Тема 5. Жорданова форма матриць

Нехай матриця A – числова матриця з елементами з поля K. Її характеристична матриця $A-\lambda E$ має n інваріантних многочленів. Ці многочлени називають інваріантними многочленами матриці A, відповідні дільники в полі K – елементарними дільникам в полі K матриці A.

Якщо до поля K належать не тільки елементи матриці A, а й усі її характеристичні корені, то елементарні дільники матриці A мають вигляд

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, (\lambda-\lambda_2)^{k_2}, \ldots (\lambda-\lambda_m)^{k_m},\ k_1+k_2+\ldots+k_m=n$$

Розглянемо матрицю порядку k

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Ця матриця має єдиний елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0)^k$. Отже інваріантні многочлени мають вигляд

$$e_1(\lambda)=1, e_2(\lambda)=1, \ldots, e_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k.$$

Її характеристична матриця зводиться до канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & (\lambda-\lambda_0)^k \end{pmatrix}$$

Матрицю вигляду (5.1) називають *жордановою* клітиною. Матрицю, вздовж головної якої розташовані жорданові клітини деяких порядків, а решта її елементів дорівнюють нулю, називають *жордановою* матрицею.

Кожному елементарному дільникові $(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$ матриці поставимо у відповідність жорданову клітину порядку k_j з діагональними елементами, рівними числу λ_j. Позначимо ці клітини через $J_1,\ J_2,\ldots,J_m$.

Матрицю порядку , вздовж головної діагоналі якої розташовані жорданові клітини $J_1,\ J_2,\ldots,J_m$, а решта її елементів дорівнюють нулю, позначимо через

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & 0 & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_m \end{pmatrix}$$

Матриці A і J мають однакові елементарні дільники, то вони подібні між собою. Тобто існує така невироджена матриця T, що

$$A=TJT^{-1}.$$

Матриця J називають *жордановою нормальною формою* матриці A. Жорданова форма матриці визначається однозначно з точністю до порядку розташування клітин на головній діагоналі.

Приклад. Знайти жорданову форму матриць:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -7 & 6 \\ -10 & -9 & 9 \end{pmatrix}$, в) $C=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 16 \\ 1 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Алгоритм приведення матриці до жорданової нормальної форми за допомогою власних значень матриці.

1. Знайти власні значення матриці A та їх кратності.
2. Якщо власне значення єдине, то обчислити кількість усіх жорданових клітин, що відповідають власному значенню λ за формулою $N=rang(A-\lambda E)$.

Якщо власних значень декілька, то для кожного власного значення λ матриці A та для кожного $k\in N$ знайти кількість $N_k(\lambda)$ жорданових клітин k-го порядку, що відповідають власному значенню λ. Для цього треба обчислити числа $r_0(\lambda)=n$, $r_1(\lambda)=rang(A-\lambda E)$, $r_2(\lambda)=rang(A-\lambda E)^2$, … до тих пір , поки для деякого k не буде виконана рівність $r_k(\lambda) = r_{k+1}(\lambda)$. Після цього скористатися формулою

$$N_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda).$$

3. Побудувати жорданову нормальную форму матриці A як блочно-діагональну матрицю, діагональ якої складають знайдені жорданові клітини. В отриманій матриці власне значення повинно зустрічатись стільки разів, яка його кратність.

Приклад. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$