Тема 6. Мінімальний многочлен. Фробеніусова нормальна форма матриці

1. Мінімальний многочлен.

Нехай A – квадратна матриця порядку n з елементами з поля K, $f(\lambda)$ - скалярний многочлен. Якщо має місце рівність $f(A)=0$, то кажуть, що многочлен $f(\lambda)$ *анулюється* матрицею A. Матрицю A в цьому випадку називають матричним коренем многочлена $f(\lambda)$.

Будь-яка матриця є коренем деякого ненульового многочлена.

Теорема Гамільтона-Келі. Будь-яка квадратна матриця задовольняє своє характеристичне рівняння.

Многочлен найменшої степені, що анулюється матрицею A та має старший коефіцієнт 1, називається *мінімальним многочленом* матриці A.

Твердження. Будь-який многочлен, який анулюється матрицею A, ділиться на її мінімальний многочлен без остачі.

Мінімальний многочлен матриці визначається однозначно.

Теорема. Мінімальний многочлен матриці A співпадає з її останнім інваріантним многочленом $e_n(\lambda)$.

Матриця A порядку n з елементами поля K може бути приведена до діагонального виду, якщо всі корені мінімального многочлена матриці A належать полю K та серед них немає кратних.

Приклад. Знайти мінімальний многочлен матриці

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -7 & 6 \\ -10 & -9 & 9 \end{pmatrix}$, в) $C=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

З'ясувати, чи є матриці подібними діагональним матрицям в полях раціональних, дійсних, комплексних чисел.

2. Фробеніусова нормальна форма матриці

Нехай K - довільне поле, а $g(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$ - многочлен ненульового степеню n над полем K, старший коефіцієнт якого дорівнює 1.

Матриця $F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ називається *клітиною Фробеніуса*, що супроводжує многочлен $g(\lambda)$.

Нехай $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \dots, g_m(\lambda)$ система многочленів ненульових степенів над полем K така, що для $i=1,2,\dots,m-1$ многочлен $g_i(\lambda)$ є дільником наступного многочлена $g_{i+1}(\lambda)$ і старший коефіцієнт кожного з них дорівнює 1. Нехай для $k=1,2,\dots,m$ F_k - клітина Фробеніуса, що супроводжує многочлен $g_k(\lambda)$. Клітинно-діагональна матриця $F=diag(F_1, F_2, \dots, F_n)$ називається матрицею Фробеніуса, що супроводжує систему многочленів. Якщо A – довільна матриця, F – подібна їй матриця Фробеніуса, то F називається фробеніусовою нормальною формою матриці A.

Приклад. Знайти фробеніусову нормальну форму матриці

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$