рівня шляхом унесення змін до алгоритму та підвищення точності розрахунків. Похибки вихідних даних та моделі належать до неусувних похибок. Це треба розуміти так: ці похибки не можна усунути або зменшити математичними методами, але точність моделювання може бути підвищена шляхом обрання більш адекватної моделі (цей етап є неформальним, і для його реалізації необхідно використовувати не тільки математичні методи, а й дані відповідних конкретних наук), а також підвищення точності вихідних даних.

При побудові моделі необхідно прагнути до балансу похибок різного типу. Це зумовлено тим, що похибка моделювання визначається найбільшою з них. Підвищувати точність розрахунків на деякому етапі моделювання недоцільно, якщо вихідні дані для нього мають суттєво меншу точність або якщо результати цього етапу потім використовують для розрахунків зі значно більшою похибкою. Можна рекомендувати таку послідовність балансу похибок. На першому етапі необхідно визначити погрішність вихідних емпіричних даних, що використовуватимуться при розрахунках, та характер впливу цієї похибки на результати моделювання. Загалом погрішність результатів перевищує погрішність вихідних даних і є тим вищою, що складніша модель. Але при цьому слід розрізняти систематичну та випадкову похибки моделювання. У деяких випадках погрішність визначення сталих коефіцієнтів, що входять до моделі, призводить лише до появи систематичної похибки. Якщо цей коефіцієнт використовують у моделі як самостійний доданок, то його похибка зумовлює збільшення або зменшення результату на одну й ту саму величину. При цьому якісна поведінка моделі та всі інші її кількісні характеристики залишаються постійними. Якщо коефіцієнт використовують як загальний множник, то відхилення вихідних результатів будуть пропорційні похибці його визначення. При цьому якісна поведінка моделі також залишається правильною. У більш складних випадках похибки вихідних даних можуть призводити до якісних змін у поведінці моделі.

Розглянемо, наприклад, модель, задану у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = ax^2 + bx + c,$$

для якої емпірично встановлено такі значення коефіцієнтів: a = 2; b = 4; c = 2. Для цих значень величина $\frac{dy}{dx} = 0$ в точці x = (-1), у інших точках вона більша за нуль. Відповідно, функція y(x) є зростаючою і має одну точку перегину, в якій її похідна дорівнює нулю. Істинні значення коефіцієнтів моделі відрізняються від емпірично встановлених. Нехай, наприклад, вони становлять a= 1,9; b = 4,1; c= 1,9.

Тоді маємо дві точки $x_1 \approx (-1{,}484)$ та $x_2 \approx (-0{,}674)$, де похідна дорівнює нулю.

При $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2 + \infty$ функція зростає, а при $x \in (x_{1,} x_{2)}$ спадає. Відповідно, x_1 є точкою максимуму, а x_2 - точкою мінімуму функції y(x). Якщо істинні значення коефіцієнтів моделі становлять a = 2,14; b = 3,9; c = 1,9, то похідна є додатною для всіх x, і функція не має точок екстремуму. Така різниця поведінки функції y(x) може бути істотною з точки зору змістовної моделі системи. Зокрема, якщо y(x) - потенційна енергія фізичної системи, то ми одержуємо три суттєво різні фізичні моделі. Залежно від істинних значень коефіцієнтів система може мати точки стійкої та нестійкої рівноваги, тільки точку нестійкої рівноваги або ж взагалі не мати точок рівноваги. Якщо похибка вихідних даних може призводити до якісно різних результатів моделювання, подальший аналіз такої моделі має сенс лише у випадках, коли ставиться завдання визначити можливі сценарії розвитку системи, її можливі стани тощо. Інакше необхідно підвищити точність вихідних даних, побудувати іншу модель або змінити завдання дослідження. Якщо погрішність вихідних даних дає можливість досягти мети моделювання, то наступним етапом є оцінка та порівняння погрішностей проміжних і підсумкових розрахунків. За результатами порівняння робиться висновок про збалансованість похибок, необхідність доробки алгоритму чи підвищення точності розрахунків на деякому етапі, якщо точність результатів не задовольняє Дослідника, або про можливість спрощення алгоритму чи зменшення точності деяких розрахунків, коли одержувана на відповідному етапі точність є надмірною.

Після побудови математичної моделі необхідно визначити її адекватність. Для цього треба порівняти результати моделювання з емпіричними даними, одержаними при близьких умовах, а також з результатами, одержаними на інших моделях. Інколи для перевірки адекватності треба залучати незалежних експертів, які не брали участі в розробці моделі.

За результатами перевірки адекватності моделі приймають рішення щодо можливості її використання. Результатом перевірки може бути рішення про необхідність доробки (корегування) та оптимізації моделі. При корегуванні уточнюють перелік суттєвих параметрів моделі, обмеження, функціональні зв'язки між параметрами тощо. Під оптимізацією розуміють спрощення моделі при збереженні заданого рівня її адекватності. Основними критеріями оптимальності є витрати часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів при використанні моделі.

У цьому посібнику не розглядаються основні методи аналітичного та чисельного дослідження математичних моделей, оскільки вони вивчалися раніше, зокрема в курсах математичного аналізу, алгебри та геометрії, диференціальних рівнянь, чисельних методів тощо. Особливості їх застосування до задач математичного моделювання розглядаються на конкретних прикладах у лабораторному практикумі.

Класифікації і методи дослідження математичних моделей

Типовими завданнями моделювання можуть бути пошук оптимальних чи наближених до оптимальних рішень; визначення властивостей системи; встановлення взаємозв'язків між її елементами або характеристиками, а також між характеристиками системи та зовнішнього середовища тощо.

Складні системи можна охарактеризувати функціями, що вони виконують (процесами, які відбуваються в них), структурою, а також поведінкою в часі. Відповідно розрізняють функціональні, структурні, інформаційні та поведінкові (подійні) моделі систем.

Функціональна модель системи описує сукупність функцій, що їх виконує система (сукупність процесів, які відбуваються в ній), характеризує склад та взаємозв’язки її функціональних підсистем.

Структурна модель відображає побудову системі; інформаційна - відношення між елементами системи, а також між системою і зовнішнім середовищем. Остання будується у вигляді структур даних, що характеризують елементи системи, зовнішнє середовище та взаємозв’язки між ними.

Інформаційна модель також може мати вигляд рівнянь регресії або кореляційних рівнянь, які відображають зв'язок між рядами даних, статистичного опису сукупності даних, порівняльних статистичних характеристик наборів даних тощо.

Поведінкова модель відображає динаміку функціонування системи, зміни її станів, події, що відбуваються в ній, тощо.

Основні властивості математичних моделей

До основних властивостей математичних моделей належать їх скінченність, спрощеність, наближеність, повнота, адекватність та істинність.

Скінченність моделі означає, що вона відображає лише деякі з характеристик та відношень, властивих оригіналу. її зумовлено обмеженістю ресурсів часу, пам'яті ЕОМ тощо, потрібних для розробки й аналізу моделі.

Спрощеність моделі означає, що в деяких відношеннях вона має бути простішою за оригінал. У цьому полягає сенс моделювання, оскільки у противному разі доцільніше досліджувати оригінал. Спрощення досягають шляхом нехтування другорядними, несуттєвими для досягнення мети моделювання властивостями оригіналу. При побудові моделей використовують принцип руху від простого до складного. Тобто, спочатку будують найпростішу можливу модель досліджуваної системи (як правило, такі моделі можна знайти у фаховій літературі). Потім перевіряють її адекватність. Якщо простіша модель неадекватна, то визначають, чим зумовлено її неадекватність. Зазвичай причинами є нехтування у змістовній моделі деякими факторами, що істотно впливають на досліджувану систему, або надмірна спрощеність математичної моделі.

Наближеність моделі означає, що вона лише наближено відображає досліджувані характеристики та відношення. Типовими прикладами наближень, які використовують при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними та навпаки, завдання обмежень на точність чисельних розрахунків, заміна нелінійних залежностей лінійними тощо. Ступінь наближеності моделі визначається компромісом між необхідністю відображення всіх суттєвих властивостей оригіналу й обмеженістю часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів.

Зі скінченності та наближеності моделі випливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь повноти моделі визначається метою та завданнями моделювання.

Адекватність моделі характеризує можливість реалізації мети моделювання, а істинність - її відповідність сукупності наявних знань про об'єкт дослідження. Критеріями адекватності є відображення всіх істотних властивостей та параметрів об'єкта дослідження, якісно правильне відображення суттєвих зв'язків між параметрами, а при кількісному дослідженні також мала різниця між результатами моделювання та наявними емпіричними даними. Адекватність є обов'язковою вимогою до будь-якої моделі, що використовується для дослідження реальних систем. Але в деяких випадках застосовують відносно прості моделі, що не є адекватними. Це доцільно, зокрема, під час розробки алгоритмів аналізу моделей (на першому етапі розробляють алгоритми аналізу неадекватних моделей, які потім використовують як елементи більш складної моделі), у навчальному процесі (зокрема, коли треба дослідити явища, які в реальних системах та процесах спотворюються іншими ефектами) тощо. Слід пам'ятати, що істинність моделі не є гарантією її адекватності. Зокрема, це може бути зумовлено накопиченням похибок за необхідності виконання великого обсягу розрахунків. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Типовими прикладами є регресійні моделі, які дають змогу прогнозувати поведінку досліджуваної системи в деякому діапазоні зміни міною генеральних сукупностей вибірками обмеженого обсягу, використанням даних, підданих попередній статистичній обробці, тощо. Вона може бути зменшена тільки шляхом виконання повторних або додаткових експериментів та спостережень.

Похибка розрахункового алгоритму пов'язана зі спрощеннями та припущеннями, що роблять при заміні вихідної математичної моделі алгоритмом обчислень. Зокрема, більшість методів чисельного знаходження інтегралів використовує заміну площі під кривою, що інтегрується, на суму площ відносно простих фігур. При цьому похибка інтегрування суттєво залежить від того, які саме фігури буде обрано для наближення, а також від кількості ділянок, на які розбивають інтервал інтегрування. Багато алгоритмів використовують ітераційні процедури, що теоретично можуть виконуватися нескінченно довго, поступово наближуючись до точного розв'язку. Але у практиці час виконання ітерацій має бути обмеженим. Тому необхідно заздалегідь встановити точність результату, яка задовольняє дослідника.

Похибка обчислень пов'язана з необхідністю обмеження кількості значущих цифр у числах, з якими виконують розрахунки.

Похибки розрахункового алгоритму та обчислень належать до усувних похибок, оскільки вони можуть бути зменшені до необхідного рівня шляхом унесення змін до алгоритму та підвищення точності розрахунків. Похибки вихідних даних та моделі належать до неусувних похибок. Це треба розуміти так: ці похибки не можна усунути або зменшити математичними методами, але точність моделювання може бути підвищена шляхом обрання більш адекватної моделі (цей етап є неформальним, і для його реалізації необхідно використовувати не тільки математичні методи, а й дані відповідних конкретних наук), а також підвищення точності вихідних даних.

При побудові моделі необхідно прагнути до балансу похибок різного типу. Це зумовлено тим, що похибка моделювання визначається найбільшою з них. Підвищувати точність розрахунків на деякому етапі моделювання недоцільно, якщо вихідні дані для нього мають суттєво меншу точність або якщо результати цього етапу потім використовують для розрахунків зі значно більшою похибкою. Можна рекомендувати таку послідовність балансу похибок. На першому етапі необхідно визначити погрішність вихідних емпіричних даних, що використовуватимуться при розрахунках, та характер впливу цієї похибки на результати моделювання. Загалом погрішність результатів перевищує погрішність вихідних даних і є тим вищою, що складніша модель. Але при цьому слід розрізняти систематичну та випадкову похибки моделювання. У деяких випадках погрішність визначення сталих коефіцієнтів, що входять до моделі, призводить лише до появи систематичної похибки. Якщо цей коефіцієнт використовують у моделі як самостійний доданок, то його похибка зумовлює збільшення або зменшення результату на одну й ту саму величину. При цьому якісна поведінка моделі та всі інші її кількісні характеристики залишаються постійними. Якщо коефіцієнт використовують як загальний множник, то відхилення вихідних результатів будуть пропорційні похибці його визначення. При цьому якісна поведінка моделі також залишається правильною. У більш складних випадках похибки вихідних даних можуть призводити до якісних змін у поведінці моделі.

Розглянемо, наприклад, модель, задану у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = ax^2 + bx \ + c\,,$$

для якої емпірично встановлено такі значення коефіцієнтів: a = 2; b = 4; c = 2. Для цих значень величина $\frac{dy}{dx} = 0$ в точці x = (-1), у інших точках вона більша за нуль. Відповідно, функція y(x) є зростаючою і має одну точку перегину, в якій її похідна дорівнює нулю. Істинні значення коефіцієнтів моделі відрізняються від емпірично встановлених. Нехай, наприклад, вони становлять a= 1,9; b = 4,1; c= 1,9.

Тоді маємо дві точки $x_1 \approx (-1{,}484)$ та $x_2 \approx (-0{,}674)$, де похідна дорівнює нулю.

При $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2 + \infty$ функція зростає, а при $x \in (x_{1,} x_{2)}$ спадає. Відповідно,

x_1 є точкою максимуму, а x_2 - точкою мінімуму функції $y(x)$. Якщо істинні значення коефіцієнтів моделі становлять $a = 2{,}14$; $b = 3{,}9$; $c = 1{,}9$, то похідна є додатною для всіх x, і функція не має точок екстремуму. Така різниця поведінки функції $y(x)$ може бути істотною з точки зору змістовної моделі системи. Зокрема, якщо $y(x)$ - потенційна енергія фізичної системи, то ми одержуємо три суттєво різні фізичні моделі. Залежно від істинних значень коефіцієнтів система може мати точки стійкої та нестійкої рівноваги, тільки точку нестійкої рівноваги або ж взагалі не мати точок рівноваги. Якщо похибка вихідних даних може призводити до якісно різних результатів моделювання, подальший аналіз такої моделі має сенс лише у випадках, коли ставиться завдання визначити можливі сценарії розвитку системи, її можливі стани тощо. Інакше необхідно підвищити точність вихідних даних, побудувати іншу модель або змінити завдання дослідження. Якщо погрішність вихідних даних дає можливість досягти мети моделювання, то наступним етапом є оцінка та порівняння погрішностей проміжних і підсумкових розрахунків. За результатами порівняння робиться висновок про збалансованість похибок, необхідність доробки алгоритму чи підвищення точності розрахунків на деякому етапі, якщо точність результатів не задовольняє Дослідника, або про можливість спрощення алгоритму чи зменшення точності деяких розрахунків, коли одержувана на відповідному етапі точність є надмірною.

Після побудови математичної моделі необхідно визначити її адекватність. Для цього треба порівняти результати моделювання з емпіричними даними, одержаними при близьких умовах, а також з результатами, одержаними на інших моделях. Інколи для перевірки адекватності треба залучати незалежних експертів, які не брали участі в розробці моделі.

За результатами перевірки адекватності моделі приймають рішення щодо можливості її використання. Результатом перевірки може бути рішення про необхідність доробки (корегування) та оптимізації моделі. При корегуванні уточнюють перелік суттєвих параметрів моделі, обмеження, функціональні зв'язки між параметрами тощо. Під оптимізацією розуміють спрощення моделі при збереженні заданого рівня її адекватності. Основними критеріями оптимальності є витрати часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів при використанні моделі.

У цьому посібнику не розглядаються основні методи аналітичного та чисельного дослідження математичних моделей, оскільки вони вивчалися раніше, зокрема в курсах математичного аналізу, алгебри та геометрії, диференціальних рівнянь, чисельних методів тощо. Особливості їх застосування до задач математичного моделювання розглядаються на конкретних прикладах у лабораторному практикумі.