Практичне заняття

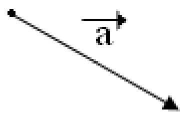
Лінійні операції над векторами. Розклад вектора за базисом.

Теоретичні відомості

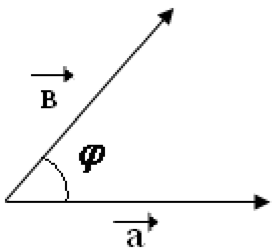
<u>Векторною величиною,</u> називається будь-яка величина, яка характеризується не тільки чисельним значенням, але й напрямком на площині або у просторі.

В геометрії вектори зображуються у вигляді направлених відрізків

$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ - розначення векторів;



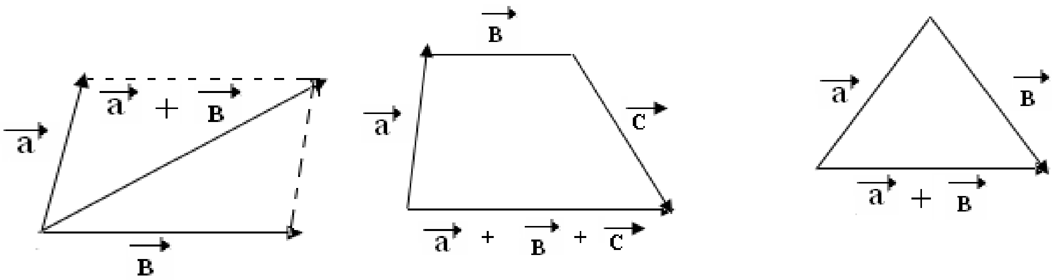
$\vec{a}$ $\overleftarrow{в}$ - колінеарність; $|\vec{a}|=|\vec{в}|$ - рівність векторів;



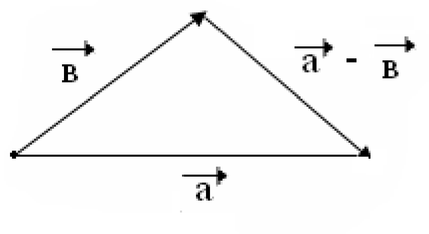
$(\grave{a}\hat{;}\,\hat{a})$ -

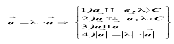
кут між векторами

1. <u>Додавання </u>векторів:а)правило трикутника; б)правило паралелограма; в)правило многокутника;

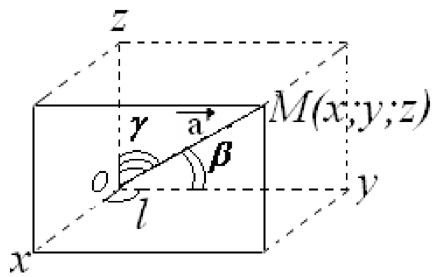


2.<u>Віднімання</u> векторів:



3. Множення вектора на число: 

<u>Розклад вектора за ортонормованим базисом</u>



$|i| = |j| = |k|,$ $\qquad a = OM, M(x;y;z)$ $\qquad a = xi + yj + zk$

де x, y, z – проекції вектора на осі ox, oy, oz (координати вектора a в ортонормованому базисі)

Нехай вектор $a = |x;y;z|$ - задається своїми координатами

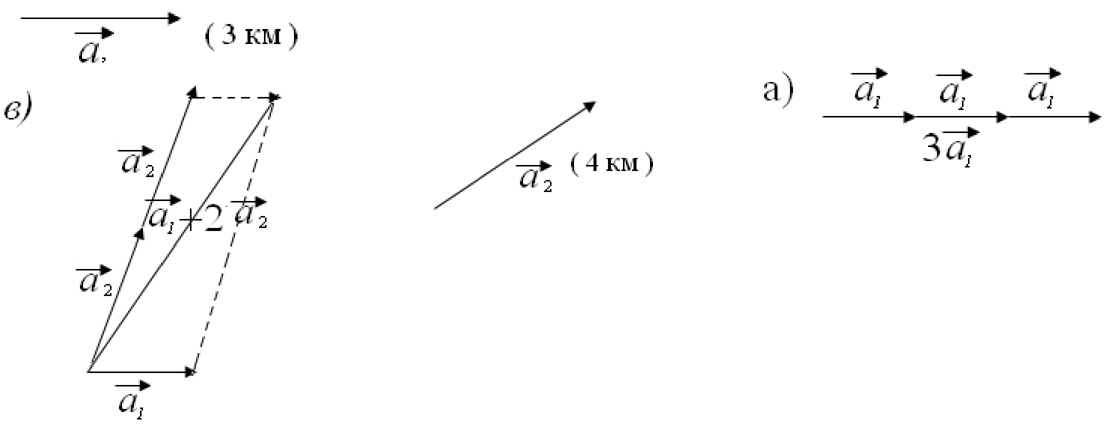
$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - модуль вектора;

$\cos\alpha = \frac{x}{|a|}; \cos\beta = \frac{y}{|a|}; \cos\gamma = \frac{z}{|a|}$ - напрямні косинуси.

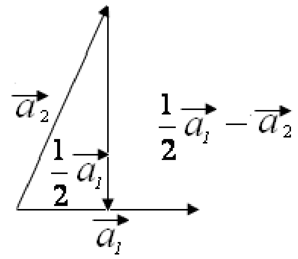
Практична частина

Дано вектора $\vec{a}_1$ й $\vec{a}_2$. Побудувати вектори: $\frac{1}{2}\vec{a}_1 - \vec{a}_2, 3\vec{a}_2, \frac{1}{2}\vec{a}_2, \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$

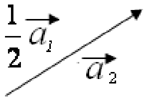
Розв’язання:



г)



б)

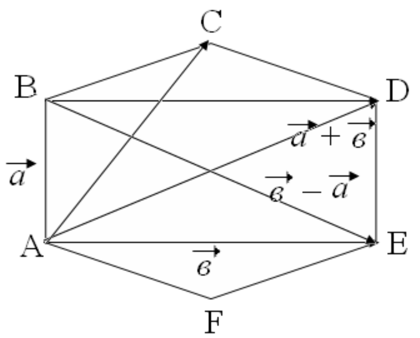


4) У правильному трикутному шестикутнику *ABDCEF* дано:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AE} = \vec{в}$$

Виразити вектори $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ **через векторы** $\vec{a}$ и $\vec{в}$

Розв’язання:



$\overrightarrow{AB}$ и $|\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{DE} = -\vec{a}; \quad \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{в}$

$BE = \frac{1}{2}(\vec{в} - \vec{a})$

$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{в})$

$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{в})$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{в}) = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{в}$

5) Дано точки *A(3; -1; 2), B(-1; 2; 1)*. Знайти координати вектора

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ $\qquad \overrightarrow{AB} = \{-4;3;-1\}$

6) Дано при вектора: $à = \{2;4;0\}$; $в = \{0;-3;1\}$; $c = \{5;-1;2\}$

Знайти вектор $2a - 3в + c$

$2a - 3в + c = 2(2i + 4i) \cdot 3(-3j + k) + 5i - j + 2k = 9i + 16j - k$

7) Довести, що точки $A(4;4;3)$, $B(1;-2;1)$ $C(-1;-6;-2)$ належать одній прямій.

Розв'язання:

Убедиться, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны
$\overrightarrow{AB}=\{-3;-6;-3\}$ $\overrightarrow{AC}=\{-5;-10;-5;\}$ т.к

$\frac{-3}{-5}=\frac{-6}{-10}=\frac{-3}{-5}$, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны

Приклади для самостійного розв'язання

1. Дано $|a|=a$, $\alpha=45^o$, $\beta=60^o$, $\gamma=120^o$. Обчислити проекції вектора $\grave{a}$.

Розв'язання:

Проекції на осі *ox, oy, oz:*

$$ox \quad \vec{a}=|\vec{a}| \quad \cos\alpha=2\cdot\cos45^\circ=2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \ ;$$

$$oy \quad \vec{a}=|\vec{a}| \quad \cos\beta=2\cdot\cos60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1;$$

$$oz \quad \vec{a}=|\vec{a}| \quad \cos\gamma=2\cdot\cos120^\circ=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

2. Обчислити напрямні косинуси вектора a $\{3/13;\ 4/13;\ 12/13\}$.

Розв'язання:

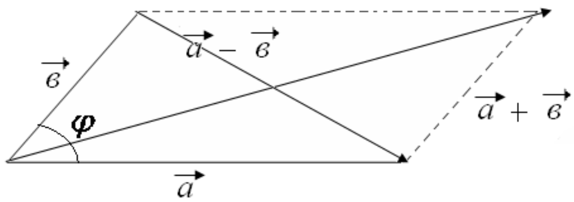
$|\vec{a}|=\sqrt{\frac{9}{13^2}+\frac{16}{13^2}+\frac{144}{13^2}}=\frac{13}{13}=1$; $cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|}=\frac{3}{13*1}=\frac{3}{13}$; $cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|}=\frac{4}{13*1}=\frac{4}{13}$; $cos\ \gamma=$

$\frac{12}{13}$

Дано: $|a|-|в|$ $|a|=11;$ $|в|=23;$ $|a-в|=30$. Знайти $|a+в|$.

Розв'язання:

$|\overline{a}-\overline{в}|^2=|\overline{a}|^2+|в|^2-2|\overline{a}||в|cos(\vec{a};\vec{в})$



$$cos(\widehat{a;в})=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{в}|^2-|\vec{a}-\vec{в}|^2}{2|\overline{a}||\overline{в}|}=\frac{11^2+23^2-30^2}{2*11*23}=\frac{-250}{2*11*23};$$

$$=11^2+23^2-230=121+529-250=650-250=400;\ |\overline{a}+\overline{в}|=\sqrt{400}=20$$

$$|\vec{a}+\vec{в}|^2=|a|^2+|в|^2-2|a|*|в|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{в}})=|a|^2+|\vec{в}|^2$$

3. Дано: вектори $a=\{3;-2;6\};\ в=\{-2;1;0\}$| Визначити проекції наступних векторів:

<u>Розв'язання:</u>

$$\vec{a}+\vec{в}=\{1;-1;6\};\ \vec{a}-\vec{в}=\{5;-3;6\};\ 2\vec{a}=\{6;-4;12\};\ -\frac{1}{2}\vec{в}=\left\{1;-\frac{1}{2};0\right\};2\vec{a}+3\vec{в}=\{0;-1;12\};\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{в}=$$

Питання і завдання для самоконтролю.

1. Дайте визначення модуля, проекції вектора на вісь; базиса.
2. Перелічите основні лінійні операції над векторами.
3. За якою формулою знаходиться сума, різниця векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$?
4. Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів?
5. Дайте визначення лінійної залежності та не залежності векторів.
6. Запишіть формули розкладу векторів у довільному та ортонормованому базисах
7. Дайте визначення ортонормованого базису.
8. Як обчислюються модуль та напрямні косинуси векторів?
9. Запишіть умову компланарності векторів.

<u>Зразок завдань для поточного контролю</u>

за темою: «Лінійні операції та розклад вектора за базисом».

Дано точки *A(3;-2;1), B(-4;5;1), C(0;7;-2)*. Знайти:

1) вектор $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та їх розклади в ортонормованому базисі;

3) модулі векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$;

4) вектори 2$\overrightarrow{AB}$ +3$\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}$ -1/2$\overrightarrow{BC}$

Список використаної літератури.

1. Збірник задач за курсом математики для втузов за редакцією Клетеник Н.В. – М.: Высш.шк., 1981. – 304 с.
2. П.Е.Данко, А.Г.Попов и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш.шк., 1986. – 304 с.
3. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. Вища математика. - К., А.С.К., 2006. – 648 с.

–