7. Дискретне динамічне програмування

Нехай маємо задачу вибору оптимального варіанту вирішення проблеми з деякої скінченної кількості можливих варіантів, тобто задачу дискретної оптимізації. Для розв’язання багатьох типів таких задач можна використати метод дискретного динамічного програмування.

Нехай процес оптимізації розбито на n кроків. На кожному кроці маємо дві змінні – змінну стану x та змінну керування u. Змінна x визначає, у якому стані може знаходитися об’єкт керування на k-му кроці процесу оптимізації. У залежності від значення x на цьому кроці можна вибрати деяке керування u_k. Внаслідок цього отримуємо результат $W_k\left(x,u_k\right)$. При цьому об’єкт керування переходить у новий стан $x'\left(x,u_k\right)$. Для кожного можливого стану об’єкта на k-му кроці серед усіх можливих керувань вибирається оптимальне керування u_k^*, таке, щоб результат, який досягається з k-го по n-й кроки, виявився оптимальним. Числову характеристику цього результату $B_k\left(x\right)$ називають **функцією Беллмана задачі дискретного динамічного програмування**. Вона залежить від номера кроку k та стану об’єкта x.

Перший етап розв’язання задачі дискретного динамічного програмування називають **умовною оптимізацією**. На цьому етапі визначають функцію Беллмана та оптимальне керування для всіх можливих станів об’єкта на кожному кроці, починаючи з останнього. На останньому, n-му кроці знаходять оптимальне керування u_n^* з умови $W_n\left(x,u_n\right)\to\max$ за всіма можливими значеннями u_n. Відповідне значення функції Беллмана

$$B_n=\max_{u_n}\left\{W_n\left(x,u_n\right)\right\}.$$

У залежності від умови задачі максимум замінюють на мінімум.

Рівнянням Беллмана задачі дискретного динамічного програмування називають рекурентне рівняння

$$B_k(x) = \max_{u_k}\left\{W_k(x, u_k) + B_{k+1}\left(x'(x, u_k)\right)\right\}. \tag{7.1}$$

За необхідності максимум заміняють на мінімум.

Після знаходження функції Беллмана та відповідних оптимальних керувань для всіх кроків, з n-го по перший, переходять до другого етапу розв'язання задачі – **безумовної оптимізації**. На першому кроці безумовної оптимізації стан об'єкта є відомим – це його початковий стан x_0. Використавши його, знаходимо оптимальний результат $B_1(x_0)$ за всі n кроків та оптимальне керування u_1^* на першому кроці, що надає цей результат.

Після застосування оптимального керування u_1^* об'єкт переходить у новий стан $x'\left(x, u_1^*\right)$. Знаючи цей стан та використавши результати, отримані на етапі умовної оптимізації, можна знайти оптимальне керування u_2^*. Процес продовжується до n-го кроку.

4.2 Задача про оптимальне інвестування підприємств

Дискретне динамічне програмування широко застосовують при плануванні оптимального розподілу ресурсів. Так, однією з найважливіших практичних задач, що виникають у економічній діяльності, є задача про оптимальне інвестування підприємств. Розглянемо розв'язання цієї задачі методом дискретного динамічного програмування.

Нехай потрібно інвестувати кошти обсягом a грошових одиниць у n підприємств, прибуток від яких, у залежності від величини u інвестованих коштів наведено у таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 Розподіл прибутку від підприємств у залежності від обсягів інвестованих у них коштів.

u	g_1	g_2	…	g_n
u_1	$g_1(u_1)$	$g_2(u_1)$	…	$g_n(u_1)$
u_2	$g_1(u_2)$	$g_2(u_2)$	…	$g_n(u_2)$
…	…	…	…	…
u_n	$g_1(u_n)$	$g_2(u_n)$	…	$g_n(u_2)$

Тут $g_i(u_j)$ – прибуток -го підприємства при інвестуванні у нього u_j грошових одиниць. Потрібно розподілити інвестиції таким чином, щоб загальний прибуток від діяльності всіх підприємств був максимальним.

Розіб'ємо процес оптимізації на n кроків. На k-му кроці оптимізуємо інвестиції з k-го по n-е підприємство, для чого є кошти $0 \le a \le x_k$, x_k – змінна стану. Змінна керування u_k – це обсяг коштів, що інвестуються у k-е підприємство. Функція Беллмана $B_k(x_k)$ – максимальний прибуток від інвестування підприємств з k-го по n-е суми x_k грошових одиниць (г. о.).

При інвестуванні у k-е підприємство u_k г. о. отримуємо прибуток $g_k(u_k)$. При цьому об'єкт керування до $(k+1)$-го кроку перейде у стан $x_{k+1} = x_k - u_k$, x_{k+1} г. о. залишається на інвестування з $(k+1)$-го по n-е підприємства.

На першому кроці умовної оптимізації $(k = n)$ значення функції Беллмана дорівнює прибутку лише з n-го підприємства, x_n – кошти, які можна використати для його інвестування. Щоб отримати максимум прибутку від цього підприємства, у нього потрібно інвестувати всі кошти, тобто $B_n(x_n) = g_n(x_n), u_n^* = x_n$.

На кожному з наступних кроків для обчислення функції Беллмана використаємо результати попереднього кроку. Нехай на k-му кроці для інвестування підприємств з k-го по n-е залишилось x_k г. о. Від інвестування у k-е підприємство u_k г. о. прибуток складе $g_k\left(u_k\right)$, на інвестування решти підприємств залишиться $x_{k+1}=x_k-u_k$ г. о. Максимальний прибуток, який можна отримати з k-го по n-е підприємства:

$$B_k\left(x_k\right)=\max_{u_k}\left\{g_k\left(u_k\right)+B_{k+1}\left(x_k-u_k\right)\right\}.$$

Максимум досягається при $u_k=u_k^*$ – оптимальному керуванні на k-му кроці для стану x_k. Таким чином знаходять значення функції Беллмана та оптимальні керування до кроку $k=1$ включно. Функція Беллмана $B_1\left(a\right)$ дорівнює максимальному прибутку, який можна отримати з усіх n підприємств, u_1^* – оптимальний обсяг інвестицій у перше підприємство. Для всіх наступних кроків обчислюємо $x_k=x_{k-1}-u_{k-1}$, оптимальне керування u_k^* повинне надавати максимум прибутку для стану об'єкта x_k.

Приклад 7.1. Розподілити $a=80$ г. о. по трьом підприємствам з метою отримання максимального загального прибутку. Обсяги прибутку при інвестуванні u г. о. наведені у таблиці 4.2.

Таблиця 7.2. Залежність величини прибутку g_i г. о. від величини інвестицій u_j г. о.

u	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
20	34	21	33

40	47	23	40
60	67	34	50
80	70	90	80

Розв'язання. Перший етап розв'язання задачі – умовна оптимізація.

1) $k = n = 3$. $B_3(x_3) = g_3(x_3)$. Будуємо таблицю:

Таблиця 7.3. Перший крок умовної оптимізації, $k = 3$.

u_3 / x_3	0	20	40	60	80	$B_3(x_3)$	u_3^*
0	0	–	–	–		0	0
20	–	33	–	–	–	33	20
40	–	–	40	–	–	40	40
60	–	–	–	50	–	50	60
80	–	–	–	–	80	80	80

2) $k = 2$, $B_2(x_2) = \max\limits_{u_2 \le x_2} \left\{ g_2(u_2) + B_3(x_2 - u_2) \right\}$.

Таблиця 7.4. Другий крок умовної оптимізації, $k = 2$.

u_2 / x_2	0	20	40	60	80	$B_2(x_2)$	u_2^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	21+0	–	–	–	33	0
40	0+40	21+33	23+0	–	–	54	20
60	0+50	21+40	23+33	34+0	–	61	20
80	0+80	21+50	23+40	34+33	80+0	90	80

3) $k=1,\ B_1(x_1)=\max\limits_{u_1\le x_1}\left\{g_1(u_1)+B_2(x_1-u_1)\right\}$.

Таблиця 7.5. Третій крок умовної оптимізації, $k=1$.

u_1 / x_1	0	20	40	60	80	$B_1(x_1)$	u_1^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	34+0	–	–	–	34	20
40	0+54	34+33	47+0	–	–	67	20
60	0+61	34+54	47+33	67+0	–	88	20
80	0+90	34+61	47+54	67+33	70+0	101	40

Другий етап розв'язання задачі – безумовна оптимізація.

1) $x_1=a=80,\ B_1(x_1)=101,\ u_1^*=40$.

2) $x_2=x_1-u_1^*=80-40=40,\ B_2(x_2)=54,\ u_2^*=20$.

3) $x_3=x_2-u_2^*=40-20=20,\ B_3(x_3)=33,\ u_3^*=20$.

Оптимальний план інвестування $\left(u_1^*,u_2^*,u_3^*\right)=(40,20,20)$. Максимальний прибуток при цьому складає $B_1(x_1)=B_1(80)=101$ г. о.