Завдання 1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій: а) $y=t^2$; б) $y=\begin{cases}1,\ 0\le t\le 3,\\ -1,\ 3<t<4,\\ 0,\ t\ge 4.\end{cases}$

Розв'язання. Зображення функції $y(t)$ при перетворенні Лапласа дорівнює $Y(p)=\int\limits_0^{+\infty} y(t)e^{-pt}dt$.

а) $y=t^2$;

$$Y(p)=\int\limits_0^{+\infty} y(t)e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{-pt}dt=\left\|\begin{matrix}\int\limits_a^b u\cdot dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu;\\ u=t^2;\ dv=e^{-pt}dt;\\ du=2tdt;\ v=\int dv=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{t^2}{p}e^{-pt}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{2}{p}\int\limits_0^{+\infty} te^{-pt}dt=\left\|\begin{matrix}u=t;\ dv=e^{-pt}dt;\\ du=dt;\ v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{matrix}\right\|=-\frac{2}{p^2}\left(te^{-pt}\right)\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+\frac{2}{p^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt=-\frac{2}{p^3}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{p^3}.$$

При обчисленні цього невласного інтегралу використали, що $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t^ne^{-pt}\right)=0$. Отже, ми отримали зображення $y=t^2$ є функція $Y(p)=\dfrac{2}{p^3}$.

б) Знайдемо зображення функції $y=\begin{cases}1,\ 0\le t\le 3,\\ -1,\ 3<t<4,\\ 0,\ t\ge 4.\end{cases}$ За формулою перетворення Лапласа отримаємо: $Y(p)=\int\limits_0^{+\infty} y(t)e^{-pt}dt$. Маємо:

$$Y(p)=\int_0^{+\infty} y(t)e^{-pt}dt=\int_0^{3} e^{-pt}dt-\int_3^{4} e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^3+\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_3^4=$$

$$=\frac{1}{p}\left(-e^{-3p}+1+e^{-4p}-e^{-3p}\right)=\frac{1}{p}\left(-2e^{-3p}+1+e^{-4p}\right).$$

Знайшли шукане зображення.

2. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій: а) $f(t)=\sin 3t\cdot ch5t$; б) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

Розв'язування. а) виразимо гіперболічний косинус через показникову функцію: $ch5t=\dfrac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}$. Тоді застосуємо теорему лінійності та теорему зміщення. Згідно з якими отримаємо, оскільки зображення $\sin 3t\leftrightarrow\dfrac{3}{p^2+9}$:

$$\frac{1}{2}\left(\sin 3t\cdot e^{-5t}+\sin 3t\cdot e^{5t}\right)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{3}{(p+5)^2+9}+\frac{3}{(p-5)^2+9}\right).$$

б) Застосуємо теорему інтегрування зображення, згідно, якщо $f(t)\leftrightarrow F(p)$, то $\dfrac{f(t)}{t}\leftrightarrow\int_p^{+\infty}F(z)dz$. Зображенням чисельника $\cos t-\cos 2t$ є $\dfrac{p}{p^2+1}+\dfrac{p}{p^2+4}$. Отже, маємо за теорему інтегрування зображення:

$$f(t)=\frac{\cos t-\cos 2t}{t}\leftrightarrow\int_з^{+\infty}\left(\frac{z}{z^2+1}-\frac{z}{z^2+4}\right)dz=\frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\frac{d\left(z^2+1\right)}{z^2+1}-$$

$$\frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\frac{d\left(z^2+4\right)}{z^2+4}=\frac{1}{2}\ln\left(z^2+1\right)\Big|_p^{+\infty}-\frac{1}{2}\ln\left(z^2+4\right)\Big|_p^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z^2+1}{z^2+4}\right)\Bigg|_p^{+\infty}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+1}{p^2+4}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{p^2+4}{p^2+1}}\right).$$

3. Знайти оригінал для зображення а) $F\left(p\right)=\dfrac{2p^3+11p^2+16p+6}{p\left(p+1\right)\left(p+2\right)\left(p+3\right)}$

б) $F\left(p\right)=\dfrac{p+4}{\left(p^2+p+8\right)\left(p^2+2\right)}$.

Розв'язання. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розкладем зображення на елементарні дроби:

$$F\left(p\right)=\frac{2p^3+11p^2+16p+6}{p\left(p+1\right)\left(p+2\right)\left(p+3\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+2}+\frac{D}{p+3}=$$

$$=\frac{A\left(p+1\right)\left(p+2\right)\left(p+3\right)+Bp\left(p+2\right)\left(p+3\right)+Cp\left(p+1\right)\left(p+3\right)+Dp\left(p+1\right)\left(p+2\right)}{p\left(p+1\right)\left(p+2\right)\left(p+3\right)}=$$

$$=\frac{A\left(p^3+6p^2+11p+6\right)+B\left(p^3+5p^2+6p\right)+C\left(p^3+4p^2+3p\right)+D\left(p^3+3p^2+2p\right)}{p\left(p+1\right)\left(p+2\right)\left(p+3\right)}.$$

Дроби у лівій та правій частинах цієї рівності рівні. Оскільки знаменники у них рівні, то повинні рівні і чисельники. Два многочлени рівні між собою, якщо коефіцієнти при однакових степенях змінної дорівнюють. Далі прирівняємо при однакових степенях *k* у чисельниках лівої та правої частини останньої рівності. Отримуємо:

$p^3: \quad A+B+C+D=2;$

$p^2: \quad 6A+5B+4C+3D=11;$

$p: \quad 11A+6B+3C+2D=5;$

$p^0: \quad 6A=6\Rightarrow A=1.$

Підставивши замість A 1, отримуємо систему:

$$\begin{cases}B+C+D=1\\5B+4C+3D=5\\6B+3C+2D=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B+C+D=1\\B-C-D=0\\6B+3C+2D=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C+D=\dfrac{1}{2}\\3C+2D=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=1\\D=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Тоді $B=1-C-D=1-1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}, A=1.$

Отже, зображення $F\left(p\right)$ можна записати у вигляді:

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Для знаходження оригіналу скористаємось властивістю лінійності перетворення Лапласа та формулами з таблицями перетворення Лапласа:

$$\frac{1}{p} \leftrightarrow 1, \frac{1}{p+1} \leftrightarrow e^{-t}, \frac{1}{p+2} \leftrightarrow e^{-2t}, \frac{1}{p+3} \leftrightarrow e^{-3t}.$$

Тоді отримуємо оригінал:

$$F(p) \leftrightarrow f(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

б) Знайти оригіналу для зображення $F(p) = \dfrac{p+4}{\left(p^2+p+8\right)\left(p^2+2\right)}$.

Розв'язування. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розкладем зображення на елементарні дроби:

$$F(p) = \frac{p+4}{\left(p^2+p+8\right)\left(p^2+2\right)} = \frac{Ap+B}{p^2+p+8} + \frac{Cp+D}{p^2+2} =$$

$$= \frac{(Ap+B)\left(p^2+2\right) + (Cp+D)\left(p^2+p+8\right)}{\left(p^2+p+8\right)\left(p^2+2\right)} = \frac{A\left(p^3+3p\right) + B\left(p^2+2\right) +}{\left(p^2+p+8\right)\left(p^2+2\right)}$$

$$\frac{+C\left(p^3+p^2+8p\right) + D\left(p^2+p+8\right)}{}.$$

Знайдемо коефіцієнти $A, B, C, D.$ Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему:

$p^3: \quad A + C = 0;$

$p^2: \quad B + C + D = 0;$

$p: \quad A + 8C + D = 1;$

$p^0: \quad 2B + 3D = 4.$

$$\begin{cases} C = -A; \\ B + D - A = 0; \\ -6A + D = 1; \\ D + 4D = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{19}; \\ B = -\dfrac{14}{19}; \\ C = \dfrac{1}{19}; \\ D = \dfrac{13}{19}. \end{cases}$$

Отже, зображення може записати у вигляді:

$$F(p)=-\frac{1}{19}\cdot\frac{p}{p^2+p+8}-\frac{14}{19}\cdot\frac{1}{p^2+p+8}+\frac{1}{19}\cdot\frac{p}{p^2+2}+\frac{13}{19}\cdot\frac{1}{p^2+2}.$$

Для знаходження оригіналу використаємо властивість лінійності перетворення Лапласа, а також формули таблиці зображень та оригіналів перетворення Лапласа.

$$\frac{p}{p^2+p+8}=\frac{p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}}=\frac{p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2}=\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2}+$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{31}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2}\leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{2}t\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{2}t\right).$$

$$\frac{1}{p^2+p+8}=\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{31}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{31}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{31}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{2}t\right)$$

$$\frac{p}{p^2+2}\leftrightarrow\cos\left(\sqrt{2}t\right),\ \frac{1}{p^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{p^2+2}\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}t\right).$$

$$F(p)=-\frac{1}{19}\cdot\frac{p}{p^2+p+8}-\frac{14}{19}\cdot\frac{1}{p^2+p+8}+\frac{1}{19}\cdot\frac{p}{p^2+2}+\frac{13}{19}\cdot\frac{1}{p^2+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{19}\left(e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{2}t\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{2}t\right)\right)-\frac{14}{19}\cdot\frac{2}{\sqrt{31}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{2}t\right)+$$

$$+\frac{1}{19}\cos\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{13}{19}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}t\right).$$

4. Розв’язати задачу Коші: а) $x'(t)+x(t)=e^{-t}$, $x(0)=1$.

Розв’язання. Нехай $x(t)\div X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу $x'(t)\div pX(p)-1$. Застосувавши перетворення Лапласа до заданої задачі Коші, отримуємо: $pX(p)-1+X(p)=\frac{1}{p+1}$. Розв'язавши це алгебраїчне рівняння відносно $X(p)$ маємо: $X(p)=\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}$.

Оскільки $\frac{1}{(p+1)^2}\div te^{-t}$, $\frac{1}{p+1}\div e^{-t}$, то шуканий розв'язок $x(t)$ має вигляд:

$$x(t)=(t+1)e^{-t}.$$

Б) $x''(t)+4x(t)=\sin 3t;\ x(0)=x'(0)=0.$

Застосуємо до рівняння перетворення Лапласа. Нехай $x(t)\leftrightarrow X(p)$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу

$x''(t)\leftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$. $\sin 3t\leftrightarrow\frac{3}{p^2+9}$. Отже, зображення рівняння має вигляд:

$$\left(p^2+4\right)X(p)=\frac{3}{p^2+9}\Rightarrow X(p)=\frac{3}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+4\right)}.$$

Знайдемо оригінал $x(t)$ розв'язку рівняння, для цього зображення, розкладемо на елементарні дроби:

$$X(p)=\frac{3}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+4\right)}=\frac{3}{5}\frac{\left(p^2+9\right)-\left(p^2+4\right)}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+4\right)}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4}-$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}\leftrightarrow\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t.$$