**Практичне заняття . Виробничі функції**

1. Для лінійної виробничої функції $X = a \cdot K + b \cdot L$, $a > 0$, $b > 0$ побудувати ізокванти й ізокліналі. Знайти норми заміщення праці капіталом $s_K$ та капіталу працею $s_L$.

**Розв'язання.** Знайдемо рівняння ізоквант: $X = X_0 = \text{const}$. Звідси отримуємо:

$$a \cdot K + b \cdot L = X_0 \Rightarrow L = \frac{1}{b}\left(X_0 - aK\right) = c - \frac{a}{b}K\,,\ c = \text{const}\,.$$

Таким чином, рівняння ізоквант має вигляд: $L = c - \frac{a}{b}K$. Це сімейство паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $-\frac{a}{b}$.

Рівняння ізокліналей у диференціальній формі має вигляд:

$$\frac{dK}{\partial F/\partial K} = \frac{dL}{\partial F/\partial L},$$

де $F\left(K, L\right) = a \cdot K + b \cdot L$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial K} = a$, $\frac{\partial F}{\partial L} = b$ і рівняння ізокліналей набувають вигляду: $\frac{dK}{a} = \frac{dL}{b}$, звідки $a \cdot dL - b \cdot dK = 0$ або $aL - bK = C \Rightarrow L = \frac{b}{a}K + C_1$, $C_1 = \text{const}$ – довільна стала. Отже, рівняння ізокліналей – це рівняння паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $\frac{b}{a}$. Ізокванти ортогональні ізокліналям.

Норма заміщення праці капіталом $s_K = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \frac{b}{a}$, норма заміщення капіталу працею $s_L = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} = \frac{a}{b} = \frac{1}{s_K}$.

2. Визначити граничну фондовіддачу та граничну продуктивність праці у економічній системі, функціонування якої описується виробничою функцією $X = F\left(K, L\right) = 1500 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,7}$, якщо вартість основних виробничих фондів $K = 3200$ у.г.о., витрати на оплату праці $L = 1000$ у.г.о.

**Розв'язання.** Гранична фондовіддача

$$\frac{\partial F}{\partial K}=1500\cdot 0,3\cdot K^{-0,7}\cdot L^{0,7}=450\cdot\left(\frac{L}{K}\right)^{0,7}.$$

При $K=3200$, $L=1000$ маємо, що

$$\frac{\partial F}{\partial K}=450\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^{0,7}\approx 199,346.$$

Гранична продуктивність праці

$$\frac{\partial F}{\partial L}=1500\cdot 0,7\cdot K^{0,3}\cdot L^{-0,3}=1050\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}.$$

При $K=3200$, $L=1000$ гранична продуктивність праці

$$\frac{\partial F}{\partial L}=1050\cdot\left(3,2\right)^{0,3}\approx 1488,45.$$

3. Для виробничої функції $X=1200\cdot K^{0,4}\cdot L^{0,6}$ визначити еластичність виробництва за працею та за капіталом.

**Розв’язання.** Еластичність виробництва за капіталом $E_K=\dfrac{\partial\left(\ln X\right)}{\partial\left(\ln K\right)}$, еластичність виробництва за працею $E_L=\dfrac{\partial\left(\ln X\right)}{\partial\left(\ln L\right)}$. Для заданої виробничої функції $\ln X=\ln 1200+0,4\ln K+0,6\ln L$. Тоді $E_K=0,4$, $E_L=0,6$.

4. Виробнича функція має вигляд: $X=0,931\cdot K^{0,539}\cdot L^{0,594}$. За деякий період часу обсяг виробництва збільшився у 4,08 рази, основні виробничі фонди – у 6,62 рази, кількість працівників – у 1,79 рази. Яка частина зростання обсягу виробництва пояснюється зростанням його масштабу, а яка – зростанням його ефективності?

**Розв’язання.** Запишемо задану мультиплікативну виробничу функцію у безрозмірних величинах. Отримуємо: $\tilde{X}=\tilde{K}^{0,539}\cdot\tilde{L}^{0,594}$, де $\tilde{X}=\dfrac{X}{X_0}$, $\tilde{K}=\dfrac{K}{K_0}$, $\tilde{L}=\dfrac{L}{L_0}$ – відношення значень відповідних показників у періоді часу, що є об’єктом дослідження, до їх значень у базовому періоді часу, тобто $\tilde{X}=4,08$; $\tilde{K}=6,62$; $\tilde{L}=1,79$. Тоді $\tilde{X}=E\cdot M$, де $M$ – масштаб виробництва, $E$ – його економічна ефективність. Масштаб виробництва (середню вартість витрачених ресурсів) визначаємо за формулою $M=\tilde{K}^{\alpha}\cdot\tilde{L}^{1-\alpha}$, де $\alpha=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$,

$\alpha_1 = 0,539$; $\alpha_2 = 0,594$. Тоді $\alpha = \dfrac{0,539}{0,539 + 0,594} = 0,476$.

Обчислимо масштаб виробництва:

$$M = 6,62^{0,476} \cdot 1,79^{(1-0,476)} = 2,459 \cdot 1,356 = 3,336.$$

Знаходимо економічну ефективність виробництва: $E = \dfrac{\tilde{X}}{M} = \dfrac{4,08}{3,336} = 1,223$.
Отже, обсяг виробництва збільшився у 3,336 рази за рахунок зростання масштабу виробництва та у 1,223 рази – за рахунок підвищення його економічної ефективності.

5. Записати рівняння ізокліналей для виробничої функції з попереднього прикладу.

**Розв'язання.** Задана виробнича функція має вигляд $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. Диференціальне рівняння ізокліналей:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}.$$

Знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial K}$ та $\dfrac{\partial F}{\partial L}$:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 0,931 \cdot 0,539 \cdot K^{0,539-1} \cdot L^{0,594} = 0,502 \cdot K^{-0,461} \cdot L^{0,594};$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 0,931 \cdot 0,594 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594-1} = 0,553 \cdot K^{0,539} \cdot L^{-0,406}.$$

Підставивши знайдені частинні похідні у диференціальне рівняння ізокліналей, отримуємо:

$$\frac{dK \cdot K^{0,461}}{0,502 \cdot L^{0,594}} = \frac{dL \cdot L^{0,406}}{0,553 \cdot K^{0,539}}.$$

Звідси, розділивши змінні, знаходимо:

$$0,502 \cdot L \cdot dL = 0,553 \cdot K \cdot dK.$$

Інтегруємо ліву частину останньої рівності за змінною $L$, праву – за $K$:

$$0,502 \cdot \frac{L^2}{2} = 0,553 \cdot \frac{K^2}{2} + C.$$

Запишемо цю рівність у вигляді:

$$\frac{L^2}{0,553} - \frac{K^2}{0,502} = C^2 .$$

Отримали рівняння сімейства гіпербол – ізокліналі заданої виробничої функції.

6. Виробнича функція Леонтьєва визначається рівністю $X = \min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\}$, де $a$ та $b$ – відповідна кількість одиниць капіталу та одиниць праці, необхідних для виробництва одиниці продукції. Побудувати ізокванти та ізокліналі виробничої функції Леонтьєва при $a = 5$, $b = 3$.