Практичне заняття

Тема. Невизначений інтеграл. Безпосереднє інтегрування за таблицею. Основні методи інтегрування.

Цілі та задачі: розглянути означення первісної, невизначеного інтегралу; ознайомитися з таблицею основних інтегралів; оволодіти основними методами інтегрування.

Знання та вміння: студенти повинні ознайомитися з поняттям первісної, невизначеного інтегралу; набути навички безпосереднього інтегрування за таблицею, методом компенсуючого множника, методом розкладання; навчитися інтегрувати за формулою заміни змінної.

Форми та методи контролю: опитування та розв'язання задач біля дошки, самостійна робота, поточний контроль по карточкам.

Час:2 год.

Домашнє завдання: [1] №№ 1032, 1043, 1045, 1077, 1064, 1089, 1074, 1065, 1125, 1105.

Теоретичні питання.

Поняття невизначеного інтегралу. Основна таблиця інтегралів.

Означення 1. Функція *F(x)* називається первісною для функції *f(x),* визначеною на сегменті $\lfloor a;\ в \rfloor$, якщо в усіх точках цього сегмента виконується рівність:
$F'(x) = f(x),$ або $dF(x) = f(x)dx$

Теорема. Якщо функція *F(x)* – первісна для функції *f(x)* на сегменті $\lfloor a;\ в \rfloor$, то будь-яка інша первісна для *f(x)* функція відрізняється від *F(x)* на довільний сталий додаток *C*, тобто може бути виражено у вигляді $F(x) + c$, де с – довільна стала.

Означення 2. Загальний вираз всіх первісних функцій $F(x) + c$ (де c – довільна стала) для *f(x)* називається невизначеним інтегралом від функції *f(x)* і позначається символом $\int f(x)dx$, читається так "Невизначений інтеграл від *f(x)* де ікс". Отже: $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Обчислення інтегралів з безпосереднім використанням таблиці основних інтегралів називається безпосереднім інтегруванням. Даний інтеграл порівнюють з формулами таблиці і якщо він там є, то інтеграл знайдено.

Метод заміни змінної.

Нехай необхідно обчислити невизначений інтеграл $\int f(x)dx.$ Зробимо заміну $x = \varphi(t),$ де $\varphi(t)$ – функція, яка має неперервну похідну $\varphi'(t)$ і обернену функцію $t = \psi(x),$ тоді

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Практична частина.

1. Безпосереднє інтегрування за таблицею та метод компенсуючого множника.
Розглянемо одно із основних властивостей інтегралів.
Якщо $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(ax + в)dx = \frac{1}{a}F(ax + в) + c$, де $\frac{1}{a}$ - компенсуючий множник.

1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c;$

2) $\int(3x+1)^4dx=\begin{Bmatrix} v=3x+1 \\ dv=3dx \end{Bmatrix}=\frac{1}{3}\int v^4dv=\frac{1}{3}\cdot\frac{v^5}{5}+c=\frac{1}{15}(3x+1)^5+c.$

3) $\int\frac{dx}{x+2}=ln|x+2|+c.$

4) $\int sin\,5xdx=\begin{Bmatrix} v=5x \\ dv=5dx \end{Bmatrix}=-\frac{1}{5}cos\,5x+c.$

5) $\int tq\frac{1}{7}xdx=\left\{v=\frac{1}{7}x \quad dv=\frac{1}{7}dx\right\}=7\int tqvdv=-7\,ln(cos\,v)+c=-7\,ln\left(cos\frac{1}{7}x\right)+c.$

6) $\int 3^xdx=\frac{3^x}{ln\,3}+c.$

7) $\int\frac{dx}{4+x^2}=\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\begin{Bmatrix} a=2 \\ v=x \\ dv=dx \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}arctq\,\frac{x}{2}+c.$

8) $\int\frac{dx}{sin^2(3x-1)}=-\frac{1}{3}ctq(3x-1).$ 9) $\int tq4xdx=-\frac{1}{4}ln|cos\,4x|+c.$

10) $\int\frac{dx}{sin\,3x}=\frac{1}{3}ln\left|tq\,\frac{3x}{2}\right|+c.$ 11) $\int\frac{dx}{4+7x^2}=\int\frac{dx}{2^2+(\sqrt{7}x)^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2}arctq\,\frac{\sqrt{7}x}{2}+c.$

12) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-(\sqrt{5}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}arcsin\,\frac{\sqrt{5}x}{3}+c;$

2. Метод заміни змінної.

13) $\int\frac{dx}{(1+x^2)arctq^2x}=\int arctq^{-2}x\frac{dx}{x^2+1}=\begin{Bmatrix} v=arctqx \\ dv=\frac{dx}{x^2+1} \end{Bmatrix}=\int v^{-2}dv=\frac{v^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{arctqx}+c.$

14)
$\int\frac{e^xdx}{1-5e^{2x}}=\begin{Bmatrix} \sqrt{5}e^x=v \\ dv=\sqrt{5}e^xdx \end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}e^xdx}{1-(\sqrt{5}e^x)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dv}{1-v^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\cdot ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{1+\sqrt{5}e^x}{1-\sqrt{5}e^x}\right|+c$

15) $\int 2^{3x}dx=\begin{Bmatrix} v=3x \\ dv=3dx \end{Bmatrix}=\frac{1}{3}\int a^vdv=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^v}{ln\,a}+c=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{ln\,2}+c.$

16) $\int 5^{ln\,x}\frac{dx}{x}=\begin{Bmatrix} v=ln\,x \\ dv=\frac{dx}{x} \end{Bmatrix}=\frac{5^{ln\,x}}{ln\,5}+c.$

17) $\int\frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\begin{Bmatrix} v=\sqrt{x} \\ dv=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{Bmatrix}=2\int\frac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2\,sin\sqrt{x}+c.$

18) $\int e^{-3x}dx=\begin{Bmatrix} v=-3x \\ dv=-3dx \end{Bmatrix}=-\frac{1}{3}e^{-3x}+c.$

19) $\int\frac{sin\,xdx}{\sqrt{cos\,x}}=\begin{Bmatrix} v=cos\,x \\ dv=-sin\,xdx \end{Bmatrix}=-\int\frac{dv}{\sqrt{v}}=-2\sqrt{v}+c=-2\sqrt{cos\,x}+c.$

20) $\int\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}=\begin{Bmatrix} v=ln\,x \\ dv=\frac{dx}{x} \end{Bmatrix}=\int\frac{dv}{\sqrt{v}}=2\sqrt{v}+c=2\sqrt{ln\,x}+c.$

21) $\int\frac{dx}{5x+1}=\begin{Bmatrix} v=5x+1 \\ dv=5dx \end{Bmatrix}=\frac{1}{5}\int\frac{dv}{v}=\frac{1}{5}ln|v|+c=\frac{1}{5}ln|5x+1|+c.$

22) $\int\frac{3x^2+1}{x^3+x}dx=\begin{Bmatrix} v=x^3+x \\ dv=(3x^2+1)dx \end{Bmatrix}=\int\frac{dv}{v}=ln|v|+c=ln|x^3+x|+c.$

Приклади для самостійного розв’язання

1) $\int(x^2+1)^4xdx;$ 2) $\int\frac{x^2dx}{x^3+1};$ 3) $\int\frac{dx}{4-3x^2};$ 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}};$

5) $\int x\sqrt{x}dx;$ 6) $\int\sqrt[3]{x}dx;$ 7) $\int\frac{sin\,xdx}{cos^3\,x};$ 8) $\int\frac{ln^2\,x}{x}dx;$ 9) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}};$

10) $\int\frac{sin\,xdx}{\sqrt{4-cos\,x}};$ 11) $\int\frac{dx}{2+3x};$ 12) $\int\frac{e^xdx}{3-4e^x};$ 13) $\int\frac{sin\,xdx}{2+3\,cos\,x};$

14) $\int x5^{3x^2}dx;$ 15) $\int\frac{dx}{5+3x^2};$ 16) $\int\frac{dx}{1-2x^2};$

Питання і завдання для самоконтролю.

1. Дайте означення первісної, невизначеного інтегралу
2. Сформулюйте поняття компенсую чого множника.
3. Запишіть основні формули інтегрування.
4. Назвіть основні методи розв’язання інтегралів.
5. В чому полягає метод безпосереднєго інтегрування за таблицею?
6. Запишіть формулу заміни змінної.
7. Розв’яжіть наступні інтеграли:

1. $\int(3x+4)^4dx=\frac{1}{3}\int(3x+4)^4d(3x+4)=\frac{1}{3}\frac{(3x+4)^5}{5}+C$
2. $\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(2x+1)^{3/2}}{3}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C$
3. $\int\frac{dx}{3x-2}=\frac{1}{3}\ln|3x-2|+C$.
4. $\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$
5. $\int\sin(2x-3)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$
6. $\int\cos\frac{x}{3}dx=3\sin\frac{x}{3}+C$
7. $\int\frac{dx}{\cos^2(4x-2)}=\frac{1}{4}tg(4x-2)+C$
8. $\int tg(2-3x)dx=\frac{1}{3}\ln|\cos(2-3x)|+C$
9. $\int\frac{xdx}{x^4+1}=\frac{1}{2}arctgx^2+C$
10. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}=\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$
11. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}=\arcsin\ln x+C$
12. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+4}}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+4}\right|+C;$
13. $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right|+C;$
14. $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C$
15. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$

Список використаної літератури.

1. Збірник задач за курсом математичного аналізу для втузов за редакцією Б.П.Демідовича. – М.: Наука, 1970. – 472 с.
2. Збірник задач за курсом математики для втузов за редакцією А.В.Єфімова, Б.П.Демідовича. Т.1. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. Т.1.- М., Наука,1985