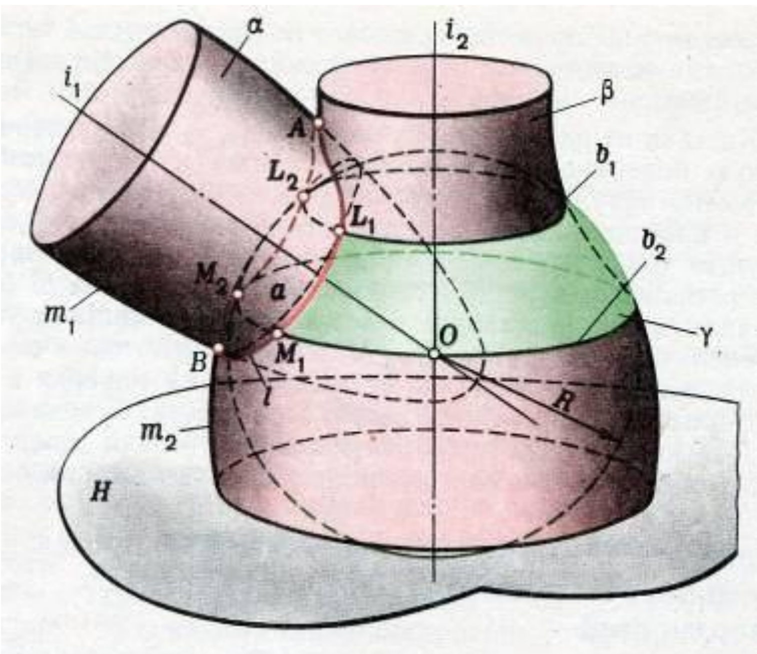
О. М. Джеджула, С. І. Кормановський,

КУРС НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ



Міністерство аграрної політики України
Вінницький національний аграрний університет

О. В. Джеджула, С. І. Кормановський

КУРС НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНАУ
2011

УДК 744:004
ББК 74.580.266.5

Д-40

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного аграрного університету Міністерства аграрної політики України (прото- кол № 2 від 30.09.2010 р.)

Рецензенти:
І. П. Паламарчук, доктор технічних наук, професор
В. Ю. Кучерук, доктор технічних наук, професор
Л. І. Тимченко, доктор технічних наук, професор

Джеджула О. М., Кормановський, С. І.
Д-40 Курс нарисної геометрії. Навчальний посібник / О. М. Джеджула, С. І. Кормановський : ВНАУ, 2011. – 200 с.
В посібнику розглянуті основні теоретичні положення курсу, викла- дені методи побудови зображень геометричних образів на площині. Наве- дено приклади розв'язання позиційних і метричних задач. Посібник підго- товлено для студентів напрямів інженерії: "Машинобудування", "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва".
УДК 744:004
ББК 74.580.266.5

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Геометричні об’єкти	Символи, знаки
Точки у просторі Проекції точок: горизонтальні фронтальні профільні	*A, B, C, D, E, F, H,...* A_1, B_1, C_1, ... A_2, B_2, C_2,... A_3, B_3, C_3,...
Прямі і криві лінії Проекції прямих, кривих ліній: горизонтальні фронтальні профільні	*a, b, c, d, e, f, g, h,...* a_1, b_1, c_1,... a_2, b_2, c_2,... a_3, b_3, c_3,...
Прямі рівня: горизонтальна (горизонталь) фронтальна (фронталь) профільна	 h f p
Сліди площин: горизонтальний фронтальний профільний	 h^0 f^0 p^0
Площини, поверхні	[illegible], [illegible], [illegible], [illegible] ..., Δ, Φ, Γ, Λ, ...
Плоскі кути	$\angle$[illegible] , $\angle$[illegible] , $\angle$[illegible] , ...
Довжина відрізка	[***AB***]
Основні площини проекцій: горизонтальна площина проекцій фронтальна площина проекцій профільна площина проекцій додаткові площини проекцій система площин проекцій	 Π_1 Π_2 Π_3 Π_4 , Π_5 , Π_6,... Π_1/Π_4
Система координат Початок координат Осі проекцій: вісь абсцис вісь ординат вісь аплікат	$Oxyz$ O Ox, Oy, Oz
натуральна величина	н.в.

Найбільш поширені символи

$\|$ паралельність

$\perp$ перпендикулярність

$\cap$ перетин чи переріз

$\mathring{-}$ мимобіжість

$=$ результат графічної дії

$\equiv$ збігається, конкурує

$\in, \subset$ належить, є елементом

$\supset$ проходить, містить в собі

$\Rightarrow$ випливає, якщо…, то…

$\forall$ квантор спільності

ВСТУП

Нарисна геометрія, *Descriptive geometry* – розділ геометрії, в якому просторові фігури вивчають за допомогою зображень їхніх графічних моделей на площині креслення.

Нарисна геометрія відноситься до дисциплін, які складають інженерну підготовку спеціалістів з вищою технічною освітою.

Нарисна геометрія розглядає просторові форми та їх співвідношення за їх графічними моделями (кресленнями), які є основними документами при виготовленні, ремонті та контролі будь-якої деталі чи механізму.

Мета курсу нарисної геометрії дати студентам знання, уміння та навички відображення просторових форм на площині та уявлення форми об'єкта за її плоским зображенням.

Предметом нарисної геометрії є різноманітність геометричних образів та співвідношень між ними. Формоутворюючими елементами простору є геометричні образи – точка, пряма та площина, з яких утворюється більш складні фігури.

До задач нарисної геометрії слід віднести:

1. вивчення теоретичних основ побудови зображень точок, прямих, площин, поверхонь;
2. розв'язання задач на взаємну належність та взаємний перетин прямої і площини, двох площин, прямої і поверхні, площини і поверхні, двох поверхонь;
3. вивчення способів перетворення креслення;
4. формування просторового, абстрактного, логічного мислення студентів.

1 МЕТОД І ЕЛЕМЕНТИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ. ТОЧКА

Побудова зображень у нарисній геометрії основана на методі проекцій.

Проекція – це зображення предмета, “відкинуте” на площину за допомогою променів. Спроекціювати предмет на площину – це значить побудувати його зображення на площині.

Елементи проекціювання*: *S – центр проекції; ***A*** – точка в просторі, об’єкт проекціювання; Π_1 – площина проекції; A_1 – проекція точки ***A***; SA_1 – промінь (рис. 1.1).

Проекціювання може бути центральним і паралельним.

Якщо проекціювальні промені виходять з однієї точки, таке проекціювання називається ***центральним***. Суть центрального проекціювання полягає в тому, що із центра проекції (точки ***S***) через кожну точку ***A, B, C*** і т.д. будь-якого просторового об'єкта проходить промінь, що називається проекціювальним. Цей промінь, перетинаючи площину проекцій Π_1, дає проекцію даної точки. На площині проекцій кожній точці ***A, B, C*** і т.д. просторового об'єкта буде відповідати тільки одна точка A_1, B_1, C_1 і т.д. Сукупність усіх проекцій цих точок і дає проекцію даного об'єкта на площині креслення (рис. 1.2).

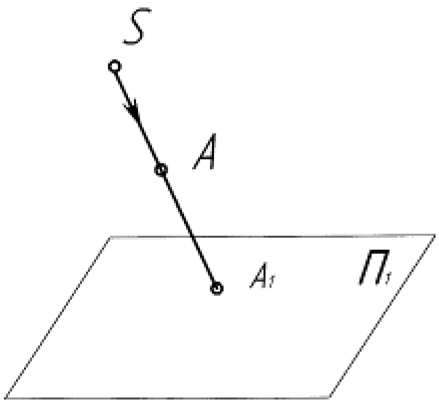


Рисунок 1.1

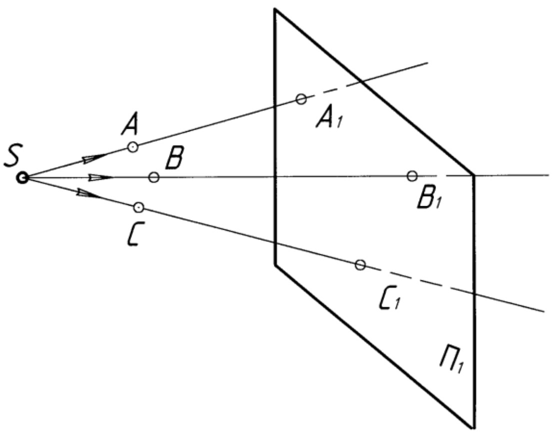


Рисунок 1.2

Якщо проекціювальні промені паралельні між собою, таке проекціювання називається ***паралельним*** (рис. 1.3).

Якщо проекціювальні промені не перпендикулярні до площини проекцій, проекціювання називається ***косокутним*** чи ***похилим*** (рис. 1.3). В тому випадку, коли проекціювальні промені перпендикулярні до площини проекцій – ***прямокутним*** або ***ортогональним*** (рис. 1.4).

Надалі буде використовуватися тільки паралельне, ортогональне проекціювання.

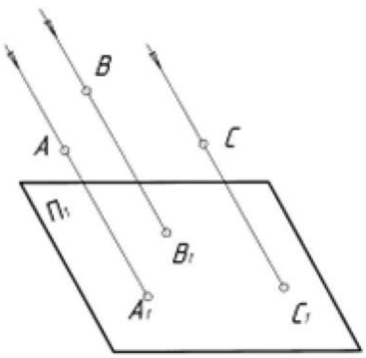


Рисунок 1.3

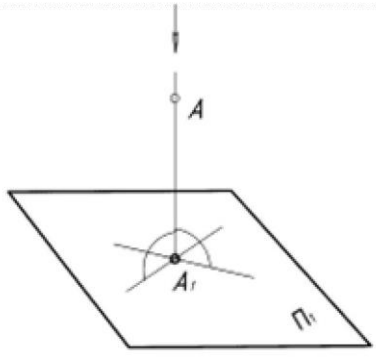


Рисунок 1.4

1.1 Епюр Монжа

Будь-яке креслення повинно бути оборотним. Пряма задача – будь-яку точку, що знаходиться в просторі, завжди можна спроекціювати на площину проекції й одержати проекцію цієї точки. Обернена задача – за проекцією точки необхідно визначити її положення в просторі. Якщо дана тільки одна площина проекції, то одній проекції точки в просторі відповідає нескінченна кількість точок. Виходить, одна проекція не визначає положення об'єкта в просторі. Отже, щоб зробити креслення оборотним, потрібні дві проекції точки.

На рисунку 1.5 зображено проекції точки ***A*** на двох площинах проекцій: $\boldsymbol{\Pi_1}$ – горизонтальна площина проекцій;
$\boldsymbol{\Pi_2}$ – фронтальна площина проекцій, причому $\boldsymbol{\Pi_1 \perp \Pi_2}$; промені, що проходять через точку ***A***, перпендикулярні до відповідних площин проекцій;
$\boldsymbol{A_1}$ – горизонтальна проекція точки ***A***;
$\boldsymbol{A_2}$ – фронтальна проекція точки ***A***;
Ox – вісь проекцій;

Якщо горизонтальну площину проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ повернути навколо осі ***Ox*** до суміщення в одну площину з площиною $\boldsymbol{\Pi_2}$, то таке розгорнуте зображення називають ***епюром*** (рис. 1.6).

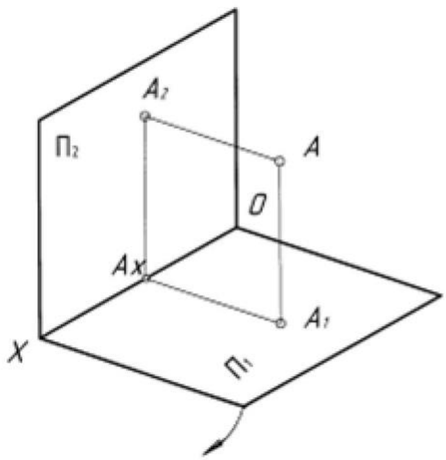


Рисунок 1.5

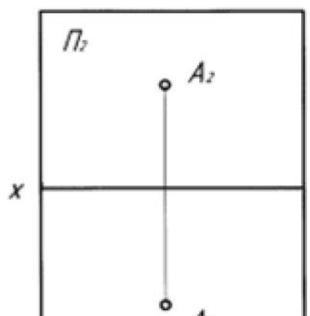


Рисунок 1.6

Метод ортогонального проекціювання на дві площини проекцій був запропонований французьким ученим Гаспаром Монжем, а тому метод названий ***методом Монжа***, а отриманий епюр – ***епюром Монжа***.

1.2 Проекціювання точки на три площини проекцій

Сукупність двох прямокутних проекцій на дві взаємно перпендикулярні площини дозволяє однозначно визначити форму і положення предмета у просторі. Однак в кресленні при побудові зображень часто використовують три площини проекцій.

Нехай задані три взаємно-перпендикулярні площини проекцій, які утворюють прямий тригранний кут (рис. 1.7): Π_1 – горизонтальна, Π_2 – фронтальна і Π_3 – профільна площини проекцій; лінії ***Ox, Oy, Oz*** взаємно- го перетину площин проекцій – осі проекцій, а точка ***O*** – початок коорди- нат. В просторі задана точка ***A*** і потрібно побудувати її проекції на пло- щини Π_1, Π_2 і Π_3. Для цього із точки ***A*** проводять проекціювальні промені AA_1, AA_2, AA_3, перпендикулярні до площин проекцій, до перетину з ними. В результаті перетину отримують A_1 – горизонтальну, A_2 – фронтальну і A_3 – профільну проекції точки ***A***.

Використовувати таку просторову модель на плоскому кресленні незручно. Тому виконується розгортка площин проекцій. Якщо площини проекцій Π_1 і Π_3 повернути відповідно навколо осей ***Ox*** і ***Oz*** в напрямку, вказаному стрілками, до суміщення з площиною проекцій Π_2, то отримаємо епюр, який містить у собі три проекції точки (рис. 1.8).

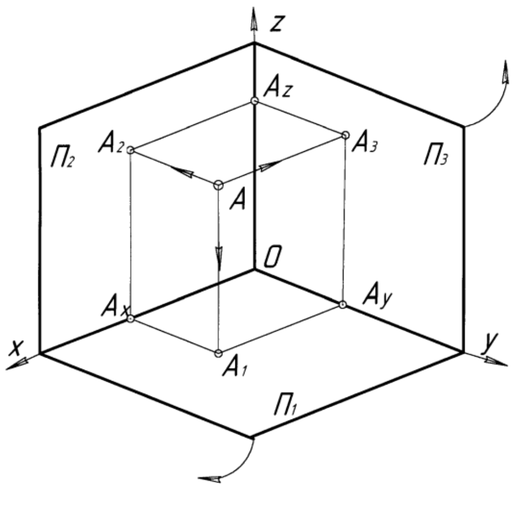


Рисунок 1.7

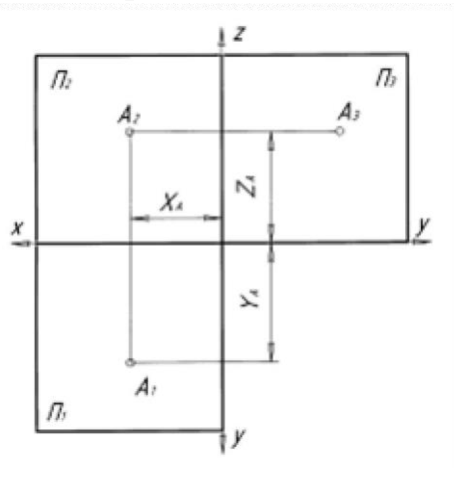


Рисунок 1.8

Часто положення точки в просторі задається її координатами. Координати точки у просторі записують $A(x,y,z)$. Відстань від точки ***A*** до площини проекції Π_1 визначається координатою ***z***, до площини проекції Π_2 – координатою ***y***, до площини проекції Π_3 – координатою ***x***. Для побу- дови горизонтальної проекції точки необхідно знати координати X_A і $У_A$.

Побудова фронтальної проекції точки ведеться за координатами $\boldsymbol{X_A}$ і $\boldsymbol{Z_A}$, профільної проекції точки – за координатами $\boldsymbol{У_A}$ і $\boldsymbol{Z_A}$ (рис. 1.8). Пряма $\boldsymbol{A_1A_2}$ називається ***вертикальною лінією зв'язку***, $\boldsymbol{A_2A_3}$ ***– горизонтальною лінією зв'язку***.

Якщо одна з координат точки дорівнює нулю, то точка належить одній з площини проекцій. Наприклад, точка ***B*** належить площині $\boldsymbol{П_2}$ (рис. 1.9); точка ***C*** належить площині $\boldsymbol{П_3}$ (рис. 1.10).

Якщо дві координати точки дорівнюють нулю, то точка належить осі проекцій. Наприклад, точка ***D*** знаходиться на осі ***Ox*** (рис. 1.11); точка ***E*** знаходиться на осі ***Oy*** (рис. 1.12).

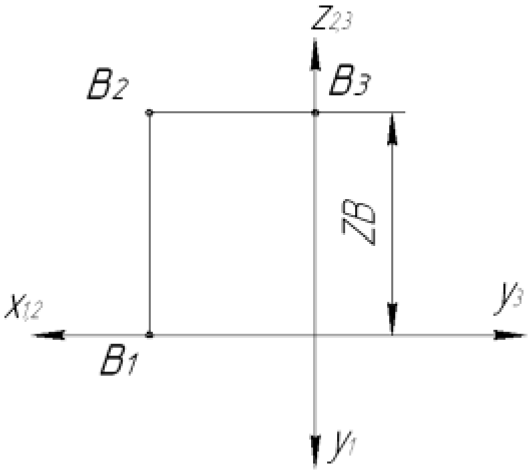


Рисунок 1.9

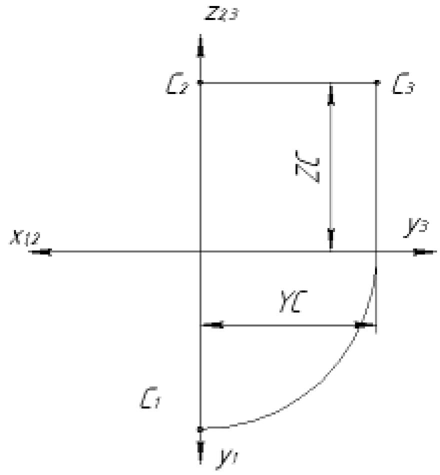


Рисунок 1.10

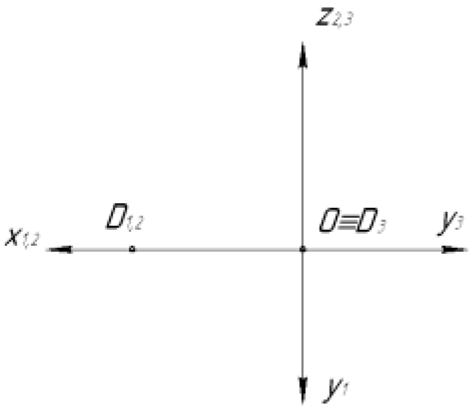


Рисунок 1.11

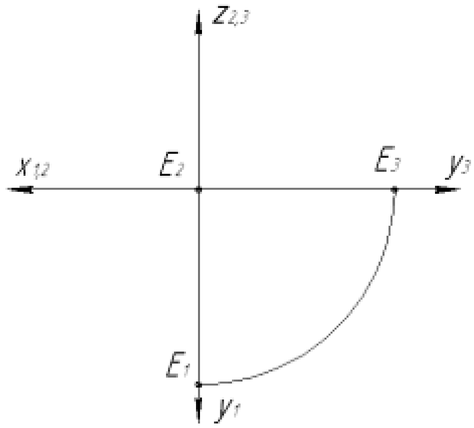


Рисунок 1.12

1.3. Точка в різних чвертях простору.

Площинами проекцій $\boldsymbol{П_1}$ і $\boldsymbol{П_2}$ простір поділяється на чотири чверті (або квадранти) (рис. 1.13).

Для отримання епюра площину проекцій $\boldsymbol{П_1}$ повертаємо відносно осі $\boldsymbol{Ox_{1,2}}$ за годинниковою стрілкою до суміщення із площиною $\boldsymbol{П_2}$. При цьому передня напівплощина $\boldsymbol{П_1}$ суміститься з нижньою напівплощиною $\boldsymbol{П_2}$, а задня – з верхньою. Розміщення осей показано на рис. 1.14.

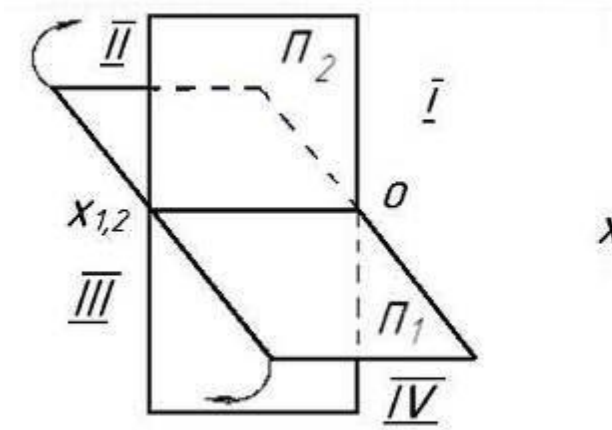


Рисунок 1.13

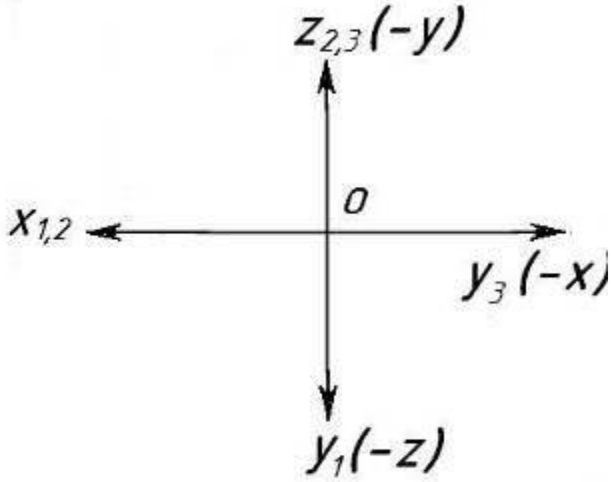
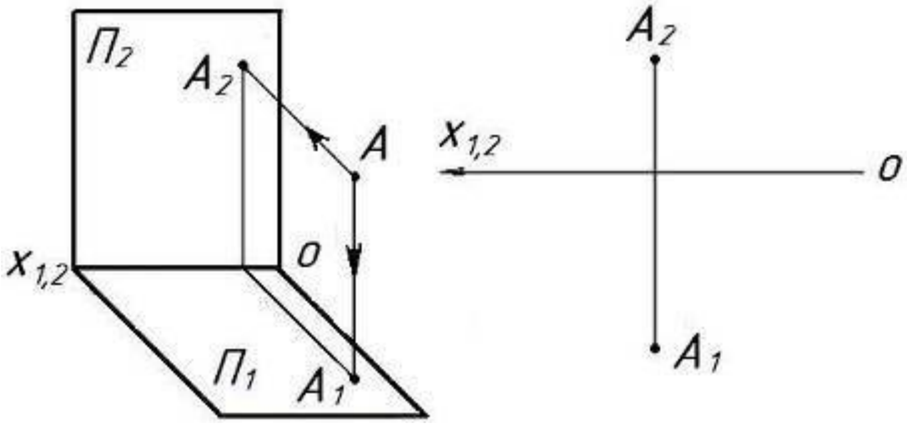


Рисунок 1.14

Якщо точка знаходиться у перший чверті, то на епюрі її фронтальна проекція розміститься над віссю $\boldsymbol{Ox_{1,2}}$, а горизонтальна – під нею (рис. 1.15).

Рисунок 1.15



Якщо точка знаходиться у другій чверті, то на епюрі її проекції розмістяться над віссю $\boldsymbol{Ox_{1,2}}$ (рис. 1.16).

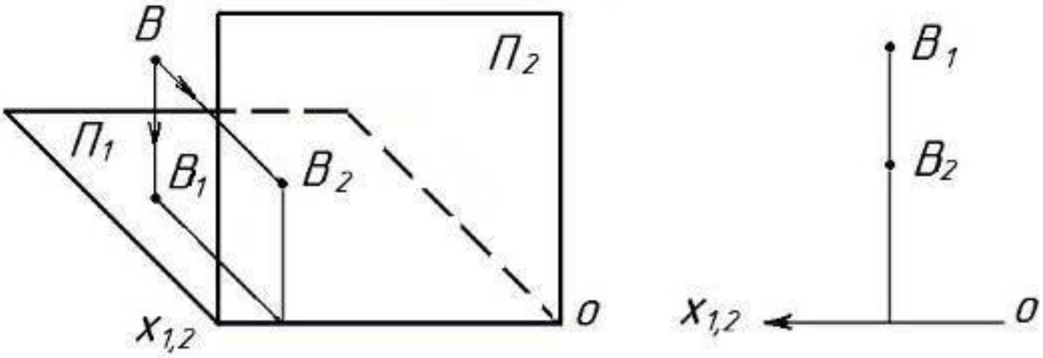


Рисунок 1.16

Якщо точка знаходиться у третій чверті, то на епюрі її горизонтальна проекція розміститься над віссю $Ox_{1,2}$, а фронтальна – під нею (рис. 1.17).

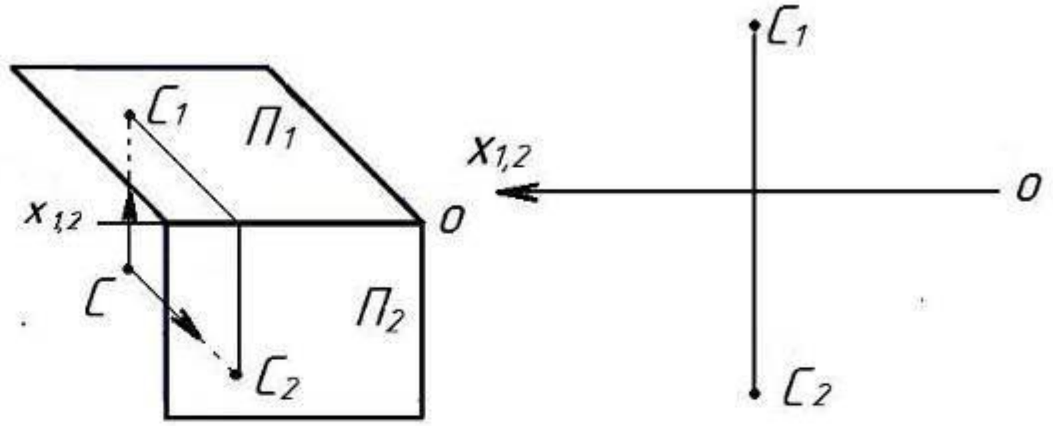


Рисунок 1.17

Якщо точка знаходиться у четвертій чверті, то горизонтальна і фронтальна проекція знаходяться під віссю $Ox_{1,2}$ (рис. 1.18).

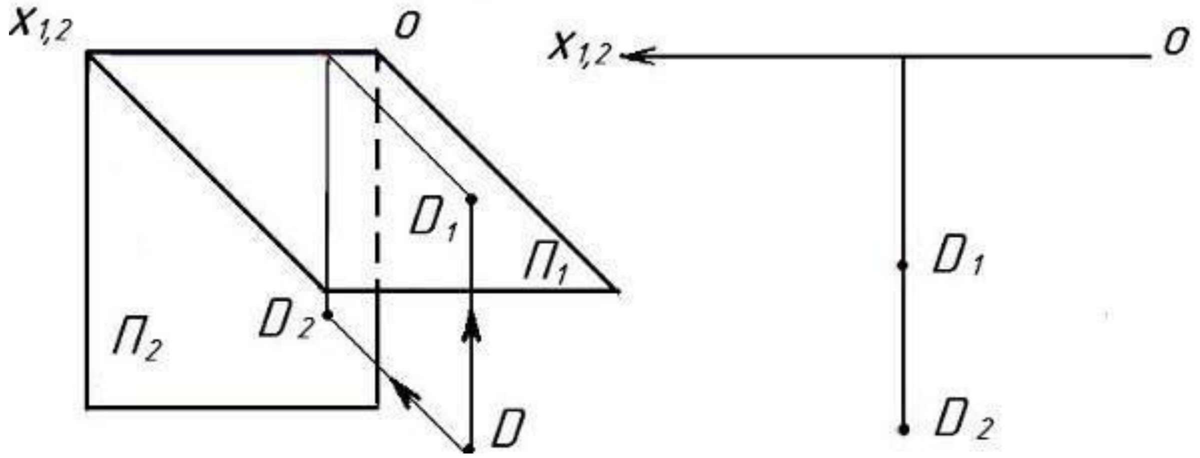


Рисунок 1.18

1.4 Конкуруючі точки

Точки, які розташовані на одному проекціювальному промені називаються конкуруючими. За допомогою конкуруючих точок визначається видимість геометричних фігур.

На рисунку 1.19 показано дві пари конкуруючих точок ***A*** і ***B***, ***C*** і ***D***. Точки ***A*** і ***B*** конкурують (збігаються) на Π_1, точка ***B*** невидима. Точки ***C*** і ***D*** конкурують на Π_2, точка ***D*** невидима. В дужках на епюрі зображають невидимі точки.

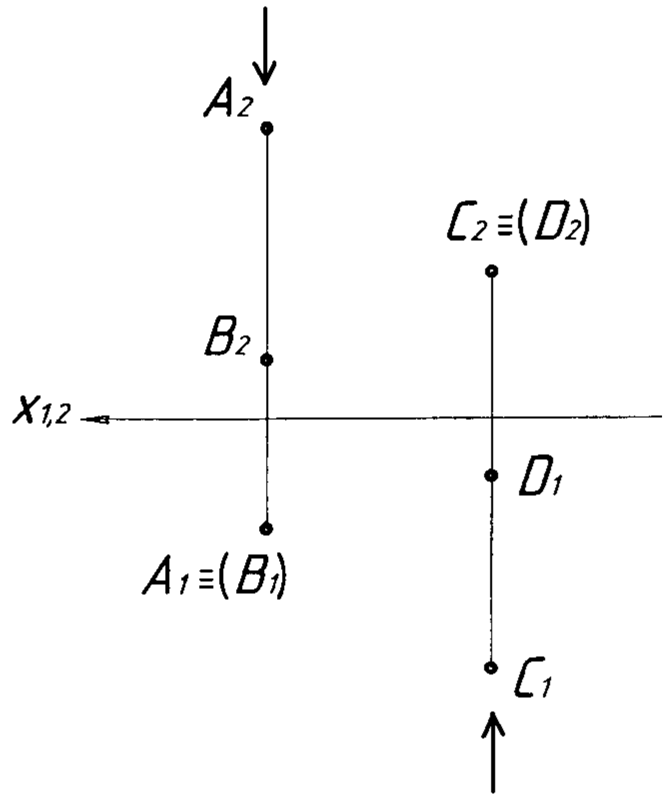


Рисунок 1.19

Запитання для самоконтролю

1. Який метод лежить в основі нарисної геометрії?
2. Як називають площини $П_1$, $П_2$, $П_3$?
3. Що потрібно зробити, щоб отримати проекцію точки?
4. Скільки необхідно знати проекцій точки, щоб визначити її положення у просторі?
5. Скільки потрібно задавати координат для знаходження точки у просторі?
6. Яким чином утворюється епюр точки?
7. Як записують координати точки у просторі?
8. Побудуйте точки за координатами: ***A*** (30;50;10); ***B*** (0;50;60); ***C***(60;0;0).
9. Як визначається видимість конкуруючих точок?

2 ПРЯМА

Оскільки положення прямої в просторі визначається її точками, то для побудови прямої лінії необхідно побудувати проекції двох точок, які належать даній прямій. Такими точками є крайні точки відрізка прямої.

Одна проекція прямої не визначає положення прямої в просторі. В площині $\boldsymbol{\alpha}$ можна провести кілька прямих. Їхні проекції можуть збігатися з проекцією прямої $\boldsymbol{AB}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ (рис. 2.1).

Дві проекції прямої повною мірою визначають її положення у просторі (рис. 2.2).

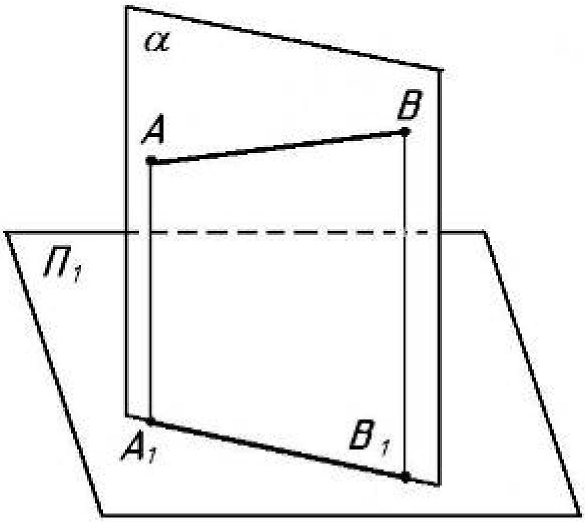


Рисунок 2.1

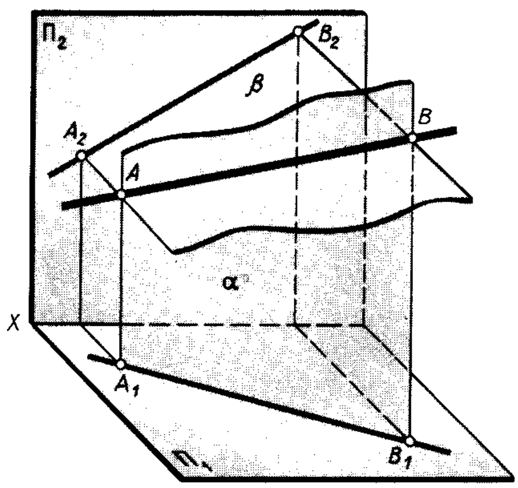
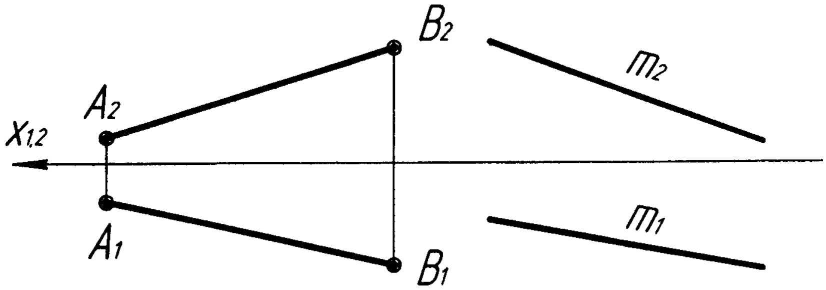


Рисунок 2.2

На рисунку 2.3, а пряма задана відрізком, який обмежений двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. На рисунку 2.3, б пряма $\boldsymbol{m}$ не обмежена точками.



а) б)

Рисунок 2.3

2.1 Пряма загального положення

Пряма, яка не паралельна (не перпендикулярна) ні одній з площин проекцій називається прямою ***загального положення***. На рисунку 2.4 відрізок ***AB*** займає загальне положення. На Π_1, Π_2 і Π_3 відрізок ***AB*** не паралельний (не перпендикулярний) до осей координат. Така пряма не має натуральної величини і реальних кутів нахилу на основних площинах проекцій (рис. 2.5). На рисунку 2.3, а,б показано приклад прямих загального положення в двох площинах проекцій.

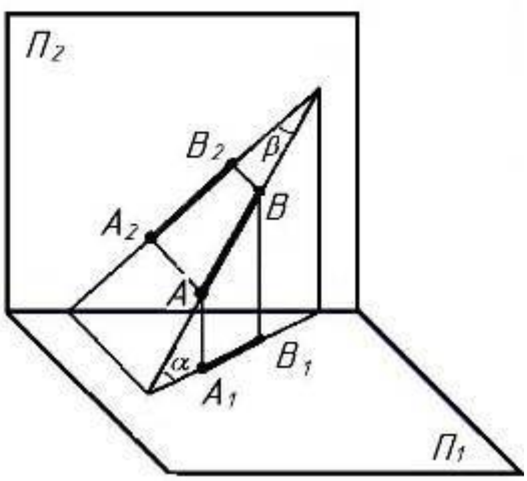


Рисунок 2.4

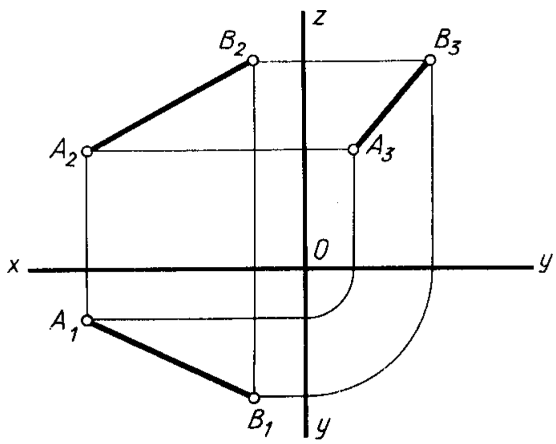


Рисунок 2.5

2.2 Прямі окремого положення

До прямих окремого положення відносяться прямі рівня і проекціювальні прямі.

2.2.1 Прямі рівня

Прямі рівня – це прямі, що паралельні одній з площин проекцій.

1. ***Горизонтальна пряма*** (горизонталь) паралельна Π_1, має реальні кути нахилу: ∠□ до Π_2 , ∠□ до Π_3 (рис. 2.6). Горизонтальна проекція h_1 горизонталі має натуральну величину (н.в.).
2. ***Фронтальна пряма*** (фронталь) паралельна Π_2, має реальні кути нахилу: ∠□ до Π_1, ∠□ до Π_3 (рис. 2.7). Фронтальна проекція f_2 фронталі має натуральну величину.
3. ***Профільна пряма*** паралельна Π_3 , має реальні кути нахилу: ∠□ до Π_1, ∠□ до Π_2 (рис. 2.8). Профільна проекція p_3 має натуральну величину.

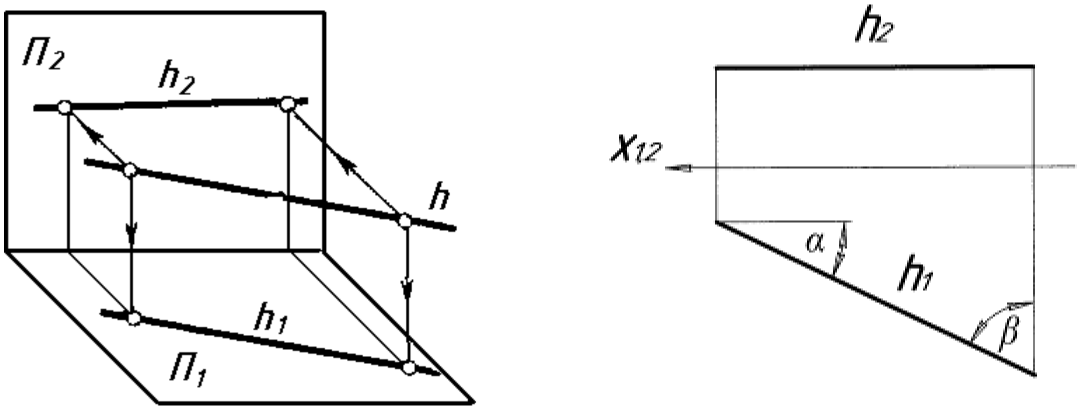


Рисунок 2.6

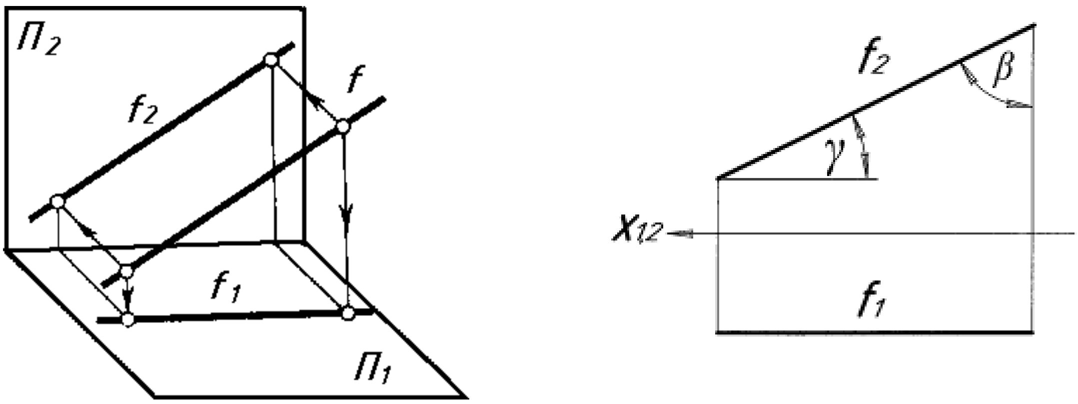


Рисунок 2.7

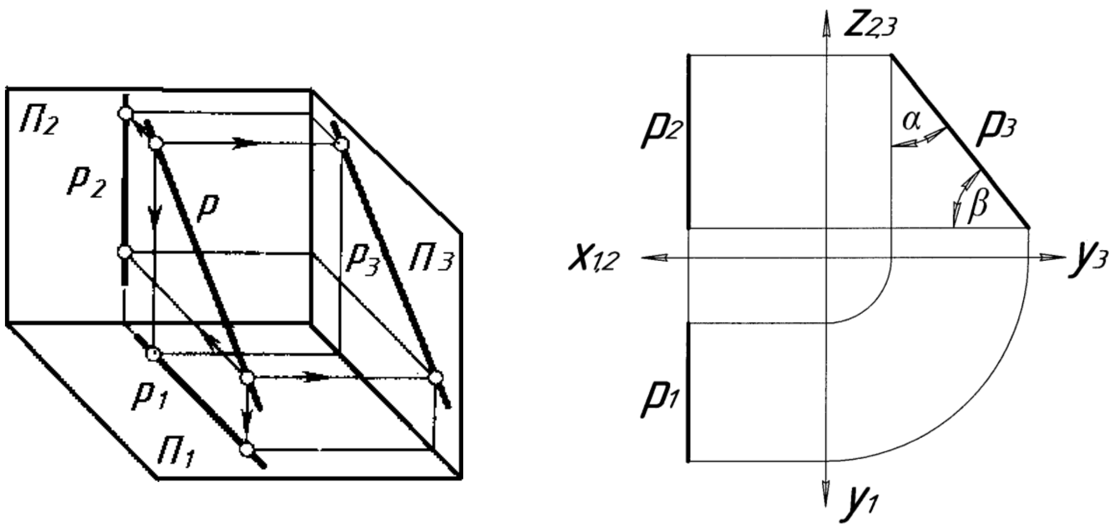


Рисунок 2.8

2.2.2 Проекціювальні прямі

Прямі, що перпендикулярні до однієї з площин проекцій, мають назву ***проекціювальні***.

1. ***Горизонтально-проекціювальна*** пряма перпендикулярна до Π_1 (рис.2.9). Така пряма відображається на Π_1 в точку. На Π_2 і Π_3 відрізок має натуральну величину [A_2 B_2] = [A_3 B_3] = н.в.
2. ***Фронтально-проекціювальна*** пряма перпендикулярна до Π_2 (рис.2.10). Така пряма відображається на Π_2 в точку. На Π_1 і Π_3 відрі- зок має натуральну величину [A_1 B_1] = [A_3 B_3] = н.в.
3. ***Профільно-проекціювальна*** пряма перпендикулярна до Π_3. (рис. 2.11). Така пряма відображається на Π_3 в точку. На Π_1 і Π_2 відрі- зок має натуральну величину [A_1 B_1] = [A_2 B_2] = н.в.

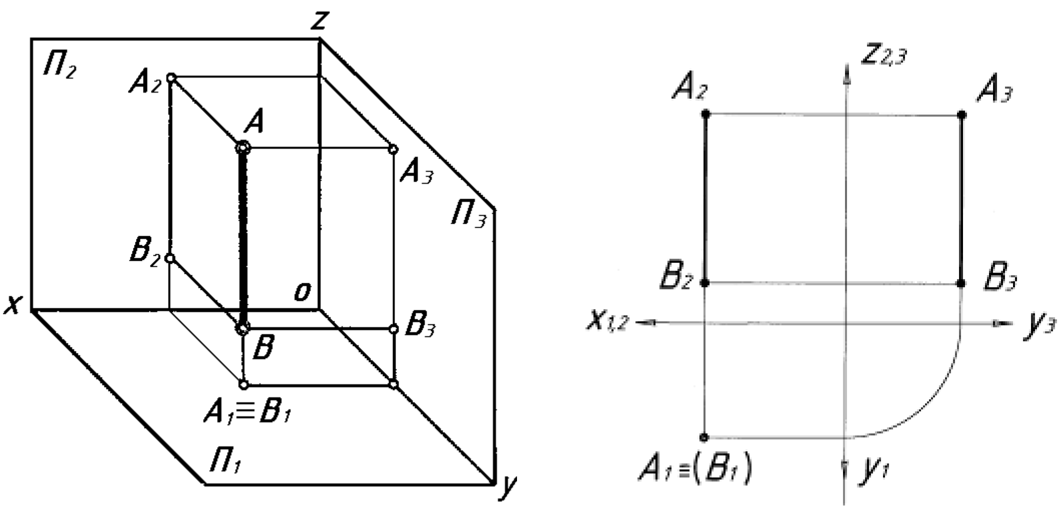


Рисунок 2.9

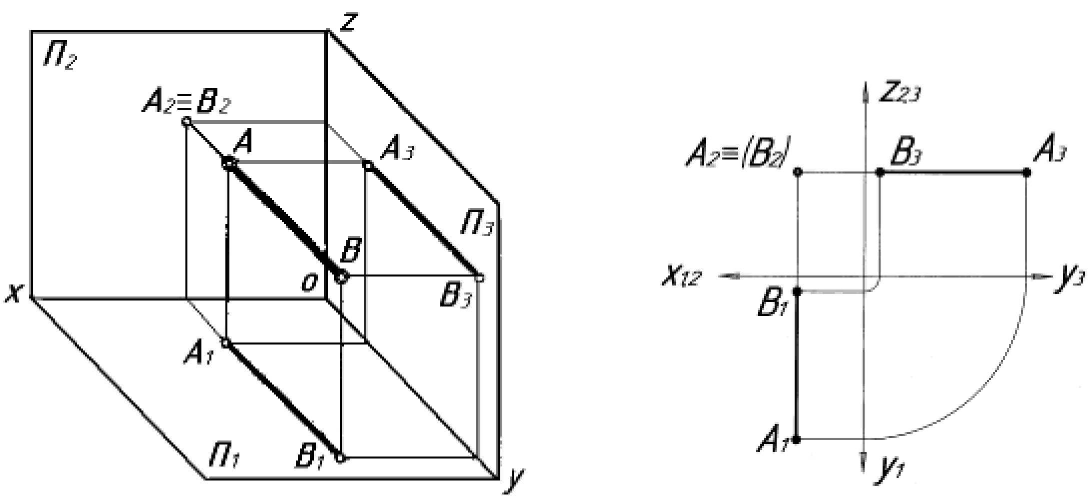


Рисунок 2.10

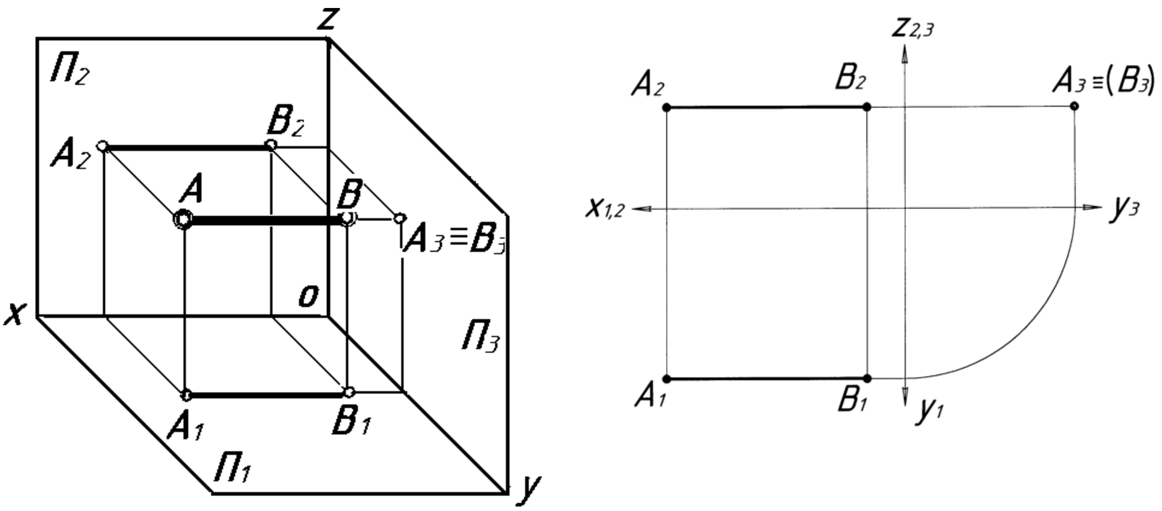
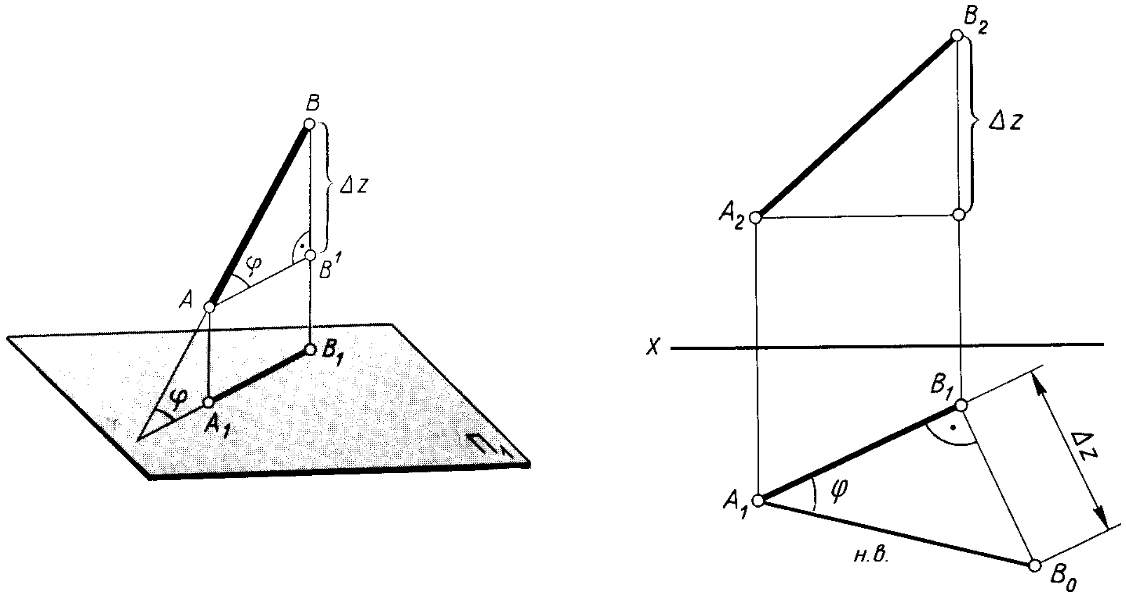


Рисунок 2.11

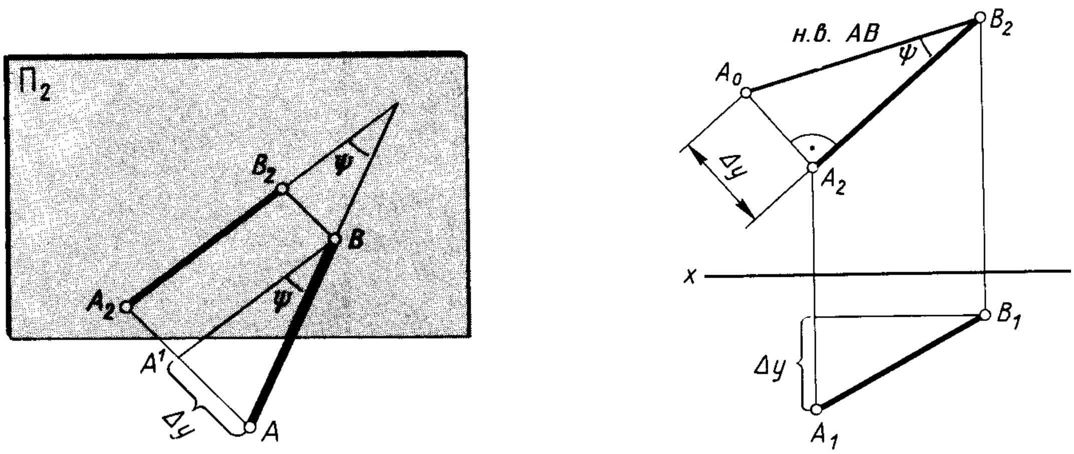
2.3 Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення методом прямокутного трикутника

Для визначення натуральної величини прямої загального положення треба виконати деякі побудови. На рисунку 2.12 зображено відрізок ***AB*** загального положення. Якщо з точки ***A*** провести відрізок ***AB***□, паралельний його горизонтальній проекції $\boldsymbol{A_1B_1}$, то утвориться прямокутний трикутник ***ABB***□ (рис. 2.12, а), гіпотенузою якого є відрізок ***AB***. Розглянувши цей трикутник, можна зробити висновок, що натуральна величина відрізка прямої загального положення дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, один катет якого – одна з проекцій відрізка, а другий – різниця координат по осі ***Z*** між точками ***A*** і ***B***: □$\boldsymbol{Z} = \left|\boldsymbol{Z_A} - \boldsymbol{Z_B}\right|$. Відповідну побудову виконано на рисунку 2.13, б, де одночасно визначається і кут нахилу □ відрізка ***AB*** до горизонтальної площини проекцій. Щоб визначити кут нахилу до фронтальної площини проекцій, таку ж побудову треба виконати на фронтальній площині проекцій (рис. 2.12, а,б). Такий метод визначення величини відрізка прямої називають ***методом прямокутного трикутника***.



а) б)

Рисунок 2.12

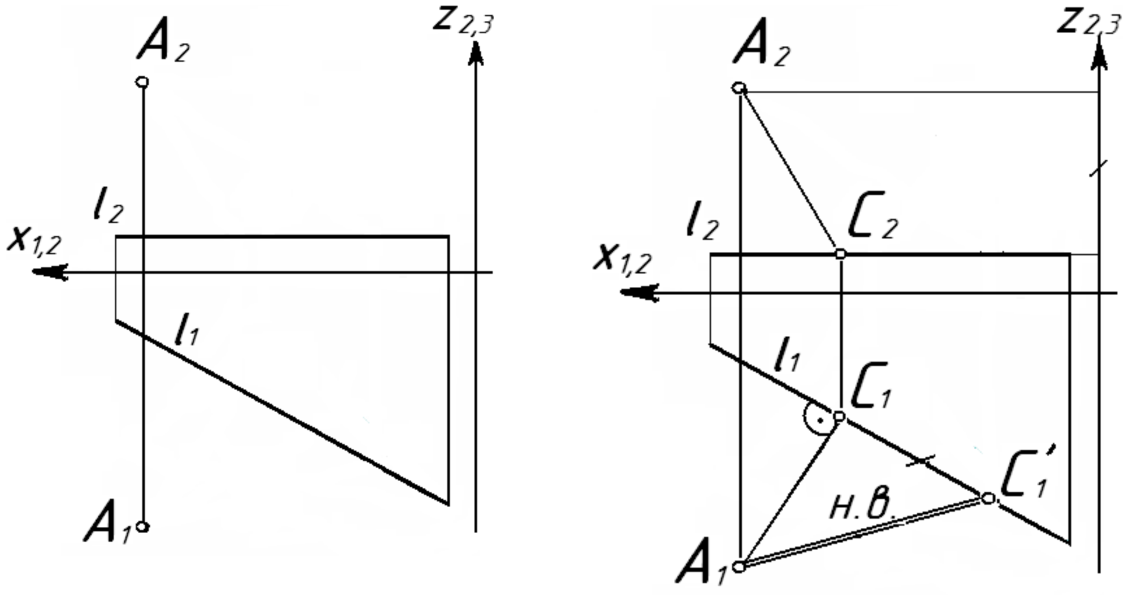


а) б)

Рисунок 2.13

Задача. Визначити відстань від точки A до прямої l, що паралельна до площини $П_1$ (рис. 2.14, а).

Розв'язування. Для визначення відстані від точки A до прямої l необхідно з точки A до прямої l провести перпендикуляр AC. Оскільки l паралельна до $П_1$, то прямий кут між l і AC проекціюється на $П_1$ в натура- льну величину. Тому проводять $A_1 C_1 \perp l_1$, потім знаходять A_2C_2 і методом прямокутного трикутника визначають натуральну величину AC. Натуральною величиною відстані від точки A до прямої l буде відрізок AC (рис. 2.14, б).



а) б)

Рисунок 2.14

2.4 Сліди прямої

Слідом прямої називається точка перетину прямої з площиною проекцій. На рисунку 2.15 пряма ***m*** задана відрізком ***AB***, у якої точка ***H*** – горизонтальний слід, точка ***F*** – фронтальний слід.

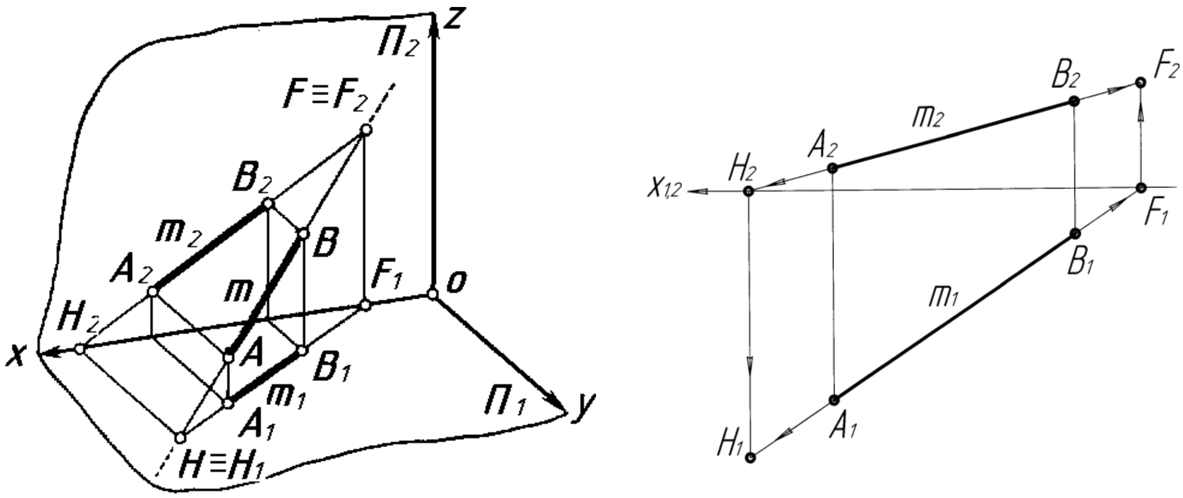


Рисунок 2.15

Для побудови горизонтального сліду прямої на епюрі необхідно продовжити фронтальну проекцію відрізка A_2B_2 до перетину з віссю ***Ox*** в точці H_2 (H_2 – фронтальна проекція горизонтального сліду) і з отриманої точки провести вертикальну лінію зв'язку на продовження горизонтальної проекції відрізка A_1B_1. Там, де лінія зв'язку перетинає проекцію прямої m_1

визначається точка $\boldsymbol{H_1}$ ($\boldsymbol{H_1}$ – горизонтальна проекція горизонтального сліду). Аналогічно виконується побудова фронтального сліду прямої $\boldsymbol{m}$. Горизонтальну проекцію відрізка $\boldsymbol{A_1B_1}$ продовжують до перетину з віссю $\boldsymbol{Ox}$ в точці $\boldsymbol{F_1}$ ($\boldsymbol{F_1}$ – горизонтальна проекція фронтального сліду) і з отри- маної точки проводять вертикальну лінію зв'язку на продовження фрон- тальної проекції відрізка $\boldsymbol{A_2B_2}$. Там, де лінія зв'язку перетинає фронтальну проекцію прямої $\boldsymbol{m_2}$ визначається точка $\boldsymbol{F_2}$ – фронтальна проекція фрон- тального сліду.

2.5. Точка і пряма

Розглянемо положення точки і прямої для з'ясування їх позиційних і деяких метричних властивостей.

Точка може лежати на прямій або знаходитися поза прямою. Якщо точка належить прямій, то проекції цієї точки знаходяться на однойменних проекціях прямої.

Для того, щоб встановити належність точки до будь якої прямої, іноді достатньо встановити належність двох проекцій точки відповідним проекціям прямої.

На рисунку 2.16 точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}$ належать прямій, оскільки їх обидві проекції належать відповідним проекціям прямої $\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{A_1} \in \boldsymbol{l_1};\ \ \boldsymbol{A_2} \in \boldsymbol{l_2}\ \}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}\boldsymbol{C_1}$$
$$\in \boldsymbol{l_1};\ \ \boldsymbol{C_2} \in \boldsymbol{l_2}\ \}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{l}\boldsymbol{B_1} \in$$
$$\boldsymbol{l_1};\ \boldsymbol{B_2} \in \boldsymbol{l_2}\ \} \Rightarrow \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{l}$$

Точки $\boldsymbol{D}$ і $\boldsymbol{K}$ не лежать на заданій прямій. У точки $\boldsymbol{D}$ горизонтальна проекція не співпадає з горизонтальною проекцією прямої $\boldsymbol{l}$, у просторі точка $\boldsymbol{D}$ розташована перед прямою $\boldsymbol{l}$. У точки $\boldsymbol{K}$ горизонтальна проекція розташована вище осі $\boldsymbol{Ox}$, фронтальна – нижче осі $\boldsymbol{Ox}$, тобто точка $\boldsymbol{K}$ знаходиться у третій чверті.

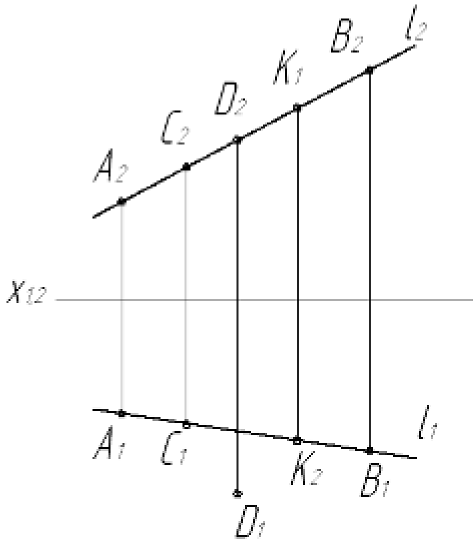


Рисунок 2.16

2.6 Взаємне положення прямих

Дві прямі у просторі можуть займати взаємне положення:

1. ***Дві прямі паралельні.*** Якщо дві прямі паралельні, то паралельні також їх однойменні проекції. Паралельність двох профільних прямих визначають за їхніми профільними проекціями (рис. 2.17).

$\left.\boldsymbol{m_1 \| n_1,\ m_2 \| n_2,\ m_3 \| n_3}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{m \| n}$

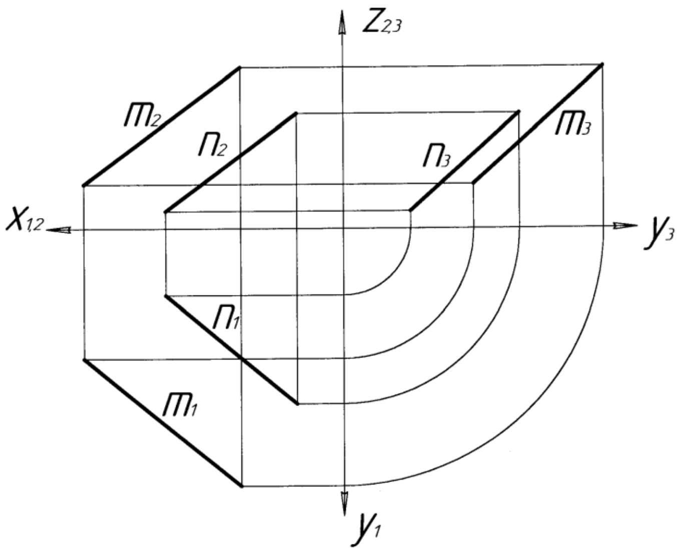


Рисунок 2.17

2. ***Дві прямі перетинаються.*** Якщо прямі перетинаються, то перетинаються також їхні однойменні проекції. Проекції точки перетину знаходяться на одній лінії зв'язку (рис. 2.18).

$\left.\boldsymbol{m_1 \text{□} n_1 = P_1,\ \ m_2 \text{□} n_2 = P_2,\ \ m_3 \text{□} n_3 = P_3}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{m \text{□} n = P}$

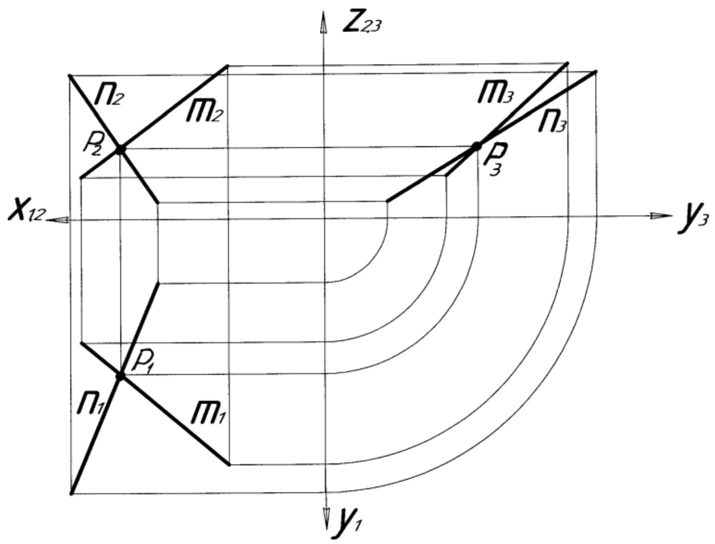


Рисунок 2.18

3. ***Дві прямі мимобіжні.*** Якщо дві прямі не паралельні і не перетинаються між собою, то вони називаються мимобіжними. Ознакою мимобіжних прямих є наявність пар конкуруючих точок. На рисунку 2.19 точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ конкурують на $\boldsymbol{\Pi_1}$: $\boldsymbol{A}$□$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{B}$□$\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{A_1} \equiv (\boldsymbol{B_1})$. Точки $\boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{D}$ конкурують на $\boldsymbol{\Pi_2}$: $\boldsymbol{C}$□$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{D}$□$\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{C_2} \equiv (\boldsymbol{D_2})$.

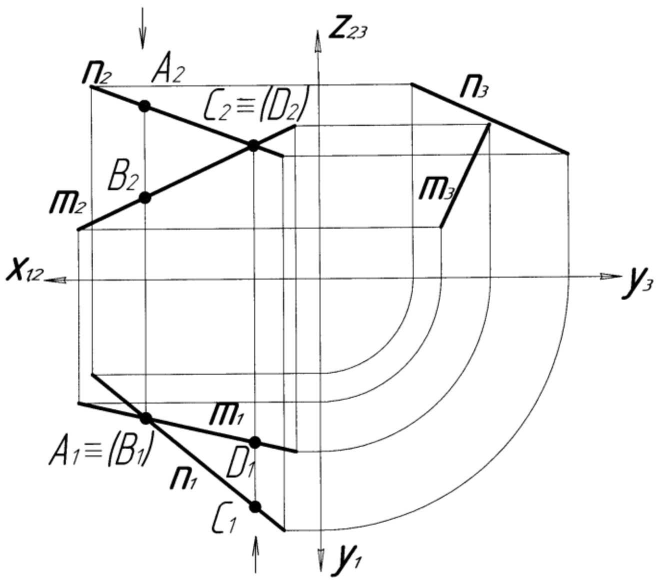


Рисунок 2.19

2.7 Властивості проекцій прямого кута

Якщо одна сторона прямого кута паралельна до площини проекцій, то прямий кут проекціюється на цю площину проекцій у натуральну величину. На рисунку 2.20 два відрізка $\boldsymbol{AB}$ і $\boldsymbol{BC}$ перетинаються. Відрізок $\boldsymbol{A_1B_1}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ має натуральну величину, тому що $\boldsymbol{AB} \,||\, \boldsymbol{\Pi_1}$, а кут між проекціями $\boldsymbol{A_1B_1}$ і $\boldsymbol{B_1\ C_1}$ складає 90°. З цього виходить, що $\boldsymbol{AB} \perp \boldsymbol{BC}$.

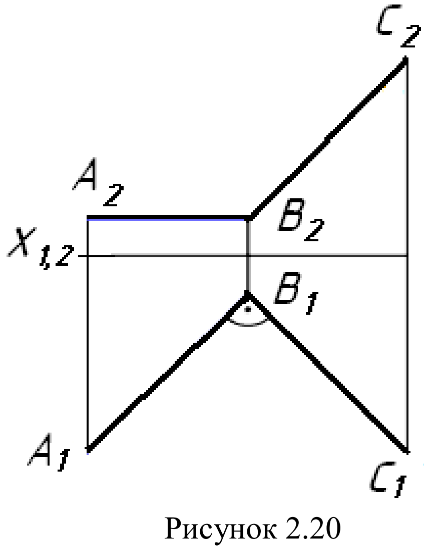


Рисунок 2.20

Запитання для самоконтролю

1. Які положення прямих Вам відомі?
2. Як розташована пряма загального положення відносно площин проекцій?
3. Які прямі окремого положення Ви знаєте?
4. За якими ознаками визначають прямі рівня?
5. За якими ознаками визначають проекціювальні прямі?
6. Як можна визначити натуральну величину прямої загального положення в системі площин проекцій $П_1/П_2$?
7. Як можна визначити кут нахилу прямої загального положення до площин проекцій $П_1$ і $П_2$?
8. Що називається слідом прямої?
9. Яке взаємне положення можуть займати дві прямі у просторі?
10. За якими ознаками визначаються паралельні прямі?
11. За якими ознаками визначаються прямі, що перетинаються?
12. За якими ознаками визначаються мимобіжні прямі?

3 ПЛОЩИНА

3.1 Способи задання площин

Площину можна задати шістьома способами:

1. Трьома точками.
2. Точкою і прямою.
3. Двома паралельними прямими.
4. Двома прямими, що перетинаються.
5. Відсіком будь-якої форми (трикутник, багатокутник, плоска замкнена крива).
6. Слідами.

Приклади задання площини різними способами наведені на рисунках 3.3 … 3.8.

Слідом площини називається лінія перетину площини з площиною проекції. На рисунку 3.1 площина задана слідами □ (***h***□ ∩ ***f***□), де ***h***□– горизонтальний слід, ***f***□– фронтальний слід.

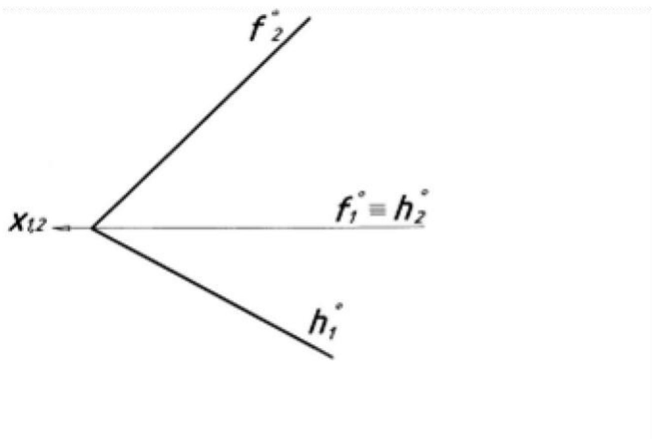


Рисунок 3.1

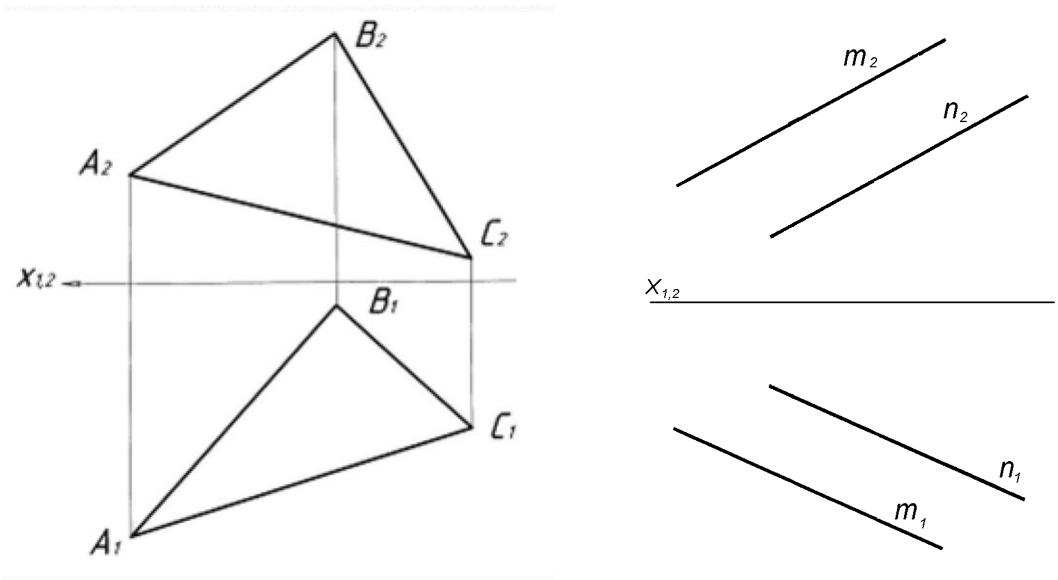
Позначення проекцій слідів:

h_1^0 – горизонтальна проекція горизонтального сліду
h_2^0 – фронтальна проекція горизонтального сліду
f_1^0 – горизонтальна проекція фронтального сліду
f_2^0 – фронтальна проекція фронтального сліду

Площини в просторі можуть займати різне положення відносно площин проекцій. Площини бувають ***загального положення*** і ***окремого положення***. До площин окремого положення відносяться ***площини рівня*** і ***проекціювальні площини***.

3.2 Площини загального положення

Площиною загального положення називається площина, яка не паралельна (не перпендикулярна) ні одній з площин проекцій. На рисунку 3.1 наведено приклад площини загального положення, яка задана слідами. На рисунку 3.2, а площина загального положення задана трикутником, на рисунку 3.2, б площина задана паралельними прямими.



а) б)

Рисунок 3.2

3.3 Площини окремого положення

До площин окремого положення відносяться площини рівня і проекціювальні площини.

3.3.1 Площини рівня

Площини рівня – це площини, які паралельні одній з площин проекцій.

1. Площина паралельна $\boldsymbol{\Pi_1}$ називається ***горизонтальною***. Горизонтальна площина в системі площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_2}$ відображається на $\boldsymbol{\Pi_2}$ в пряму лінію, паралельну осі ***Ox***. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ має натуральну величину (рис.3.3).
2. Площина паралельна $\boldsymbol{\Pi_2}$ називається ***фронтальною***. Фронтальна площина в системі площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_2}$ відображається на $\boldsymbol{\Pi_1}$ в пряму лінію, паралельну осі ***Ox***. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ має натуральну величину (рис.3.4).
3. Площина паралельна $\boldsymbol{\Pi_3}$ називається ***профільною***. Профільна площина відображається на $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$ в прямі лінії, які паралельні осям ***Oy*** і ***Oz***. На $\boldsymbol{\Pi_3}$ має натуральну величину (рис. 3.5).

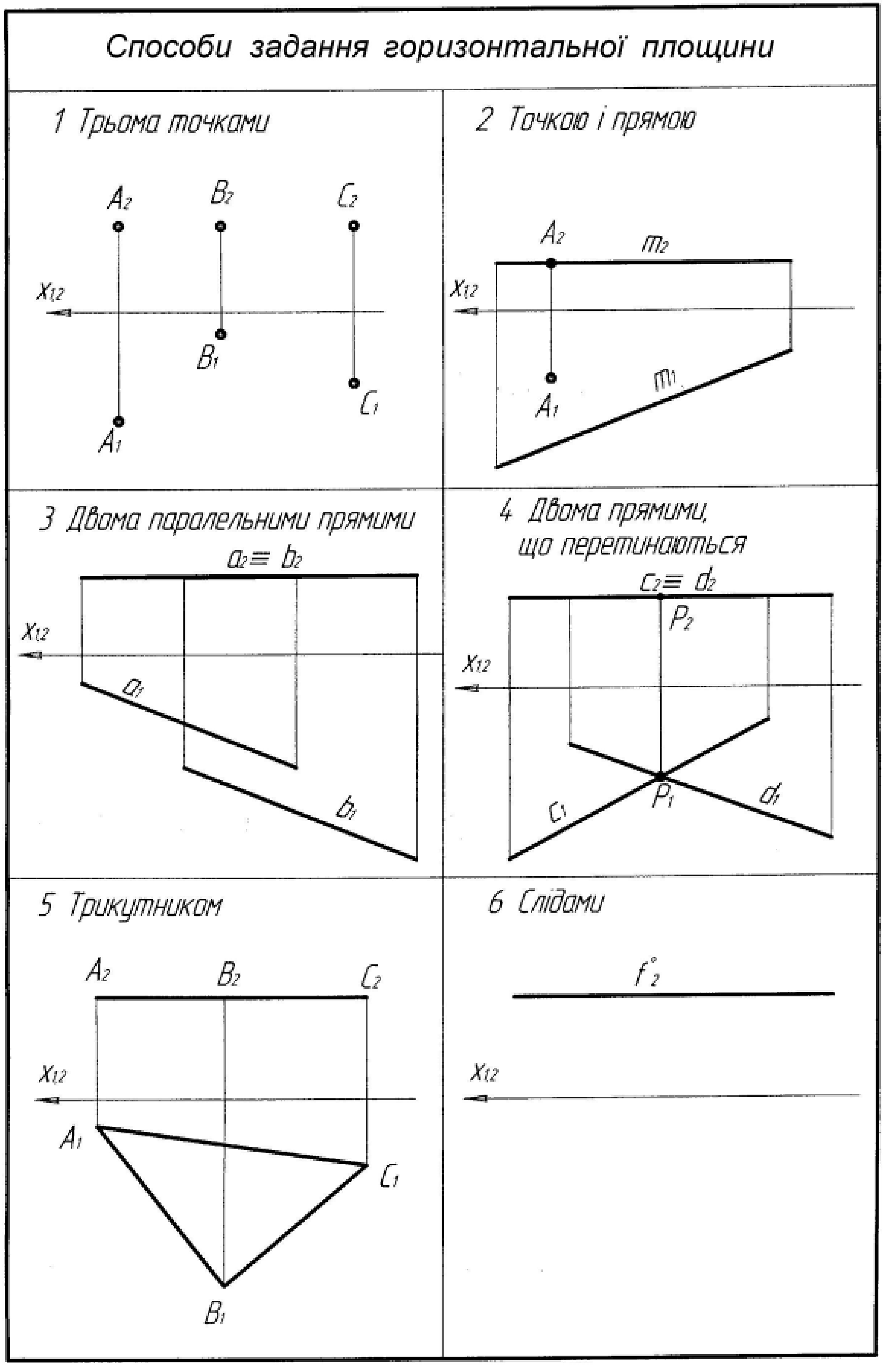

Способи задання горизонтальної площини
1 Трьома точками
A2
B2
C2
X1,2
B1
C1
A1
2 Точкою і прямою
A2
m2
X1,2
m1
A1
3 Двома паралельними прямими
a2≡ b2
X1,2
a1
b1
4 Двома прямими,
що перетинаються
c2≡ d2
P2
X1,2
c1
P1
d1
5 Трикутником
A2
B2
C2
X1,2
A1
C1
B1
6 Слідами
f°2
X1,2

Рисунок 3.3

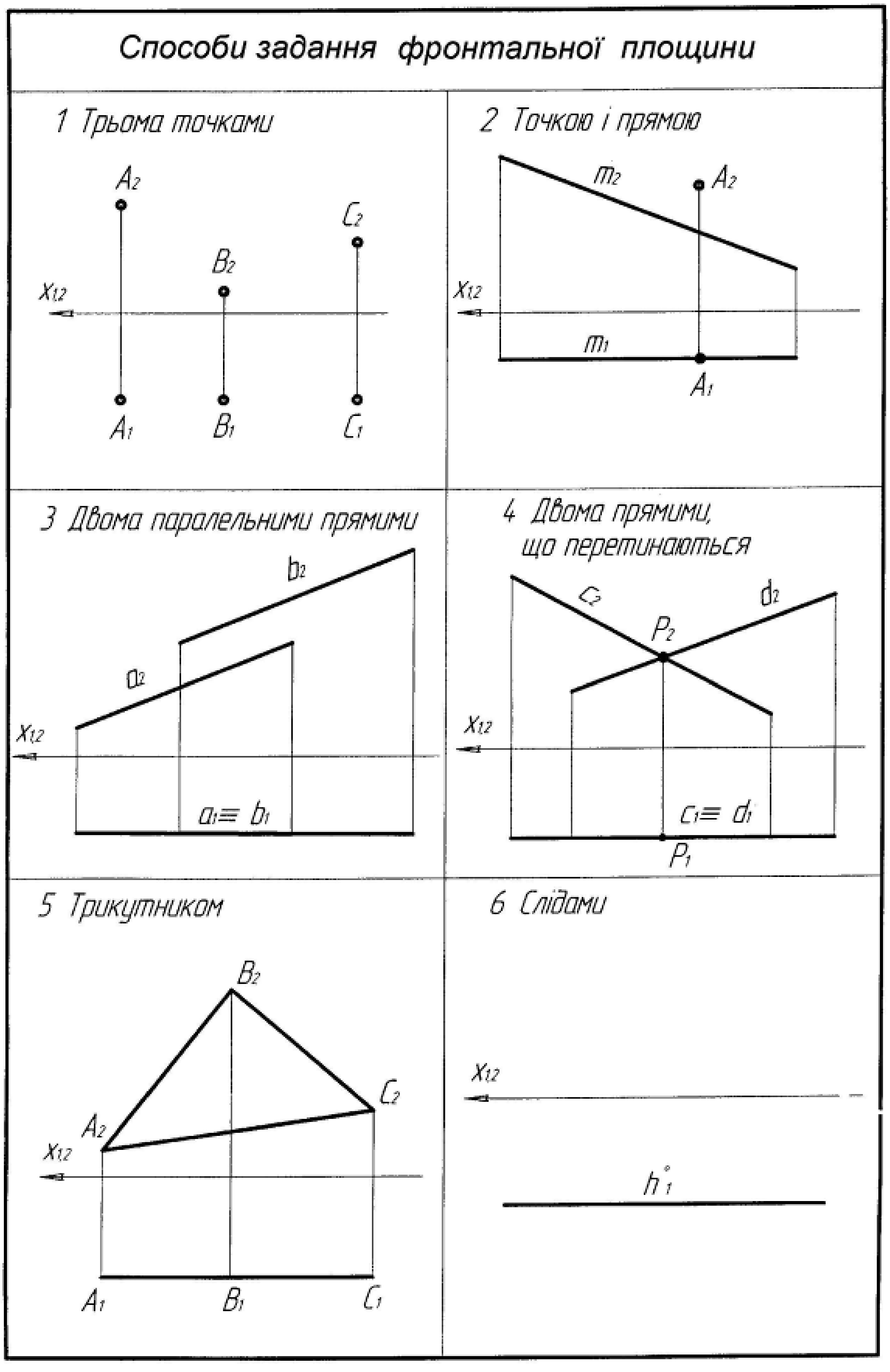

Способи задання фронтальної площини
1 Трьома точками
A_2
C_2
B_2
$X_{1,2}$
A_1
B_1
C_1
2 Точкою і прямою
m_2
A_2
$X_{1,2}$
m_1
A_1
3 Двома паралельними прямими
b_2
a_2
$X_{1,2}$
$a_1 \equiv b_1$
4 Двома прямими, що перетинаються
c_2
d_2
P_2
$X_{1,2}$
$c_1 \equiv d_1$
P_1
5 Трикутником
B_2
C_2
A_2
$X_{1,2}$
A_1
B_1
C_1
6 Слідами
$X_{1,2}$
h°_1

Рисунок 3.4

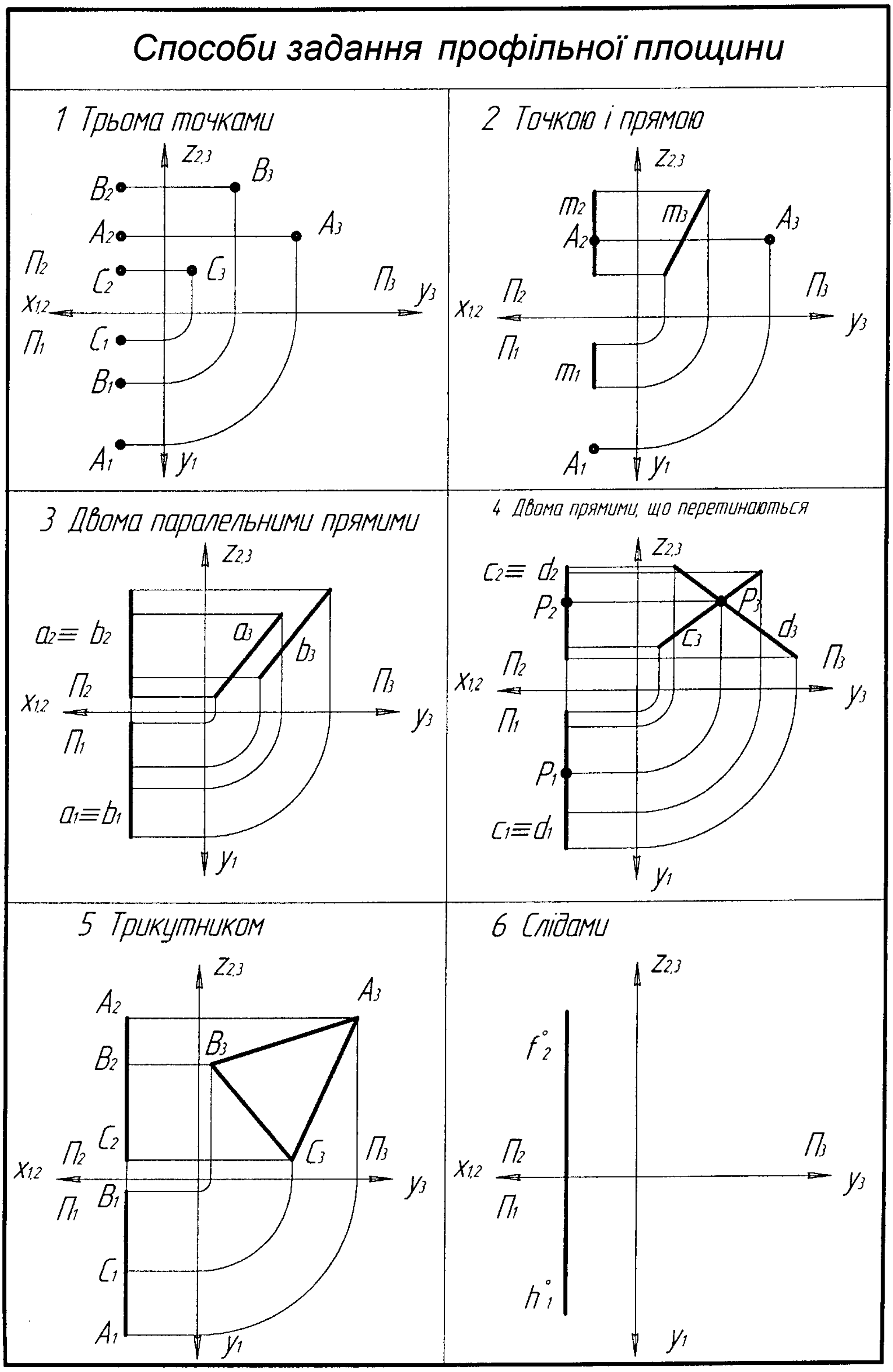

Способи задання профільної площини
1 Трьома точками
2 Точкою і прямою
3 Двома паралельними прямими
4 Двома прямими, що перетинаються
5 Трикутником
6 Слідами
Z2,3
X1,2
y1
y3
П1
П2
П3
A1 A2 A3
B1 B2 B3
C1 C2 C3
m1 m2 m3
a2≡ b2
a1≡b1
a3
b3
c2≡ d2
c1≡d1
c3
d3
P1 P2 P3
f°2
h°1

Рисунок 3.5

3.2.2 Проекціювальні площини

Проекціювальні – називаються площини, що перпендикулярні до однієї з площин проекцій.

1. Площина перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_1}$ називається ***горизонтально-проекціювальною***. Така площина відображається на $\boldsymbol{\Pi_1}$ в пряму лінію і має реальні кути нахилу до $\boldsymbol{\Pi_2}$ і $\boldsymbol{\Pi_3}$ (рис. 3.6).

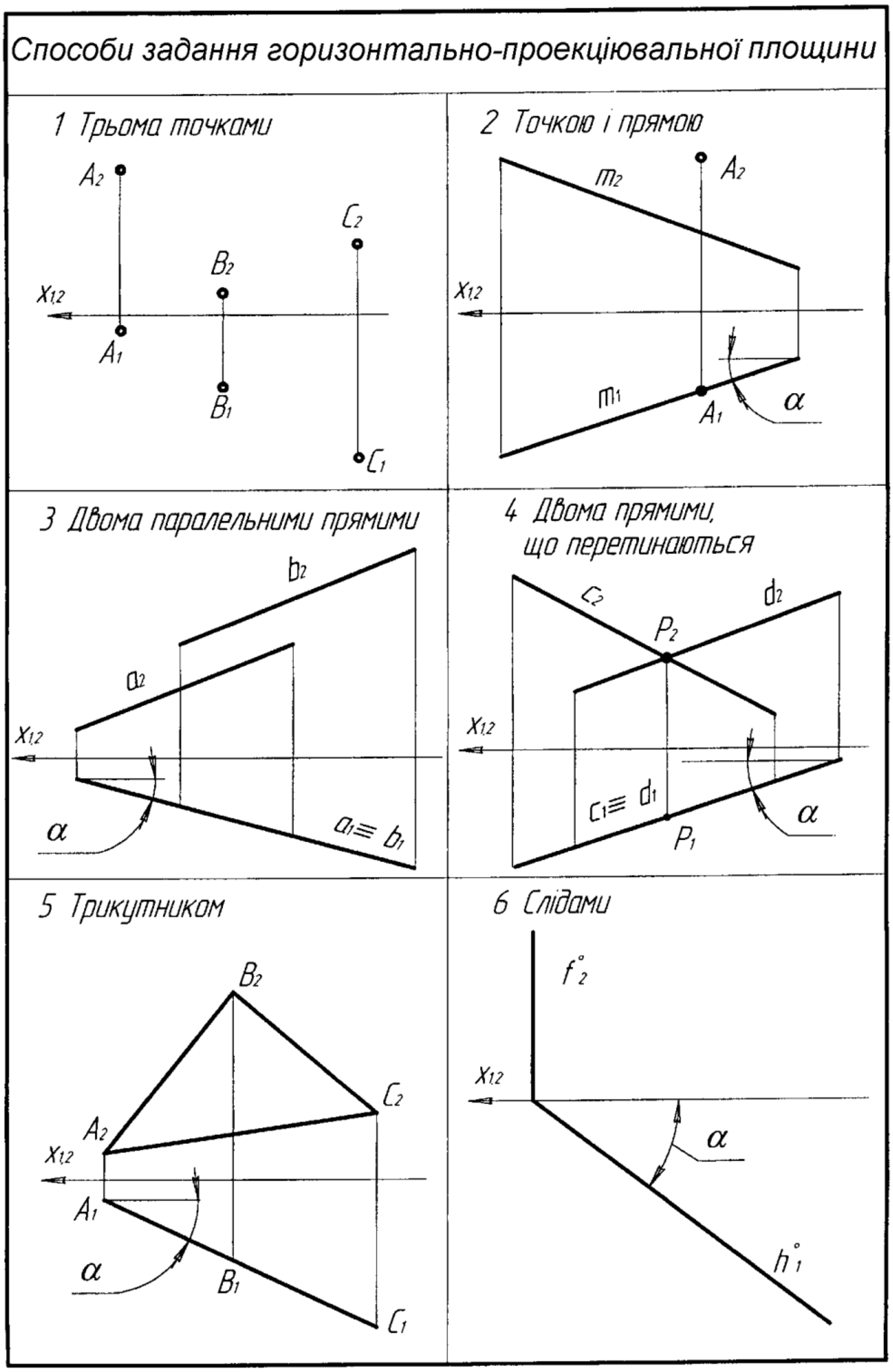


Рисунок 3.6

2. Площина перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_2}$ називається ***фронтально-проекціювальною***. Така площина відображається на $\boldsymbol{\Pi_2}$ в пряму лінію і має реальні кути нахилу до $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_3}$ (рис. 3.7).

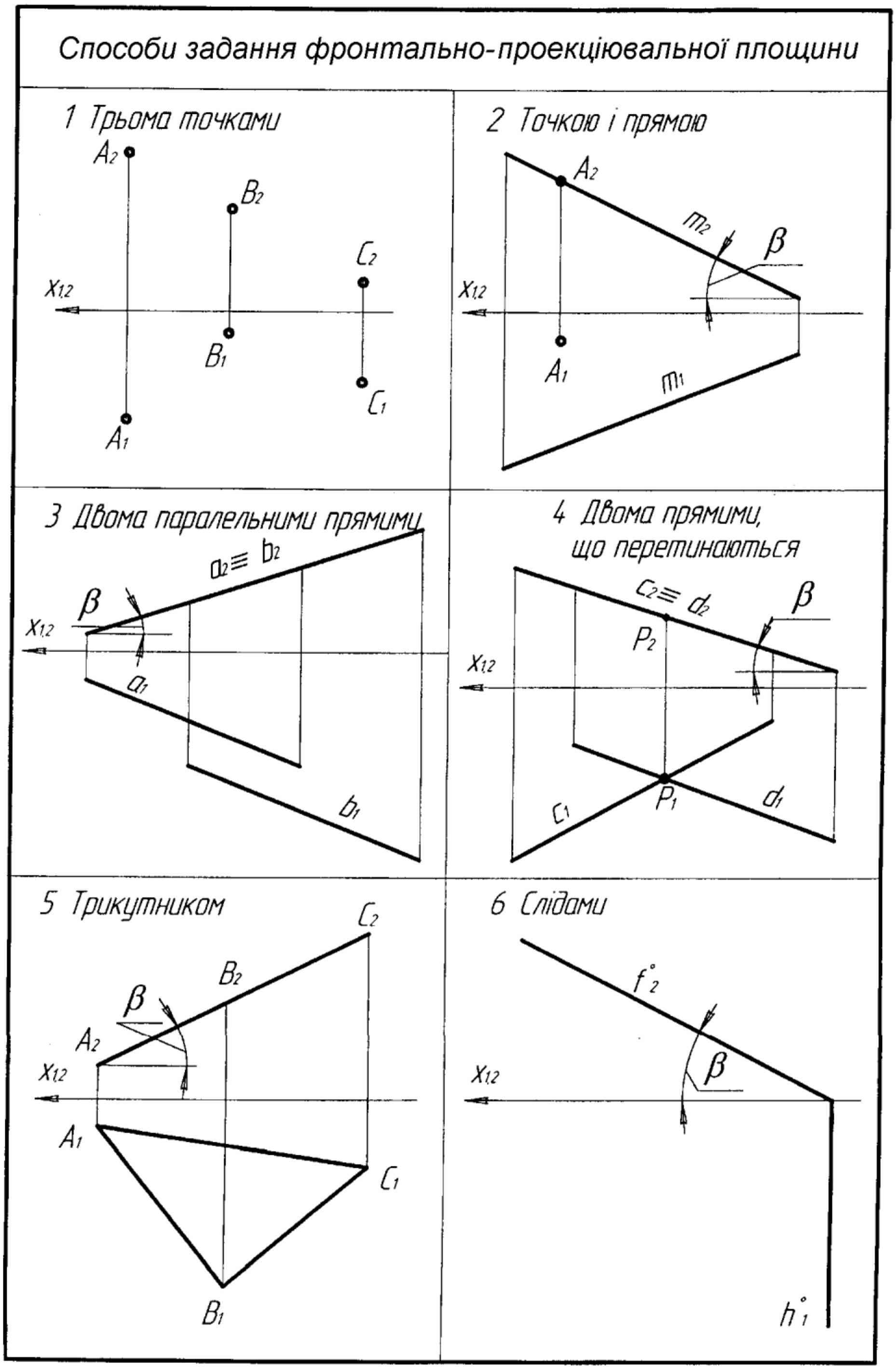


Рисунок 3.7

3. Площина перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_3}$ називається ***профільно-проекціювальною***. Така площина відображається на $\boldsymbol{\Pi_3}$ в пряму лінію і має реальні кути нахилу до $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$ (рис. 3.8).

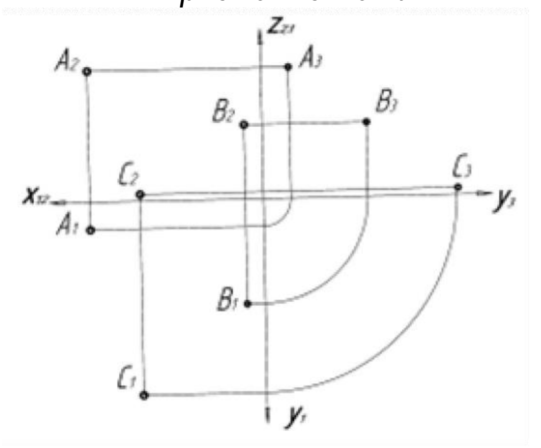
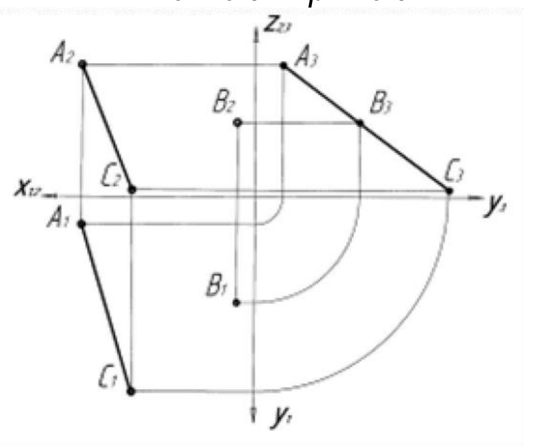
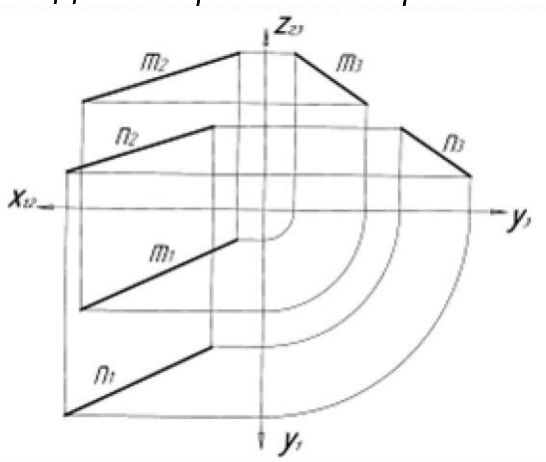
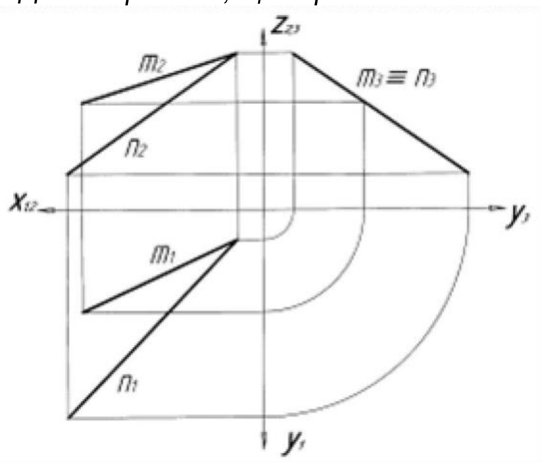
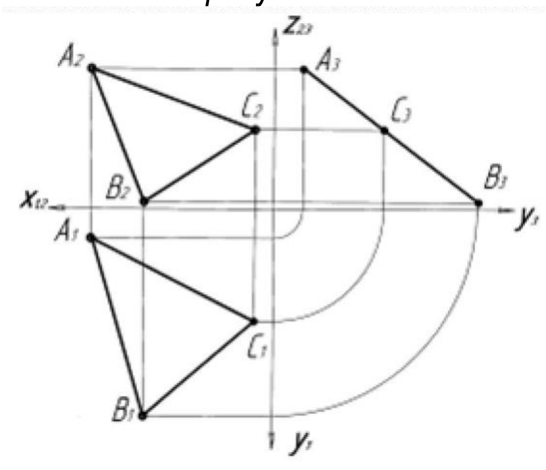
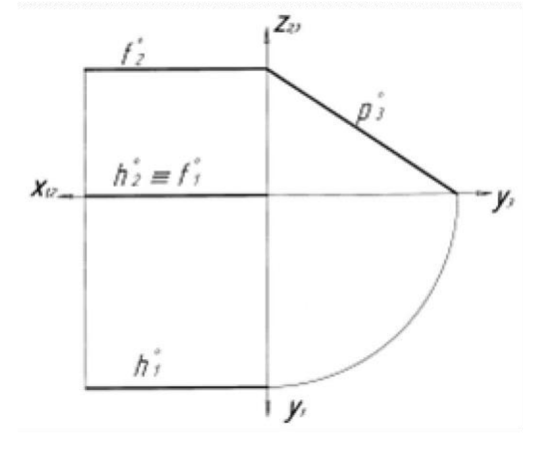
Способи задання профільно-проекціювальної площини	
1 Трьома точками	*2 Точкою і прямою*
	
3 Двома паралельними прямими	*4 Двома прямими, що перетинаються*
	
5 Трикутником	*6 Слідами*
	

Рисунок 3.8

Запитання для самоконтролю

1. Яка площина називається площиною загального положення?
2. Які площини називаються площинами рівня?
3. Які площини називаються проекціювальними?
4. Як називаються лінії перетину площини з площинами проекцій?

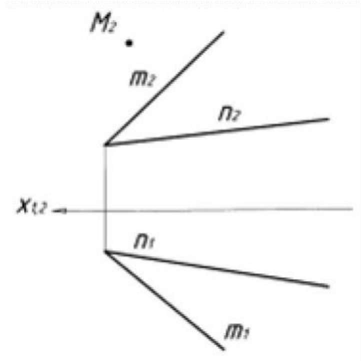
4 ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

У нарисній геометрії розглядають дві групи задач: позиційні та метричні. Групу позиційних задач складають задачі: 1) на взаємний порядок геометричних фігур; 2) на взаємну належність геометричних фігур; 3) на взаємний перетин геометричних фігур.

4.1 Точка і пряма, що належать площині

Точка належить площині, якщо вона знаходиться на прямій, яка належить даній площині. Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що належать площині.

Задача. Побудувати горизонтальну проекцію точки $\boldsymbol{M}$, що належить площині □ ($\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{n}$). Графічну умову показано на рисунку 4.1.



$\boldsymbol{M}$ ($\boldsymbol{M_2}$) $\subset$ □ ($\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{n}$)
$\boldsymbol{M_1}$ - ?

Рисунок 4.1

Алгоритм розв'язання задачі

1. Через точку $\boldsymbol{M}$ ($\boldsymbol{M_2}$) проводять пряму $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l_2}$), що належить заданій площині □ ($\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{n}$) (рис. 4.2).
2. Визначають точки перетину прямої $\boldsymbol{l}$ з прямими $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$ і будують горизонтальну проекцію прямої $\boldsymbol{l}$ (рис. 4.3). Будують горизонтальну проекцію точки $\boldsymbol{M_1}$ на $\boldsymbol{l_1}$.

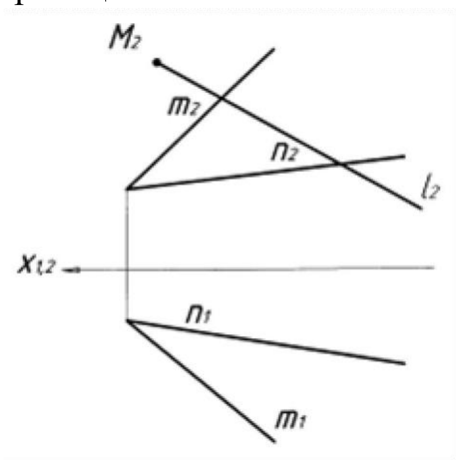


Рисунок 4.2

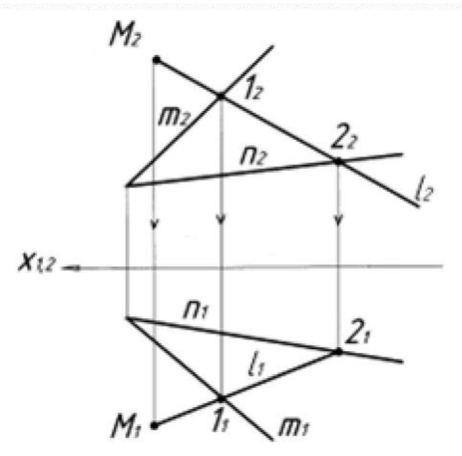


Рисунок 4.3

4.2 Прямі рівня площини загального положення

Горизонталь площини – це пряма, яка належить площині і паралельна горизонтальній площині проекції $\boldsymbol{\Pi_1}$. Побудову горизонталі наведено на рисунках 4.4…4.7. В площині загального положення □, яка задана трикутником □ (Δ***ABC***) (рис. 4.4), проводять фронтальну проекцію горизонталі $\boldsymbol{h_2}$ (рис. 4.5). На фронтальній площині проекції $\boldsymbol{\Pi_2}$ проекція горизонталі $\boldsymbol{h_2}$ завжди паралельна осі $\boldsymbol{x_{1.2}}$. Визначають точку перетину горизонталі зі стороною ***BC***: $\boldsymbol{h_2} \cap \boldsymbol{B_2}\ \boldsymbol{C_2} = \boldsymbol{1_2}$ (рис. 4.6). Точку ***1*** проекціюють на $\boldsymbol{\Pi_1}$, з'єднують з вершиною трикутника $\boldsymbol{A_1}$ і отримують горизонтальну проекцію горизонталі $\boldsymbol{h_1}$ (рис. 4.7).

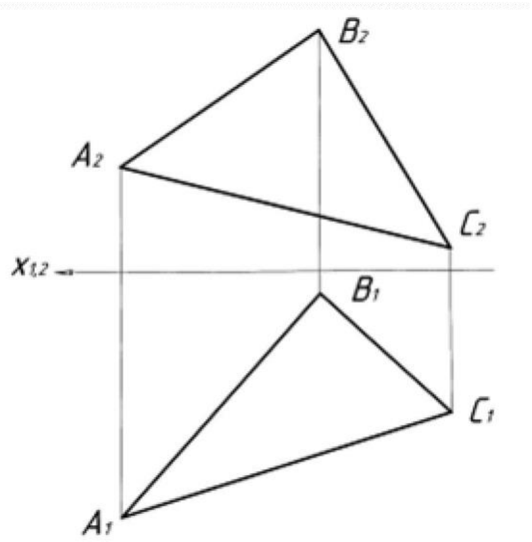


Рисунок 4.4

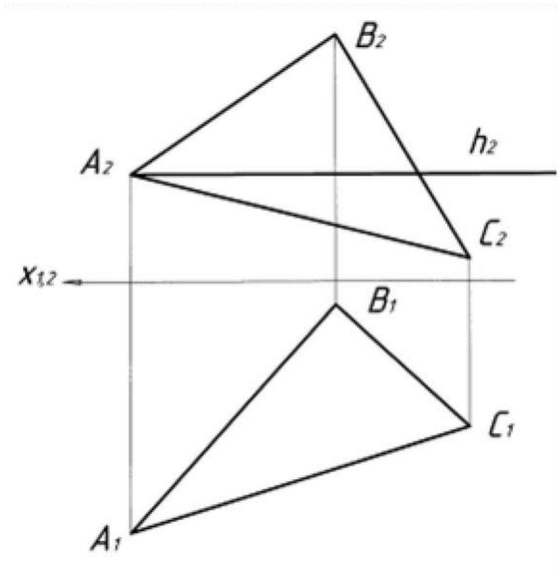


Рисунок 4.5

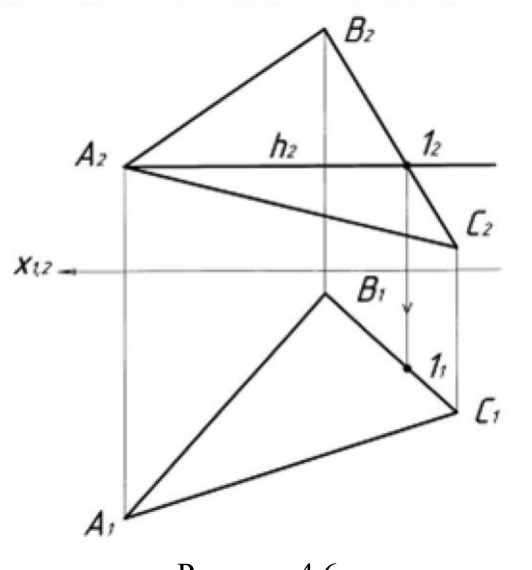


Рисунок 4.6

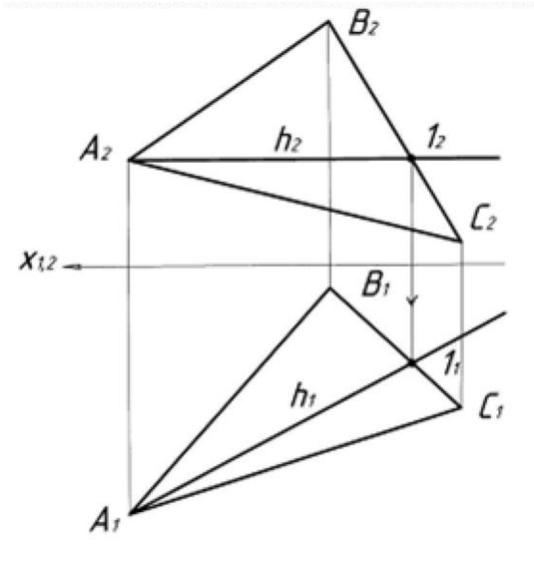


Рисунок 4.7

Фронталь площини – це пряма, яка належить площині і паралельна фронтальній площині проекції $\boldsymbol{\Pi_2}$. Приклад побудови фронталі площини наведено на рисунку 4.8. Побудову фронталі починають на горизонтальній площині проекції. Горизонтальну проекцію фронталі $\boldsymbol{f_1}$ проводять в площині □ (m││n) паралельно осі $x_{1,2}$. Визначають точки перетину f_1 з горизонтальними проекціями прямих m_1 і n_1: $f_1 \cap m_1 = 1_1$, $f_1 \cap n_1 = 2_1$. Точки ***1*** і ***2*** проекціюють на $П_2$, з'єднують і отримають фронтальну проекцію фрон- талі площини f_2.

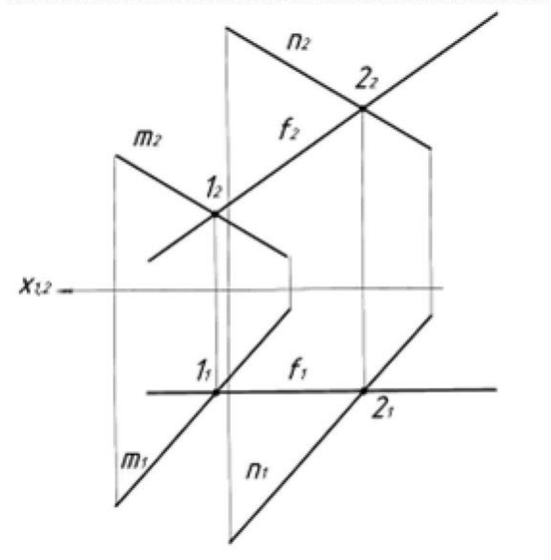


Рисунок 4.8

Задача. Побудувати горизонтальну проекцію трикутника ***ABC***, що належить площині □ (рис. 4.9).

Розв'язування. Горизонтальну проекцію трикутника ***ABC*** можна побудувати за допомогою прямих рівня, наприклад горизонталей. Через фронтальні проекції точок A_2, B_2 і C_2 проводять фронтальні проекції горизонталей $h^1{}_2$, $h^2{}_2$ і $h^3{}_2$, потім будують горизонтальні проекції цих прямих. На горизонтальні проекції горизонталей $h^1{}_1$, $h^2{}_1$ і $h^3{}_1$ за допомогою вертикальних ліній зв'язку проекціюють горизонтальні проекції точок A_1, B_1 і C_1 , з'єднують їх і отримують горизонтальну проекцію трикутника (рис. 4.10).

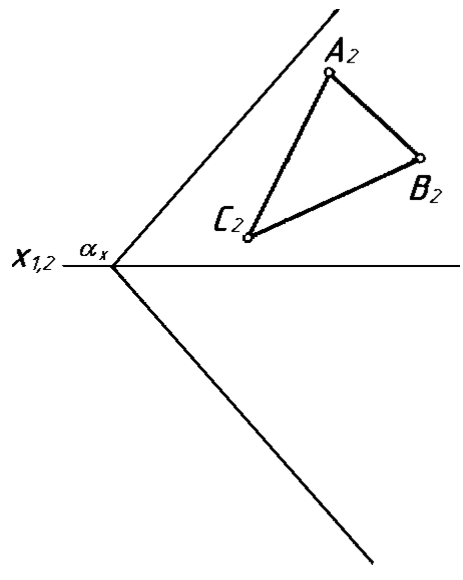


Рисунок 4.9

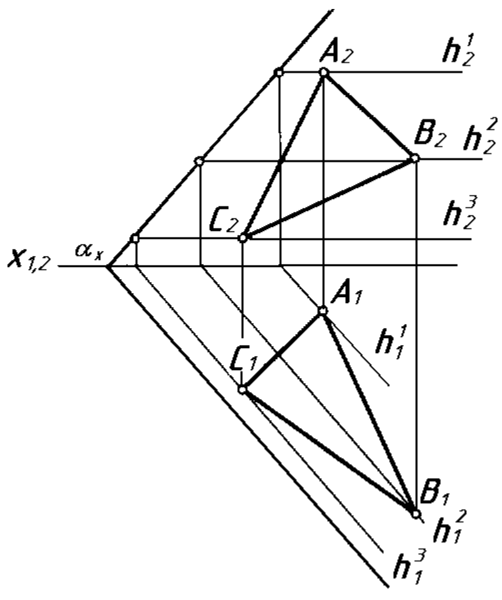


Рисунок 4.10

4.3 Лінія найбільшого нахилу

Лінією найбільшого нахилу називається пряма, що належить даній площині і перпендикулярна її сліду.

Лінія найбільшого нахилу відносно Π_1 називається лінією найбільшого скату. Вона перпендикулярна до горизонтального сліду даної площини або до її горизонталі. Кут нахилу лінії найбільшого скату до Π_1 є кутом нахилу даної площини до Π_1.

Лінія найбільшого нахилу відносно Π_2 перпендикулярна до фронтального сліду площини або до її фронталі. Кут між лінією найбільшого нахилу і Π_2 є кутом нахилу даної площини до Π_2.

Задача. Визначити кут нахилу даної площини до Π_1 (рис. 4.11).

Розв'язування.

1. В заданій площині □ (ΔABC) будують проекції горизонталі h_1 і h_2.
2. До горизонтальної проекції горизонталі h_1 проводять перпендикуляр з точки, яка належить заданій площині. Його зручніше проводити з проекції точки B_1. Лінія BK – лінія найбільшого нахилу до Π_1.
3. Для визначення кута нахилу □ до Π_1 використовують спосіб прямокутного трикутника.

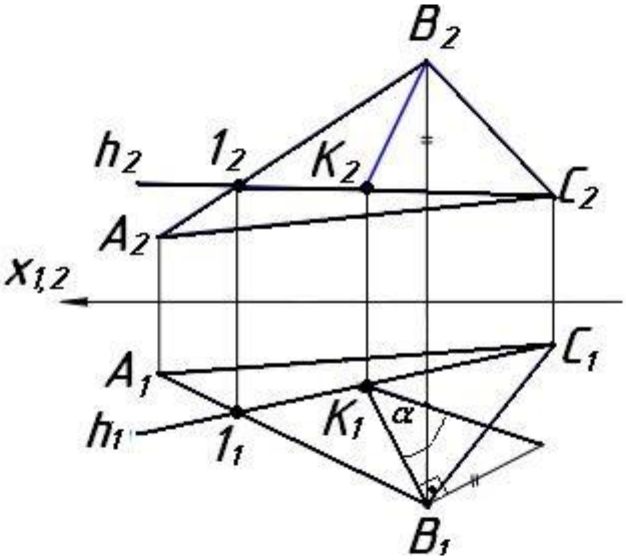


Рисунок 4.11

4.4 Перетин прямої з площиною загального положення. Перша позиційна задача

Ця задача – одна з основних задач нарисної геометрії.

Алгоритм розв'язання задачі

1. Через задану пряму проводять допоміжну площину окремого положення.
2. Будують лінію перетину двох площин – заданої і допоміжної.

3. Визначають точку перетину прямої з площиною.
4. Визначають видимість прямої відносно площини за допомогою конкуруючих точок.

На рисунку 4.12 показано просторову модель для розв’язання цієї типової задачі. Розглянемо приклад, який наведено на рисунку 4.13, де пряма ***a*** загального положення перетинає площину □ (Δ***ABC***) загального положення. Через горизонтальну проекцію прямої ***a_1*** проводять допоміж- ну площину окремого положення – горизонтально-проекціювальну □ $\perp$ ***Π_1***. Будують лінію перетину двох площин ***DE***: □ $\cap$ □ (Δ***ABC***) = ***DE***. Отрима- ний відрізок ***DE*** належить площині □ (Δ***ABC***), тому шукана точка визнача- ється на перетині двох прямих ***a*** і ***DE***, що належать площині □ :
a $\cap$ ***DE*** = ***K***. Видимість прямої ***a*** відносно площини □ (Δ***ABC***) визначається за допомогою двох пар конкуруючих точок. Точки ***D*** і ***F*** конкурують на ***Π_1***: ***D_1*** $\equiv$ (***F_1***), ***D*** $\in$ ***AB***, ***F*** $\in$ ***a***. На ***Π_1*** відрізок ***F_1K_1*** проекції прямої ***a_1*** невидимий. Точки ***G*** і ***H*** конкурують на ***Π_2***: ***H_1*** $\equiv$ (***G_1***), ***H*** $\in$ ***a***, ***G*** $\in$ ***AC***. На ***Π_2*** відрізок ***F_2K_2*** проекції прямої ***a_2*** – видимий.

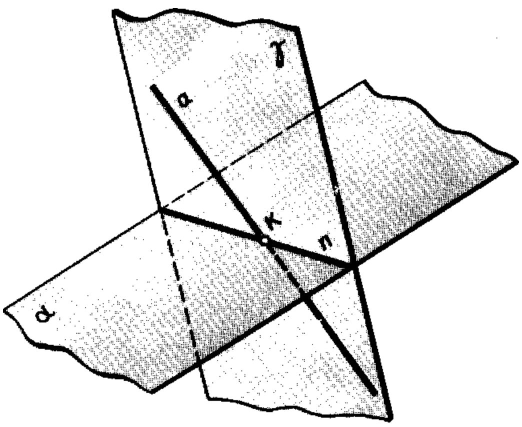


Рисунок 4.12

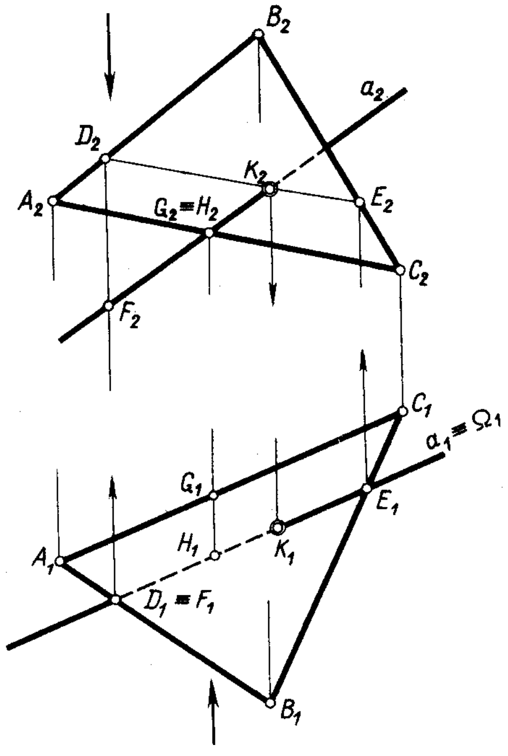


Рисунок 4.13

На рисунку 4.14 наведено приклад, де пряма ***a*** загального положення перетинає площину □ загального положення, яка задана слідами.

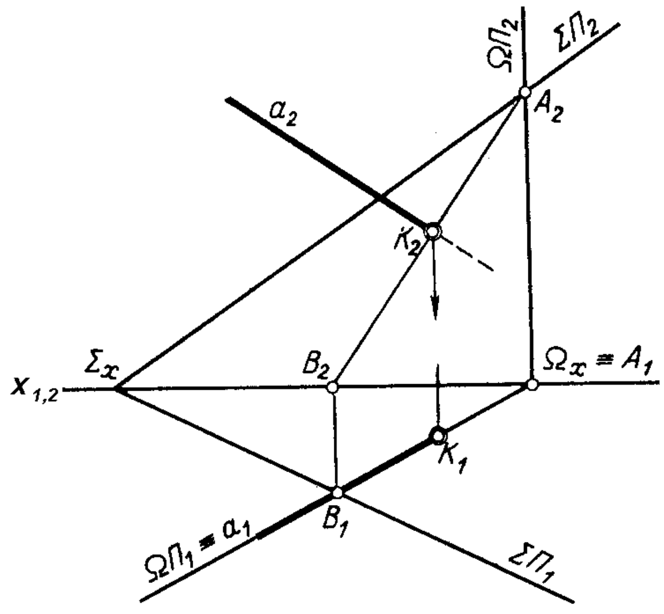


Рисунок 4.14

4.5 Пряма перпендикулярна до площини

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих площини, що перетинаються між собою. За дві прямі, що перетинаються, беруть горизонталь і фронталь площини загального положення (рис. 4.15).

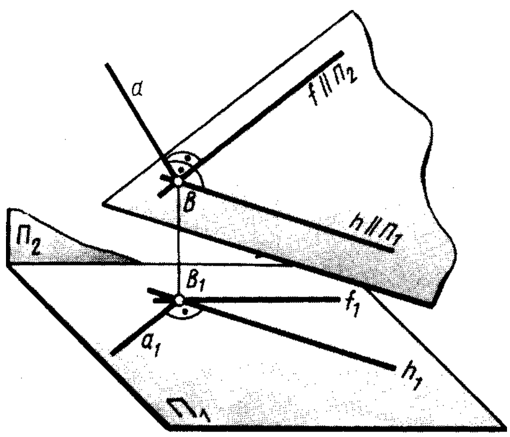


Рисунок 4.15

На рисунку 4.16 показано приклад побудови перпендикуляра до площини загального положення. В площині □ (**ΔABC**) проводять горизонталь **DE** і фронталь **DF**. На **Π_1** горизонтальну проекцію перпендикуляра проводять з проекції точки **A_1** до горизонтальної проекції горизонталі

$\boldsymbol{D_1E_1}$. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ фронтальну проекцію перпендикуляра проводять з проекції точки $\boldsymbol{A_2}$ до фронтальної проекції фронталі $\boldsymbol{D_2F_2}$.

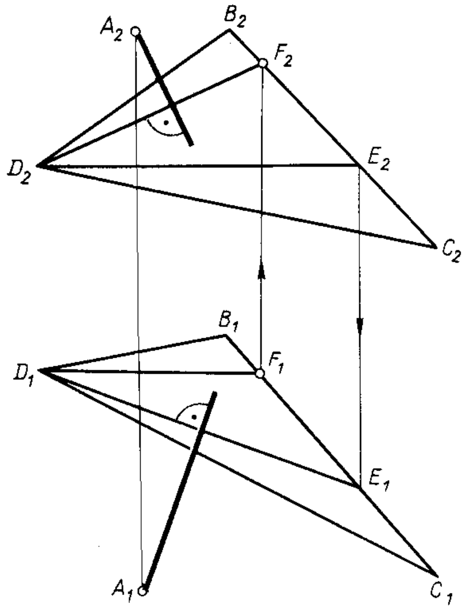


Рисунок 4.16

4.6 Пряма паралельна площині

Пряма лінія паралельна площині, якщо вона паралельна прямій (будь-якій), що належить даній площині. На рисунку 4.17 пряма $\boldsymbol{l}$ парале- льна площині загального положення, яка задана слідами □ ($\boldsymbol{f}^{□} \cap \boldsymbol{h}^{□}$), тому що проекції $\boldsymbol{l_1}$ і $\boldsymbol{l_2}$ прямої $\boldsymbol{l}$ паралельні відповідним проекціям $\boldsymbol{m_1}$ і $\boldsymbol{m_2}$ пря- мої $\boldsymbol{m}$, що належить цій площині.

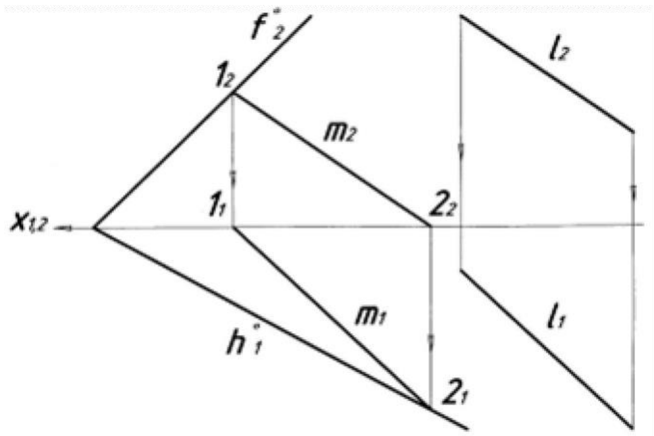


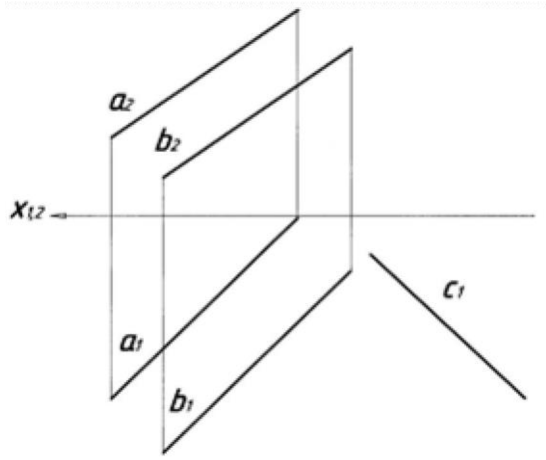
Рисунок 4.17

Символьний запис побудови:

$\boldsymbol{m}$ $(\boldsymbol{1,2}) \subset$ □ $(\boldsymbol{f}^{□} \cap \boldsymbol{h}^{□})$,

$\boldsymbol{l_1} \,||\, \boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{l_2} \,||\, \boldsymbol{m_2} \Rightarrow \boldsymbol{l} \,||\, \boldsymbol{m}$

Задача. Побудувати фронтальну проекцію прямої ***c***, що паралельна площині □ , яка задана паралельними прямими ***a*** і ***b*** – □ (***a*** ||***b***). Графічну умову показано на рисунку 4.18.



$c \,||\, □ \,(a\,||\,b)$,
c_1
c_2 - ?

Рисунок 4.18

Алгоритм розв'язання задачі

1. В площині □ (***a***||***b***) будують пряму ***d***, яка паралельна прямій ***c*** і перетинає прямі ***a*** і ***b*** в точках ***1*** і ***2***:
   $d_1 \cap a_1 = 1_1,\ \ d_1 \cap b_1 = 2_1;\ \ \ d_2 \cap a_2 = 1_2,\ \ d_2 \cap b_2 = 2_2\ \Rightarrow\ d \subset □\,(a||b)$.
   Побудову прямої ***d*** показано рисунку 4.19.
2. На Π_2 будують фронтальну проекцію прямої c_2 паралельно d_2 (рис.4.20): $c_1 \,||\, d_1,\ c_2 \,||\, d_2 \Rightarrow c \,||\, □\,(a||b)$.

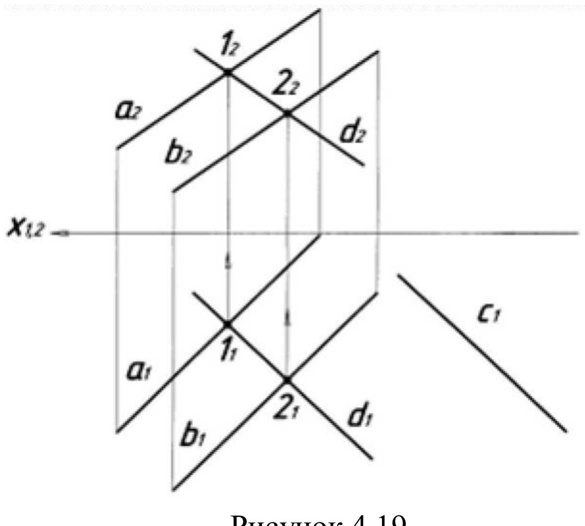


Рисунок 4.19

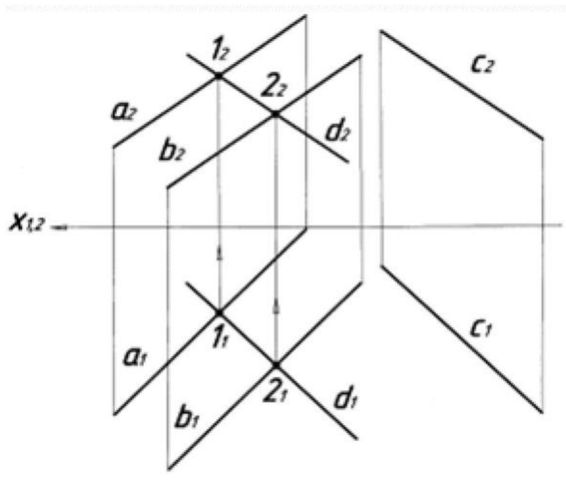


Рисунок 4.20

4.7 Перетин двох площин. Друга позиційна задача

Дві площини, які не збігаються, перетинаються між собою.

Дві площини перетинаються по прямій лінії, положення якої визначається двома точками. Необхідно знайти дві точки, спільні для обох площин і з'єднати їх.

1. Дві площини проекціювальні (рис. 4.21). Якщо перетинаються дві фронтально-проекціювальні площини, то лінія перетину буде фронтально-проекціювальна пряма $\boldsymbol{m}$: □ $\cap$ □ $= \boldsymbol{m}$.

Таким чином, якщо перетинаються дві проекціювальні площини однієї назви, то лінія перетину – проекціювальна пряма. У цьому разі для побудови лінії перетину достатньо визначити положення однієї точки і знати напрямок лінії перетину.

2. Якщо одна площина проекціювальна, а друга – загального положення, то проекція лінії перетину площин збігається зі слідом проекціювальної площини.

На рисунку 4.22 площина □($\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$) задана прямими, що перетинаються – загального положення, площина □ – горизонтально-проекціювальна, задана слідами.

Лінію перетину **1,2** знаходять на горизонтальній площині проекції $\boldsymbol{П_1}$, там де горизонтальний слід $□_1$ площини □ перетинає горизонтальні проекції прямих a_1 і b_1: $□_1$ ($a_1 \cap b_1$) $\cap$ $□_1$ = 1_1 ,2_1. Потім точки лінії пере-тину **1** і **2** проекціюють на відповідні проекції прямих a_2 і b_2.

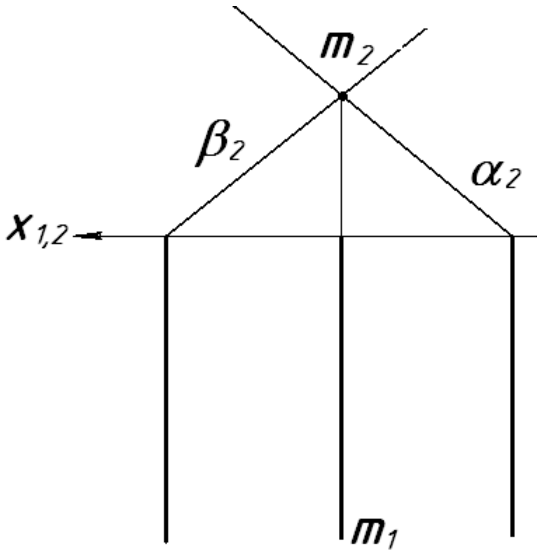


Рисунок 4.21

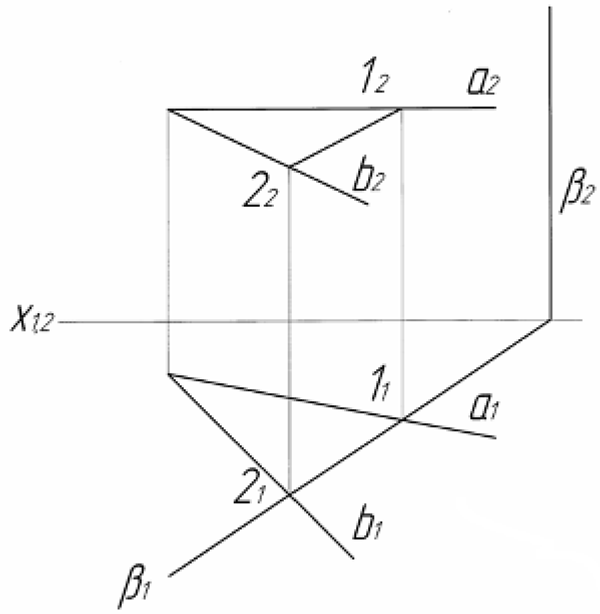


Рисунок 4.22

3. Якщо перетинаються площини загального положення, то лінію перетину знаходять способом допоміжних перерізів, які виконують за допомогою площин рівня або проекціювальних площин (рис. 4.23).

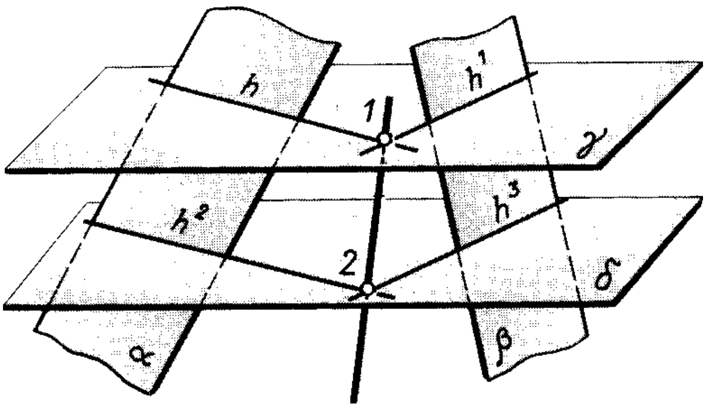


Рисунок 4.23

Алгоритм розв'язування задачі

1. Дві площини загального положення перетинають допоміжною площиною окремого положення.
2. Будують лінію перетину допоміжної площини з першою заданою площиною.
3. Будують лінію перетину допоміжної площини з другою заданою площиною.
4. Позначають точку перетину ліній.
5. Повторюють пункти 1-4 для другої допоміжної площини.
6. З'єднують дві точки, що побудовані, і отримують проекції лінії перетину.

На рисунку 4.24 показано побудову лінії перетину двох площин загального положення, одна з яких задана паралельними прямими, друга – трикутником.

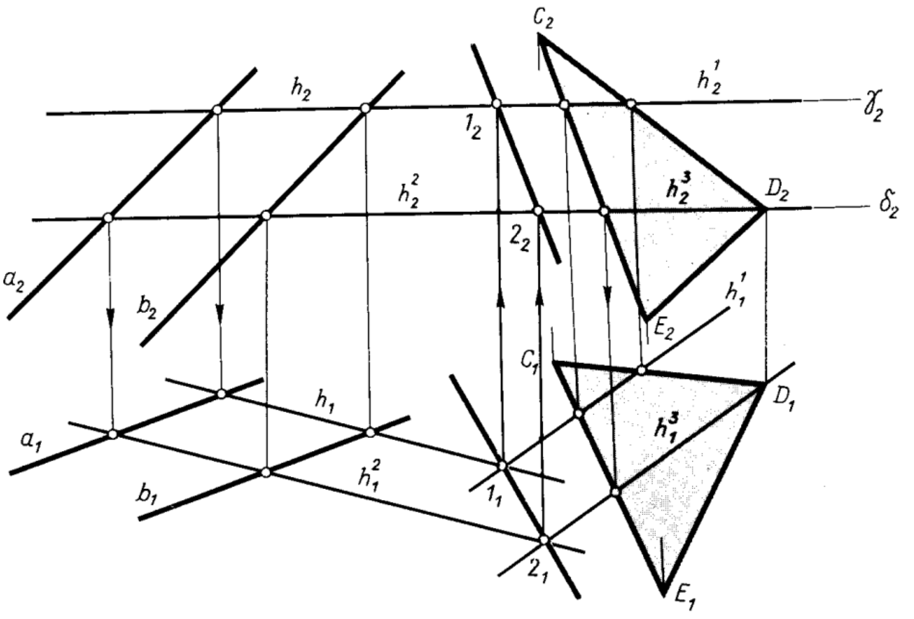


Рисунок 4.24

Якщо площини, що перетинаються, задані слідами, то лінію перетину проводять через точки перетину горизонтальних і фронтальних слідів (рис.4.25): $\boldsymbol{h^{\square} \cap h^{\square} = 1}$, $\boldsymbol{f^{\square} \cap f^{\square} = 2 \Rightarrow \square\,(h^{\square} \cap f^{\square}) \cap \square\,(h^{\square} \cap f^{\square}) = m(1,2)}$.

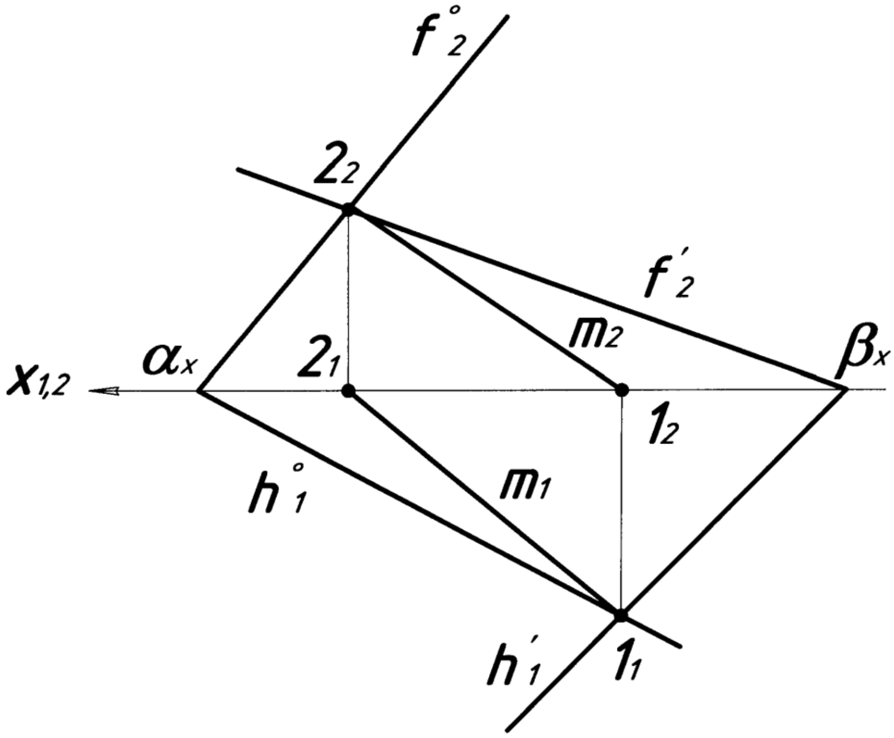


Рисунок 4.25

4.8 Взаємно перпендикулярні площини

Якщо одна з площин проходить через перпендикуляр другої площини, то ці площини взаємно-перпендикулярні.

На рисунку 4.26 наведено приклад побудови площини □ $(\boldsymbol{m \cap n})$, що перпендикулярна площині □ $(\boldsymbol{a \| b})$. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ із проекції точки $\boldsymbol{D_1}$ проведено пряму $\boldsymbol{n_1}$ перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі $\boldsymbol{h_1(1_1 2_1)}$: $\boldsymbol{n_1 \perp h_1}$, $\boldsymbol{h \subset}$□ $(\boldsymbol{a \| b})$. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ із фронтальної проекції точки $\boldsymbol{D_2}$ проведено пряму $\boldsymbol{n_2}$ перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі $\boldsymbol{f_2(3_2 4_2)}$: $\boldsymbol{n_2 \perp f_2}$, $\boldsymbol{f \subset}$□$(\boldsymbol{a \| b})$. Пряму $\boldsymbol{m}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$ проводять довільно, пряма $\boldsymbol{m}$ теж проходить через точку $\boldsymbol{D}$. Таким чином отримують дві взаємно перпендикулярні площини: □ $(\boldsymbol{m \cap n}) \perp$ □ $(\boldsymbol{a \| b})$.

В прикладі, що наведено на рисунку 4.27 площина □ задана горизонталлю і фронталлю: □ $(\boldsymbol{h \cap f})$. Для побудови площини □ $(\boldsymbol{m \cap n})$, перпендикулярної площині □ $(\boldsymbol{h \cap f})$ із токи $\boldsymbol{A}$ проводять пряму $\boldsymbol{n}$ перпендикулярну до натуральних величин прямих $\boldsymbol{h}$ і $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{n_1 \perp h_1}$, $\boldsymbol{n_2 \perp f_2}$. Пряму $\boldsymbol{m}$, яка теж проходить через точку $\boldsymbol{A}$, проводять довільно і отримують площину □ перпендикулярну до площини □ : □ $(\boldsymbol{m \cap n}) \perp$□ $(\boldsymbol{h \cap f})$.

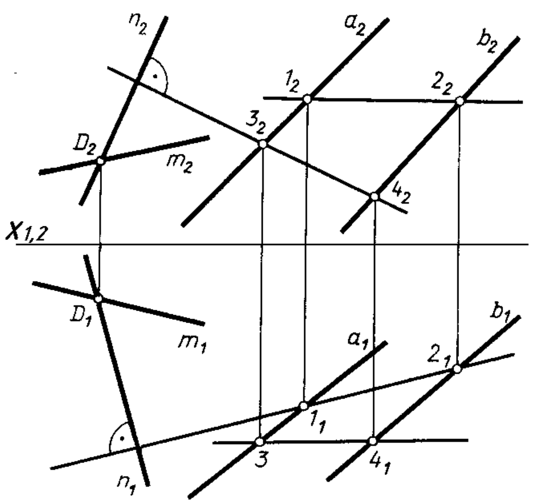


Рисунок 4.26

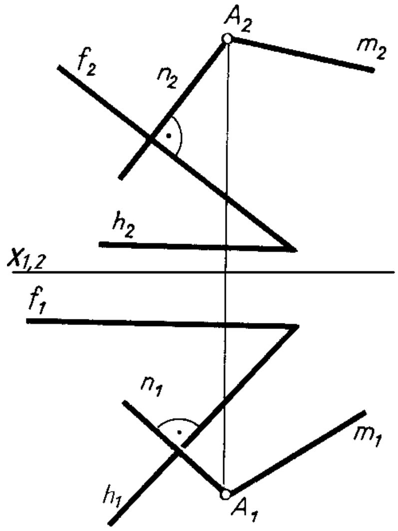


Рисунок 4.27

4.9 Паралельність двох площин

Дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, другої площини. Приклад паралельних площин наведено на рисунку 4.28. Площина □ задана прямими ***a*** і ***b***, що перетинаються, площина □ задана прямими ***m*** і ***n***, що перетинаються. Площини □ ($\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$) і □ ($\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{n}$) паралельні, тому що пряма ***a*** площини □ паралельна прямій ***m*** площини □, а пряма ***b*** площини □ паралельна прямій ***n*** площини □.

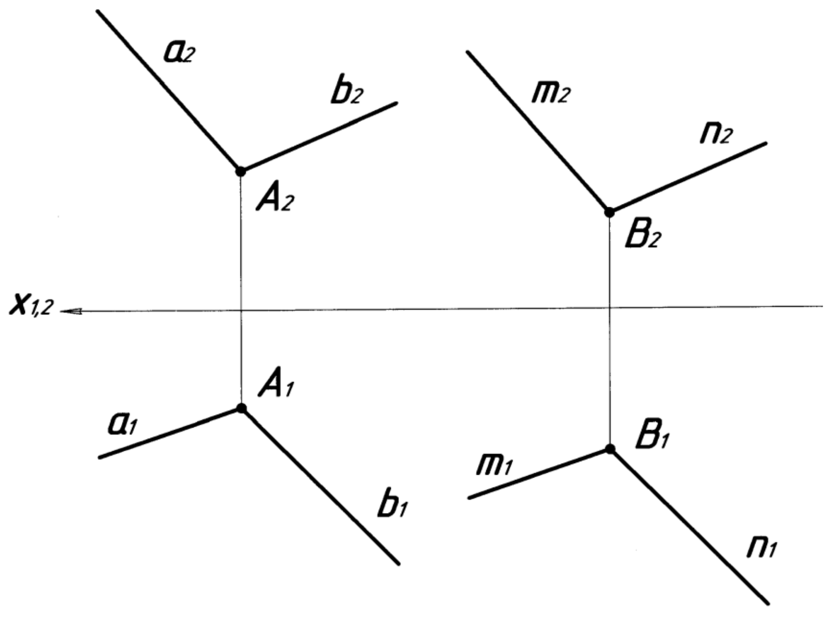


Рисунок 4.28

4.10 Багатогранники

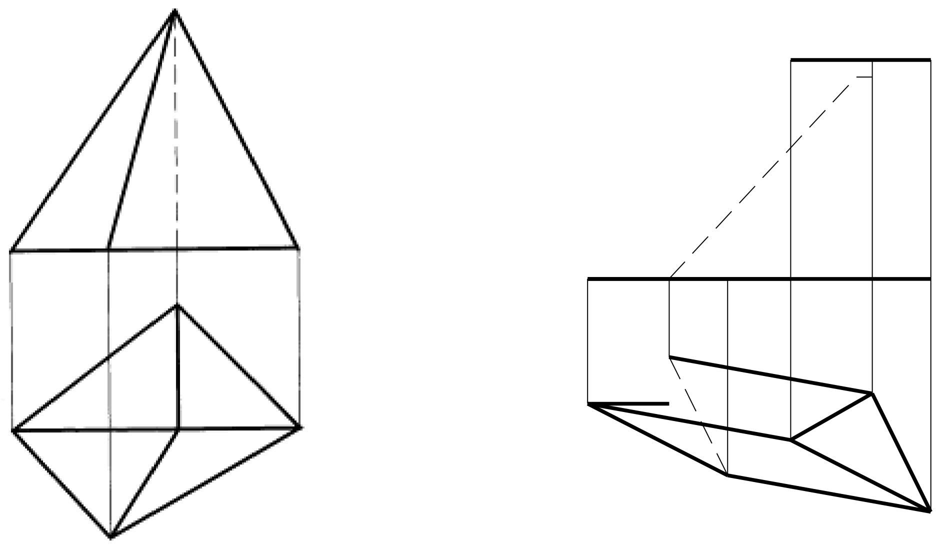
Об’єднання скінченного числа багатокутників називається багатогранною поверхнею. Багатогранна поверхня називається простою, якщо усі її точки належать даним багатокутникам або загальним сторонам двох багатокутників, або є вершинами багатогранних кутів, плоскими кутами яких служать кути цих багатокутників.

Багатокутники, що складають багатогранну поверхню, називаються її ***гранями***, сторони багатокутників – ***ребрами***, а вершини – ***вершинами багатогранної поверхні***.

З усіх простих багатогранників практичний інтерес становлять піраміди та призми.

Пірамідою називають багатогранник, усі грані якого, крім однієї, мають спільну вершину (рис. 4.29, а). Оскільки всі бічні грані піраміди – трикутники, піраміда повністю визначається заданням її основи та вершини.

Призмою називають багатогранник, обмежений призматичною поверхнею та двома паралельними площинами, не паралельними ребрам призми. Ці дві грані називаються основами призми, грані призматичної поверхні – бічними гранями, а її ребра – ребрами призми. Основами призми є рівні між собою багатокутники, бічні ребра призми дорівнюють одне одному. Якщо основи не паралельні між собою, призму називають зрізаною. Коли основами призми є перпендикулярні перерізи призматичної поверхні, призму називають прямою, якщо ця умова не виконується – похилою (рис. 4.29, б).



а) б)

Рисунок 4.29

На рисунку 4.30 показано приклад багатогранника в трьох проекціях, а в таблиці 1 виконано дослідження цього багатогранника, тобто положення ребер і граней відносно площин проекцій.

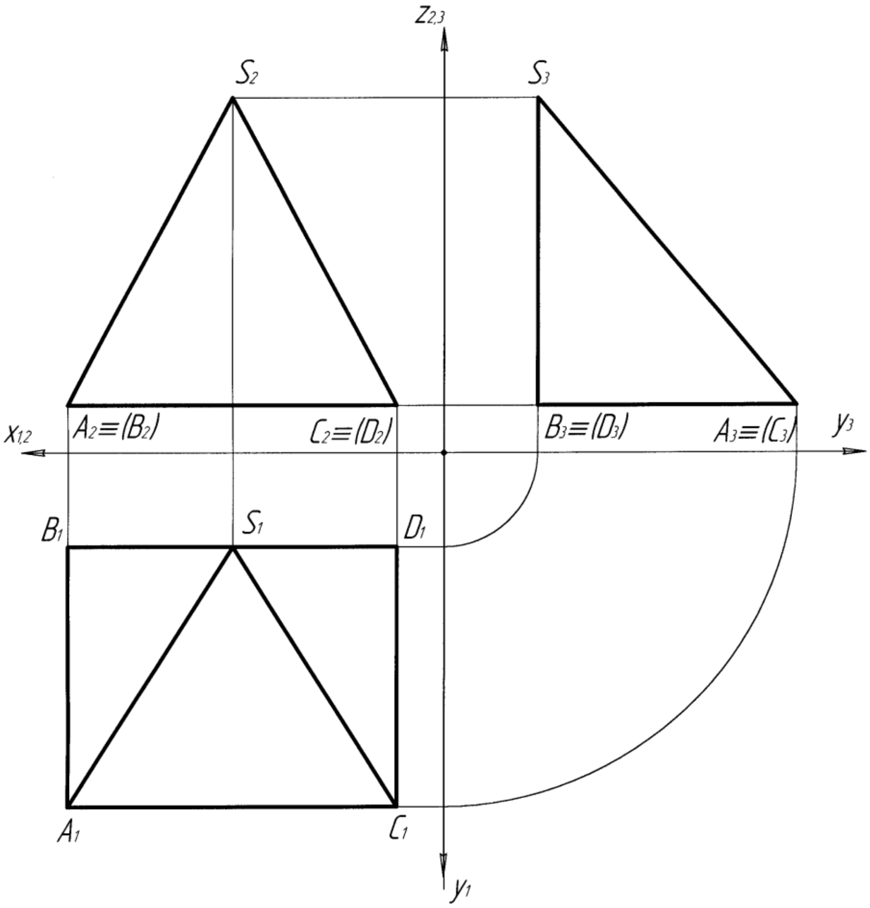


Рисунок 4.30

Таблиця 1

Положення відносно площин проекцій	***Ребра***	***Грані***
Горизонтальні	-	***ABDC***
Фронтальні	***SB*, *SD***	***BSD***
Профільні	-	-
Горизонтально-проекціювальні	-	-
Фронтально- проекціювальні	***AB*, *CD***	***ABS*, *CDS***
Профільно- проекціювальні	***AC*, *BD***	***ACS***
Загального положення	***SA*, *SC***	-
Взаємне положення		
Паралельні	***AB*** | | ***DC***	-
Перетинаються	***AS*** $\cap$ ***SC***	***SAC*** $\cap$ ***BDCA***
Мимобіжні	***AB*** $\overset{\circ}{-}$ ***SD***	-

Запитання для самоконтролю

1. Яку групу задач складають позиційні задачі?
2. Коли точка належить площині?
3. Коли пряма належить площині?
4. Що таке горизонталь площини?
5. Що таке фронталь площини?
6. Із кількох пунктів складається перша позиційна задача?
7. Коли пряма перпендикулярна до площини?
8. Коли пряма паралельна площині?
9. Яким способом будують лінію перетину двох площин загального положення?
10. За допомогою яких площин будують лінію перетину двох площин загального положення?
11. Як будують лінію перетину двох площин, що задані слідами?
12. Коли дві площини можуть бути взаємно перпендикулярними?
13. Які ознаки паралельних площин?
14. Що таке грань багатогранника?
15. Що таке ребро багатогранника?
16. Що називають пірамідою?
17. Що називають призмою?

5 МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Під метричними розуміють задачі на визначення відстаней, кутів та площ. Для розв'язання більшості метричних та деяких позиційних задач геометричні фігури загального положення треба привести в окреме положення. Це перш за все стосується прямих ліній, площин, гранних і криволінійних поверхонь. Після перетворення комплексного креслення додаткові проекції дають можливість розв'язувати задачі простіше. Методи перетворення проекцій опираються на два основних принципи:
1) зміна взаємного положення об'єкта проекціювання та площин проекцій;
2) зміна напряму проекціювання. На першому принципі ґрунтуються два способи перетворення проекцій: заміна площин проекцій та плоско-паралельне переміщення, а на другому – спосіб допоміжного проекціювання, який має два різновиди: прямокутний та косокутний.

5.1 Заміна площин проекцій

Суть способу заміни площин проекцій полягає в тому, що положення точок, ліній, плоских фігур у просторі залишається незмінним, а система площин $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_2}$ доповнюється новими площинами проекцій – $\boldsymbol{\Pi_4}$, $\boldsymbol{\Pi_5}$ і т.д, що утворюють з $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$, або між собою, системи двох взаємно перпендикулярних площин. Кожну нову систему площин проекцій вибирають так, щоб отримати положення, найзручніше для виконання необхідної побудови.

На рисунках 5.1, 5.2 зображено точку $\boldsymbol{A}$. Перпендикулярно до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$ проводять нову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$, на яку ортогонально проекціюють точку $\boldsymbol{A}$. Таким чином, замість системи площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_2}$ з проекціями точки $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ одержують нову систему $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_4}$ з проекціями точки $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_4}$. При такій заміні відстань $\boldsymbol{Z_A}$ від старої проекції точки $\boldsymbol{A_1}$ до старої осі $\boldsymbol{x_{1,2}}$ дорівнює відстані $\boldsymbol{Z_A}$ від нової проекції точки $\boldsymbol{A_4}$ до нової осі $\boldsymbol{x_{1,4}}$.

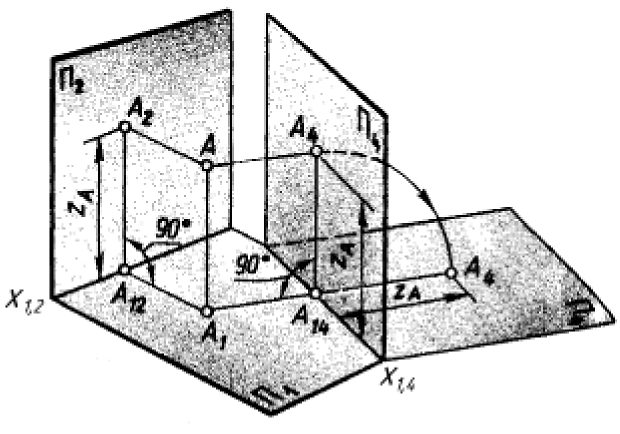


Рисунок 5.1

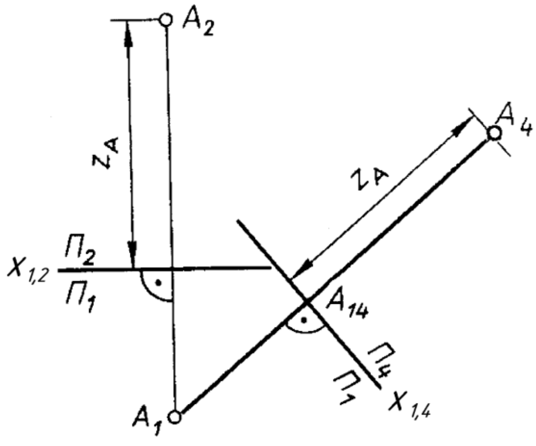


Рисунок 5.2

Задача 1. Визначити натуральну величину відрізка ***AB*** прямої загального положення. Перетворити цю пряму в проекціювальну.

Розв'язування. На рисунку 5.3 показано, як у просторі визначається натуральна величина відрізка ***AB.*** Для цього вводиться додаткова площина проекції $П_4$ паралельно відрізку ***AB*** і перпендикулярно до $П_1$. Щоб одержати його натуральну величину на епюрі, досить провести нову площину $П_4$ паралельно одній з проекцій. На рисунку 5.4 нову вісь $x_{1,4}$ вводять паралельно горизонтальній проекції прямої A_1 B_1. На $П_2$ вимірюють відстані від фронтальних проекцій точок A_2, B_2 до старої осі $x_{1,2}$ і відкладають на $П_4$ на лініях зв'язку, перпендикулярних до нової осі $x_{1,4}$. Ці відстані на рисунку 5.4 показані рисками. Щоб перетворити відрізок ***AB*** в проекціювальне положення, вводять ще одну додаткову площину проекції $П_5$. Відстані вимірюють від старої осі $x_{1,4}$ до проекцій точок A_1 і B_1, відкладають на $П_5$ від нової осі $x_{4,5}$ і одержують проекцію відрізка A_5B_5. Відрізок ***AB*** на $П_5$ відображається в точку.

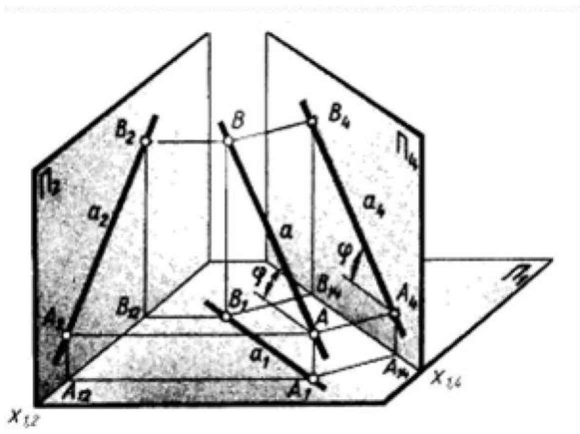


Рисунок 5.3

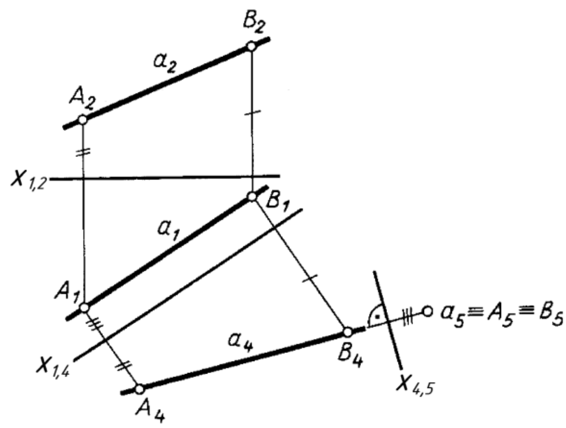


Рисунок 5.4

Задача 2. Визначити найкоротшу відстань від точки ***A*** прямої ***l***.

Розв'язування. На рисунку 5.5 показано приклад цієї задачі. Паралельно горизонтальній проекції прямої l_1 вводять додаткову площину проекції $П_4$ і отримують натуральну величину прямої (проекція l_4). Потім вводять ще одну додаткову площину проекції $П_5$, на яку пряма проекціюється в точку (проекція l_5). Найкоротшою відстанню від точки до прямої буде відрізок A_5K_5.

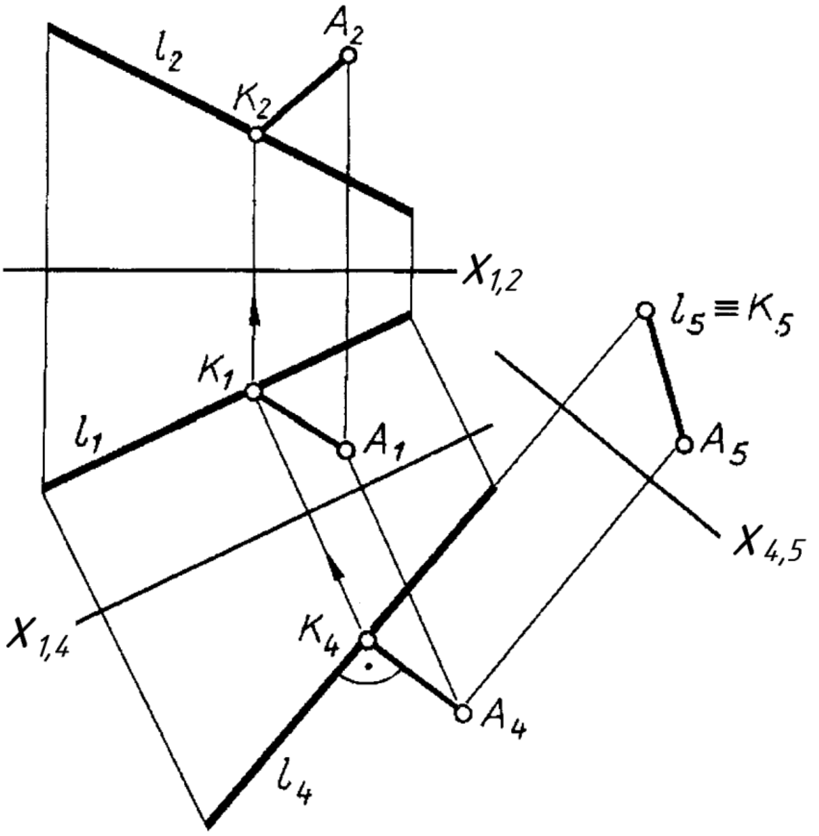


Рисунок 5.5

Задача 3. Визначити найкоротшу відстань між паралельними прямими.

Розв'язування. Якщо прямі займають проекціювальне положення (рис.5.6), відстань визначають на тій площині проекції, де прямі спроекційовані в точки. На рисунку 5.7 відрізок $\boldsymbol{A_1B_1}$ буде найкоротшою відстанню між паралельними прямими $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$.

Якщо паралельні прямі займають фронтальне (рис. 5.8) або горизонтальне положення (прямі рівня), тоді виконують одну заміну площин проекцій. Додаткову площину проекції $\boldsymbol{П_5}$ вводять перпендикулярно до натуральних величин проекцій прямих $\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{b_2}$. На $\boldsymbol{П_5}$ відрізок $\boldsymbol{A_5B_5}$ має натуральну величину відстані між прямими $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$.

В тому випадку, коли паралельні прямі займають загальне положення, виконують подвійну заміну площин проекцій (рис. 5.9). На $\boldsymbol{П_4}$ обидва відрізки $\boldsymbol{C_4D_4}$ і $\boldsymbol{E_4F_4}$ проекціюються в натуральну величину, а на $\boldsymbol{П_5}$ відображаються в точки. Найкоротшою відстанню між паралельними відрізками $\boldsymbol{CD}$ і $\boldsymbol{EF}$ буде проекція відрізка $\boldsymbol{A_5B_5}$.

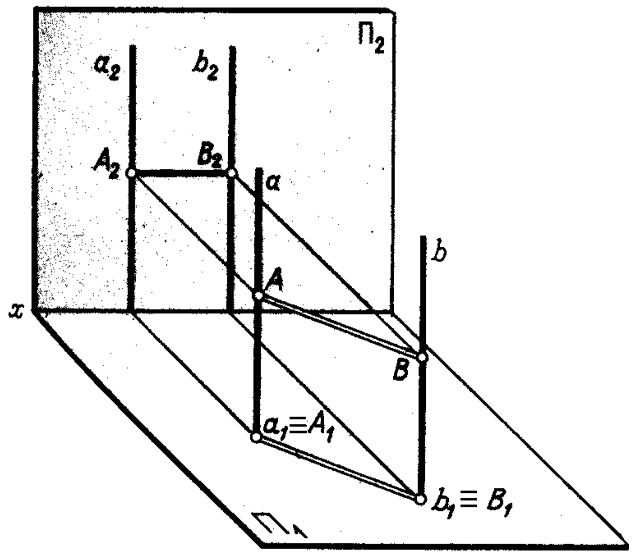


Рисунок 5.6

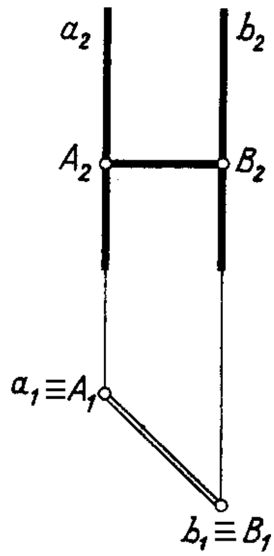


Рисунок 5.7

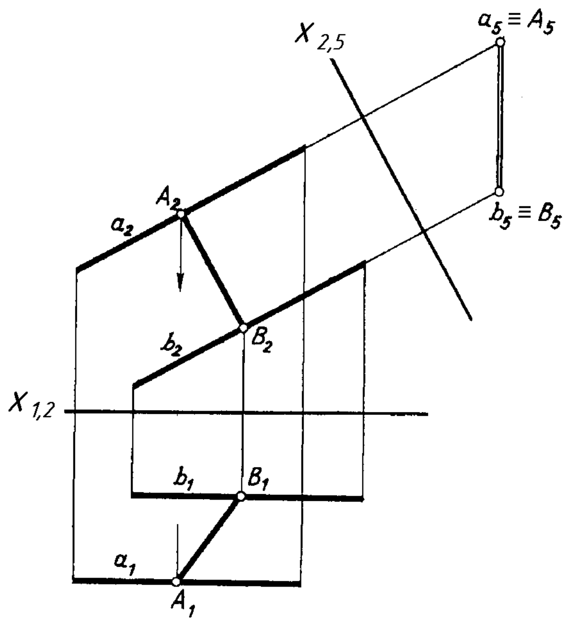


Рисунок 5.8

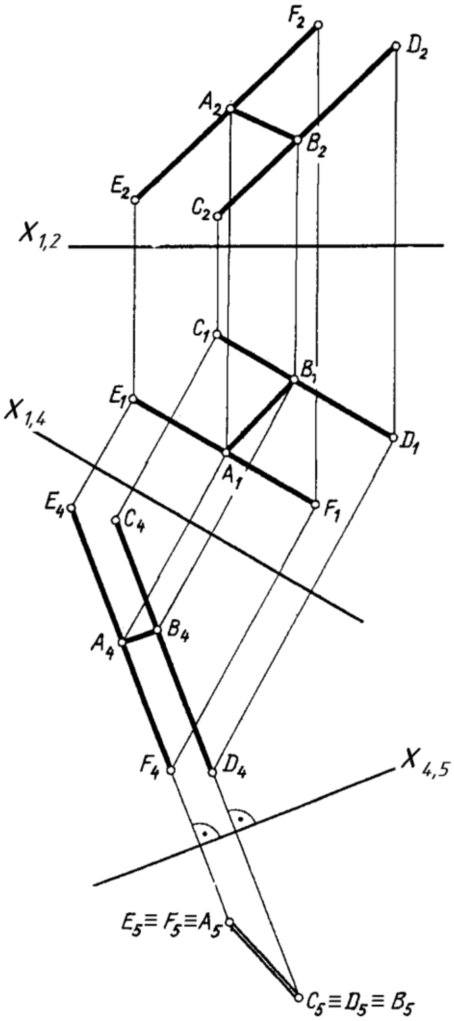


Рисунок 5.9

Задача 4. Визначити найкоротшу відстань між мимобіжними прямими.

Розв'язування. Якщо одна з мимобіжних прямих займає проекціювальне положення, а друга пряма загального положення (рис. 5.10), відстанню між ними буде перпендикуляр $\boldsymbol{C_1D_1}$, проведений від проекції прямої $\boldsymbol{a}_1$ до проекції прямої $\boldsymbol{b_1}$ (рис. 5.11).

Якщо одна з мимобіжних прямих горизонталь або фронталь, а друга пряма загального положення, тоді вводять одну додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$ перпендикулярно до тієї прямої, яка має натуральну величину. На рисунку 5.12 нова вісь $\boldsymbol{x_{2,4}}$ проведена перпендикулярно до фронтальної проекції прямої $\boldsymbol{a_2}$. На $\boldsymbol{\Pi_4}$ найкоротшою відстанню між мимобіжними прямими $\boldsymbol{a_4}$ і $\boldsymbol{b_4}$ буде натуральна величина відрізка $\boldsymbol{C_4D_4}$.

На рисунку 5.13 наведено приклад, коли обидва відрізки займають загальне положення. В такому випадку виконують подвійну заміну площин проекцій. Вводять додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$ паралельно відрізку $\boldsymbol{E_1F_1}$. Нова вісь $\boldsymbol{x_{1,4}}$ проведена паралельно горизонтальній проекції відрізка $\boldsymbol{E_1F_1}$. На $\boldsymbol{\Pi_4}$ відрізок $\boldsymbol{E_4F_4}$ має натуральну величину, відрізок $\boldsymbol{CD}$ в новій системі $\boldsymbol{\Pi_1}$ /$\boldsymbol{\Pi_4}$ займає загальне положення. Потім вводять ще одну додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_5}$ перпендикулярно до натуральної величини відрізка $\boldsymbol{EF}$ – проекції $\boldsymbol{E_4F_4}$. На $\boldsymbol{\Pi_5}$ проекція $\boldsymbol{E_5F_5}$ відрізка відображається в точку. Відрізок $\boldsymbol{CD}$ в системі $\boldsymbol{\Pi_4}$ /$\boldsymbol{\Pi_5}$ залишається прямою загального положення. Найкоротшою відстанню між мимобіжними прямими $\boldsymbol{CD}$ і $\boldsymbol{EF}$ буде відрізок $\boldsymbol{A_5B_5}$. Це є перпендикуляр проведений від $\boldsymbol{E_5F_5}$ до $\boldsymbol{C_5D_5}$.

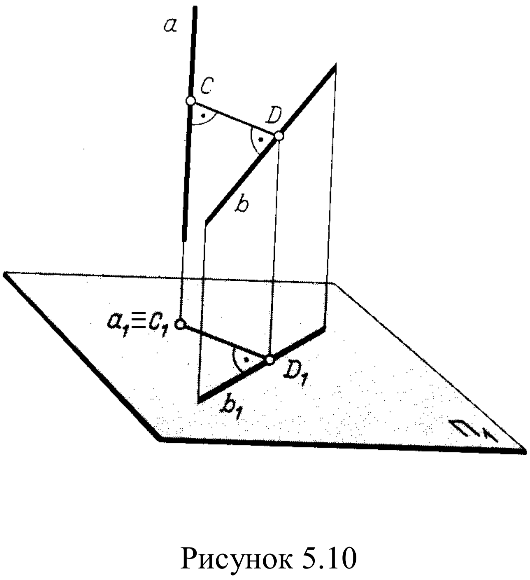


Рисунок 5.10

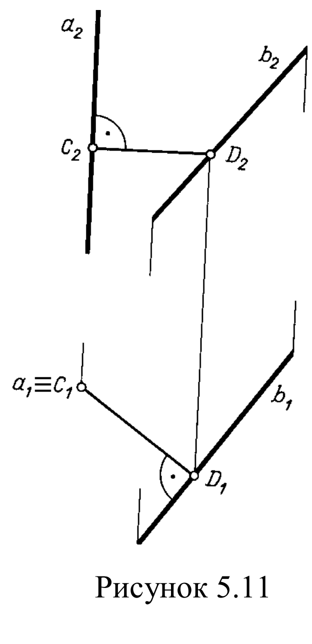


Рисунок 5.11

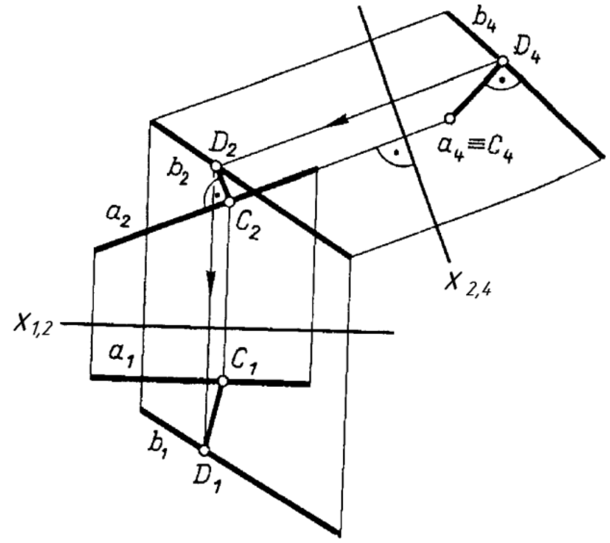


Рисунок 5.12

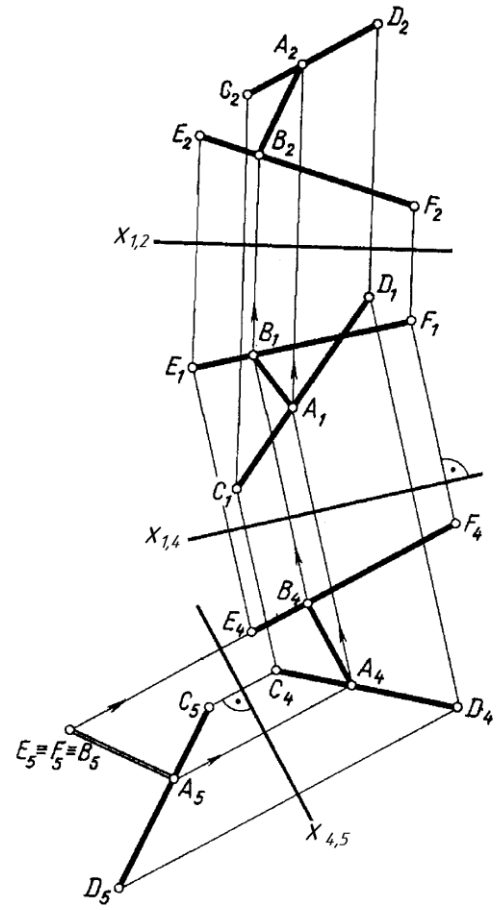


Рисунок 5.13

Задача 5. Визначити кути нахилу трикутника ***ABC*** до площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Розв'язування. Для того, щоб визначити кут нахилу трикутника ***ABC*** до $\boldsymbol{\Pi_1}$, будують горизонтальну пряму (горизонталь) ***AH***, що належить площині □ (Δ***ABC***). Побудову горизонталі починають на фронтальній площині проекції $\boldsymbol{\Pi_2}$, де її проекція паралельна осі $\boldsymbol{x_{1,2}}$ (рис. 5.14). Горизонтальна проекція горизонталі $\boldsymbol{A_1H_1}$ має натуральну величину. Перпендикулярно до $\boldsymbol{A_1H_1}$ вводять додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$. На $\boldsymbol{\Pi_4}$ проекція відрізка $\boldsymbol{A_4H_4}$ відображається в точку, а площина трикутника в пряму лінію: $\boldsymbol{\Pi_4 \perp A_1H_1}$, $\boldsymbol{x_{1,4} \perp A_1H_1} \Rightarrow$ □ (Δ***ABC***) $\perp \boldsymbol{\Pi_4}$. Таким чином визначається шуканий кут нахилу ∠□ до $\boldsymbol{\Pi_1}$.

Аналогічно визначають кут нахилу площини трикутника ***ABC*** до $\boldsymbol{\Pi_2}$ (рис. 5.15). Будують фронтальну пряму (фронталь) ***AF***, що належить площині □ (Δ***ABC***). Фронталь починають будувати на $\boldsymbol{\Pi_1}$, де її проекція $\boldsymbol{A_1F_1}$ паралельна осі $\boldsymbol{x_{1,2}}$. Фронтальна проекція фронталі $\boldsymbol{A_2F_2}$ має натуральну величину. Перпендикулярно до $\boldsymbol{A_2F_2}$ вводять додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$. На $\boldsymbol{\Pi_4}$ проекція відрізка $\boldsymbol{A_4F_4}$ відображається в точку, а площина трикутника в пряму лінію: $\boldsymbol{\Pi_4 \perp A_2F_2}$, ... трикутника в пряму лінію: $П_4 \perp A_2F_2$, $x_{2,4} \perp A_2F_2 \Rightarrow$□ ($\Delta ABC$)$\perp П_4$. Шуканий кут нахилу $\angle$□ до $П_2$ визначається між лінією, проведеною із проекції вершини B_4 паралельно осі $x_{2,4}$ і проекцією трикутника $A_4B_4C_4$.

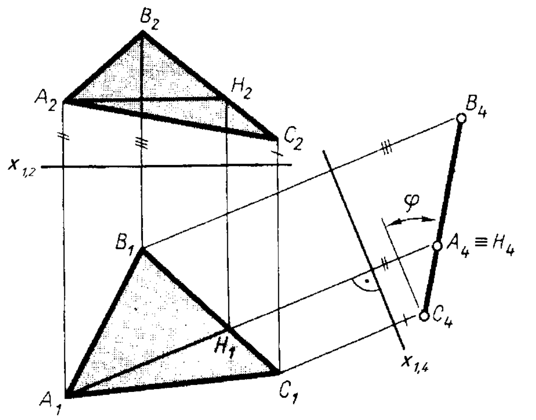


Рисунок 5.14

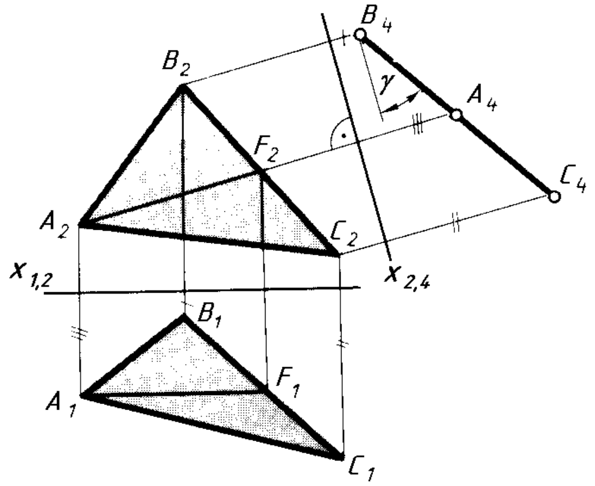


Рисунок 5.15

Задача 6. Визначити найкоротшу відстань від точки до площини.

Розв'язування. На рисунку 5.16 показано приклад, де площина □(ΔBCD) займає загальне положення. В цьому випадку виконують лише одне перетворення. Додаткову площину проекції $П_4$ вводять перпендикулярно до натуральної величини прямої рівня, що належить трикутнику BCD. В нашому випадку це горизонталь h. На $П_4$ проекція площини трику- тника $B_4C_4D_4$ відображається в пряму лінію. Найкоротшою відстанню від точки до площини буде перпендикуляр A_4K_4, проведений із проекції точки A_4 до проекції площини $B_4C_4D_4$.

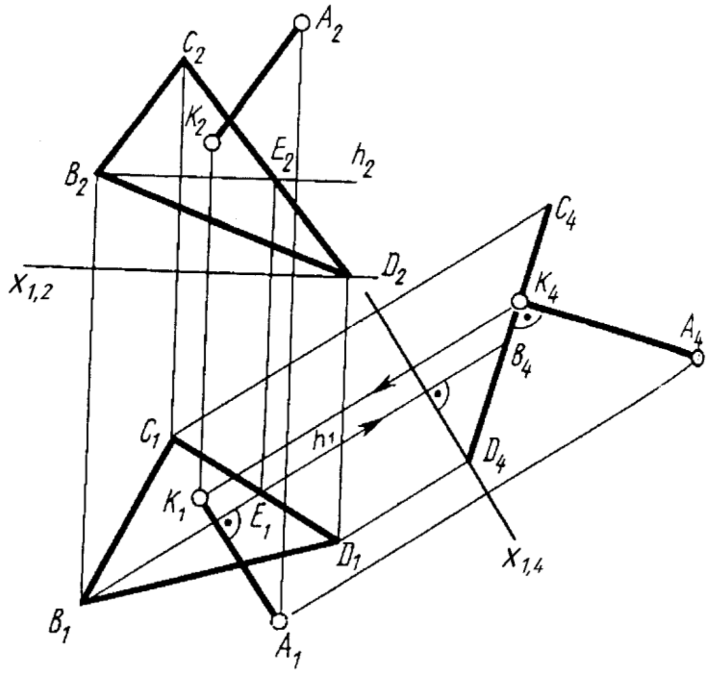


Рисунок 5.16

Задача 7. Побудувати натуральну величину площини.

Розв'язування. В тому випадку, коли площина займає окреме положення, виконують одну заміну площин проекцій. На рисунку 5.17 площина, що задана трикутником ***ABC*** займає фронтально-проекціювальне положення. Додаткову площину проекції ***П₄*** вводять паралельно площині □(Δ***ABC***). Нову вісь $x_{2,4}$ проводять паралельно фронтальній проекції трикутника $A_2B_2C_2$. На ***П₄*** проекція трикутника $A_4B_4C_4$ має натуральну величину.

Якщо площина в системі $П_1$ /$П_2$ займає загальне положення, виконують подвійну заміну площин проекцій. На рисунку 5.18 показано, як площина загального положення, що задана трикутником ***DEF***, перетворюється на $П_4$ в проекціювальне положення, а на $П_5$ має натуральну величину.

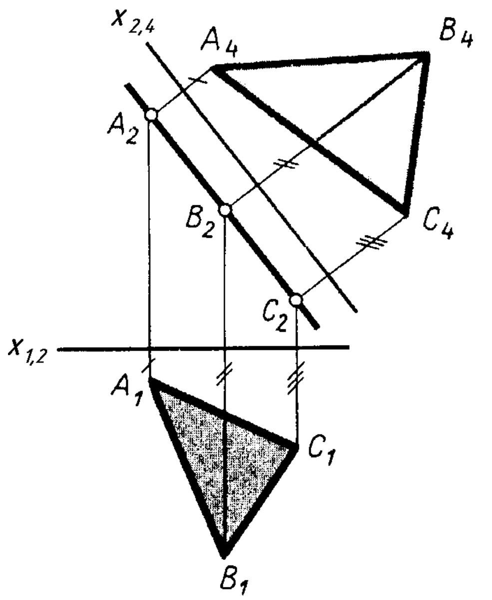


Рисунок 5.17

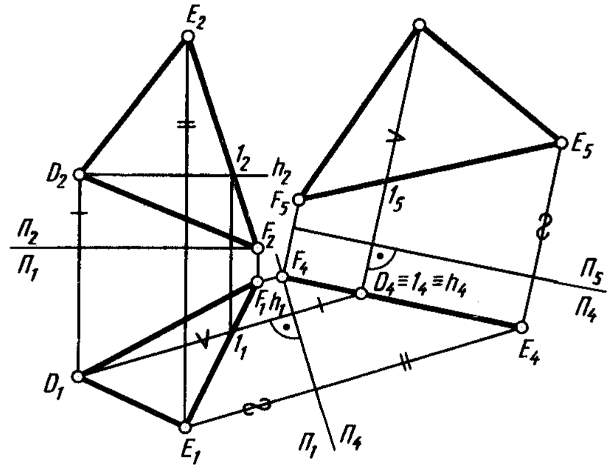


Рисунок 5.18

Задача 8. Визначити кут між двома гранями.

Розв'язування. Якщо лінія перетину двох граней займає загальне положення, виконують подвійну заміну площин проекцій. На рисунку 5.19 лінією перетину двох граней ***1AB*** і ***2AB*** є ребро ***AB*** загального положення. Додаткову площину проекції $П_4$ вводять паралельно ребру ***AB***. Нова вісь $x_{1,4}$ проведена паралельно горизонтальній проекції ребра A_1B_1. На $П_4$ прое- кція ребра A_4B_4 має натуральну величину. Ще одну площину проекції $П_5$ вводять перпендикулярно до натуральної величини ребра ***AB***. Вісь $x_{4,5}$ проводять перпендикулярно до проекції A_4B_4. Шуканий кут $\angle\varphi$ між двома гранями визначається на $П_5$, де ребро ***AB*** відображається в точку, а грані ***1AB*** і ***2AB*** в прямі лінії: $1_5A_5B_5 \cap 2_5A_5B_5 = A_5B_5$, $A_5B_5 \perp П_5$.

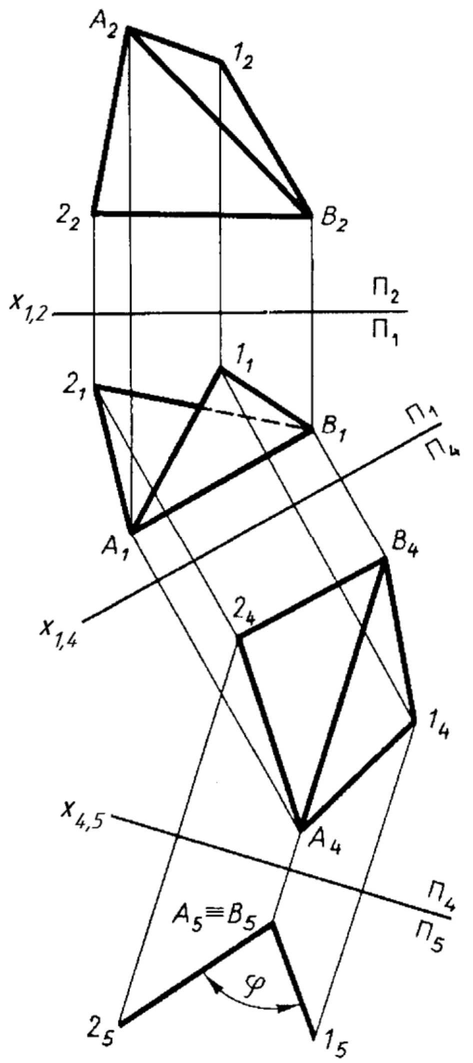


Рисунок 5.19

5.2 Плоско-паралельне переміщення

Якщо при способі заміни площин проекцій геометричні фігури залишають на місці, а до них певним чином підбирають площини проекцій, то при способі плоско-паралельного переміщення роблять навпаки: пло- щини проекцій $\boldsymbol{П_1}$ і $\boldsymbol{П_2}$ залишають незмінними, а геометричні фігури переміщують певним чином до бажаного положення.

Задача 1. Пряму загального положення повернути паралельно осі $x_{1,2}$ так, щоб пряма займала фронтальне положення. Перетворити цю пряму в горизонтально-проекціювальну.

Розв'язування. Горизонтальну проекцію відрізка A_1B_1 переміщують паралельно осі $x_{1,2}$ в положення $A'_1B'_1$ (рис. 5.20). При цьому $[A_1B_1]$ = $[A'_1B'_1]$. Щоб одержати фронтальну проекцію відрізка $A'_2B'_2$ із горизонтальних проекцій точок A'_1 і B'_1 проводять на $\boldsymbol{П_2}$ вертикальні лінії зв'язку, а із фронтальних проекцій A_2 і B_2 проводять горизонтальні лінії зв'язку. Там де лінії зв'язку перетинаються, отримують фронтальні проекції точок A'_2 і

B'_2. Відрізок A'_2 B'_2 буде мати натуральну величину. Потім фронтальну проекцію відрізка $A'_2B'_2$ повертають перпендикулярно до осі $x_{1,2}$ в положення $A''_2B''_2$.

Із фронтальної проекції відрізка $A''_2B''_2$ проводять на Π_1 вертикальну лінію зв'язку, а із горизонтальної проекції відрізка $A'_1B'_1$ проводять горизонтальну лінію зв'язку. Там де лінії зв'язку перетинаються, отримують горизонтальну проекцію відрізка $A''_1B''_1$. Ця проекція відрізка на Π_1 відображається в точку. Таким чином, пряма загального положення перетворюється в горизонтально-проекціювальну пряму.

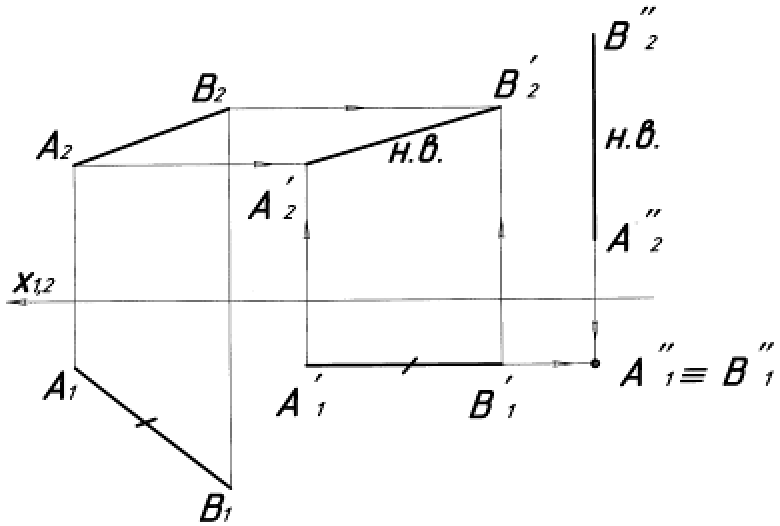


Рисунок 5.20

Задача 2. Площину загального положення, задану трикутником ***ABC***, перемістити до фронтально-проекціювального положення (рис. 5.21).

Розв'язування. У площині трикутника ***ABC*** потрібно провести горизонталь (h_2 , h_1) і повернути її до положення, перпендикулярного до Π_2. Тоді й трикутник, якому належить ця горизонталь, стане перпендикулярним до Π_2. Оскільки побудову виконуть не вказуючи осі обертання, то проекцію $A_1B_1C_1$ розташовуть довільно, але так, щоб горизонталь стала перпендикулярною до $x_{1,2}$. На горизонталі відмічають A_1 і 1_1, зберігаючи відстань A_11_1. Нове положення точок B_1 і C_1 отримують за допомогою циркуля засічками. При цьому горизонтальна проекція трикутника зберігає свій вигляд і величину ($A_1B_1C_1$= $A_1B_1C_1$), змінюється тільки її положення. На перетині ліній зв'язку з точок A_1,B_1,C_1, перпендикулярно до осі $x_{1,2}$ і ліній зв'язку з точок A_2,B_2,C_2, паралельних до вісі $x_{1,2}$, отримують фронтальну проекцію трикутника у вигляді прямої лінії, тобто фронтально-проекціювального положення (A_2 B_2 $C_2 \perp \Pi_2$). Тут також можна відмітити кут α – кут нахилу цієї площини до горизонтальної площини проекції.

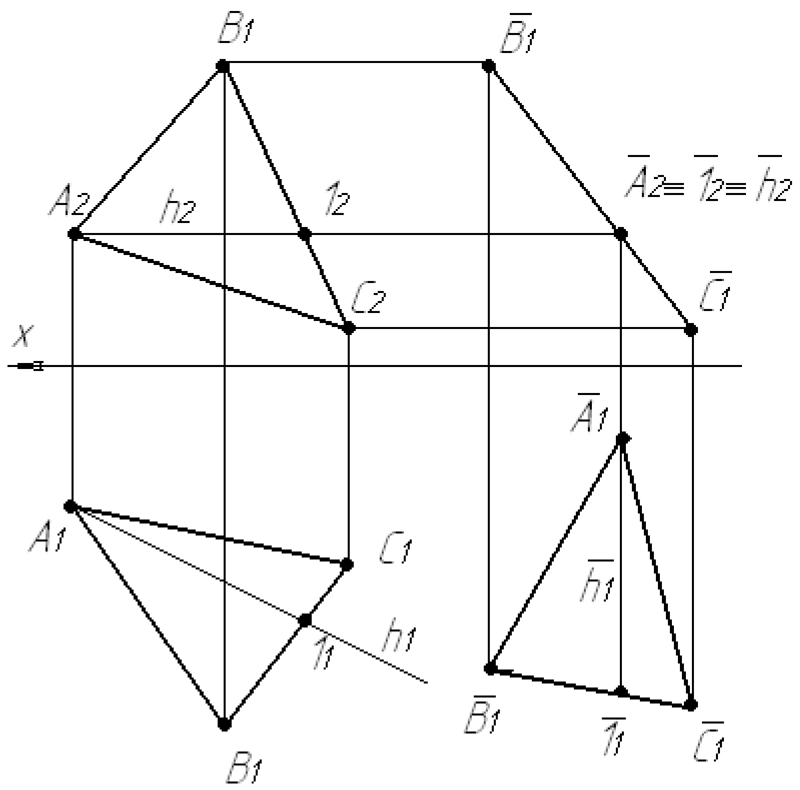


Рисунок 5.21

Задача 3. Площину загального положення, задану трикутником ***ABC***, перемістити до положення, паралельного до горизонтальної площини проекції.

Розв'язування. Щоб отримати таке положення трикутника, спочатку розв'язують задачу 2. Далі фронтальну проекцію трикутника у вигляді прямої лінії $A_2B_2C_2$ переміщують вздовж осі $x_{1,2}$ і паралельно до неї, причому проекція $A_2B_2C_2$ зберігає вигляд і величину, отримані при розв'язувані задачі 2 ($A_2B_2C_2 = A_2B_2C_2$). Горизонтальну проекцію трикутника отримують на перетині ліній зв'язку від A_2, B_2, C_2 перпендикулярно до осі $x_{1,2}$. Проекція $A_1B_1C_1$ буде натуральною величиною трикутника ***ABC*** (рис.5.22).

За допомогою способу плоско-паралельного переміщення визначають відстань від точки до площини, заданої різними способами, а також відстань між двома паралельними і мимобіжними прямими тощо.

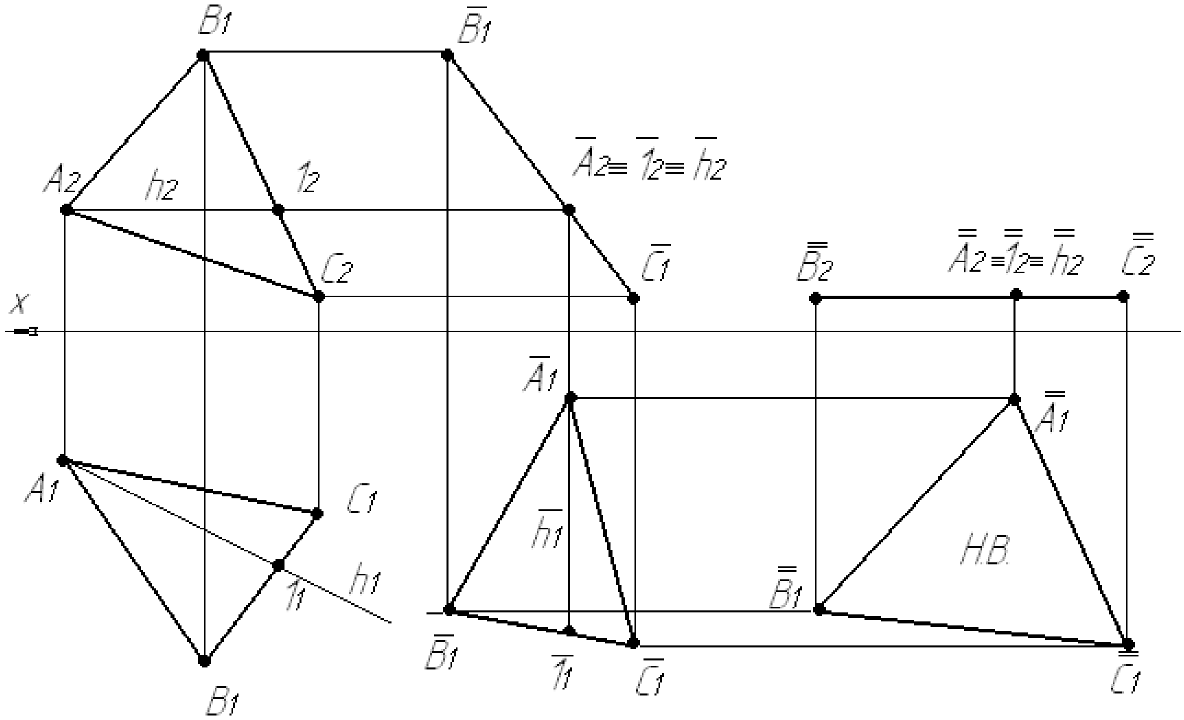


Рисунок 5.22

Задача 4. Визначити кут між двома гранями при ребрі ***AD***.

Розв'язування. В основі цієї задачі лежать задачі ***1*** і ***2***, тобто двогранний кут при ребрі ***AD*** спроекціюється в натуральну величину, якщо ребро ***AD*** спроекціюється в точку, а бокові грані – в прямі лінії.

Горизонтальну проекцію фігури переміщуть вздовж осі так, щоб ребро ***AD*** стало паралельним до осі $x_{1,2}$, причому $A_1D_1 = A_1D_1$.

Точки ***B*** і ***C*** переміщують за допомогою циркуля засічками. Переміщена фігура не повинна змінити вигляду і розміру заданої.

Фронтальну проекцію двогранного кута отримують на перетині ліній зв'язку, напрями яких вказано стрілками.

При другому переміщенні фронтальну проекцію двогранного кута переміщують так, щоб ***AD*** стала перпендикулярною до осі $x_{1,2}$. Точки B_2 і C_2 переміщують за допомогою циркуля засічками. Горизонтальну проекцію кута отримують за допомогою ліній зв'язку. Точки ***A*** і ***D*** збіглися в одну точку, а грані ***ADB*** і ***ADC*** – в прямі лінії. Кут α визначає натуральну величину кута при ребрі ***AD*** (рис. 5.23).

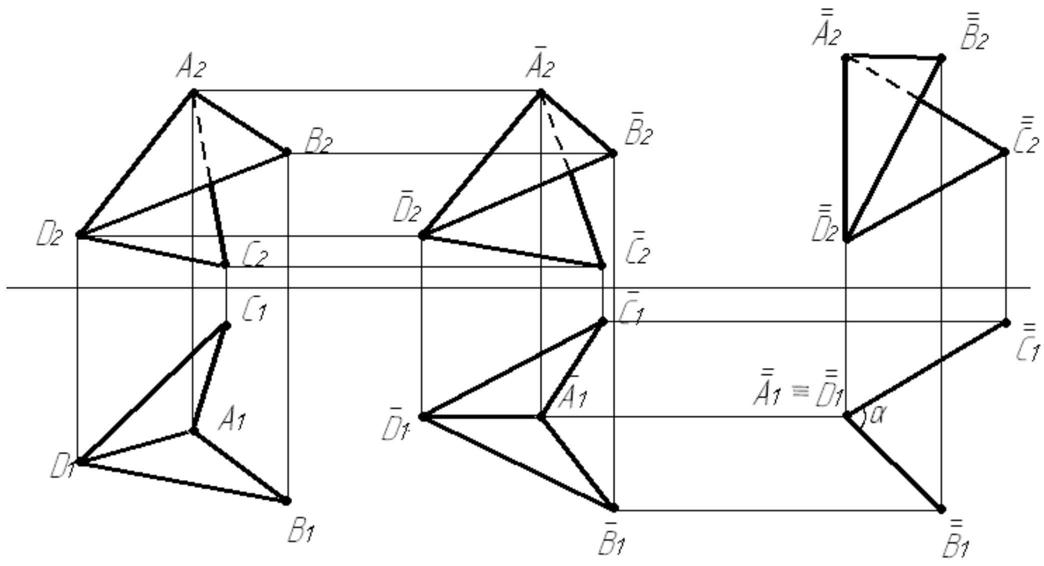


Рисунок 5.23

5.3 Спосіб обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекції

Цей спосіб є окремим випадком способу плоско-паралельного переміщення. Обертання використовують для визначення натуральної величини прямої або площини.

При обертанні навколо деякої нерухомої прямої (вісь обертання) кожна точка фігури, що обертається, переміщується в площині, перпендикулярній до осі обертання (площина обертання). Точка переміщається по колу, центр якого знаходиться у точці перетину осі з площиною обертання (центр обертання), а радіус кола дорівнює відстані від точки обертання до центра (радіус обертання). Нехай точка ***A*** обертається навколо осі ***i*,** перпендикулярної до $\boldsymbol{\Pi_1}$ (рис. 5.24, а). Через точку ***A*** проводять площину $\boldsymbol{\alpha}$, перпендикулярну до осі обертання ***i*** паралельну до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$. При обертанні точка ***A*** описує в площині $\boldsymbol{\alpha}$ коло радіуса ***R***, який дорівнює довжині перпендикуляра з точки ***A*** до осі ***i***. Коло, описане в просторі точкою ***A*** радіусом $\boldsymbol{R=i_1A_1}$, проектується на площину $\boldsymbol{\Pi_1}$ без спотворення; на площині $\boldsymbol{\Pi_2}$ це коло зображене відрізком прямої, довжина якого дорівнює ***2R***.

На (рис. 5.24, б) зображено обертання точки ***A*** навколо осі ***i***, перпендикулярної до $\boldsymbol{\Pi_2}$. Коло, яке описується точкою ***A***, проектується без спотворення на площину $\boldsymbol{\Pi_2}$. З точки $\boldsymbol{i_2}$, як із центра, проведено коло радіусом $\boldsymbol{R=i_2A_2}$; на площині $\boldsymbol{\Pi_1}$ це коло зображено відрізком прямої, довжина якого дорівнює ***2R***.

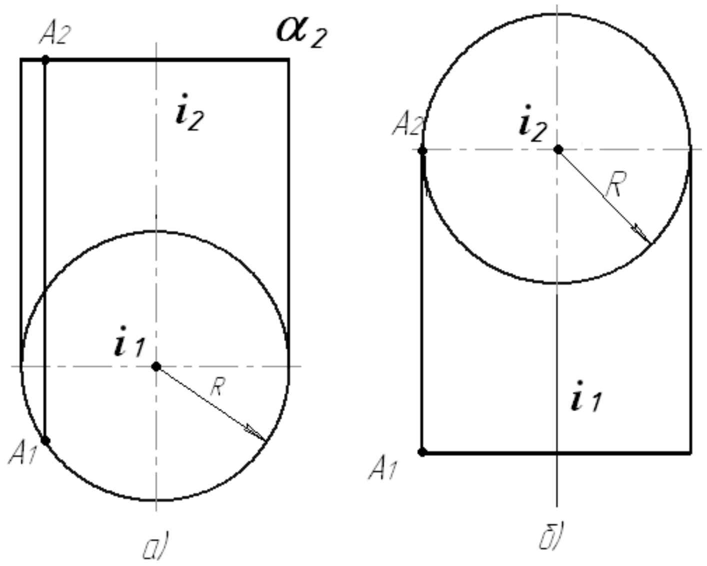


Рисунок 5.24

На рисунку 5.25 показано приклад побудови натуральної величини відрізка ***AB*** загального положення, де вісь обертання ***i*** горизонтально-проекціювальна. Горизонтальну проекцію відрізка A_1B_1 обертають навколо проекції осі i_1. При цьому проекція точки A_1 на Π_1 переміщується по дузі кола в положення A'_1, а положення проекції точки B_1 залишається незмінним, тому що точка ***B*** належить нерухомій осі ***i***. Нове положення горизонтальної проекції відрізка $A_1B'_1$ повинно бути паралельно осі $x_{1,2}$. На Π_2 фронтальна проекція точки A_2 переміщується по прямій лінії паралельно осі $x_{1,2}$ в положення A'_2. Таким чином, фронтальна проекція відрізка A'_2B_2 буде мати натуральну величину.

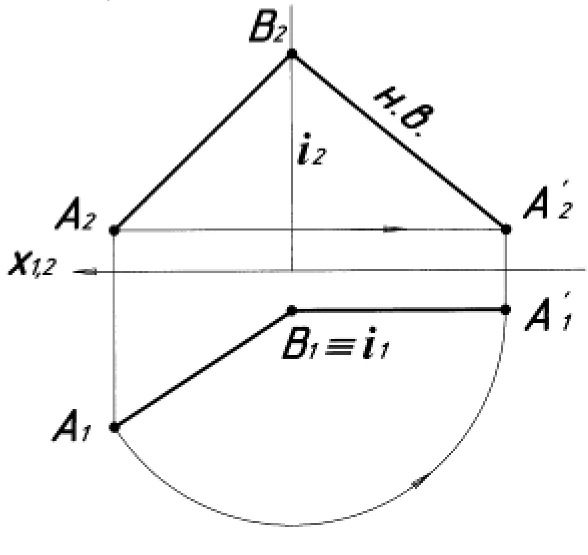


Рисунок 5.25

Задача. Послідовним обертанням навколо осей, перпендикулярних до площин проекцій, пряму ***AB*** загального положення зробити горизонта- льно-проекціювальною (рис. 5.26).

Розв'язування. Осі обертання вибирають так, щоб вони перетинали пряму AB. Цим спрощується побудова, оскільки точка прямої, що лежить на осі, буде нерухомою, а тому для визначення повернутого положення прямої залишається повернути тільки одну її точку.

Спочатку пряму AB повертають навколо вертикальної осі i до фронтального положення. Для цього достатньо повернути точку B_1 навколо центра i_1 до положення B_1 так, щоб повернута проекція A_1B_1 стала перпендикулярною до лінії зв'язку $A_1 - A_2$, і потім знайти фронтальну проекцію B'_2 точки B. З'єднують точки A_2 і B'_2. Пряма AB стала паралельною до площини Π_2, отже відрізок $A_2\, B'_2$ дорівнює натуральній величині відрізка AB, кут α дорівнює куту нахилу прямої AB до площини Π_1. Другим обер- танням навколо осі i', яка перпендикулярна до Π_2, пряму AB ставлять в положення $A'_2\, B'_2$ перпендикулярно до площини Π_1. Горизонтальна проек- ція прямої AB проекціюється на Π_1 в точку ($A'_1 \equiv B'_1$).

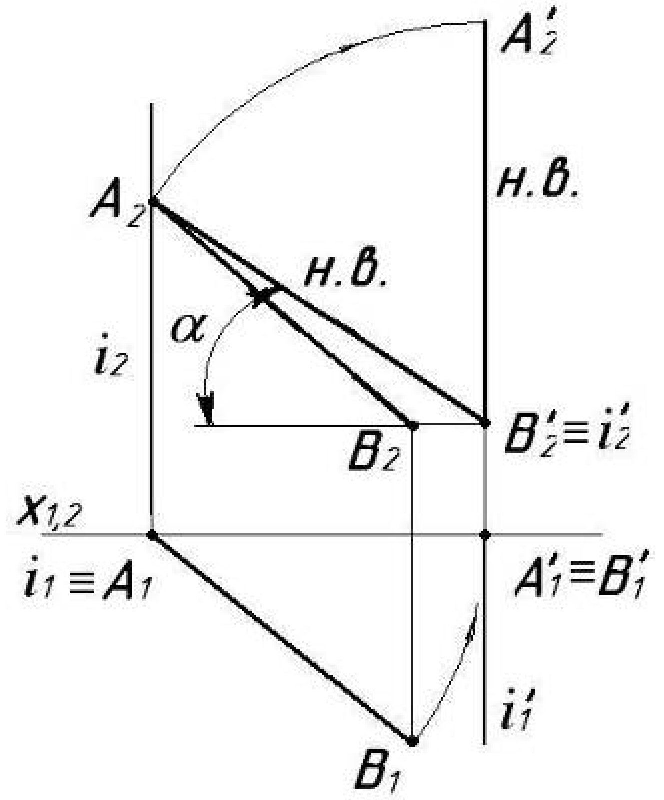


Рисунок 5. 26

На рисунку 5.27 показано приклад побудови натуральної величини площини окремого положення, що задана чотирикутником $ABCD$. Фронтальну проекцію $A_2B_2C_2D_2$ фронтально-проекціювальної площини обертають навколо осі i в положення паралельне осі $x_{1,2}$ і за допомогою ліній зв'язку на Π_1 отримують натуральну величину чотирикутника $A'_1B'_1C_1D'_1$.

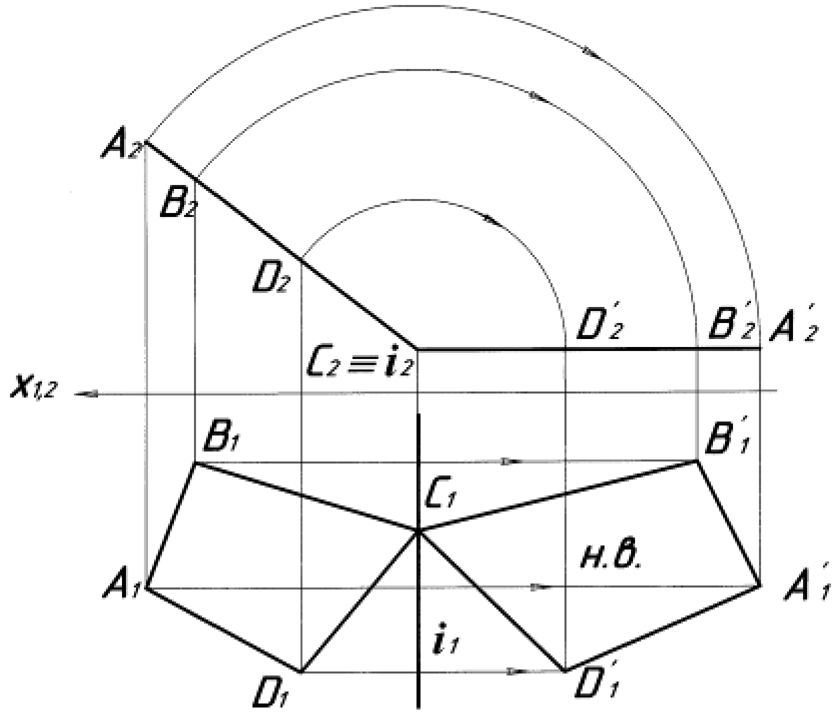


Рисунок 5.27

5.4 Спосіб обертання навколо осі, паралельної до площини проекції

На рис. 5.28 зображено відрізок прямої ***AB*** загального положення. Паралельно до площини Π_1 проводять пряму ***i***, що перетинає відрізок ***AB*** у точці ***K***. Прийнявши пряму ***i*** за ось обертання, повертають навколо неї відрізок ***AB*** так, щоб він став паралельним до площини Π_1. У повернутому положенні відрізка ***AB*** його фронтальна проекція $A'_2\,B'_2$ збігається з фронтальною проекцією i_2 осі обертання ***i***, а горизонтальна проекція A_1B_1 визначить натуральну величину відрізка ***AB***.

Побудову горизонтальної проекції $A'_1B'_1$ повернутого положення відрізка виконують так. Точки ***A*** і ***B*** при обертанні навколо осі ***i*** перемістяться в горизонтально-проекціювальних площинах α і β, перпендикулярних до осі обертання ***i*** . Таким чином, проекції A_1 і B_1 кінців відрізка ***AB*** у новому його положенні ***A'B'*** будуть на слідах відповідно α_1 і β_1 цих площин. Радіус обертання точок ***A*** і ***B*** спроекціюється на площину Π_1 при горизонтальному положенні відрізка ***AB*** в натуральну величину. За допомогою прямокутного трикутника знаходять натуральну величину радіуса r_a точки ***A*** і відкладають r_a від точки C_1 (центра обертання точки ***A***) на сліді α_1. З’єднавши отриману точку A_1 з проекцією K_1 нерухомої точки ***K*** перетину осі ***i*** з прямою ***AB***, знаходять горизонтальну проекцію прямої ***AB*** після обертання ***AB*** навколо осі ***i***. На перетині проекції A_1K_1 зі слідом β_1 маємо горизонтальну проекцію B_1 точки ***B***. Проекція A_1B_1 дорівнює натуральній величині відрізка ***AB***.

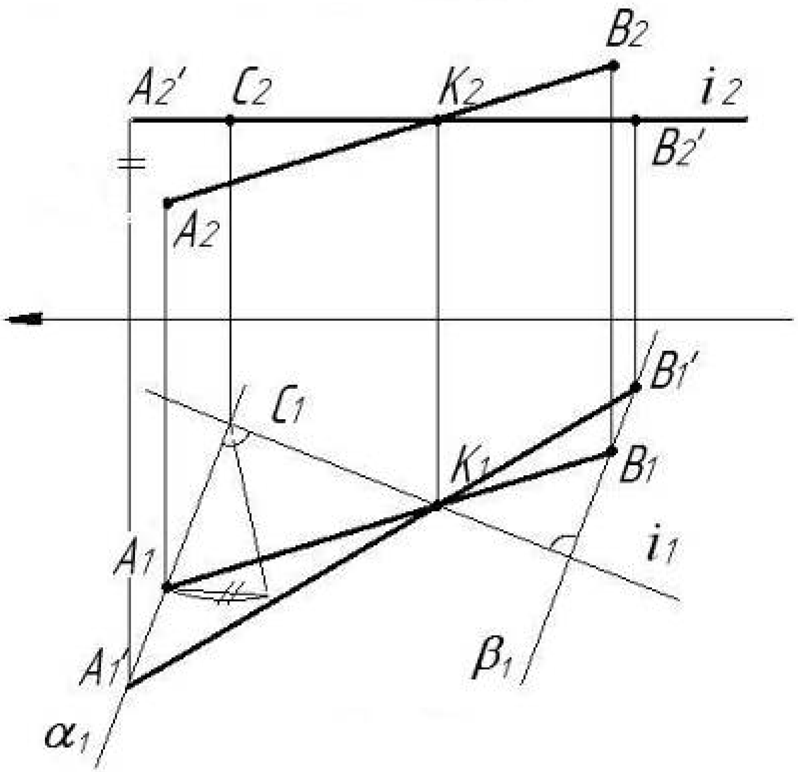


Рисунок 5.28

Побудову натуральної величини плоскої фігури способом обертання навколо осі, паралельної до площини проекцій, показано на рис. 5.29.

За допомогою цього способу трикутник ***ABC*** приведено в положення, паралельне до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$, після чого на площині $\boldsymbol{\Pi_1}$ він буде спроектованим в натуральну величину. Фронтальна проекція $\boldsymbol{A_2B_2C_2}$ трикутника ***ABC*** після обертання навколо осі ***i*** збіглась із фронтальною проекцією осі $\boldsymbol{i}_2$. Для побудови трикутника $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ із $\boldsymbol{B_1}$ на проекцію $\boldsymbol{i}_1$ осі обертання ***i*** опускають перпендикуляр. Способом прямокутного трикутника знаходять натуральну величину радіуса $\boldsymbol{r_в}$ обертання точки ***B*** і переносять її на опущений перпендикуляр (слід площини $\boldsymbol{\alpha}$). Точка $\boldsymbol{B_1}$ – проекція вершини ***B*** даного трикутника в його положенні, паралельному до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$.

Провівши через точки $\boldsymbol{B_1}$ і $\boldsymbol{K_1}$ пряму до перетину з перпендикуляром, опущеним з $\boldsymbol{C_1}$ на $\boldsymbol{i_1}$ (слідом площини $\boldsymbol{\beta}$), знаходять точку $\boldsymbol{C_1}$, яка буде горизонтальною проекцією вершини ***C*** трикутника ***ABC*** у його положенні, паралельному до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$. Вершина ***A*** трикутника нерухома як точка, що належить осі обертання. З'єднавши її проекцію $\boldsymbol{A_1}$ з проекціями $\boldsymbol{B_1}$ і $\boldsymbol{C_1}$ прямими, знаходять горизонтальну проекцію $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ трикутника ***ABC***, паралельного до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$, тобто натуральну величину трикутника ***ABC***.

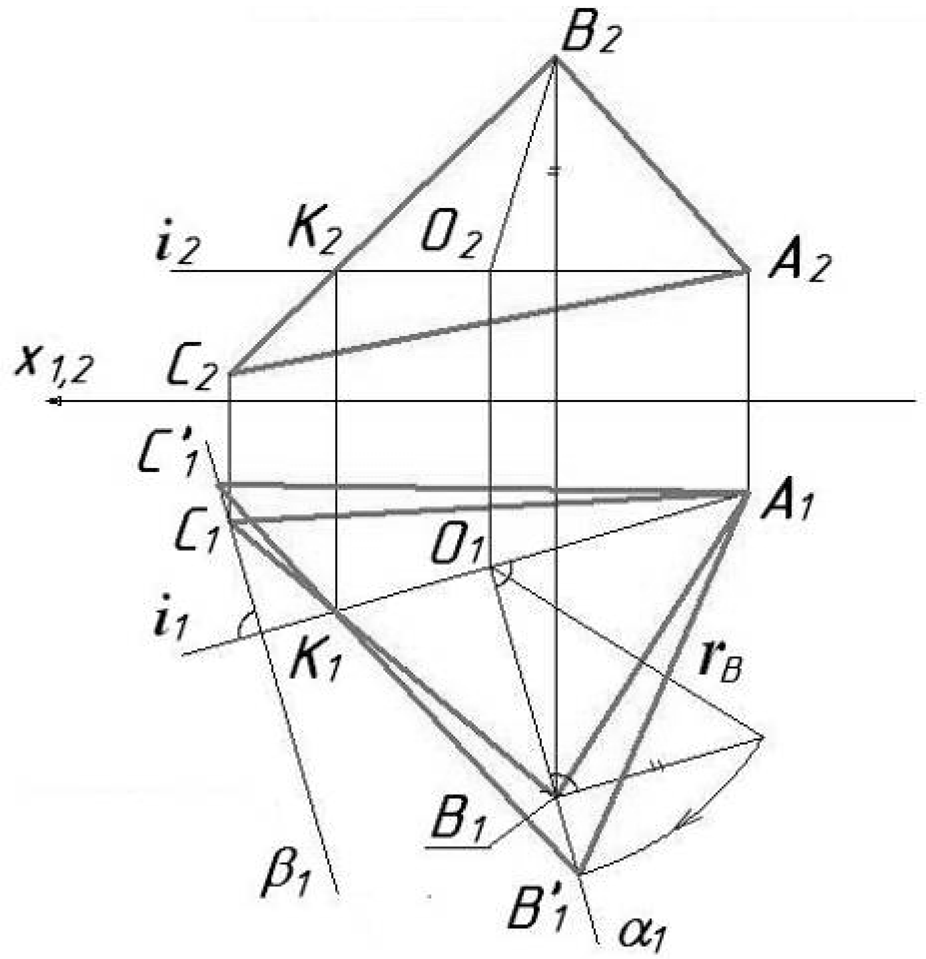


Рисунок 5.29

Запитання для самоконтролю

1. В чому сутність способу заміни площин проекцій?
2. Скільки потрібно виконати перетворень, щоб прямій загального положення надати проекціювальне положення?
3. Скільки потрібно виконати перетворень, щоб визначити натуральну величину площини загального положення?
4. В чому сутність способу плоско-паралельного переміщення?
5. В чому сутність способу обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекцій?
6. Яка з проекцій при обертанні не змінює свою величину?
7. Як рухаються точки на площинах проекцій в способі обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекцій?
8. Способом обертання самостійно визначити натуральну величину відрізка загального положення.
9. В чому сутність способу обертання навколо осі, паралельної до площини проекцій?
10. Як змінюють положення проекції точок при обертанні навколо осі, паралельної до площини $П_1$?

6 КРИВІ ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ

6.1 Криві лінії

У нарисній геометрії криві лінії важливо розглядати як твірні кривих поверхонь. Крива лінія може бути утворена переміщенням точки у просторі, перетином кривих поверхонь площиною, взаємним перетином двох поверхонь. Криві лінії бувають плоскими і просторовими.

Плоскими називаються криві лінії, всі точки яких лежать в одній площині (рис. 6.1), ***просторовими*** – криві лінії, всі точки яких не належать одній площині (рис. 6.2).

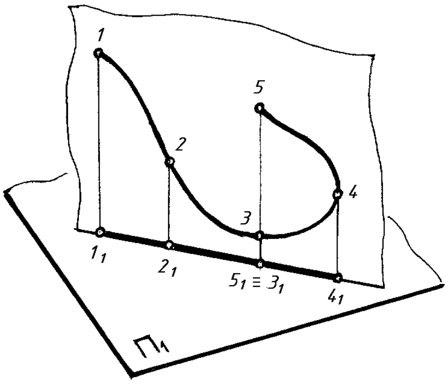


Рисунок 6.1

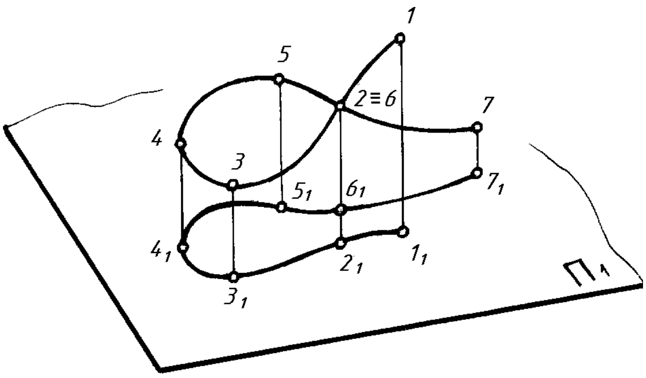


Рисунок 6.2

Циліндрична гвинтова лінія – просторова крива лінія, яка утворюється рухом точки на поверхні прямого кругового циліндра, що обертається навколо своєї осі. Побудову проекцій циліндричної гвинтової лінії показано на рисунку 6.3, де $\boldsymbol{R}$ – радіус циліндра, $\boldsymbol{h}$ – крок гвинтової лінії.

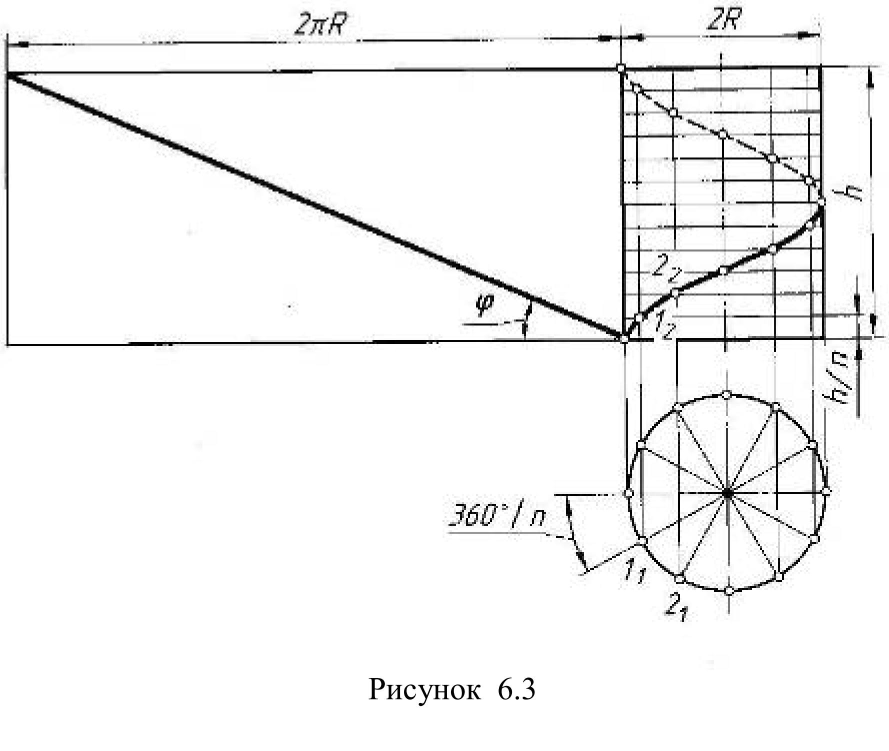


Рисунок 6.3

Зміщення точки вздовж твірної за один оберт циліндра називається кроком циліндричної гвинтової лінії. Якщо крок ***h*** постійний, тоді гвинтова лінія перетинає всі твірні циліндра під одним і тим же кутом. Гвинтова лінія буває права і ліва. На рисунку 6.3 напрям гвинтової лінії – правий. Висота циліндра, яка дорівнює кроку гвинтової лінії ***h*** розділена на 12 рівних частин: ***n*** = 12. При повороті точки на 360°/*n*, вона повинна переміститися паралельно осі циліндра на 1/ *n* кроку.

При розгортці циліндричної поверхні на площину гвинтова лінія перетворюється в пряму. Кут підйому гвинтової лінії ***j*** залежить від радіуса циліндра ***R*** і кроку ***h***: ***h*** = 2*pR tg**j***.

Конічна гвинтова лінія – просторова крива лінія, яка утворюється рухом точки на поверхні прямого кругового конуса, що обертається навколо своєї осі. Побудову проекцій конічної гвинтової лінії показано на рисунку 6.4.

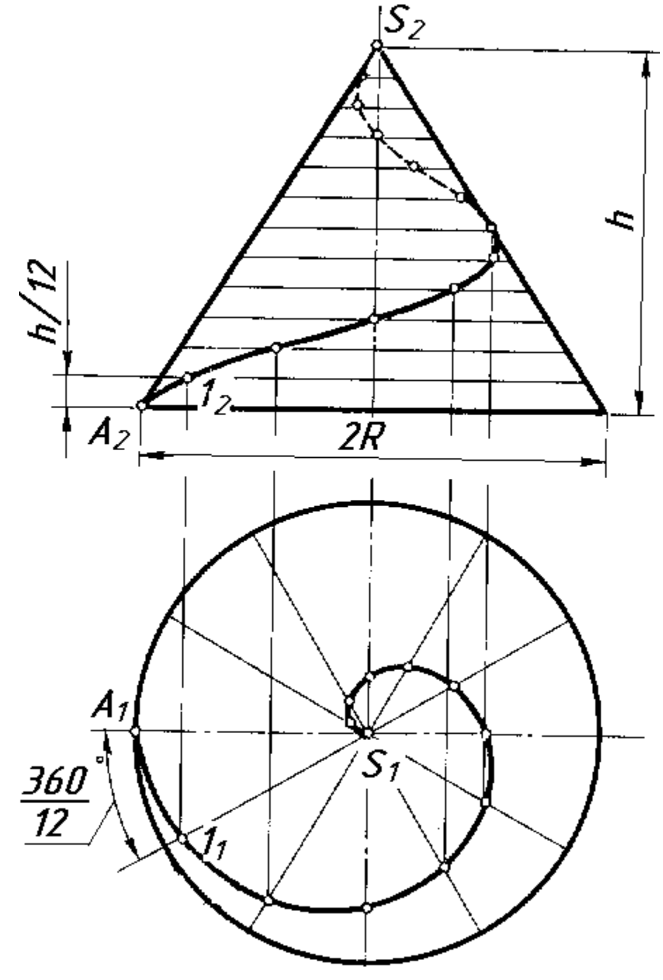


Рисунок 6.4

6.2 Класифікація кривих поверхонь

Поверхнею називають геометричне місце послідовних положень лінії (твірних), що переміщаються у просторі за якимось законом (напрямною).

Способи задання поверхонь:

1. Аналітичний 2. Каркасом 3. Кінематичний 4. Визначником.

Аналітичний спосіб задання поверхні – це задання поверхонь рівнянням. Цей спосіб вивчається в аналітичній геометрії.

Задання поверхні каркасом – це задання поверхні достатньо щільною мережею точок чи ліній, що належать цим поверхням (рис. 6.6).

Якщо каркас поверхні заданий точками, він називається точковим, якщо лініями, - лінійним. На рисунку 6.7 показано лінійний каркас, що складається з двох сімей ліній: $n_1, n_2, n_3, n_i ..., n_n$ і $m_1, m_2, m_3, m_i, ..., m_n$.

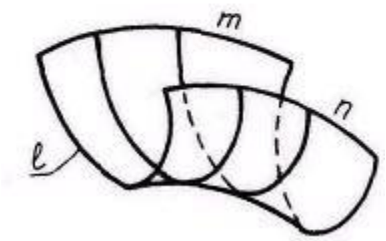


Рисунок 6.6

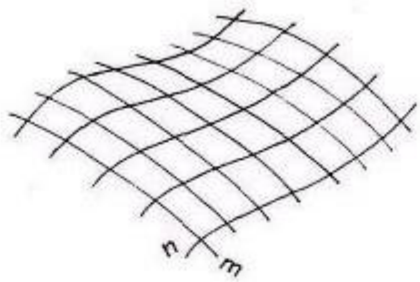


Рисунок 6.7

Кінематичний спосіб задання поверхонь в основному вивчається в курсі нарисної геометрії.

Поверхня утворюється безупинним переміщенням твірної лінії в просторі.

Твірна лінія може бути: пряма і крива; плоска і просторова; закономірна і незакономірна. Твірна в процесі переміщення може зберігати чи змінювати свою форму. У залежності від виду твірної і характеру її переміщення всі поверхні поділяються на класи.

За виглядом твірної поверхні поділяються на два класи:

прямолінійчаті – де твірною є пряма лінія;

криволінійчаті – де твірною є крива лінія.

За ознакою розгортання поверхні поділяються також на два класи:

розгортні – поверхні, що можуть бути точно сумісні з однією площиною без складок і розривів (конічні, циліндричні й інші); розгортними можуть бути тільки ті поверхні, в яких два безкінечно близьких положення твірних або паралельні між собою, або перетинаються.

нерозгортні – поверхні, які можна сумістити з однією площиною приблизно (сфера, еліпсоїд і т.д.).

За законами утворення:
закономірні – поверхні, які можна задати рівнянням; ***незакономірні*** – поверхні, які точним рівнянням описати не можна.

За способом утворення: поверхні переносу; поверхні обертання; гвинтові поверхні.

Крім графічного способу поверхню можна задати ***визначником.***

Визначником називається сукупність параметрів, що відрізняють дану поверхню від усіх інших. Визначник має геометричну й алгоритмічну частини ***Ф*[(Г),(А)]**.

Геометричною частиною визначника поверхні є геометричні фігури, за допомогою яких зв'язуються параметри множини ліній простору. Алгоритмічна частина характеризує закон руху твірної.

Для більшої наочності ряд поверхонь звичайно задаються обрисом.

Обрис поверхні – це проекція контурної лінії поверхні, тобто лінія, що обмежує дану поверхню на кресленні і розділяє видиму її частину від невидимої.

Класифікацію поверхонь показано на рис. 6.5.

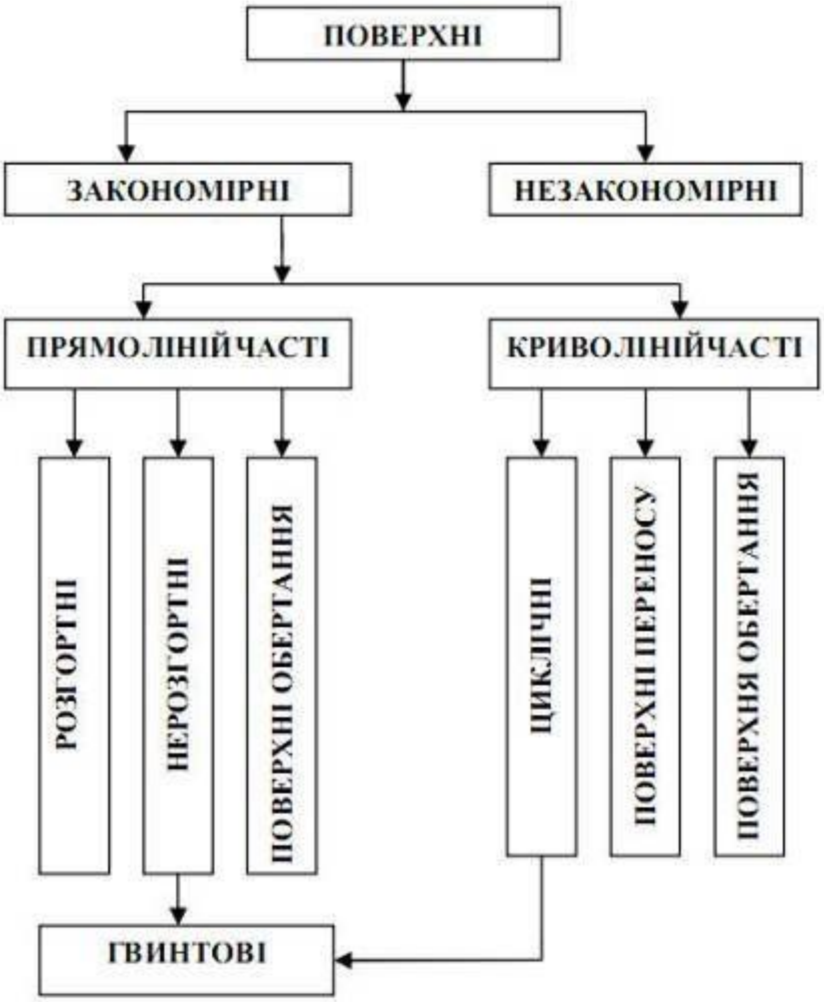


Рисунок 6.5

6.3 Циліндрична поверхня

Циліндричною поверхнею називається поверхня, яка утворена переміщенням прямої твірної по кривій напрямній (рис. 6.8). Всі твірні паралельні між собою.

Визначник циліндричної поверхні: $\Phi = [(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})\ (\forall \boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m};\ \forall \boldsymbol{l}^k \parallel \boldsymbol{l}^1)]$,

де: $\boldsymbol{l}$ – твірна, пряма лінія,

$\boldsymbol{m}$ – напрямна, крива просторова лінія,

$\boldsymbol{S}^{\infty}$– невласна точка.

6.4 Конічна поверхня

Конічна поверхня утворюється шляхом переміщення прямої твірної лінії по кривій напрямній (рис. 6.9). Всі твірні перетинаються в одній точці. Ця точка називається вершиною конічної поверхні (власна точка).

Визначник конічної поверхні: $\Phi = [(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{S})(\forall \boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m};\ \forall \boldsymbol{l} \supset \boldsymbol{S})]$,

де: $\boldsymbol{l}$ – твірна, пряма лінія,

$\boldsymbol{m}$ – напрямна, крива лінія,

$\boldsymbol{S}$ – вершина (власна точка).

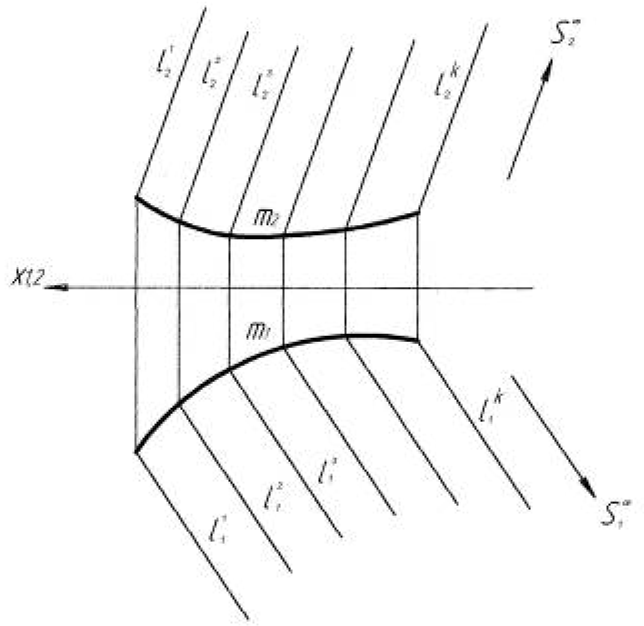


Рисунок 6.8

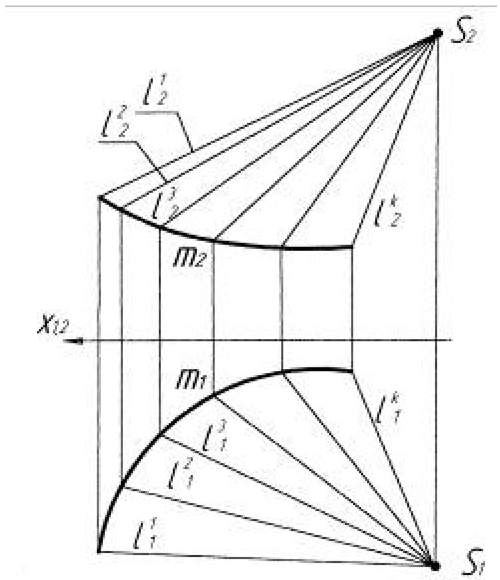


Рисунок 6.9

6.5 Поверхня з ребром звороту

Поверхня з ребром звороту (торс) утворюється переміщенням твірної, яка у всіх своїх положеннях є дотичною до напрямної (просторової кривої лінії). Визначник торсової поверхні: $\Phi = [(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})\ (\forall \boldsymbol{l} \cup \boldsymbol{m})]$,

де: $\boldsymbol{l}$ – твірна, пряма лінія,

$\boldsymbol{m}$ – напрямна, крива лінія.

Крива напрямна називається ребром звороту. Приклад поверхні показано на рисунку 6.10.

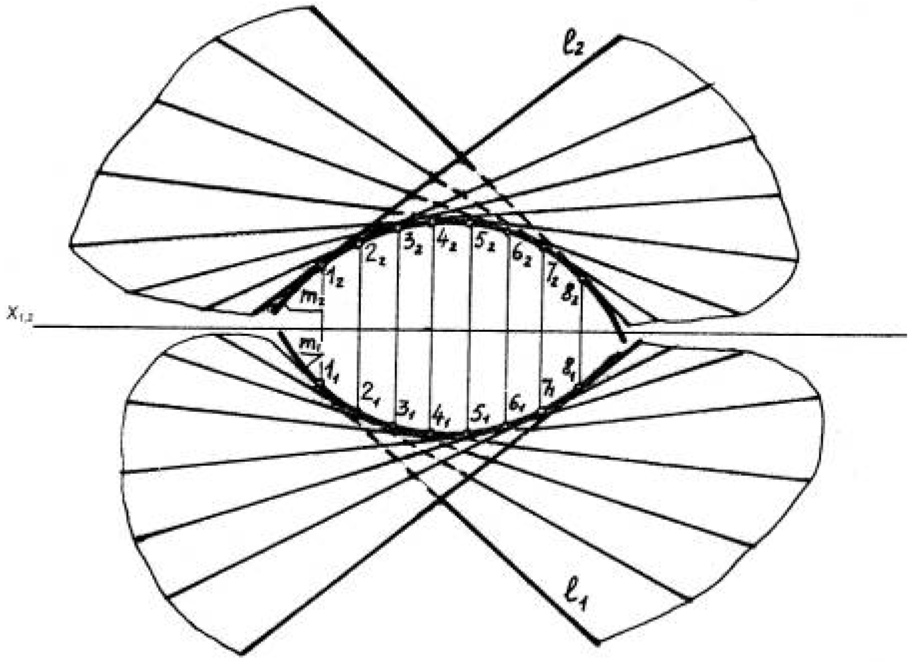


Рисунок 6.10

6.6 Поверхні з двома напрямними лініями

Ця група поверхонь має дві напрямні. Твірна (пряма лінія) безперервно переміщується по двох напрямних і залишається паралельною до площини, яка називається площиною паралелізму. Площиною паралелізму може бути проекціювальна площина, або площина рівня, а також площина проекції. Ця група поверхонь називається “Поверхні з площиною паралелізму”. Їх ще називають поверхнями Каталана.

Є три поверхні Каталана:

- ***коса площина (гіперболічний параболоїд),***
- ***коноїд,***
- ***циліндроїд.***

Визначник поверхонь Каталана: $\Phi = [(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\square\ )\ (\forall \boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m},\boldsymbol{n};\ \forall \boldsymbol{l} \parallel \square\ )]$,

де: $\boldsymbol{l}$ – твірна, пряма лінія,

$\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ – напрямні, криві або прямі лінії,

$\square$ – площина паралелізму.

6.6.1 Гіперболічний параболоїд

Гіперболічний параболоїд відноситься до групи поверхонь з площиною паралелізму. У цієї поверхні обидві напрямні $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$ мимобіжні прямі лінії (рис. 6.11).

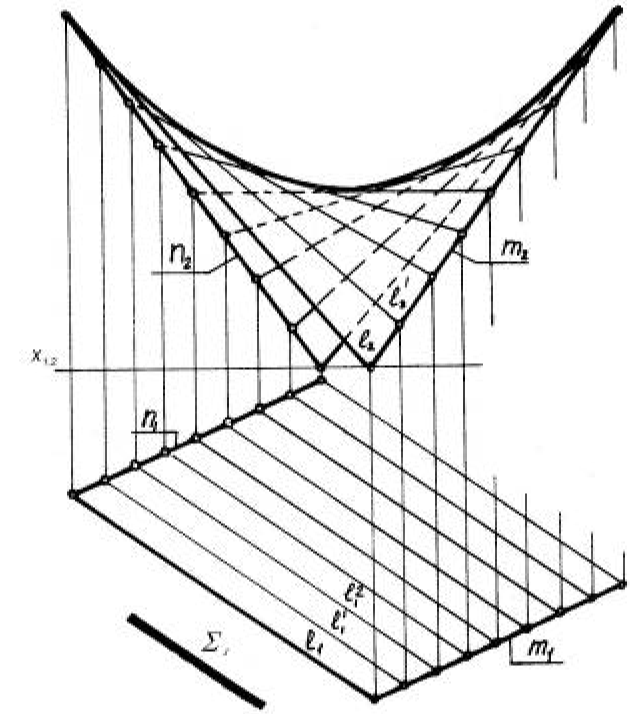


Рисунок 6.11

6.6.2 Коноїд

Коноїд відноситься до групи поверхонь з площиною паралелізму. У коноїда одна напрямна – пряма лінія, друга напрямна – крива лінія (рис.6.12).

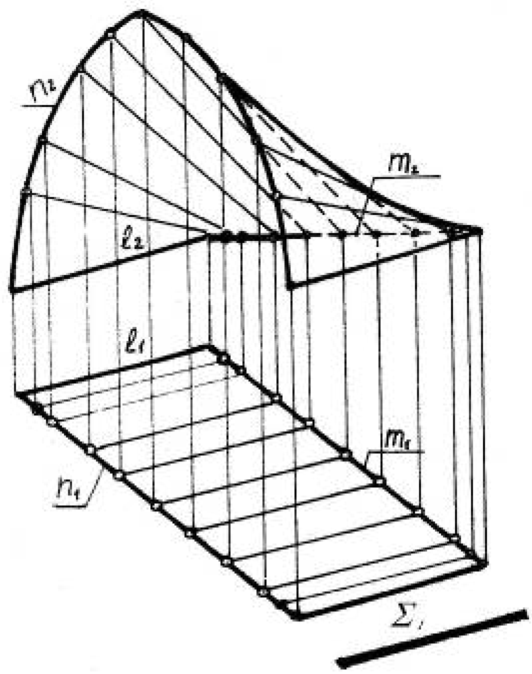


Рисунок 6.12

6.6.3 Циліндроїд

Циліндроїд відноситься до групи поверхонь з площиною паралелізму. У циліндроїда обидві напрямні – криві лінії (рис. 6.13).

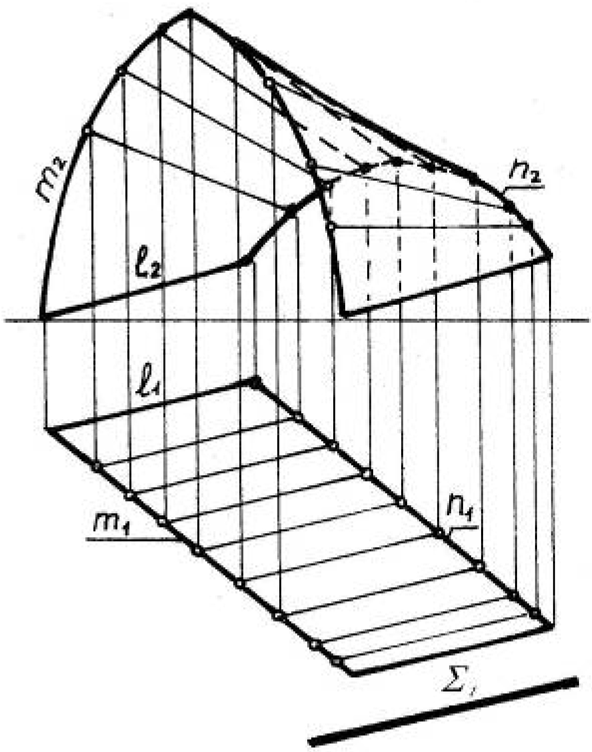


Рисунок 6.13

6.7 Поверхні обертання

6.7.1 Прямолінійчаті поверхні обертання.

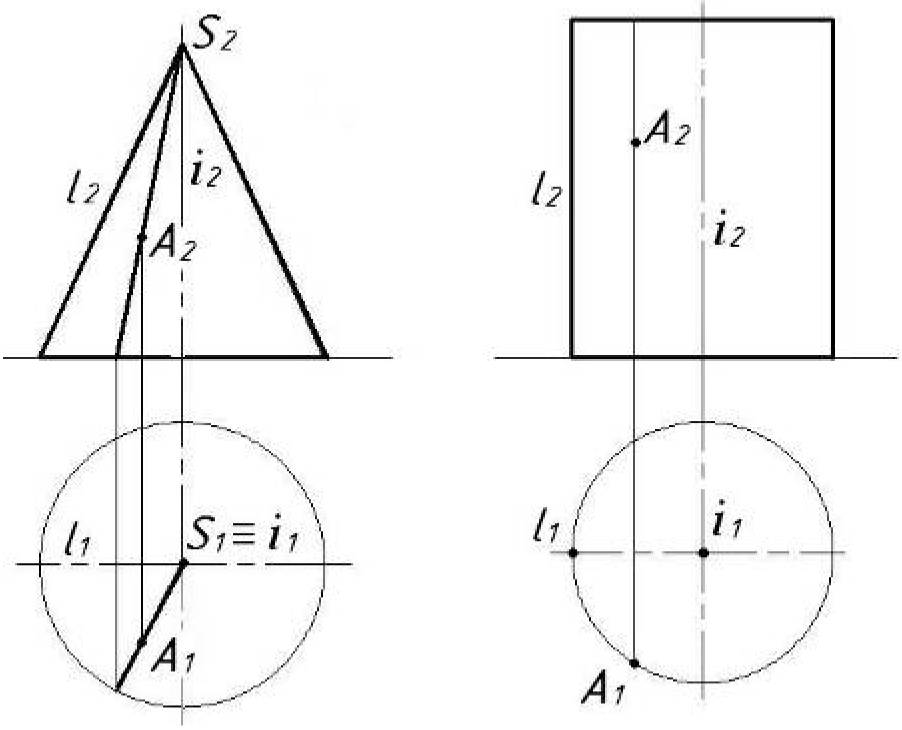
Прямолінійчатою поверхнею обертання називається поверхня утворена обертанням твірної (прямої лінії) навколо нерухомої осі.

Розглянемо три випадки:

1. Твірна пряма ***l*** та вісь ***i*** перетинаються – круговий конус (рис. 6.14,а).

2. Твірна пряма ***l*** паралельна до осі обертання – круговий циліндр (рис. 6.14,б).

3. Твірна пряма ***l*** мимобіжна з віссю обертання ***i*** – однополосний гіперболоїд обертання (рис.6.15).



а) б)

Рисунок 6.14

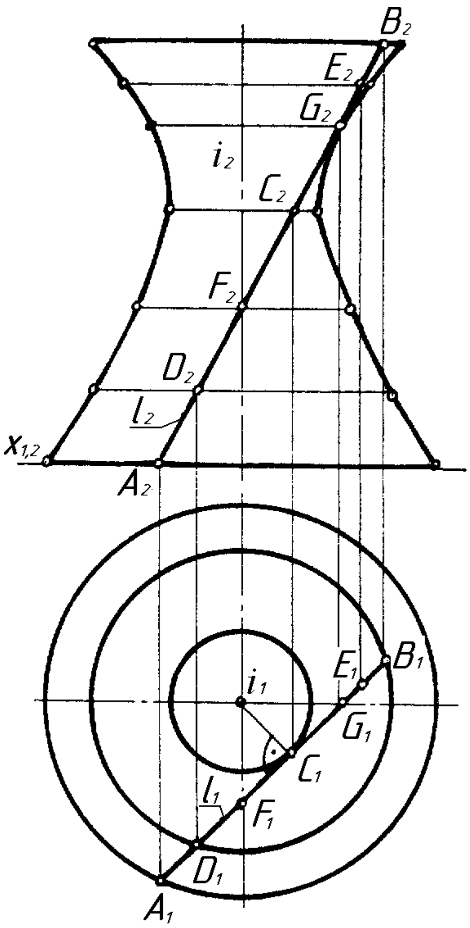


Рисунок 6.15

6.7.2 Криволінійчаті поверхні обертання

У криволінійчатих поверхонь твірна – крива лінія.

Поверхні, які утворені обертанням твірної лінії навколо нерухомої осі, називають поверхнями обертання. Твірна може бути кривою як плос- кою, так і просторовою.

Визначник поверхонь обертання: Ф = [(***l***,***i***) (***l*** $\circlearrowleft$ ***i***)]

де: ***l*** – твірна (пряма або крива лінія),

i – вісь обертання

До поверхонь обертання відносяться:

1. ***Сфера***.
2. ***Тор***.
3. ***Еліпсоїд*** обертання.
4. ***Параболоїд*** обертання.
5. ***Гіперболоїд*** обертання.

Кола на поверхні обертання називаються ***паралелями*** (рис.6.16, 6.17). Паралель утворюється площиною, яка перетинає поверхню перпендикулярно до осі обертання. При обертанні твірної кожна точка на ній описує коло з центром на осі обертання ***і***.

Паралель, діаметр якої більший за діаметр інших паралелей називається ***екватором*** (рис.6.16, 6.17).

Паралель, діаметр якої менший за діаметри інших паралелей називається ***горлом*** (рис.6.16, 6.17).

У загальному випадку поверхня обертання може мати кілька екваторів і горловин. Площини, що проходять через вісь обертання, називаються меридіональними, а лінії, по яких вони перетинають поверхню – ***меридіанами .***

Меридіональна площина ***Σ***, паралельна площині проекцій, називається головною меридіональною площиною, а лінія її перетину з поверхнею обертання – ***головним меридіаном*** (рис.6.16, 6.17).

На рисунку 6.17 наведено приклад поверхні обертання загального вигляду, де побудовані ці лінії, а також побудована крива лінія ***l*** на цієї поверхні. Окремі точки ***A***, ***E***, ***B***, ***N***, ***C***, ***D***, що належать поверхні, будують за допомогою паралелей, з’єднують і отримують криву лінію ***l***.

Рисунок 6.16

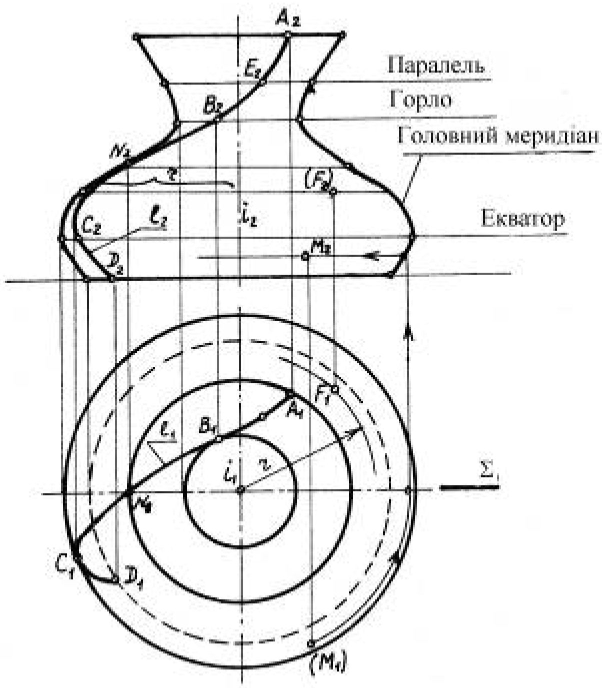


Рисунок 6.17

Розглянемо деякі поверхні обертання:

1. Сфера.

Поверхня сфери утворюється при обертанні кола навколо осі (діаметра) (рис.6.18). Сферу можна розглядати як окремий випадок тора.

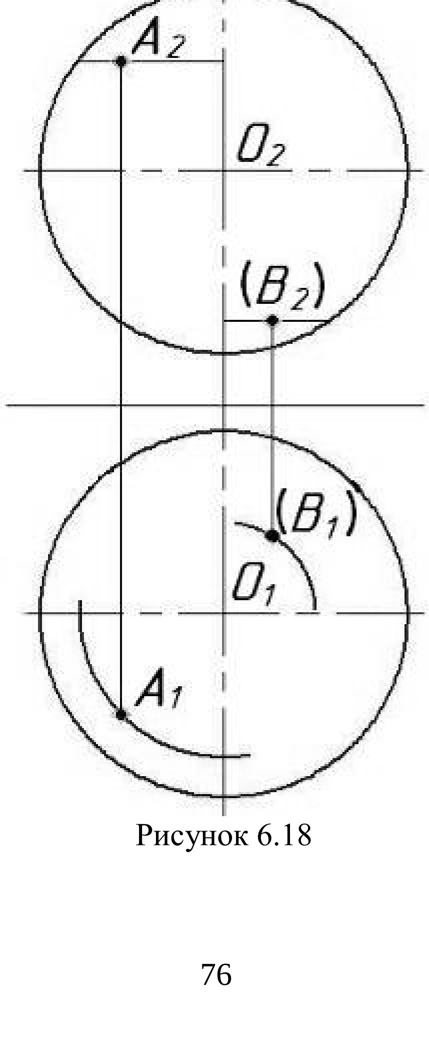


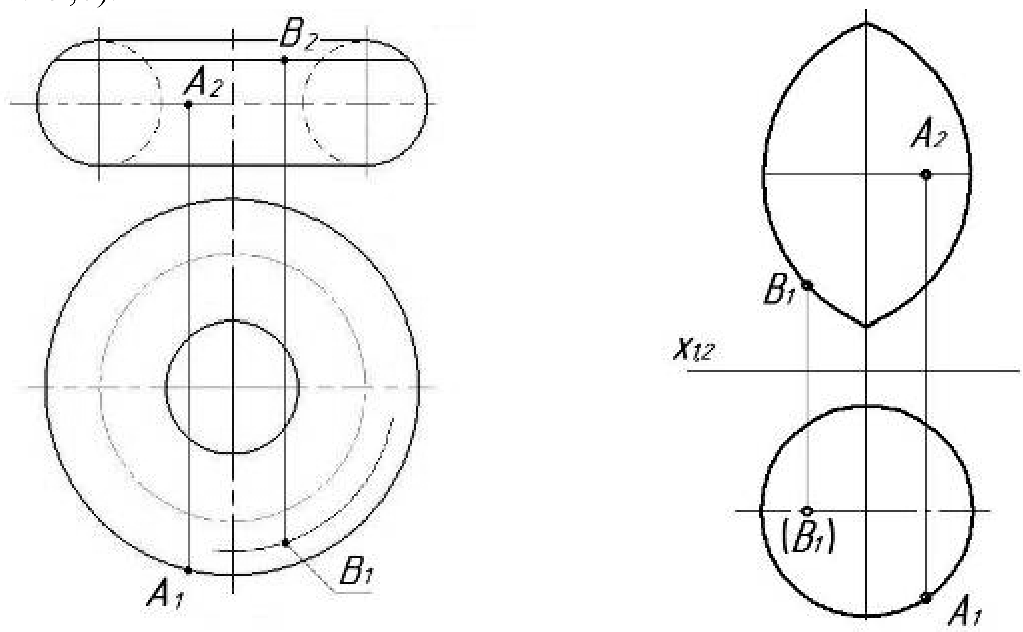
Рисунок 6.18

2. Тор.

Поверхня тора утворюється при обертанні твірного кола навколо осі ***i***. Відомі два види тора:

а) відкритий – твірне коло не перетинає ось обертання (рис.6.19,а);

б) закритий – твірне коло перетинається з віссю обертання (рис.6.19,б).



а) б)

Рисунок 6.19

3. **Еліпсоїд** обертання.

Поверхня еліпсоїда обертання утворюється при обертанні еліпса навколо його осі (рис.6.20).

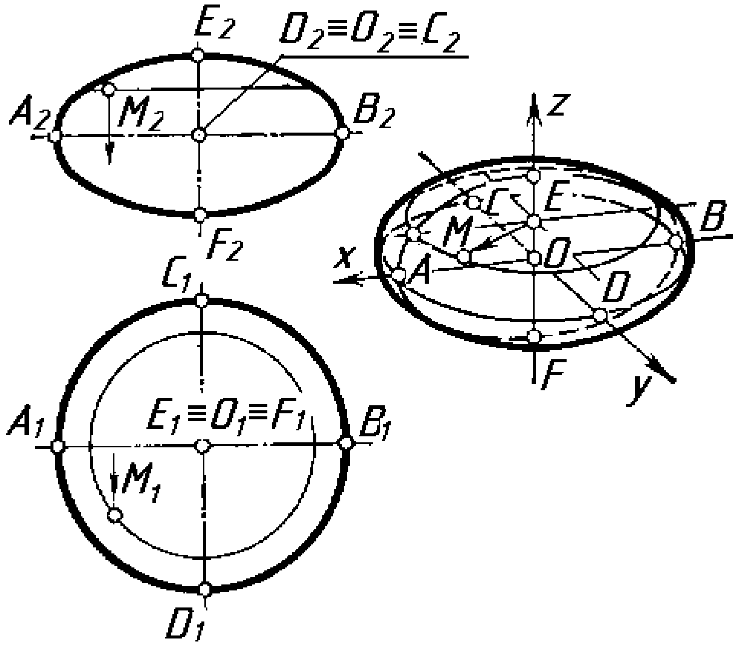


Рисунок 6. 20

4. **Параболоїд** обертання.

Поверхня параболоїда обертання утворюється при обертанні параболи навколо її осі (рис.6.21).

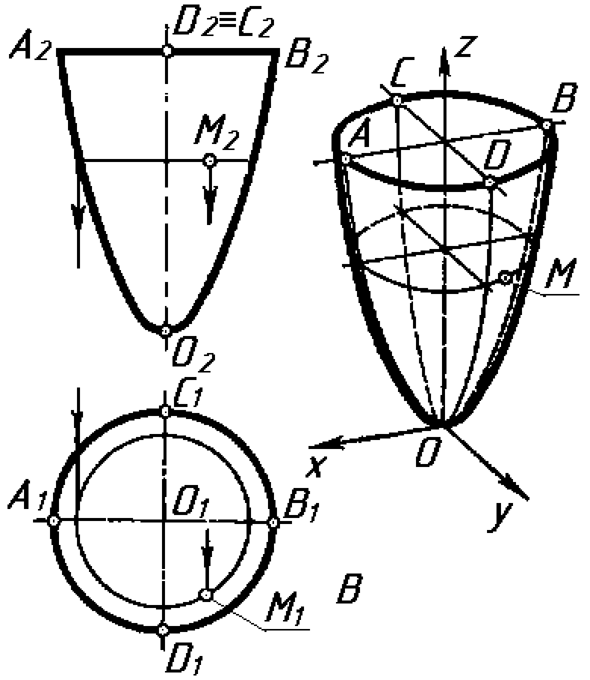


Рисунок 6.21

5. **Гіперболоїд** обертання.

Однополосний гіперболоїд обертання утворюється при обертанні гіперболи навколо її уявної осі (рис.6.22), а двополосний – при обертанні гіперболи навколо її дійсної осі (рис.6.23).

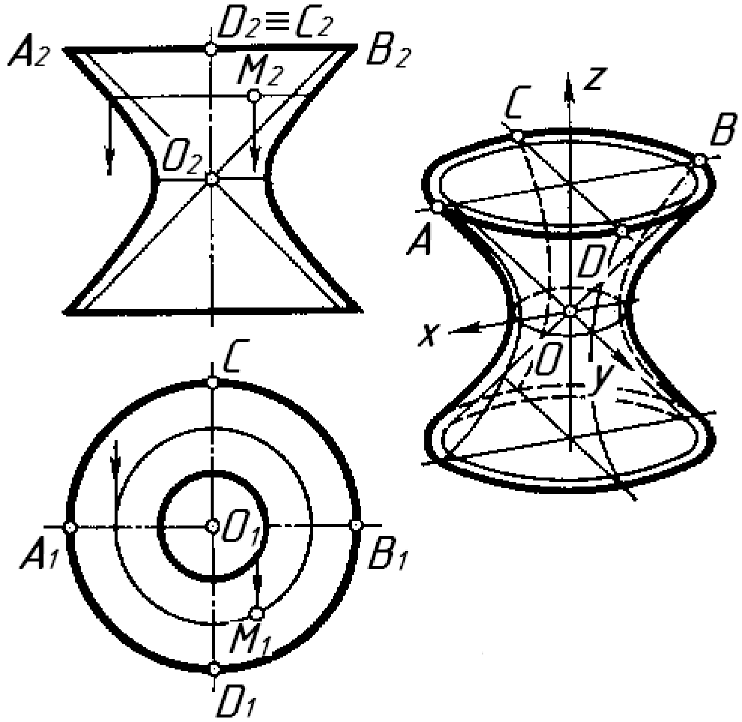


Рисунок 6.22

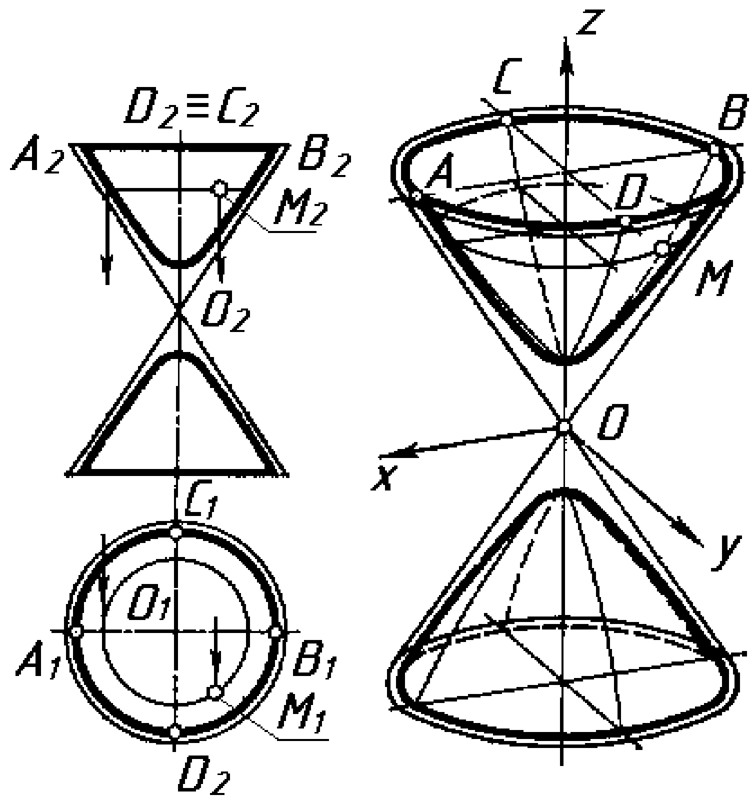


Рисунок 6.23

6.8 Гвинтові поверхні

Гвинтові поверхні утворюються гвинтовим рухом твірної по гвинтовій напрямній лінії. Лінійчаті гвинтові поверхні називаються гелікоїдами.

Визначник гвинтових поверхонь: $\Phi = [(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})\ (\forall \boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m})]$

де: ***l*** – твірна, пряма лінія (може бути і крива),

m – напрямна, гвинтова лінія,

n – друга напрямна гвинтова лінія (для відкритих гелікоїдів),

i – нерухома пряма (вісь)

1. ***Прямий закритий гелікоїд***. Утворюється рухом прямої твірної по двох напрямних. Одна напрямна – гвинтова лінія, друга – вісь гвинтової лінії. Твірна перетинає вісь гвинтової лінії під прямим кутом (рис. 6.24).

2. ***Косий закритий гелікоїд***. Утворюється рухом прямої твірної по двох напрямних. Одна напрямна – гвинтова лінія, друга – вісь гвинтової лінії. Твірна перетинає вісь гвинтової лінії і має постійний кут нахилу до неї (рис. 6.25).

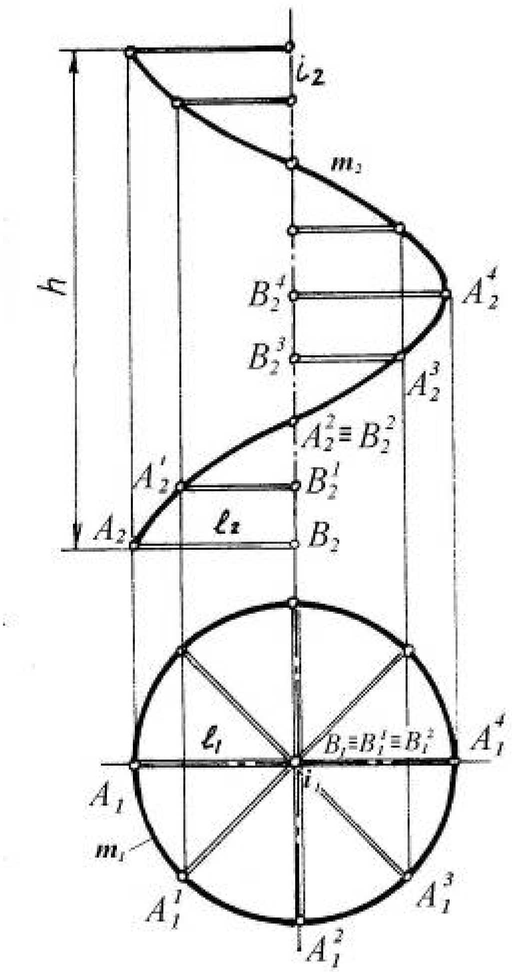


Рисунок 6.24

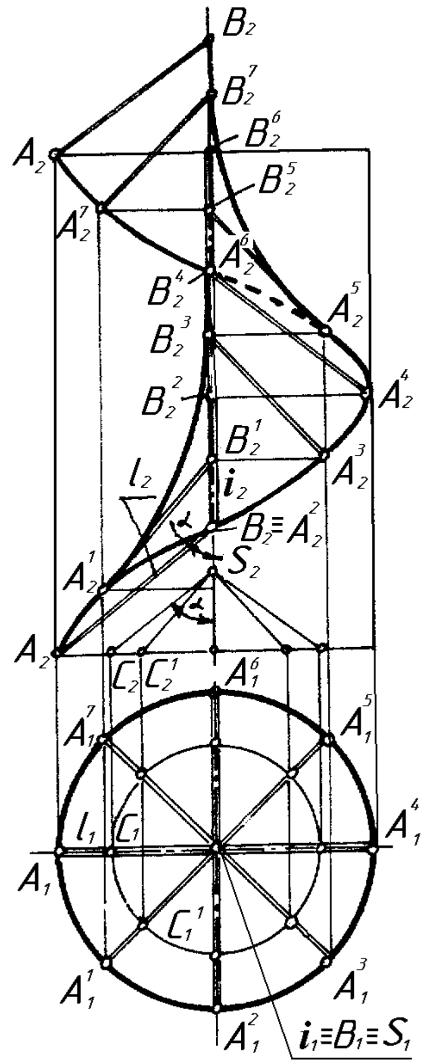


Рисунок 6.25

3. ***Прямий відкритий гелікоїд***. Твірна пряма лінія з віссю не перетинається і рухається по двох кривих напрямних (рис. 6.26).

4. ***Косий відкритий гелікоїд***. У цієї поверхні кут між твірною прямою лінією і віссю не дорівнює 90° (рис. 6.27).

5. ***Розгорнутий гелікоїд*** (торс). У цієї поверхні твірна (пряма лінія) дотична до напрямної гвинтової лінії (рис. 6.28).

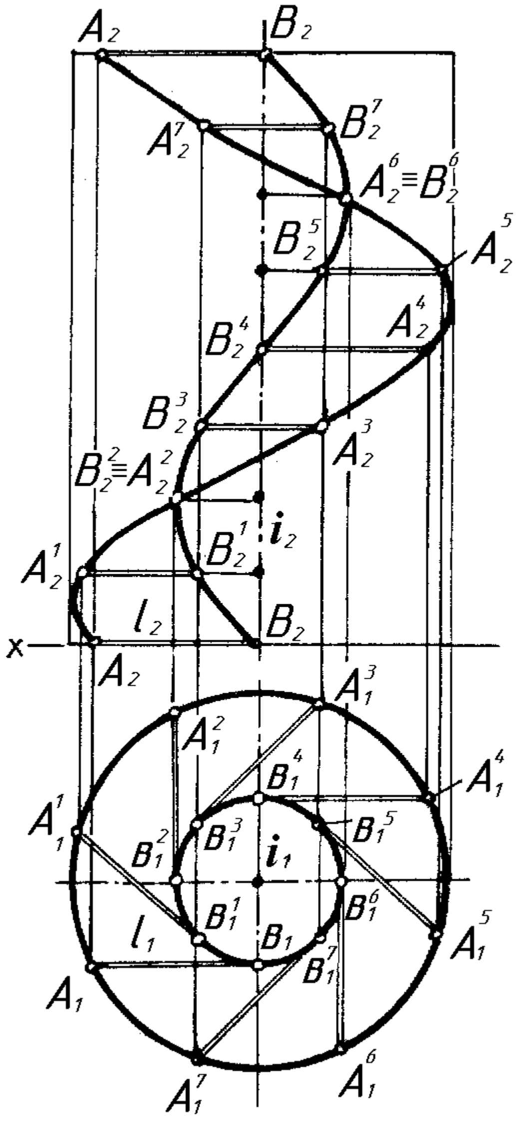


Рисунок 6.26

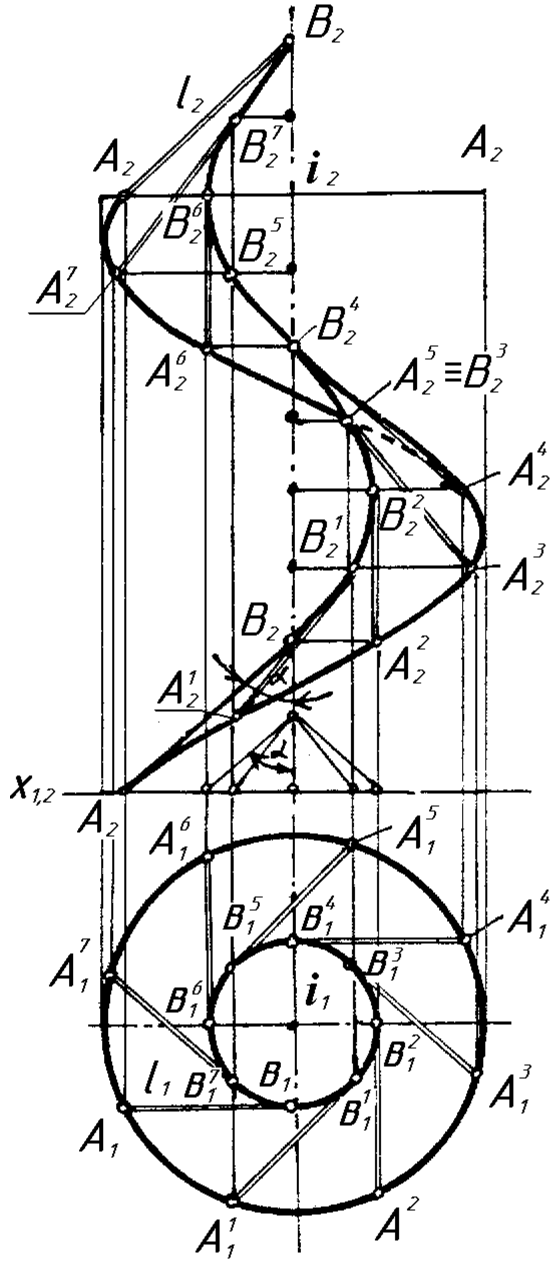
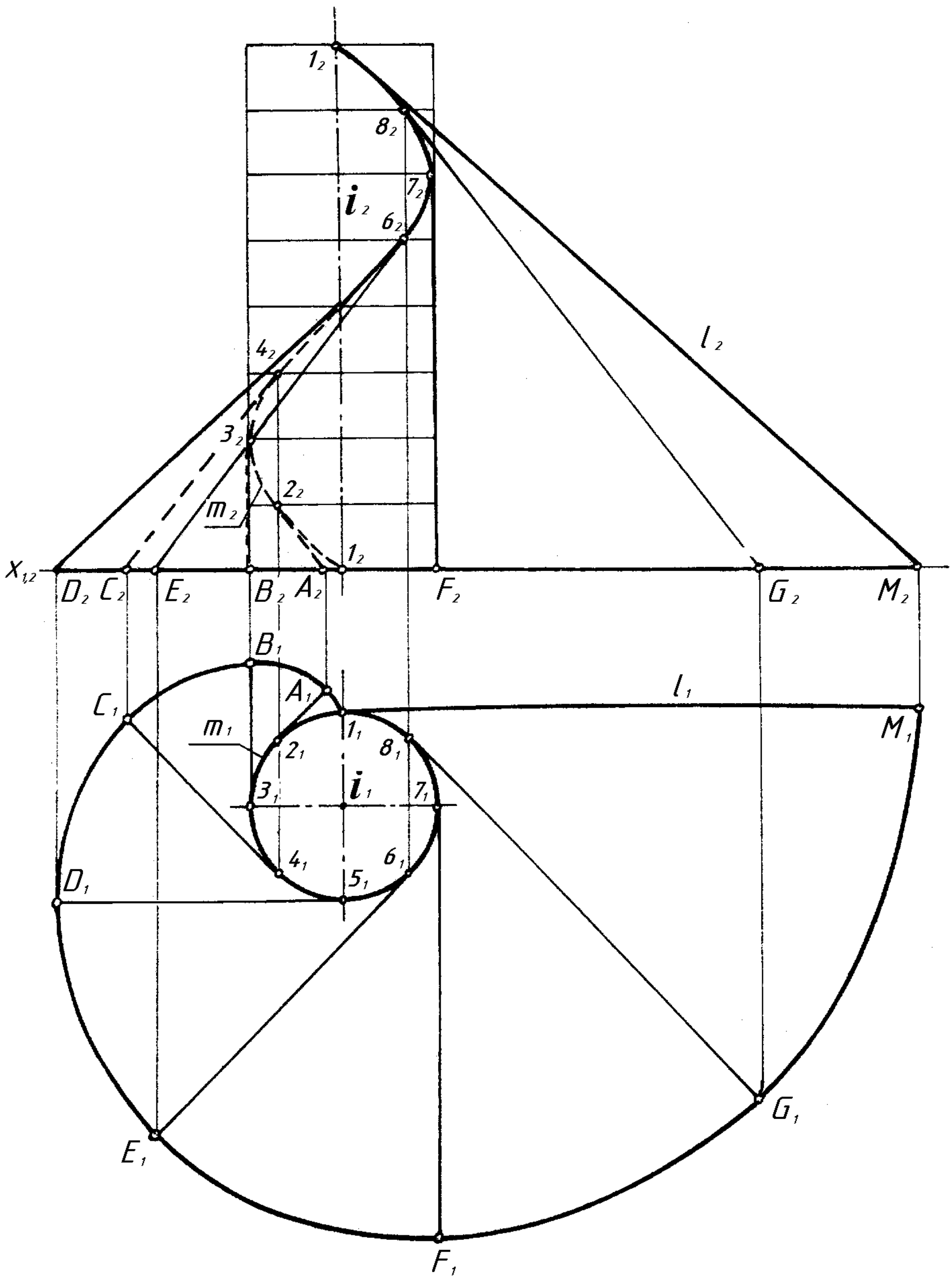


Рисунок 6.27



1₂
8₂
7₂
i₂
6₂
l₂
4₂
3₂
2₂
m₂
1₂
X₁,₂
D₂ C₂ E₂ B₂ A₂ F₂ G₂ M₂
B₁
A₁
l₁
C₁
m₁
1₁
M₁
2₁
8₁
3₁
i₁
7₁
4₁
6₁
D₁
5₁
G₁
E₁
F₁

Рисунок 6.28

6.9 Циклічні поверхні

Циклічними називаються поверхні, утворені переміщенням кола постійного або змінного радіуса по напрямній лінії, що проходить через центр кола. До циклічних належать каналові й трубчасті поверхні. Канало- ва поверхня утворюється рухом кола змішаного радіуса по кривій напрям- ній, при цьому площина кола в будь-якому положенні перпендикулярна до напрямної (рис. 6.29).

Трубчаста поверхня відрізняється від каналової тим, що радіус твірного кола або твірної сфери постійний (рис. 6.30).

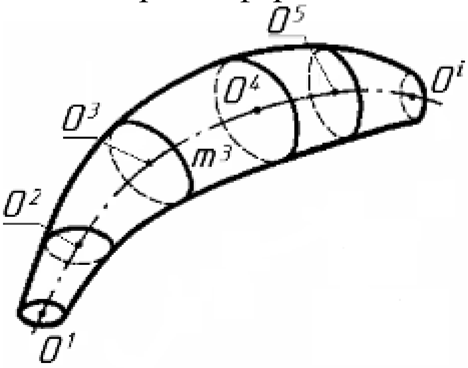


Рисунок 6.29

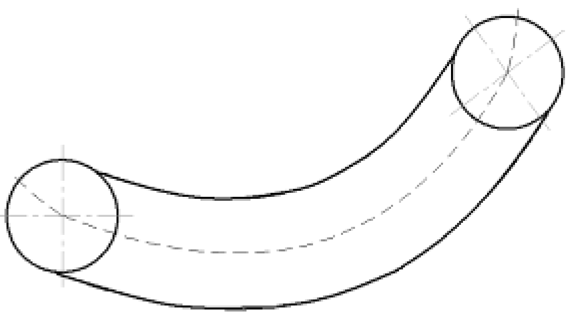


Рисунок 6.30

6.10 Поверхні переносу

Поверхня переносу утворюється безперервним поступальним переміщенням твірної кривої лінії, яка в кожному новому положенні залишається паралельною до первісного. На рис. 6.31 поверхню переносу задано початковим положенням твірної ***ABC*** і напрямом переносу ***s***. Криві лінії ***ABC***, $\boldsymbol{A_1}$ $\boldsymbol{B_1}$ $\boldsymbol{C_1}$, … являють собою ряд положень твірної лінії й визначають сітку поверхні переносу.

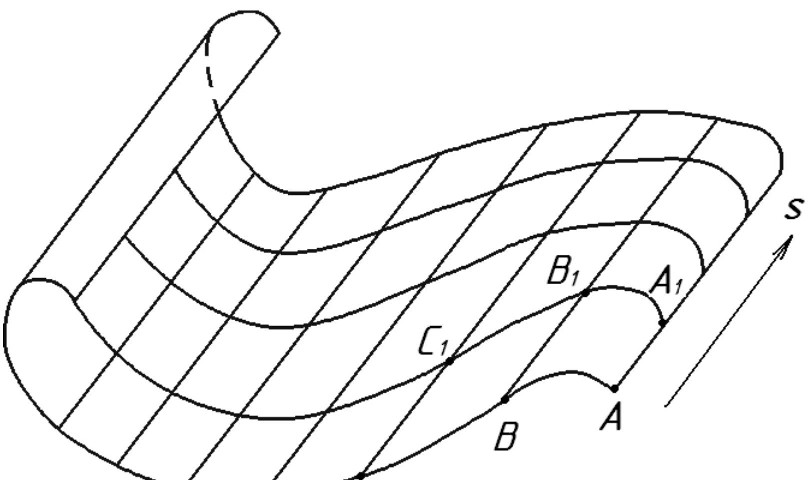
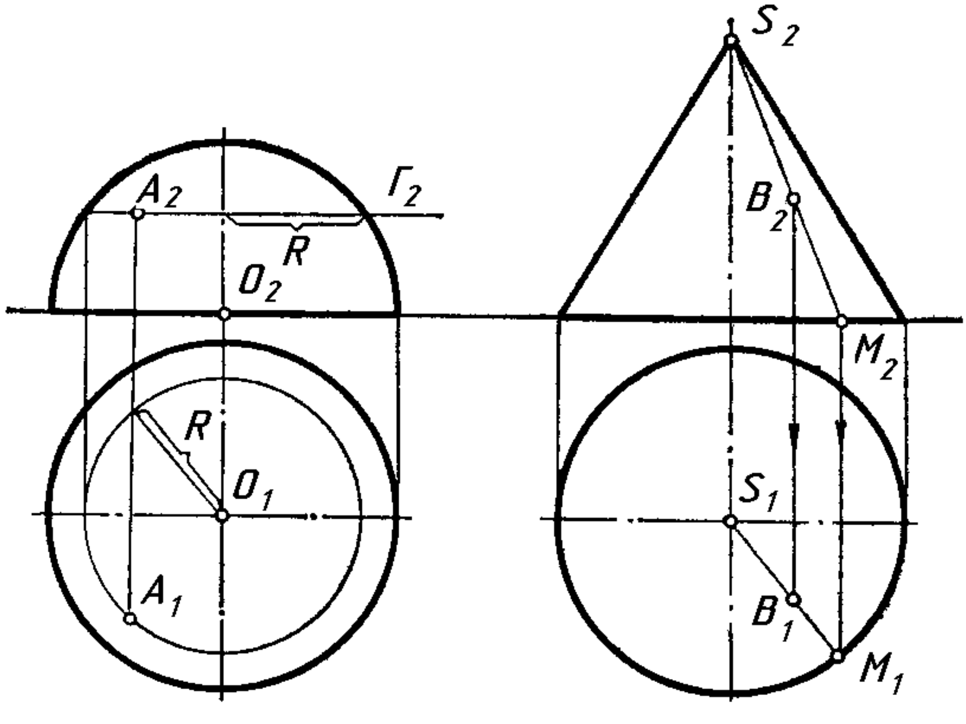


Рисунок 6.31

6.11 Точка і лінія на кривій поверхні

Точка належить поверхні, якщо вона лежить на лінії (прямій або кривій), яка належить цій поверхні. Для побудови точки ***A*** на криволінійчатій поверхні обертання, вісь обертання якої перпендикулярна до Π_1, через фронтальну проекцію точки проводять паралель (рис. 6.32,а). На Π_2 ця паралель відображається в пряму лінію перпендикулярну до осі обертання. Потім паралель проекціюють на Π_1, де вона зображається у вигляді кола. Радіус паралелі ***R*** вимірюють від осі обертання до контура поверхні. Із фронтальної проекції точки ***A*** проводять вертикальну лінію зв'язку на горизонтальну проекцію паралелі і отримують проекцію точки A_1 на Π_1. На прямолінійчатих поверхнях точки будують за допомогою прямих ліній, що утворюють поверхню. На рисунку 6.32,б показано приклад побудови точки ***B*** на поверхні прямого кругового конуса. Через фронтальну проекцію точки B_2 проводять твірну лінію, яка проходить через вершину S_2 і перетинає основу конуса (коло) в точці M_2. Потім будують горизонтальну проекцію твірної $S_1 M_1$ і знаходять на неї горизонтальну проекцію точки B_1.



а) б)

Рисунок 6.32

На рисунку 6.33 показано приклад побудови точок на поверхні нахиленого конуса (загального вигляду). Точки ***1***, ***2***, ***3***, ***4*** будують за допомогою прямих твірних ліній, які проходять через вершину конуса і перетинають основу – напрямну криву лінію (коло).

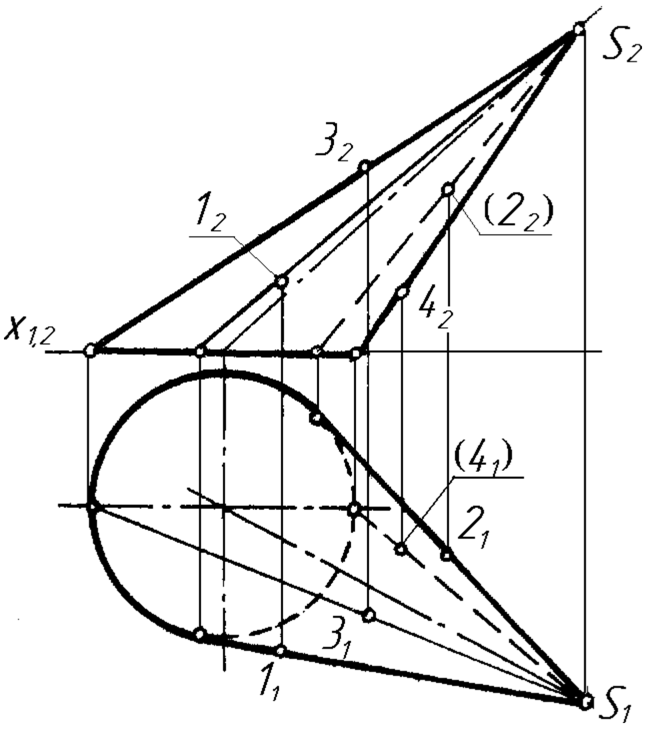


Рисунок 6.33

На рисунку 6.34 показано приклад побудови точок ***1***, ***2***, ***3***, ***4*** на поверхні нахиленого циліндра. Проекції точок також будують за допомогою прямих твірних ліній, які паралельні між собою.

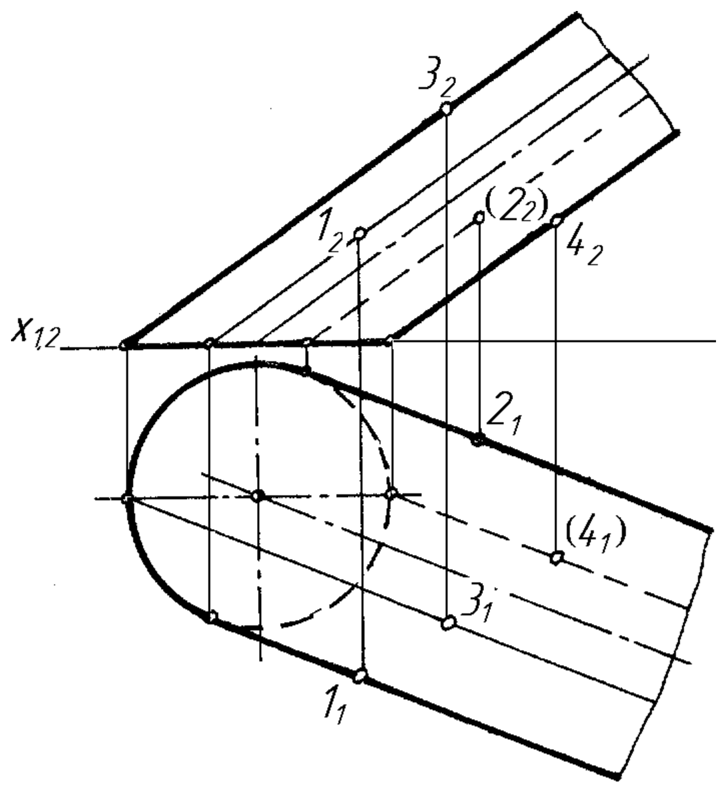


Рисунок 6.34

На рисунках 6.35 та 6.36 показано приклад побудови точок на криволінійчатих поверхнях, які мають назву відкритий тор і закритий тор.

На поверхні відкритого тора (рис. 6.35) точки будують за допомогою паралелі (кола), яку проводять через точки ***M*** і ***N***.

На поверхні закритого тора (рис. 6.36) побудована крива лінія ***l***, яка проходить через точки ***1***, ***2***, ***3***. Точки будують також за допомогою паралелей.

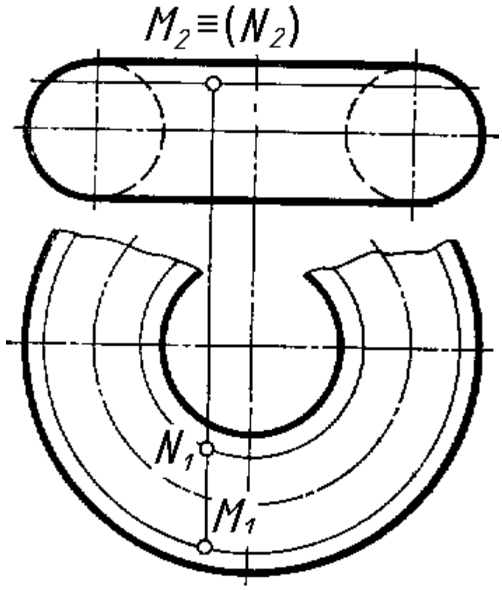


Рисунок 6.35

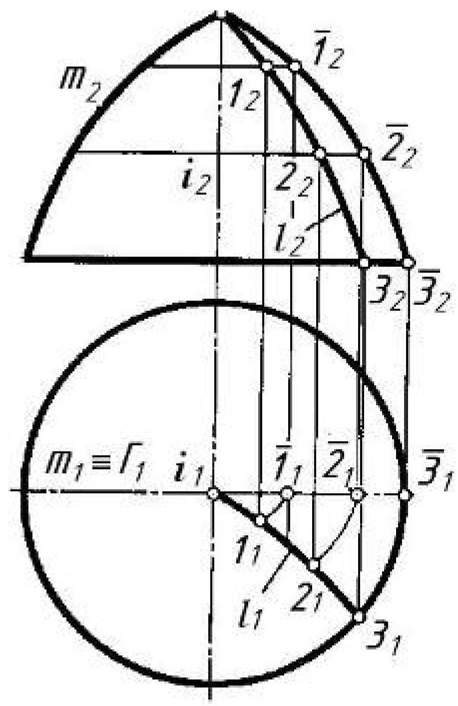


Рисунок 6.36

7 ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ

При перерізах поверхонь площиною утворюється плоска крива лінія, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркаса поверхні з січною площиною. Для побудови точок лінії перерізу можуть бути застосовані метод допоміжних січних площин та методи перетворення площин проекцій. Звичайно обирають допоміжні січні площини рівня або проекціювальні площини, що дає можливість визначити множину точок перетину ліній каркаса поверхні з допоміжною площиною. Способи перетворення площин проекцій дозволяють перевести площину загального положення в проекціювальне положення і цим спростити розв'язування задачі.

7.1 Переріз поверхні площиною окремого положення

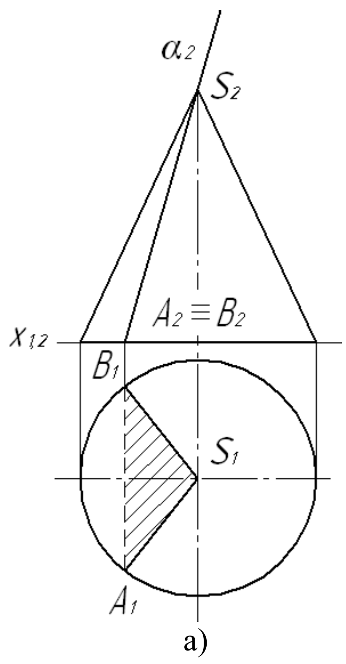
При перетині поверхні площиною окремого положення отримаємо плоску фігуру, що називається перерізом. Ця фігура належить січній площині.

Визначення проекцій лінії перерізу звичайно починають з побудови опорних точок – точок, розміщених на крайніх контурних твірних поверхні, найвищих і найнижчих точок фігури, точок, які визначають границю видимості. Після цього визначають довільні точки фігури перерізу.

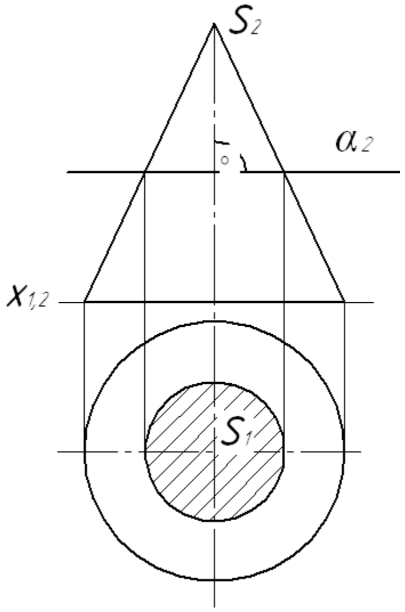
Конічні перерізи. На поверхні прямого кругового конуса від перетину площиною можна отримати такі лінії:

1) дві твірні, якщо січна площина $\boldsymbol{\alpha}$ проходить через вершину конуса (рис. 7.2, а);

2) коло, якщо січна площина $\boldsymbol{\alpha}$ перпендикулярна до осі конуса (рис. 7.2, б);



а)



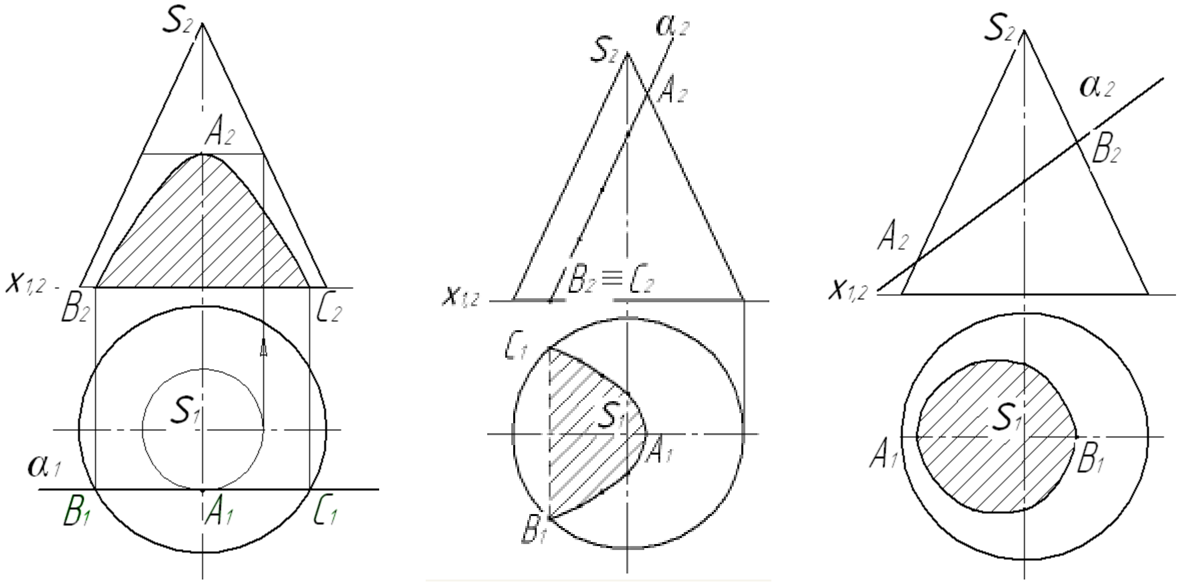
б)

Рисунок 7.2

3) гіперболу, якщо січна площина α паралельна до двох довільних твірних конуса або якщо ця площина паралельна до осі конуса (7.3, а);

4) параболу, якщо січна площина α паралельна до однієї з твірних конуса (рис. 7.3, б);

5) еліпс, якщо площина α перетинає всі твірні конуса і вона не перпендикулярна до осі конуса (рис. 7.3, в).



а) б) в)

Рисунок 7.3

Задача 1. Побудувати фронтальну проекцію лінії перерізу на поверхні прямого кругового конуса.

Розвязування. На рис. 7.4 показано переріз конуса фронтальною площиною α, що не проходить через вершину конуса. У цьому разі на боковій поверхні конуса отримують гіперболу, що проекціюється на площину Π_1 у пряму лінію, паралельну до двох твірних конуса, а на площину Π_2 – у натуральну величину. Точки K і L гіперболи, в яких вона перетинається з площиною Π_1, визначаються перетином кола основи конуса зі слідом січної площини □. Фронтальні проекції K_2 і L_2 цих точок будуть на осі Ox. Для побудови фронтальної проекції R_2 опорної точки R – вершини гіперболи – з точки S_1, як з центра проводять коло, радіус якого дорівнює відстані від точки S_1 до сліда α_1. Це коло є горизонтальною проекцією перерізу конуса горизонтальною площиною, що проходить через точку R.

Щоб знайти фронтальну проекцію цього кола, через R_1 проводять лінію зв’язку до перетину з фронтальною проекцією правої твірної конуса в точці R_2. Відрізок прямої, проведений через точку R_2 паралельно до осі Ox, є проекцією на площину Π_2 допоміжного кола радіуса $S_1 R_1$. Точка R_2 – середина цього відрізка.

Фронтальні проекції точок ***M***, ***N***, ***Q***, що належать гіперболі можна побудувати іншим способом. Ці точки знаходять за допомогою твірних ***SA***, ***SB*** і ***SC*** конуса. З'єднавши всі точки K_2, M_2, N_2, R_2, Q_2, C_2, отримують фронтальну проекцію гіперболи.

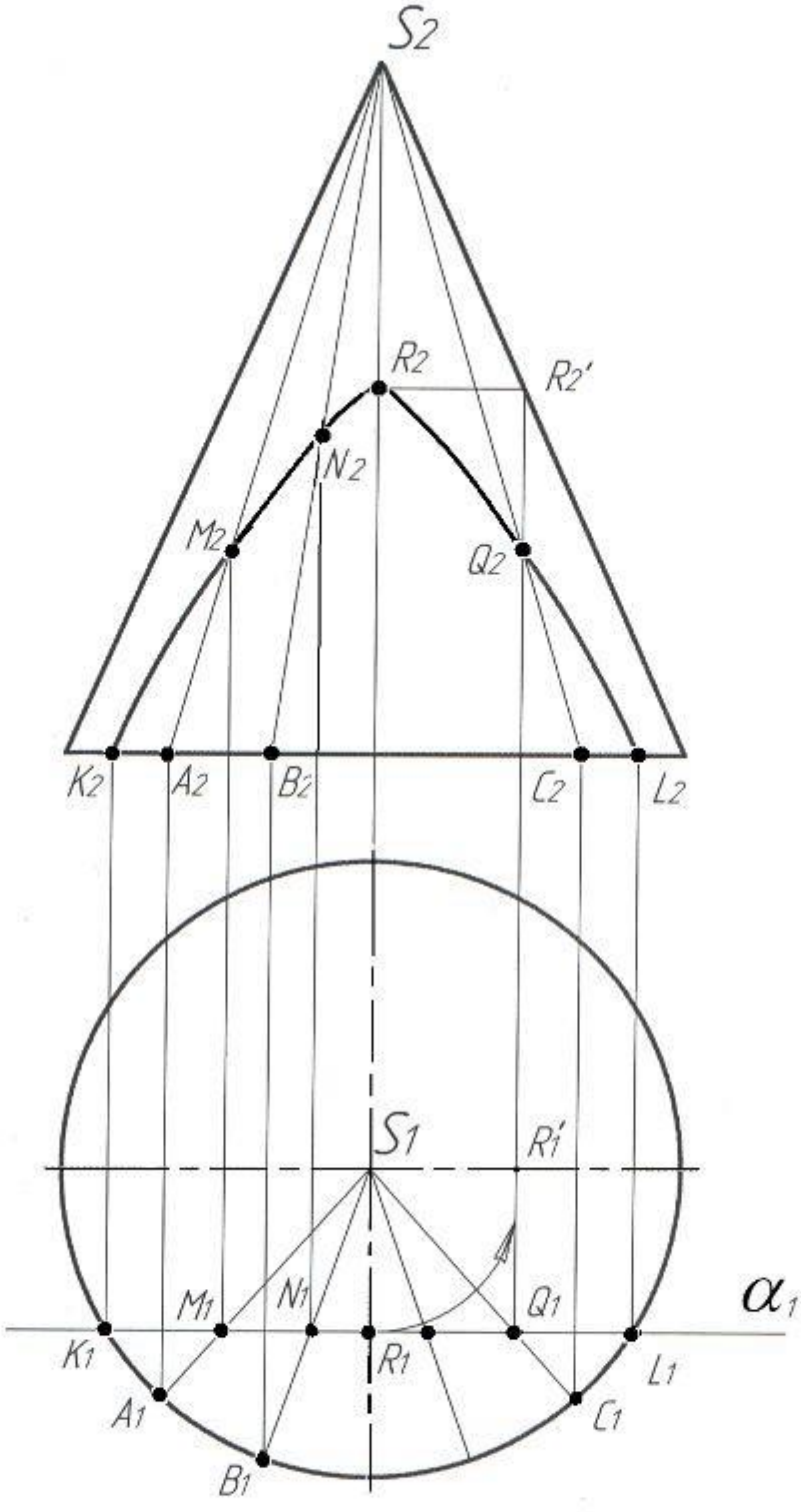


Рисунок 7.4

Задача 2. Побудувати горизонтальну проекцію лінії перерізу на поверхні прямого кругового конуса. Січна площина $\boldsymbol{\alpha}$ – фронтально-проєкціювальна .

Розв'язування. Оскільки площина $\boldsymbol{\alpha}$ паралельна до одної з крайніх твірних конуса, то в перерізі буде парабола. Фронтальна проекція параболи збігається зі слідом проекції $\boldsymbol{\alpha_2}$ січної площини $\boldsymbol{\alpha}$ (рис. 7.5).

Для побудови горизонтальної проекції параболи проводять кілька допоміжних горизонтальних площин ($\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta'}$, $\boldsymbol{\beta''}$), кожна з яких перетинає поверхню конуса по колу (паралелі $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h'}$, $\boldsymbol{h''}$,), а площину $\boldsymbol{\alpha}$ – по прямій, перпендикулярній до $\boldsymbol{\Pi_2}$. На перетині горизонтальних проекцій цих прямих з горизонтальними проекціями відповідних кіл отримують точки $\boldsymbol{2_1}$, $\boldsymbol{2'_1}$, $\boldsymbol{3_1}$, $\boldsymbol{3'_1}$ і $\boldsymbol{4_1}$, $\boldsymbol{4'_1}$. Горизонтальну проекцію $\boldsymbol{1_1}$ вершини параболи, а також точки $\boldsymbol{5_1}$, $\boldsymbol{5'_1}$, що лежать і на параболі, і на колі основи конуса, отримують безпосередньо, провівши лінію зв'язку з точок $\boldsymbol{1_2}$ і $\boldsymbol{5_2}$. Якщо точки $\boldsymbol{5_1}$ – $\boldsymbol{1_1}$ – $\boldsymbol{5'_1}$ з'єднають плавною кривою, отримують горизонтальну проек- цію параболи. Штрихова лінія $\boldsymbol{5_1}$ $\boldsymbol{5'_1}$ – горизонтальна проекція прямої, по якій площина $\boldsymbol{\alpha}$ перетинає площину основи конуса.

Задача 3. Побудувати горизонтальну проекцію лінії перерізу поверхні прямого кругового конуса. Січна площина $\boldsymbol{\gamma}$ – фронтально-проєкціювальна (рис. 7.6).

Розв'язування. Оскільки площина $\boldsymbol{\gamma}$ не перпендикулярна до осі конуса, то в перерізі отримують еліпс, велика вісь якого $\boldsymbol{AB}$ відображається на площину $\boldsymbol{\Pi_2}$ без спотворення ($\boldsymbol{A_2}$ $\boldsymbol{B_2}$), а мала вісь еліпса відображається на площину $\boldsymbol{\Pi_2}$ в точку, розміщену посередині відрізка ($\boldsymbol{A_2}$ $\boldsymbol{B_2}$).

Горизонтальні проекції точок еліпса $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{N}$ отримують за допомогою паралелей поверхні відповідно $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h'}$, $\boldsymbol{h''}$, $\boldsymbol{h'''}$. З'єднавши послідовно одержані точки, отримують горизонтальну проек- цію еліпса.

Задачу можна розв'язати також за допомогою твірних. Для цього через вибрані точки $\boldsymbol{K_2} \equiv \boldsymbol{N_2}$ на фронтальному сліді площини $\boldsymbol{\gamma}$ і вершину $\boldsymbol{S_2}$ конуса проводять спочатку фронтальні проекції твірних, а по- тім – горизонтальні. По лініях зв'язку знаходять горизонтальні проекції цих точок на горизонтальних проекціях твірних.

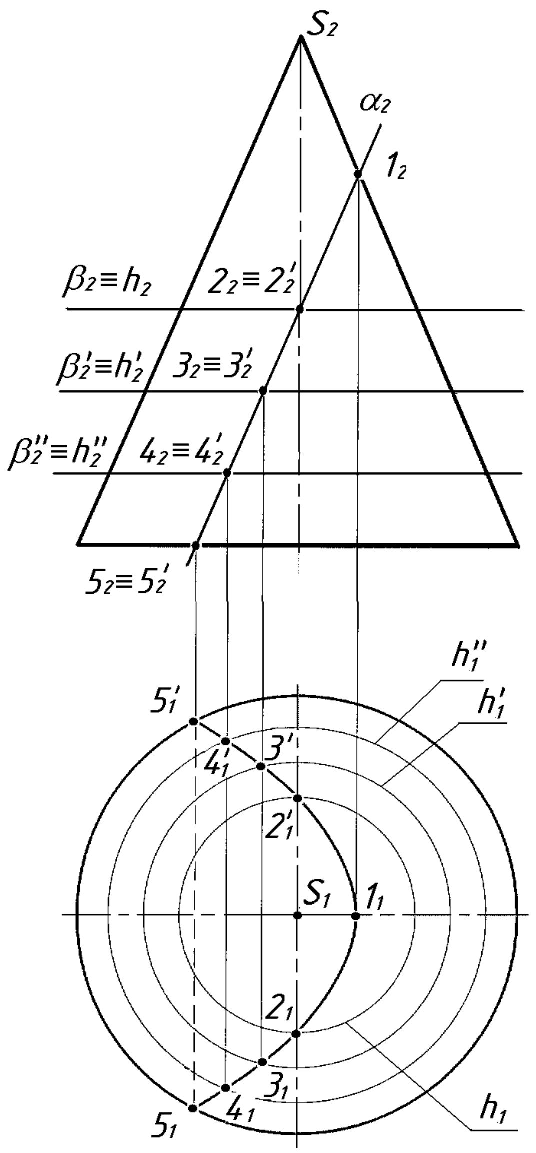


Рисунок 7.5

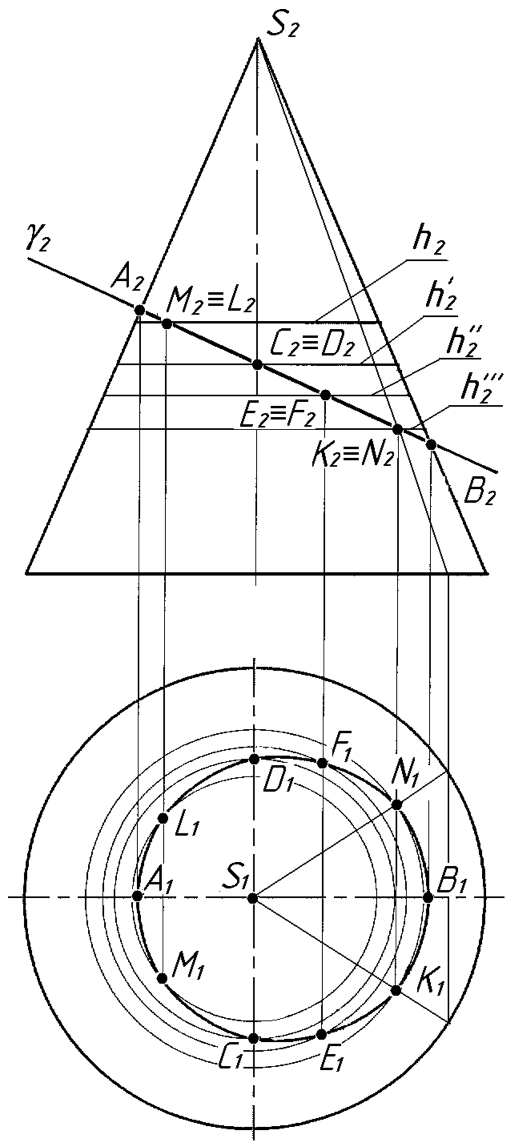
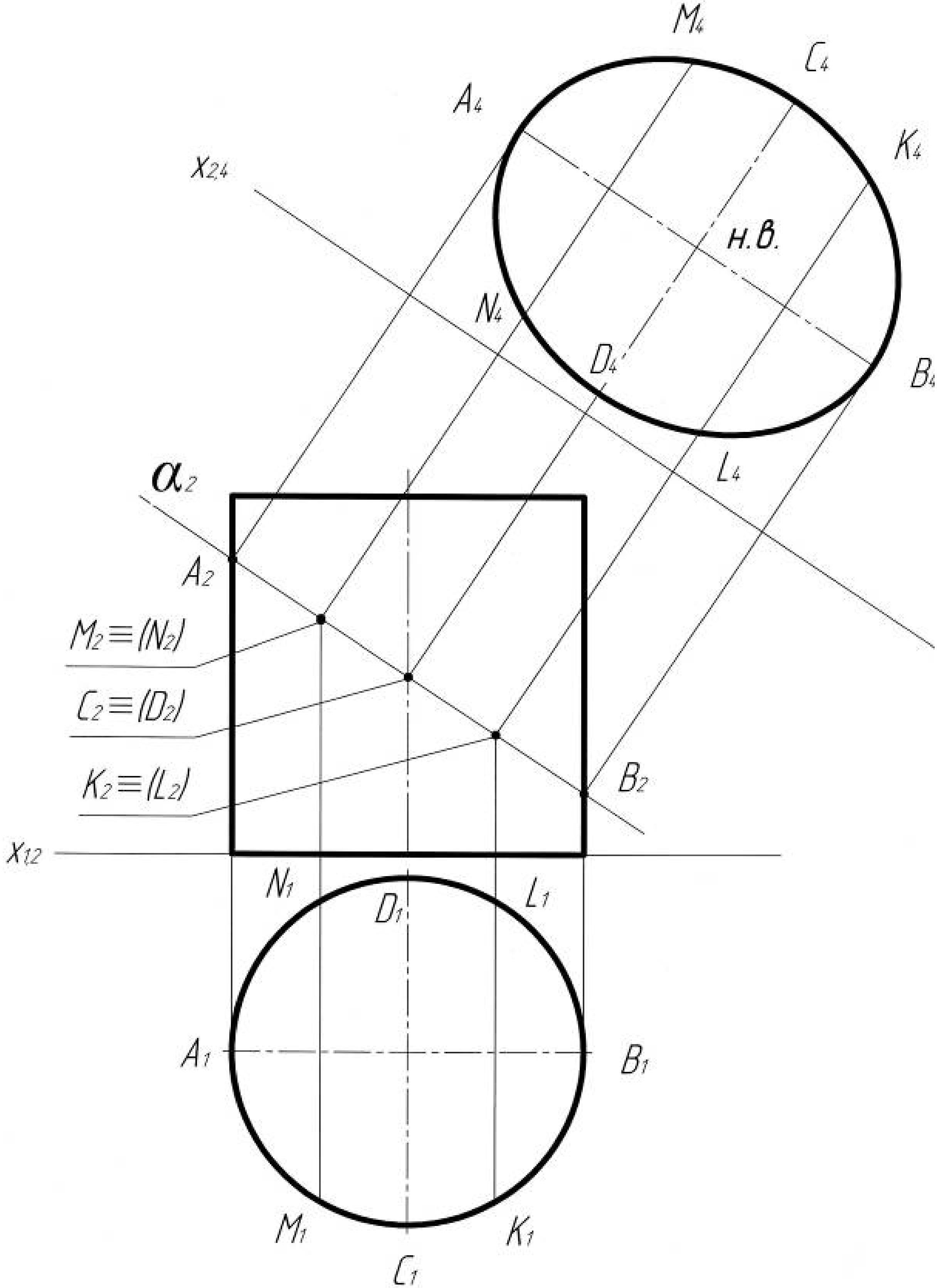


Рисунок 7.6

7.2 Побудова натуральної величини фігури перерізу

Натуральну величину фігури перерізу на поверхні прямого кругового циліндра можна знайти заміною площин проекцій. Паралельно до площини $\boldsymbol{\alpha_2}$ вводять додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$. Система площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ / $\boldsymbol{\Pi_2}$ замінюється на $\boldsymbol{\Pi_2}$ / $\boldsymbol{\Pi_4}$. Від фронтальних проекцій точок, що лежать на перерізі, проводять лінії зв'язку, перпендикулярно до нової осі $\boldsymbol{x_{2,4}}$. На $\boldsymbol{\Pi_4}$ будують проекції точок $\boldsymbol{A_4, B_4, C_4, D_4, M_4, N_4, K_4, L_4}$. Координа- ти точок беруть на $\boldsymbol{\Pi_1}$ і відкладають від нової осі $\boldsymbol{x_{2,4}}$ до проекцій точок на $\boldsymbol{\Pi_4}$. Отримані точки з'єднують плавною кривою і отримують натураль- ну величину фігури перерізу, криву другого порядку – еліпс (рис. 7.7), де $\boldsymbol{A_4}$ $\boldsymbol{B_4}$ – велика вісь еліпса, $\boldsymbol{C_4D_4}$ – мала вісь еліпса.



M4
C4
A4
K4
x2,4
н.в.
N4
D4
B4
L4
α2
A2
M2≡(N2)
C2≡(D2)
K2≡(L2)
B2
x1,2
N1
D1
L1
A1
B1
M1
K1
C1

Рисунок 7.7

Задача 1. Побудувати натуральну величину фігури перерізу прямого кругового конуса. Січна площина ***α*** – фронтально-проекціювальна (рис.7.8).

Розв'язування. Цю задачу можна розв'язати способом заміни площини проекції. Спочатку будують горизонтальну проекцію лінії перерізу. Оскільки січна площина паралельна тільки одній твірний, то фігурою перерізу буде парабола. Опорні точки ***A***, ***B***, ***C*** отримують там, де січна площина ***α*** перетинає фронтальну проекцію обрису конуса (контур). Поточні точки ***D***, ***E*** будують за допомогою паралелі на поверхні конуса. Горизонтальна проекція параболи не має натуральної величини. Для побудови натуральної величини вводять додаткову площину проекції Π_4 паралельно січній площині ***α***. Координати всіх точок параболи беруть на Π_1 (по осі ***y***) і за допомогою ліній зв'язку переносять на Π_4. Проекції точок A_4, B_4, C_4 ,D_4, E_4 з'єднують і отримують натуральну величину фігури перерізу.

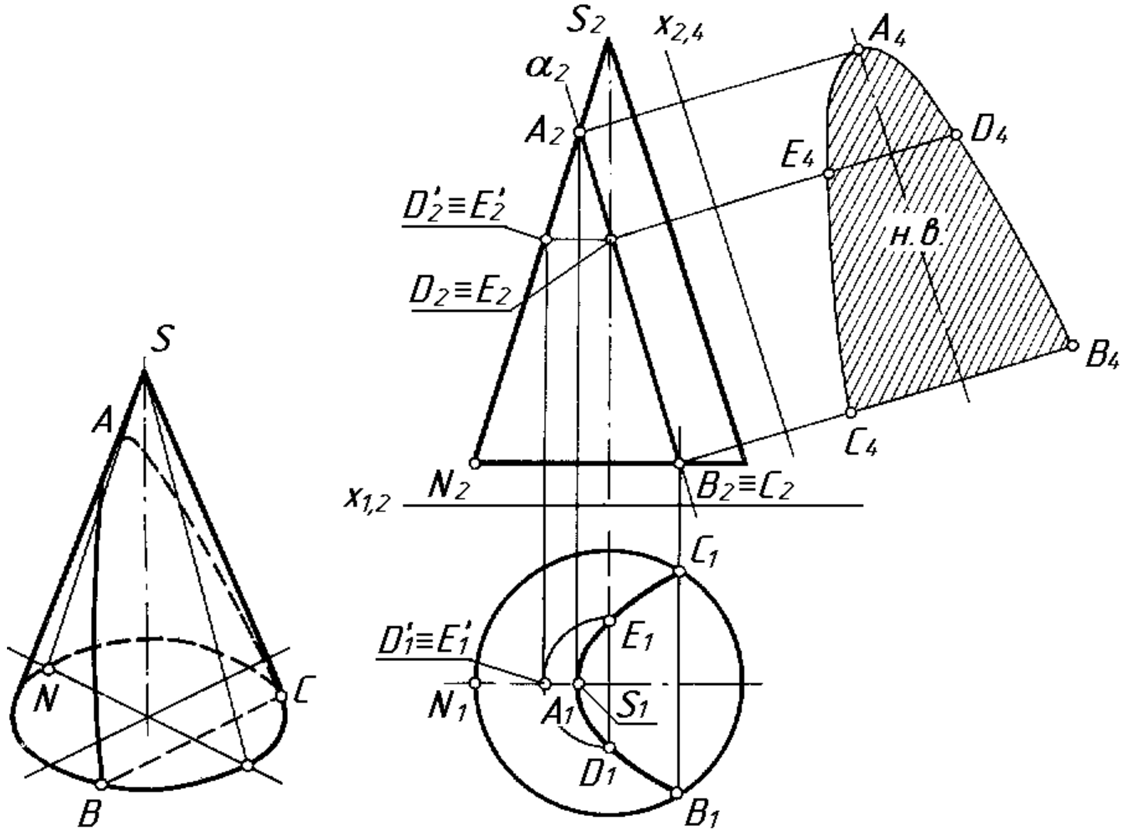


Рисунок 7.8

Задача 2. Побудувати натуральну величину фігури перерізу прямого кругового конуса. Січна площина ***α*** – фронтально-проекціювальна.

Розв'язування. Площина перетинає поверхню конуса по лінії, яка називається еліпс (рис. 7.9). Цю задачу можна розв'язати способом обертання навколо осі, перпендикулярної площині проекції. На Π_1 будують горизонтальні проекції точок $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{D_1}$, $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{F_1}$ лінії перерізу. Опорні точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ отримують там, де січна площина $\boldsymbol{\alpha}$ перетинає фронтальну проекцію обрису конуса (контур). Поточні точки $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ можна будувати за допомогою твірних ліній на поверхні конуса. Для побудови натуральної величини вводять додаткову фронтально-проекціювальну вісь обертання $\boldsymbol{i}$, яка належить площині $\boldsymbol{\alpha}$. Фронтальну проекцію січної площини $\boldsymbol{\alpha_2}$ повертають навколо осі $\boldsymbol{i}$ в положення, паралельне $\boldsymbol{\Pi_1}$. На горизонтальній площині проекції $\boldsymbol{\Pi_1}$ за допомогою вертикальних і горизонтальних ліній зв'язку будують проекції точок $\boldsymbol{A'_1}$, $\boldsymbol{B'_1}$, $\boldsymbol{C'_1}$, $\boldsymbol{D'_1}$, $\boldsymbol{E'_1}$, $\boldsymbol{F'_1}$, з'єднують їх і отримують натуральну величину еліпса.

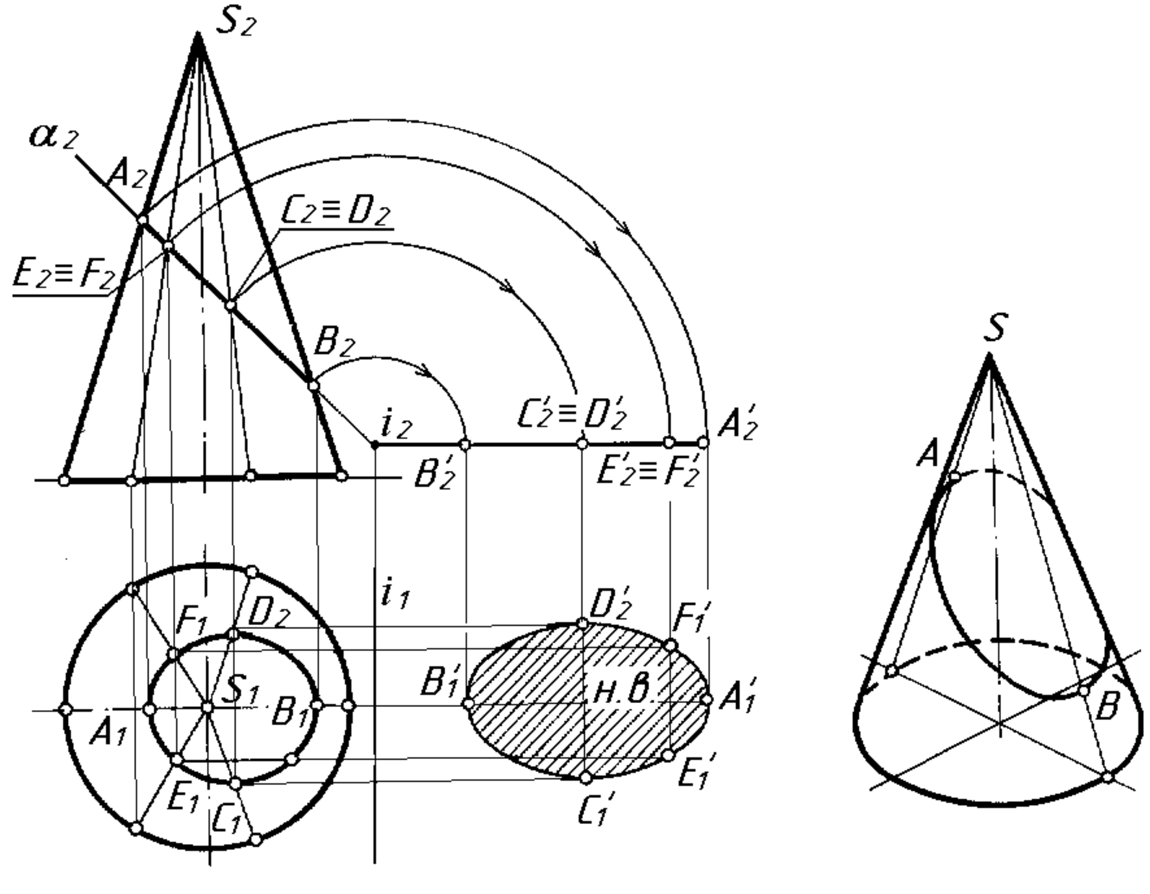


Рисунок 7.9

Задача 3. Побудувати натуральну величину лінії перерізу сфери з фронтально-проекціювальною площиною $\boldsymbol{\alpha}$ (рис. 7.10).

Розв'язування. Сфера перетинається площиною по колу. Фронтальна проекція цього кола як така, що збігається з проекцією січної площини, вже є. Залишається побудувати горизонтальну проекцію. Це буде еліпс. Спочатку будують проекції опорних точок. Найвища точка фігури перерізу – точка $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A_1}$,$\boldsymbol{A_2}$), найнижча – точка $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{B_1}$,$\boldsymbol{B_2}$). На екваторі сфери помічено точки $\boldsymbol{M}$ ($\boldsymbol{M_1}$,$\boldsymbol{M_2}$) і $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{N_1}$,$\boldsymbol{N_2}$), які є точками видимості. Ці точки ділять горизонтальну проекцію кривої на дві частини – видиму й невидиму. На площині $\boldsymbol{\Pi_1}$ визначають осі еліпса. Мала вісь $\boldsymbol{A_1B_1}$ еліпса збігається з горизонтальною проекцією головного меридіана сфери.

Проекцією $\boldsymbol{E_2D_2}$ великої осі еліпса перерізу на площину $\boldsymbol{\Pi_2}$ є точка, що лежить посередині відрізка $\boldsymbol{A_2B_2}$. Допоміжну горизонтальну площину $\boldsymbol{\beta}$ проводять так, щоб її фронтальний слід $\boldsymbol{\beta_2}$ пройшов через точки $\boldsymbol{E_2 \equiv D_2}$. Ця площина перетинає сферу по колу радіуса $\boldsymbol{r}$. З точки $\boldsymbol{O_1}$, як центра, проводять коло радіуса $\boldsymbol{r}$, яке буде перетинати лінію зв'язку, проведену від то- чок $\boldsymbol{E_2 \equiv D_2}$. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ визначають проекції точок $\boldsymbol{E_1}$ і $\boldsymbol{D_1}$. Відрізок $\boldsymbol{E_1D_1}$ – вели- ка вісь еліпса. Інші точки перерізу можна побудувати за допомогою допоміжних горизонтальних площин. Так за допомогою площини $\boldsymbol{\gamma}$ знаходять точки $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K_1}$ $\boldsymbol{K_2}$) і $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{L_1}$,$\boldsymbol{L_2}$).

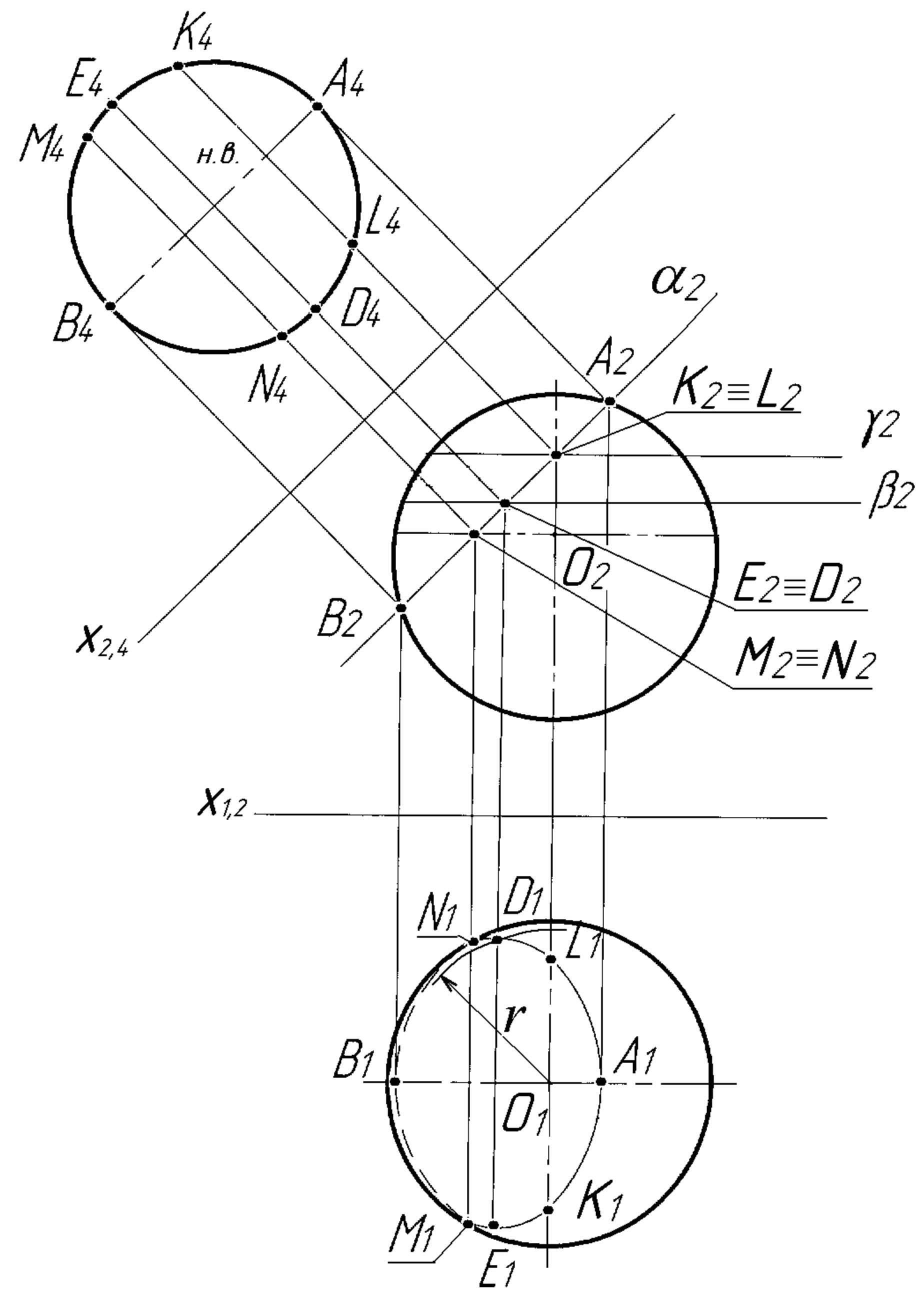


Рисунок 7.10

Задача 4. Побудувати натуральну величину фігури перерізу площини α закритим тором.

Розв'язування. На рисунку 7.11 наведено приклад, де криволінійчату поверхню обертання (тор) перетинає горизонтально-проекціювальна площина α.

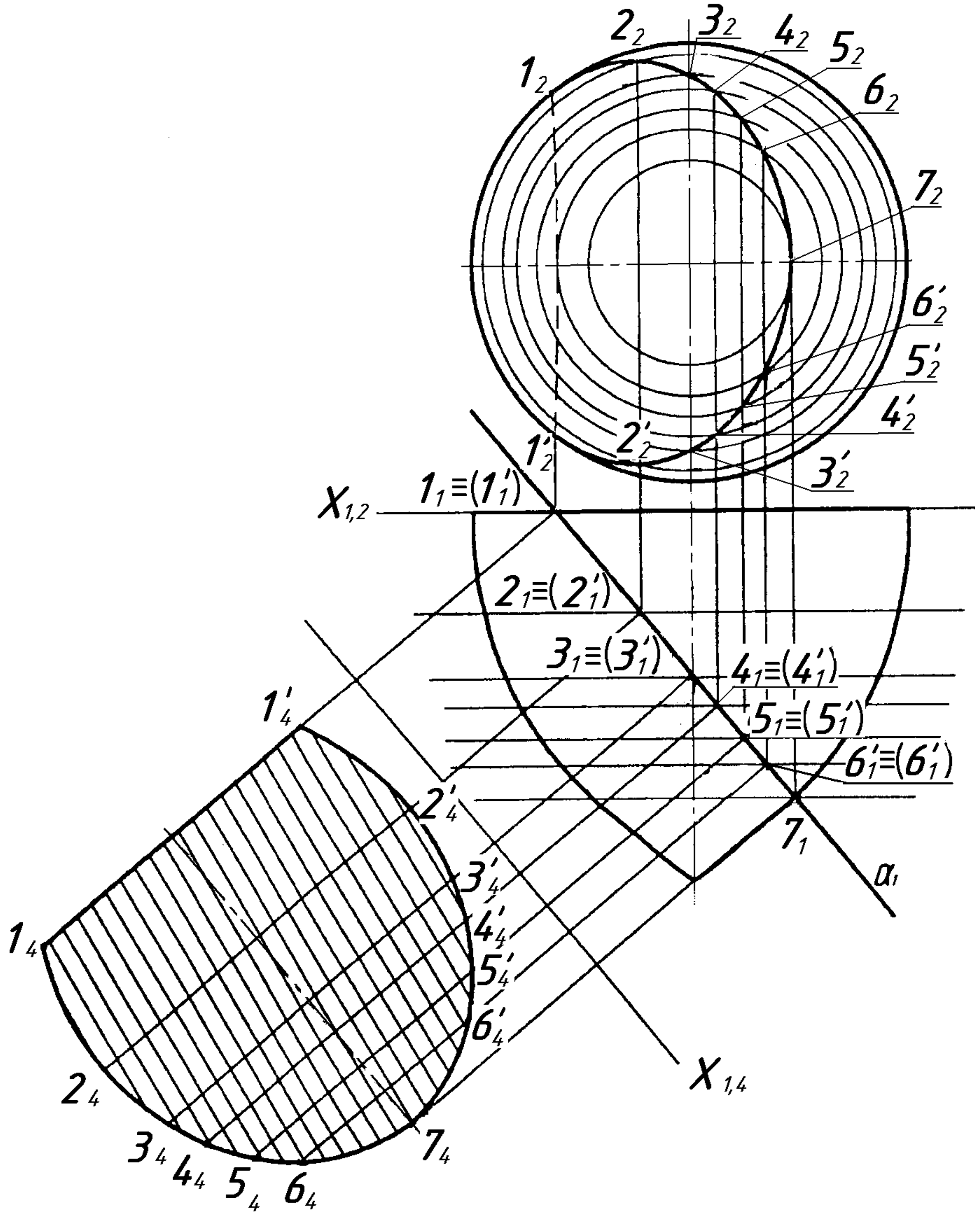


Рисунок 7.11

Для побудови натуральної величини фігури перерізу вводять додаткову площину проекції Π_4 паралельно січній площині. На епюрі вісь $x_{1,4}$ проведена паралельно горизонтальній проекції січної площини □$_1$. Точки на кривій лінії фігури перерізу ***1-7***, ***1'-6'*** визначають там, де січна площина перетинає лінії, що належать поверхні. Такими лініями на поверхні тора є паралелі (кола). Точки, що належать фігурі перерізу, спочатку будують на $\boldsymbol{\Pi_2}$ за допомогою паралелей. Потім точки за допомогою ліній зв'язку проекціюють на $\boldsymbol{\Pi_4}$. Координати точок вимірюють на $\boldsymbol{\Pi_2}$. Це будуть відстані від осі $\boldsymbol{x_{1,2}}$ до фронтальних проекцій точок. Ці відстані відкладають на $\boldsymbol{\Pi_4}$ на лініях зв'язку від нової осі $\boldsymbol{x_{1,4}}$. Проекції точок на $\boldsymbol{\Pi_4}$ з'єднують і отримують натуральну величину фігури перерізу.

Задача 5. Побудувати натуральну величину фігури перерізу на поверхні похилої призми.

Розв'язування. На рисунку 7.12 фронтально-проекціювальна січна площина □ перетинає поверхню похилої піраміди. На фронтальній площині проекції $\boldsymbol{\Pi_2}$ визначають проекції точок $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{L_2}$, $\boldsymbol{M_2}$ перетину січної площини □ з ребрами призми. Ці точки проекціюють на $\boldsymbol{\Pi_1}$ на відповідні ребра призми, з'єднують і отримують фігуру перерізу, трикутник $\boldsymbol{K_1L_1M_1}$. Для побудови натуральної величини цього трикутника можна використовувати спосіб заміни площин проекцій. Додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$ вводять паралельно проекції січній площини □$_2$. Точки $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ проекціюють на $\boldsymbol{\Pi_4}$, з'єднують і отримують натуральну величину фігури перерізу.

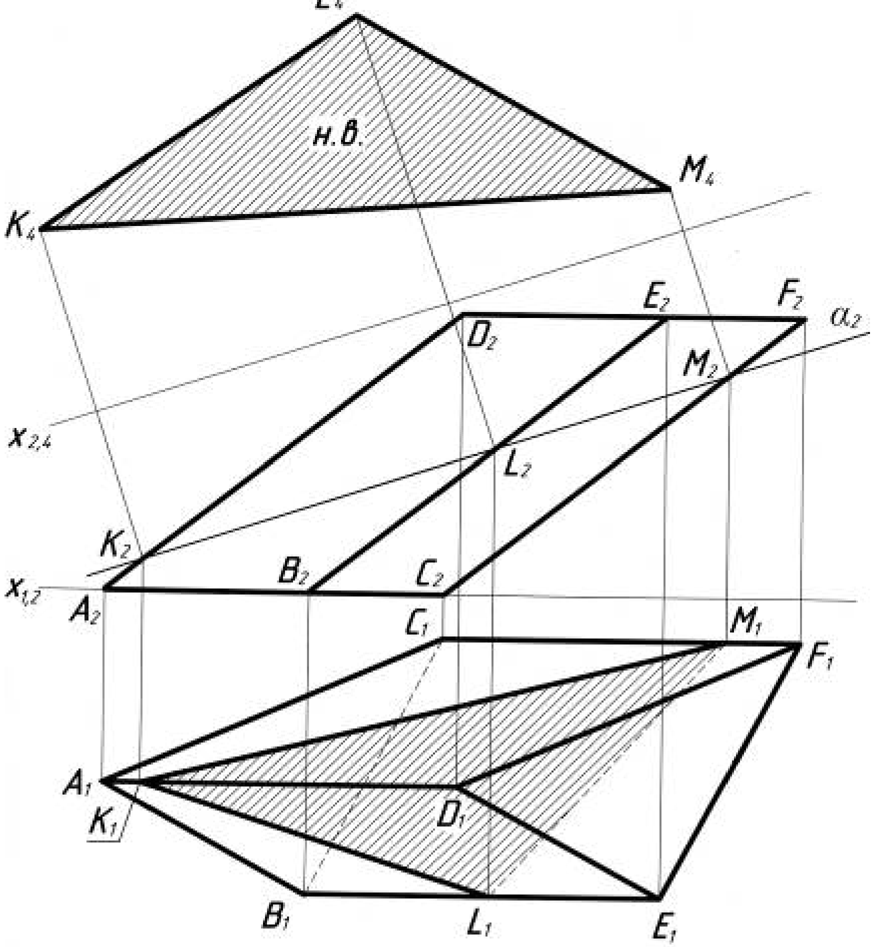


Рисунок 7.12

Задача 6. Побудувати натуральну величину фігури перерізу на поверхні похилої піраміди.

Розв'язування. На рисунку 7.13 фронтально-проекціювальна січна площина α перетинає поверхню похилої піраміди. Знаходять точки перетину площини α з ребрами піраміди і отримують точки ***1***, ***2***, ***3***:
$\alpha \cap \boldsymbol{SA} = \boldsymbol{1}$, $\alpha \cap \boldsymbol{SB} = \boldsymbol{2}$, $\alpha \cap \boldsymbol{SC} = \boldsymbol{3}$. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ отримують фігуру перерізу $\Delta \boldsymbol{1_1 2_1 3_1}$, яка не має натуральної величини. Щоб побудувати натуральну величину, фронтальну проекцію січної площини $\alpha_2(\Delta \boldsymbol{1_2 2_2 3_2})$ переміщують в положення, паралельне осі $\boldsymbol{x_{1,2}}$, а потім за допомогою вертикальних і горизонтальних ліній зв'язку отримують на $\boldsymbol{\Pi_1}$ натуральну величину
$\Delta \boldsymbol{1'_1 2'_1 3'_1}$.

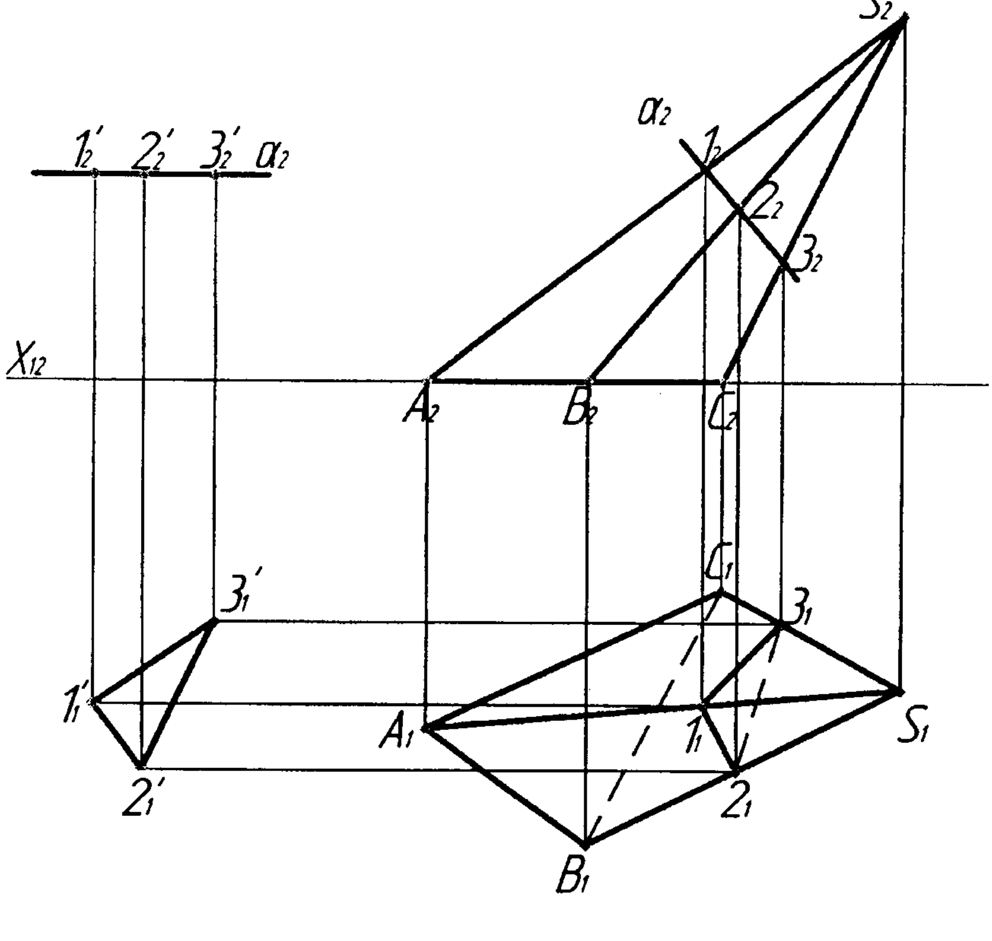


Рисунок 7.13

7.3 Переріз поверхні площиною загального положення

На рисунку 7.14 зображено прямий круговоі циліндр, поверхню якого перетинає площина загального положення $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h^0} \cap \boldsymbol{f^0})$. Фігуру перерізу можна побудувати за допомогою січних площин. Будь-яка допоміжна січна площина перетинає задану площину по прямій лінії, а криву поверхню – по лінії її каркаса. Дві лінії, перетинаючись між собою, визначають точки, спільні для поверхні та заданої площини. Використання січних площин дає можливість побудувати множину точок лінії перерізу. Розв’язання за- дачі зводиться до того, щоб вибрати допоміжні площини, що перетинають поверхню по простих лініях – прямих або колах. Точки великої осі еліпса ***A*** і ***B*** будують за допомогою горизонтально-проекціювалної площини ***β***. Точки ***A*** і ***B*** знаходяться на лінії перетину двох площин ***α*** і ***β***. За допомогою фронтальних площин ***ω***, ***λ***, ***γ*** будують точки ***E***, ***F***, ***G***, ***H***. Точки ***C***, ***D*** буду- ють з використанням горизонтально-проекціювальної січної площини ***δ***.

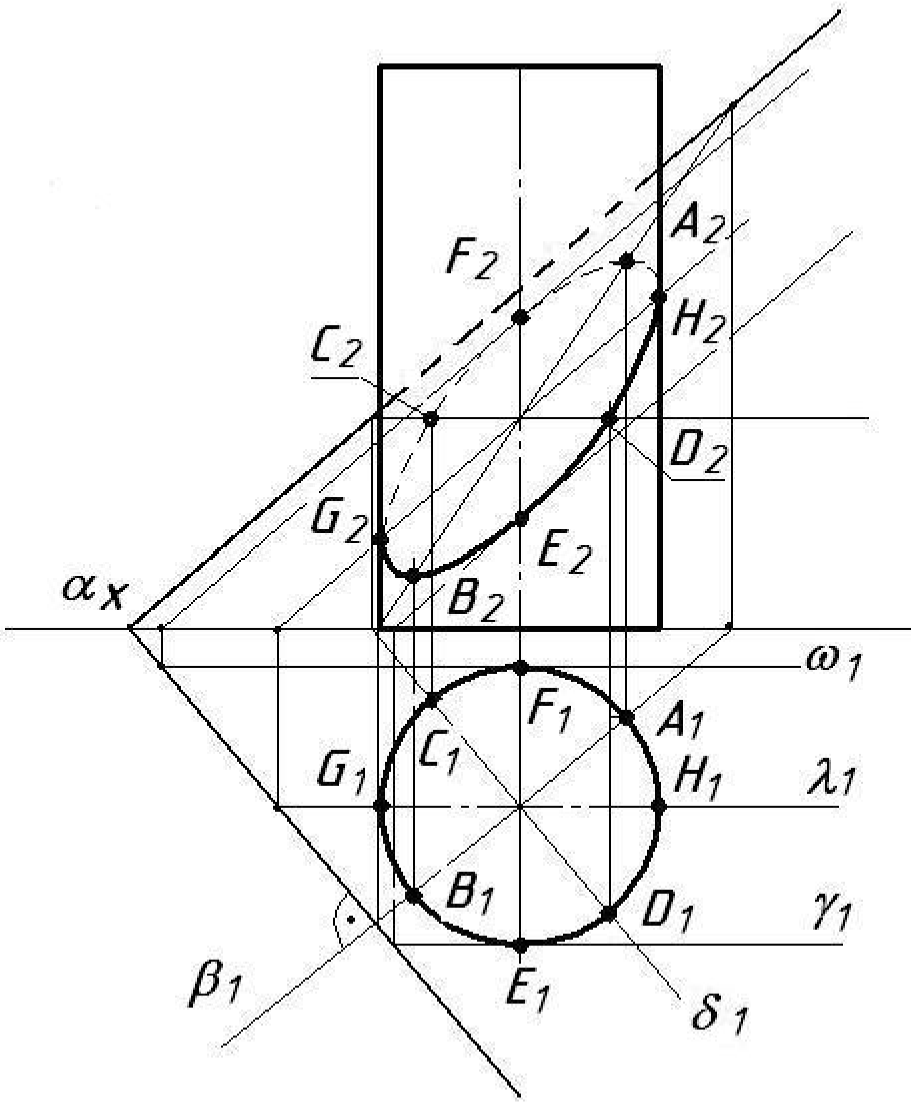


Рисунок 7.14

На рисунку 7.15 наведено приклад перетину тригранної призми з площиною загального положення ***α***(***AB***∩***BA***). Бокові грані призми займа- ють горизонтально-проекціювальне положення, тобто проекціюються на ***П₁*** в прямі лінії. Ці грані перетинають площину по лініях ***1-2***, ***1-3***, ***2-3***. Фі- гурою перерізу буде трикутник ***1,2,3***.

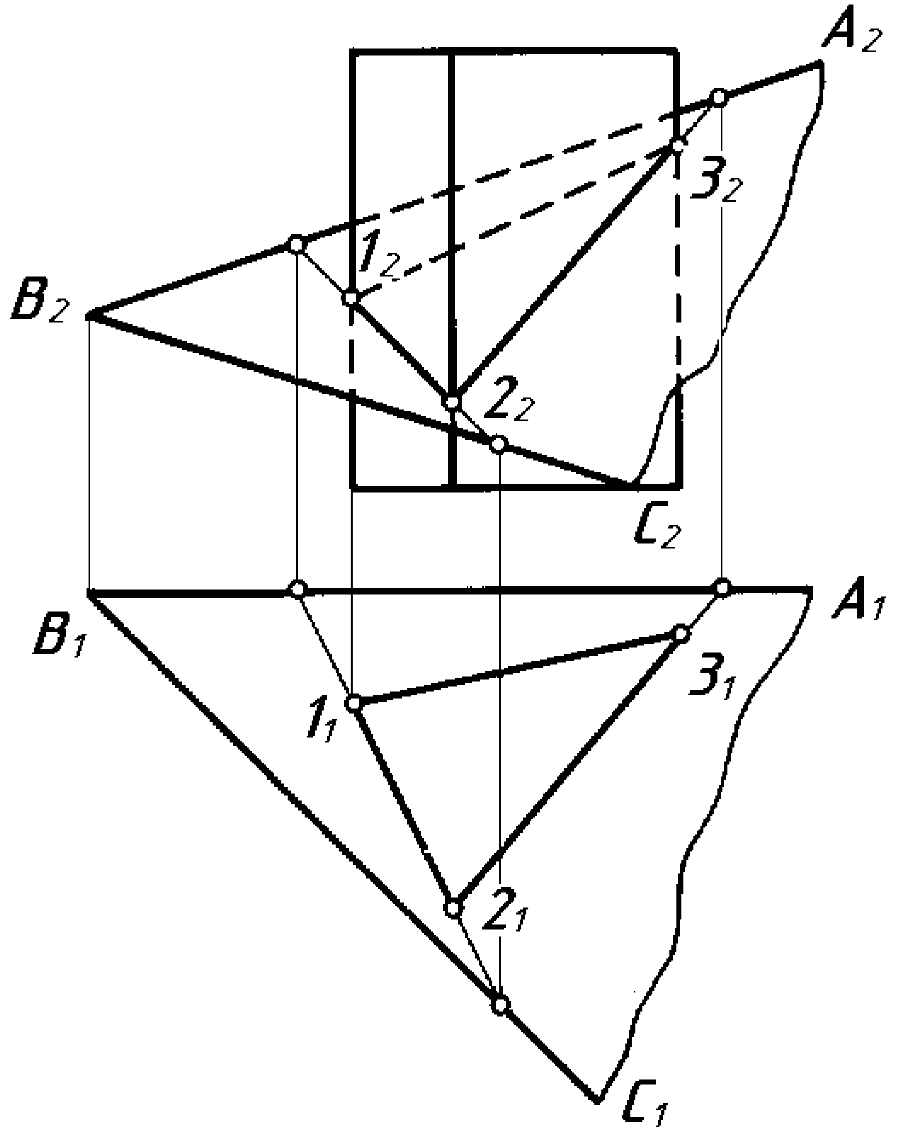


Рисунок 7.15

Для побудови лінії перерізу поверхні площиною загального положення часто використовують методи перетворення. Креслення перетворюють так, щоб січна площина стала в новому положенні проекціювальною.

Алгоритм побудови фігури перерізу

1. В заданій площині загального положення будують лінію рівня (горизонталь або фронталь). Якщо площина задана слідами або горизонталлю і фронталлю, що перетинаються, то лінію рівня будувати не треба.
2. Використовують метод заміни площин проекцій. Перпендикулярно до натуральної величини прямої рівня або сліду площини проводять нову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_4}$.

3. На $\boldsymbol{\Pi_4}$ проекціюють задану криву поверхню (або багатогранник) і січну площину, яка перетворюється у пряму лінію (цю проекцію січ- ної площини називають виродженою).
4. На $\boldsymbol{\Pi_4}$ позначають точки перетину проекції січної площини з проекціями ліній каркаса поверхні (з твірними та напрямними кривої поверхні або ребрами багатогранника).
5. Отримані точки за допомогою ліній зв'язку проекціюють на $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$. Потім точки з'єднують суцільною або штриховою лінією (у залежності від того, видима лінія чи невидима).
6. Паралельно січній площині, яка на $\boldsymbol{\Pi_4}$ спроекційована у пряму лінію (вироджена), проводять ще одну додаткову площину проекції $\boldsymbol{\Pi_5}$.
7. На $\boldsymbol{\Pi_5}$ проекціюють тільки точки лінії перетину, з'єднують ці точки і отримують натуральну величину фігури перерізу.

Задача 1. Побудувати натуральну величину фігури перерізу чотиригранної призми площиною загального положення (рис. 7.16).

Розв'язування. Задачу розв'язують способом заміни площин проекцій. Нову площину $\boldsymbol{\Pi_4}$ вводять перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі $\boldsymbol{h_1}$ площини $\boldsymbol{\alpha(h \cap f)}$.

На площині беруть дві довільні точки ***P*** і ***F*** і переносять їх координати з ***П2*** на ***П4*** і отримують проекціювальну площину $\boldsymbol{\alpha(h \cap f)}$. На ***П4*** також будують призму. Для цього з кожної точки основи призми (***A*** ı***B***ı ***C***ı ***D***ı) з ***П1*** на ***П4*** проводять лінії зв'язку, перпендикулярно до ***x1,4***. Призма своєю основою стоїть на ***П1***, тому всі точки її основи будуть розміщені на осі ***x1,4***. Висоту призми визначають на ***П2***.

Координати точок перетину січної площини з кожним ребром призми переносять з $\boldsymbol{\Pi_4}$ на $\boldsymbol{\Pi_2}$. Отримані фронтальні проекції точок перетину кожного ребра з площиною з'єднують прямими лініями з урахуванням видимості.

Натуральну величину перерізу визначають способом плоско-паралельного переміщення. Для цього площину перерізу, що на $\boldsymbol{\Pi_4}$ відображена в пряму лінію ($\boldsymbol{B_4\ A_4\ D_4\ C_4}$), розміщують паралельно до осі $\boldsymbol{x_{1,4}}$. З кожної точки перерізу проводять прямі лінії зв'язку перпендикулярно до осі $\boldsymbol{x_{1,4}}$. На перетині цих ліній з лініями зв'язку, проведеними з горизонта- льних проекцій точок перерізу ($\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{D_1}$) паралельно до $\boldsymbol{x_{1,4}}$, отримують натуральну величину фігури перерізу.

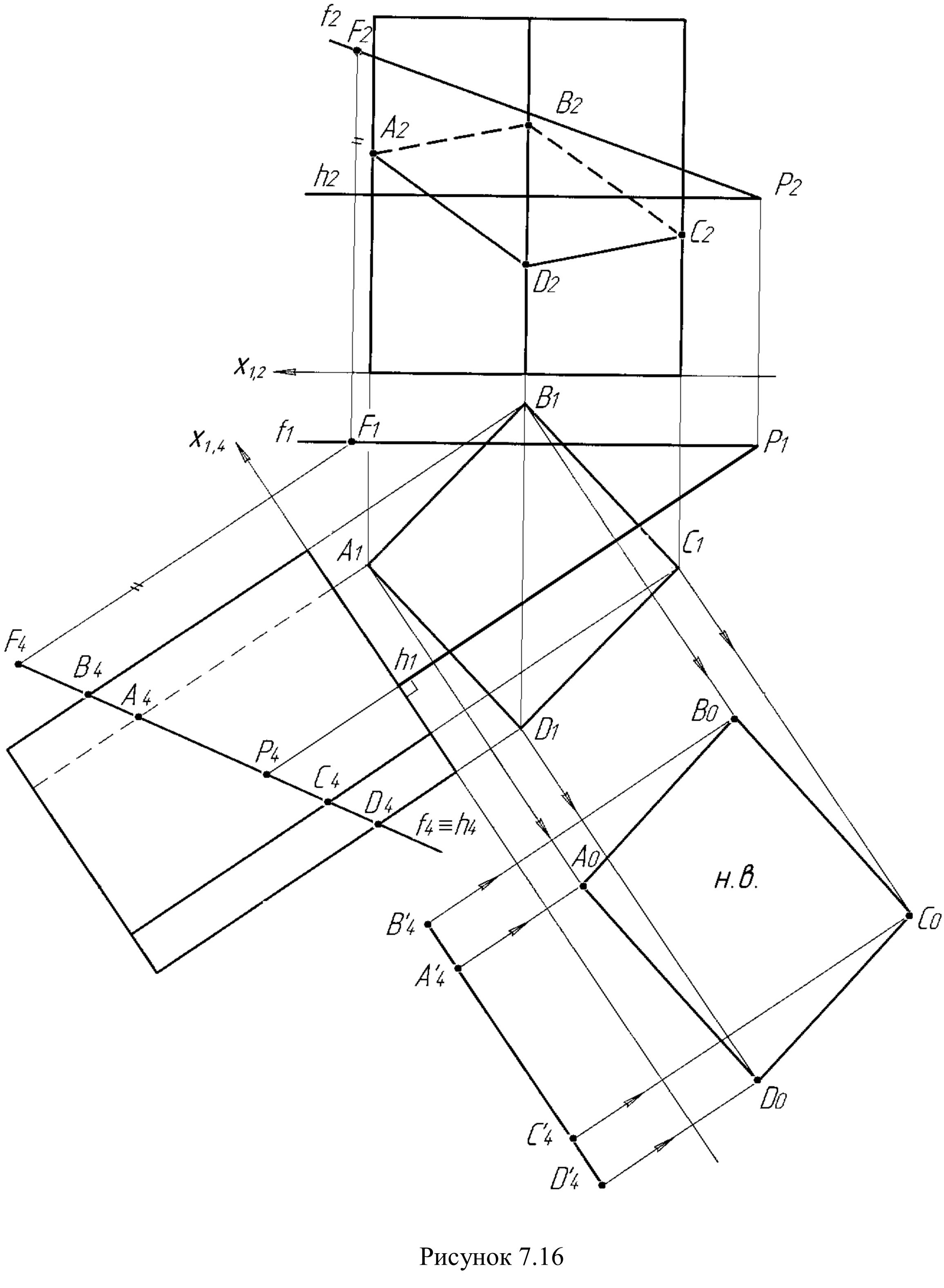

f2
F2
B2
A2
h2
P2
C2
D2
x1,2
B1
x1,4
f1
F1
P1
A1
C1
F4
h1
B4
A4
D1
B0
P4
C4
D4
f4≡h4
A0
н.в.
B'4
C0
A'4
D0
C'4
D'4

Рисунок 7.16

Задача 2. Побудувати переріз трикутної піраміди площиною загального положення $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k} \cap \boldsymbol{l})$ (рис. 7.17).

Розв'язування. Задачу розв'язують способом заміни площин проекції у такій послідовності:

1. Площину загального положення, задану слідами, перетворюють на Π_4 у проекціювальну. Для цього вводять допоміжну площину проекції Π_4 перпендикулярно до горизонтального сліду k_1. На фронтальному сліді l_2 беруть довільну точку P і її координату по осі z переносять на Π_4. З'єднавши проекцію горизонтального сліда k_4 з точкою P_4, одержують проекцію площини α на Π_4.

2. На Π_4 будують піраміду. Для цього з кожної точки основи і вершини піраміди на Π_1 перпендикулярно до $x_{1,4}$ проводять лінії зв'язку. Основа піраміди ABC буде розміщена на осі $x_{1,4}$, а вершина S – на відстані, яка дорівнює відстані від точки S_2 до Π_1.

3. Отримані точки перерізу $1_4\ 2_4\ 3_4$ проекціюють на відповідні ребра по лініях зв'язку спочатку на Π_1, а потім – на Π_2. З'єднавши прямими відповідні проекції точок $1,2,3$, одержують горизонтальну й фронтальну проекцію перерізу. На Π_1 всі лінії перерізу будуть видимими. Оскільки грань ABS на Π_2 невидима, то лінія перерізу $1_2\ 2_2$ також буде невидимою.

4. Натуральну величину фігури перерізу будують способом плоско-паралельного переміщення. Для цього переріз, який проекціюється на Π_4 в пряму лінію ($1_4 2_4 3_4$), переміщують на вільне місце паралельно до осі $x_{1,4}$, не змінюючи відстані між точками. На перетині ліній зв'язку від точок $1_4 2_4 3_4$, перпендикулярних до осі $x_{1,4}$, і ліній зв'язку від точок $1_1,2_1,3_1$, паралельних до осі $x_{1,4}$, отримують трикутник $1_0 2_0 3_0$, тобто натуральну величину перерізу.

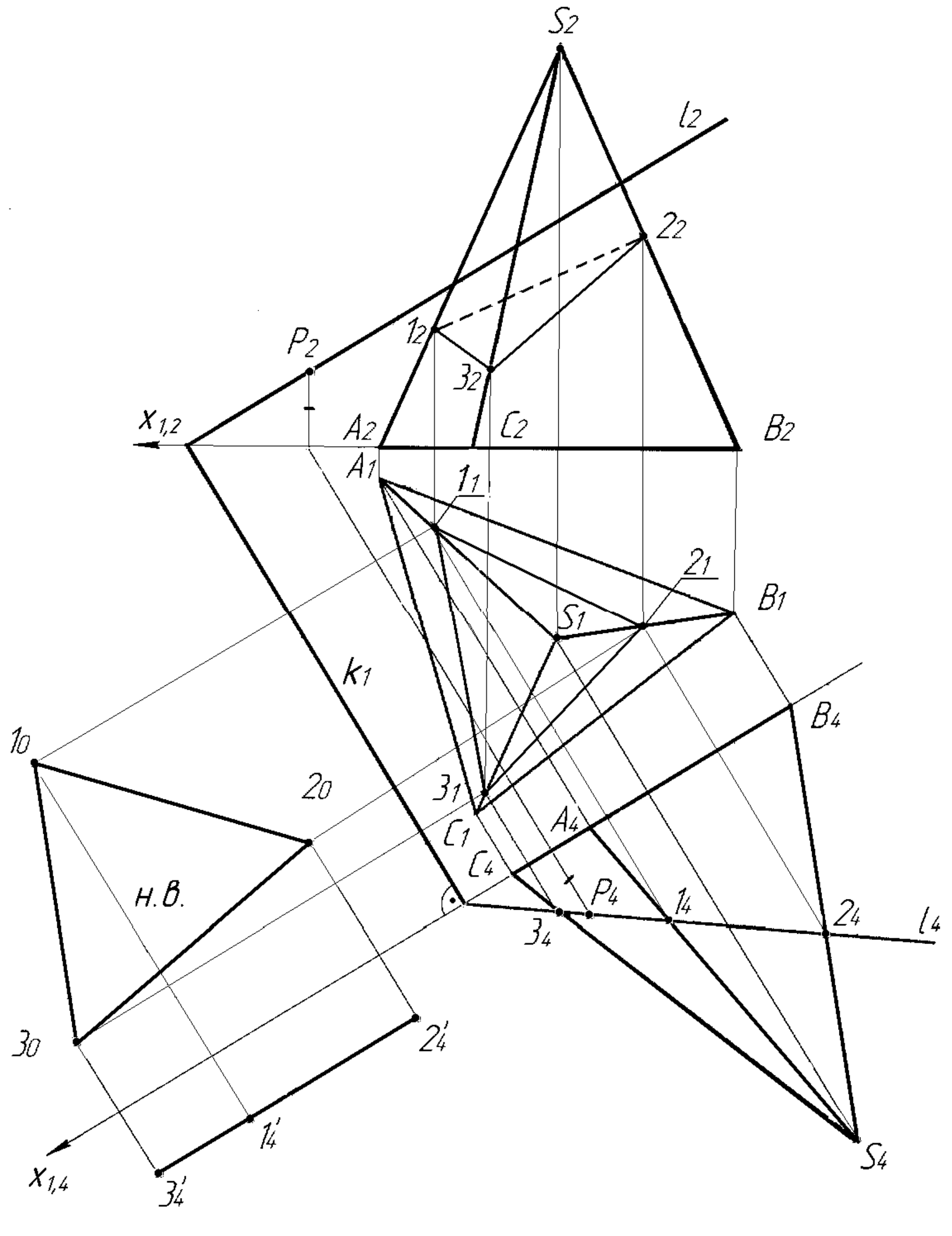


Рисунок 7.17

Задача 3. Побудувати натуральну величину фігури перерізу прямого кругового конуса.

Розв'язування. На рисунку 7.18 наведено приклад побудови натуральної величини фігури перерізу. Поверхню прямого кругового конуса перетинає площина загального положення, яка задана прямими ***a*** і ***b***, що перетинаються. В цій площині □ (***a***$\cap$***b***) проводять горизонталь ***h*** і перпендикулярно до неї вводять додаткову площину проекції Π_4. На епюрі нова вісь $x_{1,4}$ проведена перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі h_1. На Π_4 січна площина відображається у пряму лінію, тобто займає проекціювальне положення. Точки на кривій лінії фігури перерізу визначають там, де проекція січної площини □*4* перетинає паралелі конуса. За допомогою ліній зв'язку ці точки проекціюють спочатку на ***П1*** а потім на ***П2***, з'єднують і отримують горизонтальну і фронтальну проекції фігури пере- різу. Для побудови натуральної величини фігури перерізу вводять ще одну додаткову площину проекції ***П5*** паралельно проекції січної площини □***4***. На ***П5*** проекціюють точки ***2…12*** і отримують натуральну величину фігури перерізу.

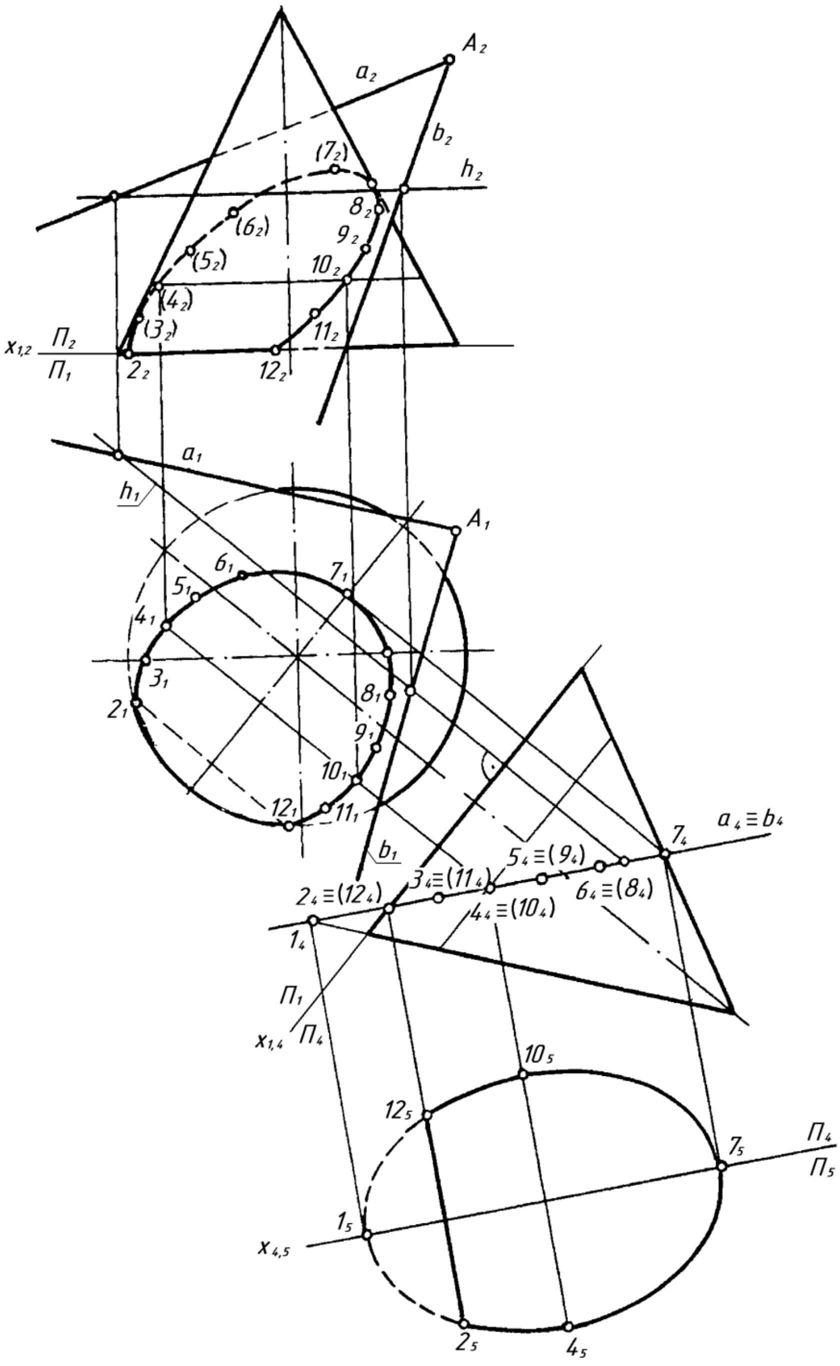


Рисунок 7.18

Запитання для самоконтролю

1. Що називають перерізом?
2. Яка послідовність побудови перерізу граного тіла проекціювальною площиною?
3. Яка послідовність побудови перерізу поверхні обертання проекціювальною площиною?
4. Назвати п'ять конічних перерізів.
5. Які лінії є перерізом конуса площиною, що проходить через його вершину?
6. Яка лінія є перерізом прямого кругового конуса площиною, що проходить перпендикулярно осі обертання?
7. Яка лінія є перерізом прямого кругового конуса площиною, що проходить паралельно осі обертання?
8. Яка лінія є перерізом прямого кругового конуса площиною, що перетинає всі твірні конуса і не перпендикулярна до осі конуса?
9. Яка лінія є перерізом прямого кругового конуса площиною, що паралельна до однієї з твірних конуса?
10. Які способи використовують для побудови перерізів поверхонь площинами загального положення?
11. Яка лінія є перерізом сфери площиною загального положення? Які лінії можуть бути проекціями цього перерізу?
12. Які січні площини доцільно обирати при побудові перерізу поверхні обертання площиною загального положення?

8 РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Розгорткою поверхні називається плоска фігура, що утворюється при суміщенні поверхні даного тіла з площиною. При розгортанні поверх- ні на площині кожній точці поверхні відповідає одна єдина точка на розго- ртці. Лінія поверхні переходить в лінію розгортки. Довжини ліній, величи- ни плоских кутів та площ, що відокремлені замкненими лініями, не змінюються.

До розгортних відносяться тільки гранні поверхні, торси, конічні і циліндричні поверхні.

Нерозгортні поверхні можна сумістити з однією площиною приблизно (сфера, еліпсоїд і т.д.). Для побудови таких розгорток поверхню розбивають на частини, які можна приблизно замінити розгортними поверхнями. Потім будують розгортки цих частин, які в сумі дають умовну розгортку поверхні, що не розгортається.

8.1 Розгортки гранних поверхонь

При побудові розгорток багатогранників знаходять натуральну величину ребер та граней цих багатогранників за допомогою способів обертання або заміни площин проекцій. На рисунку 8.1 показано пряма тригранна призма і її розгортка. Розгортку призми виконують способом розкатки, тому що її основа паралельна $\boldsymbol{\Pi_1}$, а ребра паралельні $\boldsymbol{\Pi_2}$. Всі ребра призми мають натуральну величину. Три бокових грані, які мають форму прямо- кутників, а також трикутники основи суміщають з площиною. Аналогічно виконують розгортки призм, які мають більше бічних граней.

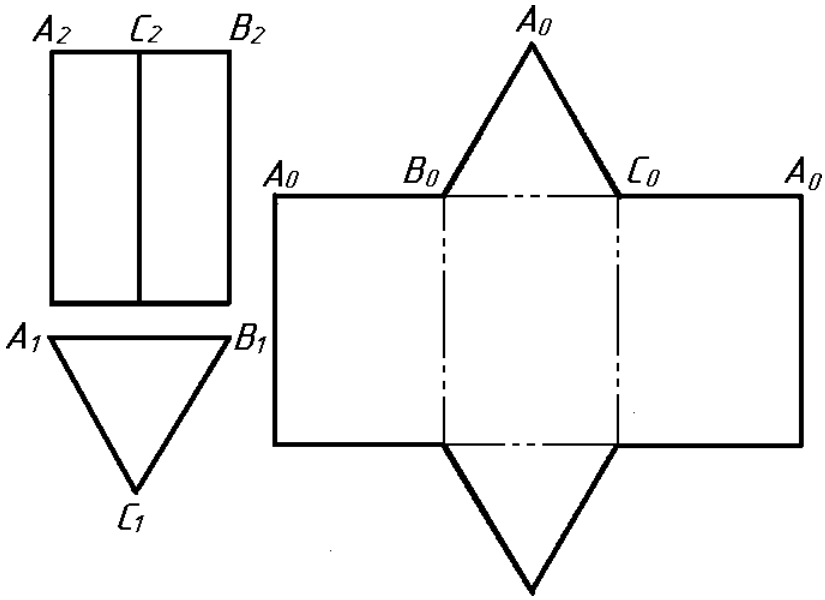


Рисунок 8.1

На рисунку 8.2 показано розгортку призми, яка має шість бокових граней.

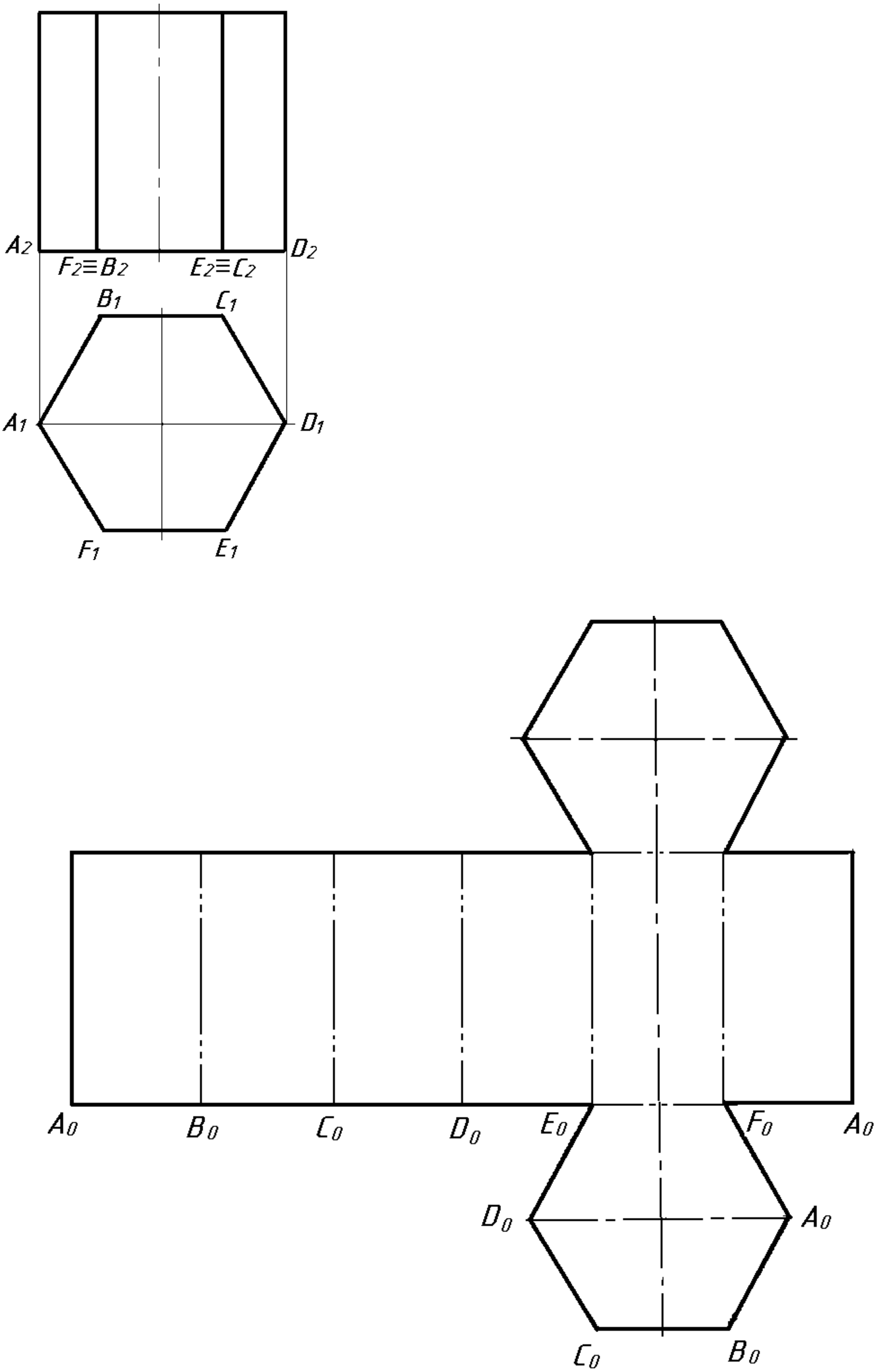


Рисунок 8.2

Бокові грані піраміди – трикутники, кожний з яких може бути побудований за трьома сторонами. Тому для розгортки піраміди достатньо визначити натуральні величини її бокових ребер. На рисунку 8.3 побудовано розгортку правильної піраміди ***SABCD***. Всі чотири бокових ребра мають однакову натуральну величну, яку знаходять методом обертання навколо осі, перпендикулярної Π_1. Розгортка бічної поверхні складається з чотирьох рівних трикутників. Для отримання повної розгортки піраміди до неї приєднують основу – квадрат.

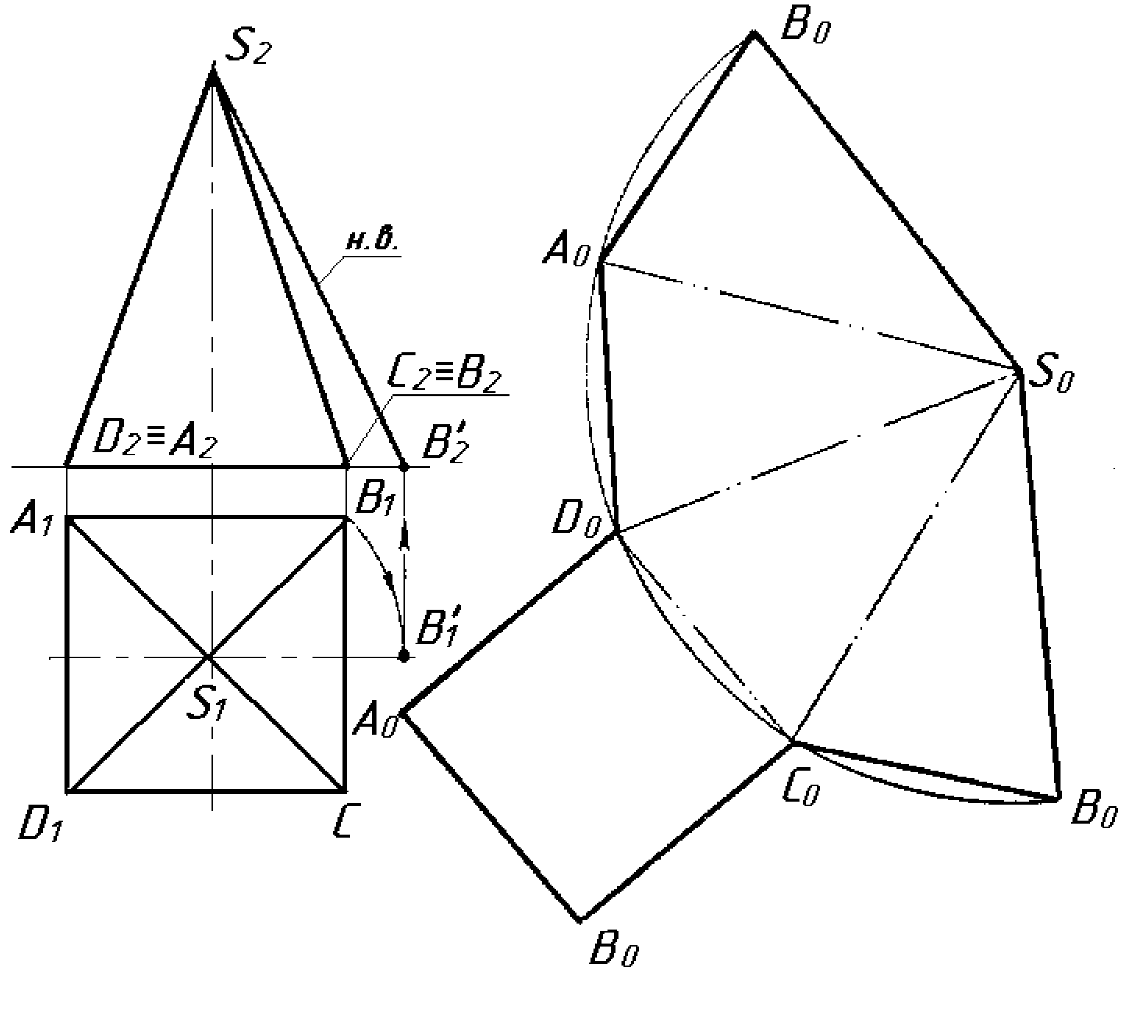


Рисунок 8.3

На рисунку 8.4 показано побудову бічної поверхні неправильної піраміди. Натуральні величини бокових ребер $S_2A'_2$, $S_2B'_2$, $S_2C'_2$ визначають методом обертання навколо осі i, перпендикулярної до Π_1. Потім будують розгортку піраміди, використовуючи метод засічок. На площині відкладають натуральну величину ребра ***SA***: $S_0A_0 = S_2A'_2$. Із точки S_0 проводять дугу радіусом R_1, із точки A_0 проводять дугу радіусом r_1. На перетині цих дуг відмічають точку B_0 і отримують натуральну величину грані $S_0A_0B_0$. Натуральні величини граней $S_0B_0C_0$ і $S_0A_0C_0$ будують, використовуючи радіуси R_2, r_2 і R_3 r_3.

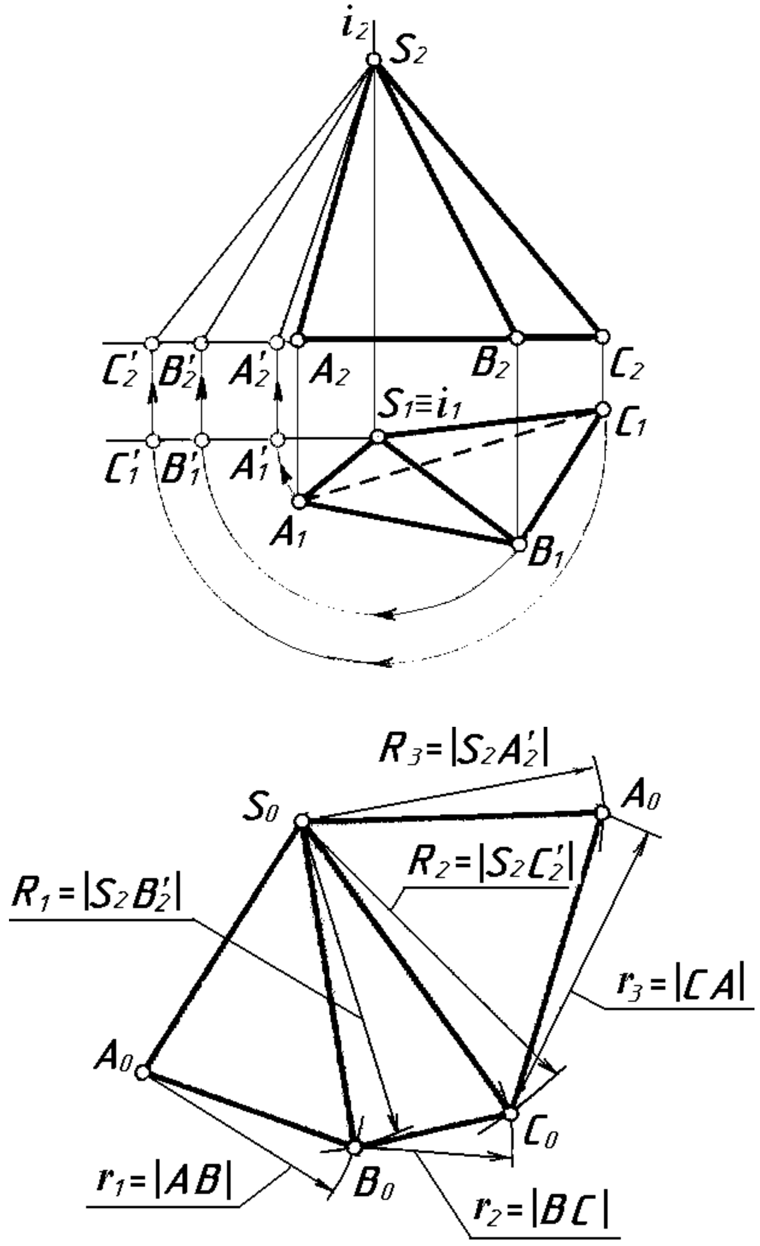


Рисунок 8.4

На рисунку 8.5 показано побудову розгортки бічної поверхні нахиленої тригранної призми ***ABCDEF***. Основа призми паралельна Π_1, тому в цьому випадку зручно використовувати спосіб розкатки. Для отримання натуральних величин бічних ребер призми вводять додаткову площину проекції Π_4 паралельно горизонтальним проекціям ребер A_1E_1, B_1D_1 і C_1F_1. Побудову розгортки починають з ребра A_0E_0. Всі інші точки вершин піраміди переміщують по лініях, перпендикулярних ребру A_0E_0. Точки C_0 і F_0 будують методом засічок. Для цього вимірюють натуральну величину ребра A_1C_1 і цим радіусом проводять дугу так, щоб вона перетинала лінію C_4C_0, і отримують натуральну величину грані $A_0E_0C_0F_0$. Точно за таким алгоритмом будують натуральні величини граней $B_0D_0C_0F_0$ і $A_0E_0B_0D_0$.

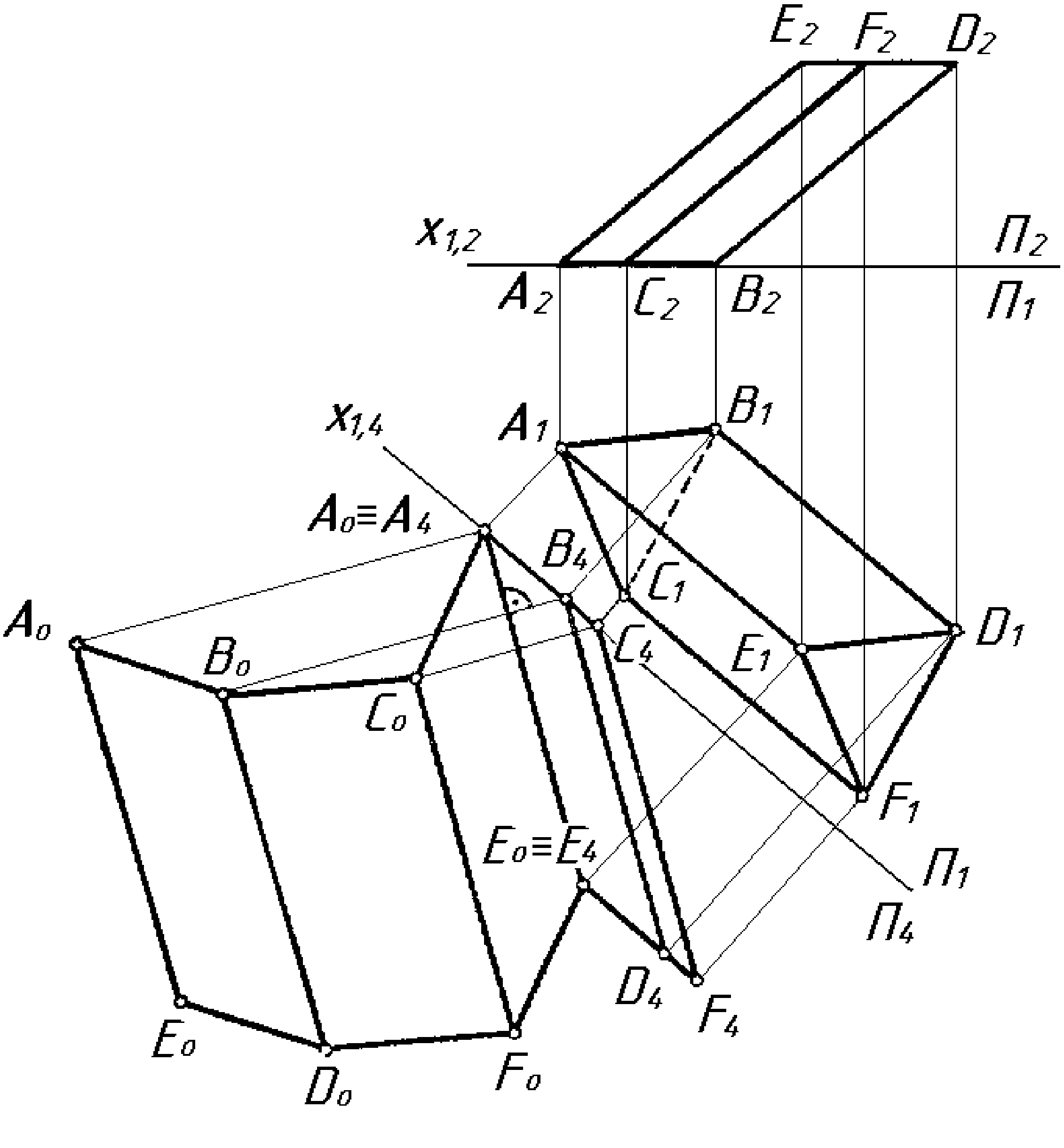

E2 F2 D2
x1,2
П2
A2 C2 B2
П1
x1,4
A1 B1
A0≡A4
B4
C1
A0
B0
C4
E1
D1
C0
F1
E0≡E4
П1
П4
D4
F4
E0
D0
F0

Рисунок 8.5

8.2 Розгортки кривих поверхонь

Розгортка поверхні прямого кругового конуса являє собою сектор круга з кутом при вершині φ =(R/l)360°, де R – радіус кола основи конуса, l – довжина твірної.

На рисунку 8.6 побудовано розгортку поверхні прямого кругового конуса. Центральний кут φ визначається довжиною розгортки кола основи конуса. Її будують за допомогою хорд сусідніх точок ділення кола основи.

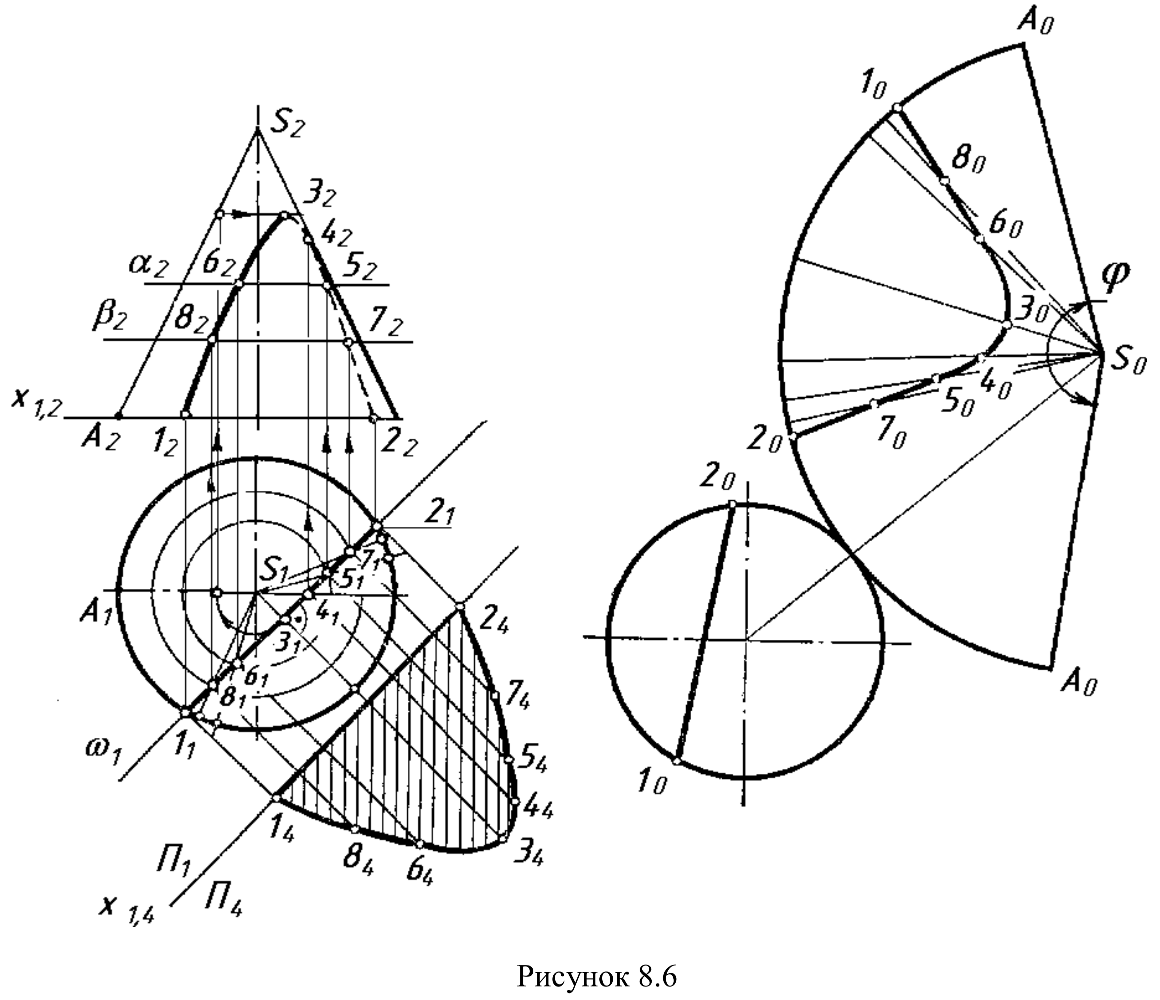


Рисунок 8.6

На рисунку 8.7 показано побудову розгортки нахиленої (еліптичної) конічної поверхні способом трикутників (тріангуляції), яка замінена поверхнею вписаної в неї восьмикутної піраміди. Розгортка має симетричну фігуру, тому що має площину симетрії. В цій площині лежить сама довга твірна S – 1. По ній виконано розріз поверхні. Сама коротка твірна S – 5 є віссю симетрії розгортки поверхні. Натуральні величини твірних визначені методом обертання навколо осі i.

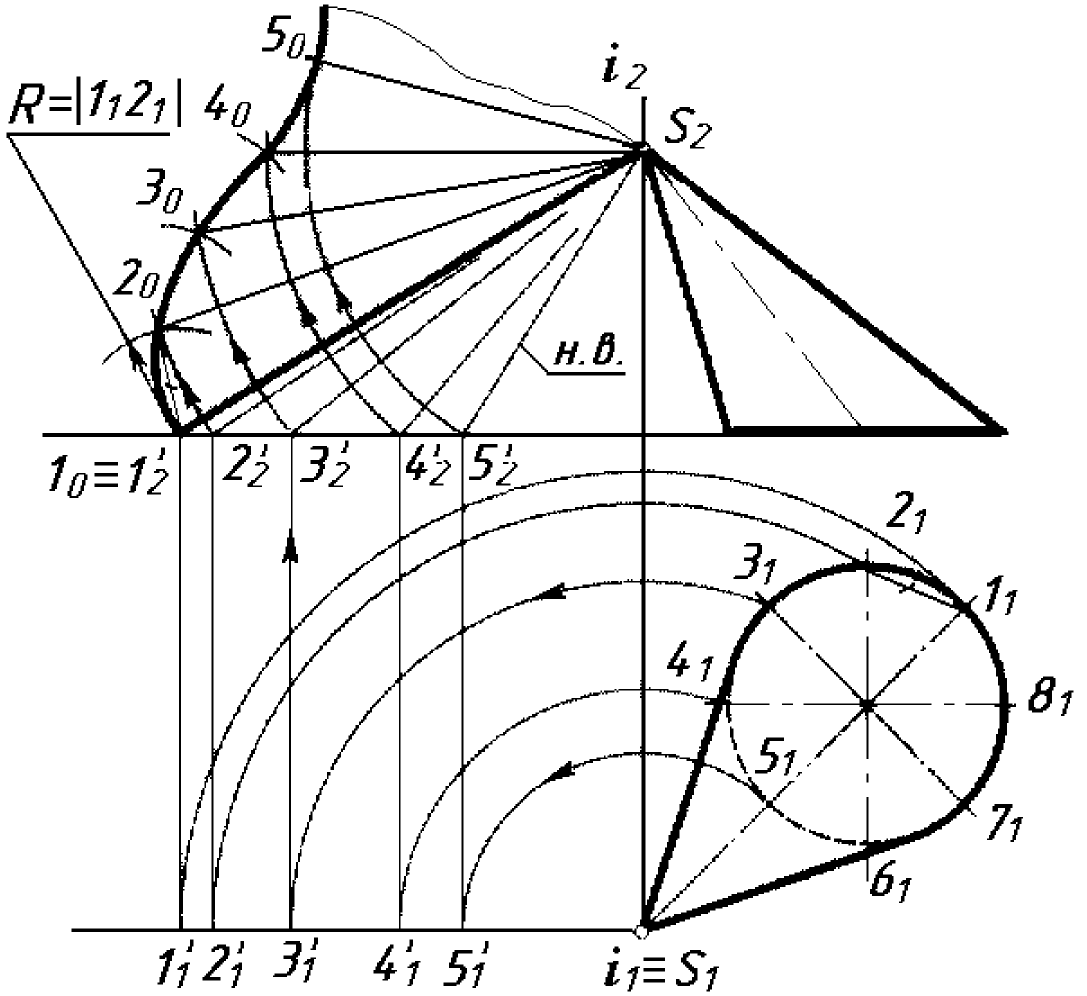


Рисунок 8. 7

На рисунку 8.8 показано побудову розгортки прямого кругового зрізаного циліндра. Зріз проекціювальною площиною α складає деякий кут до його осі. Фігура перерізу є еліпс, натуральну величину якого $1_0 – 4_0 – 7_0 – 10_0$ будують на додатковій площині проекції. Довжина кола основи циліндра **p** d. Повна розгортка складається з трьох частин: розгорт- ки бічної поверхні, обмеженої синусоїдою $7_0 – 1_0 – 7_0$, натуральної величи- ни фігури перерізу круга і основи циліндра.

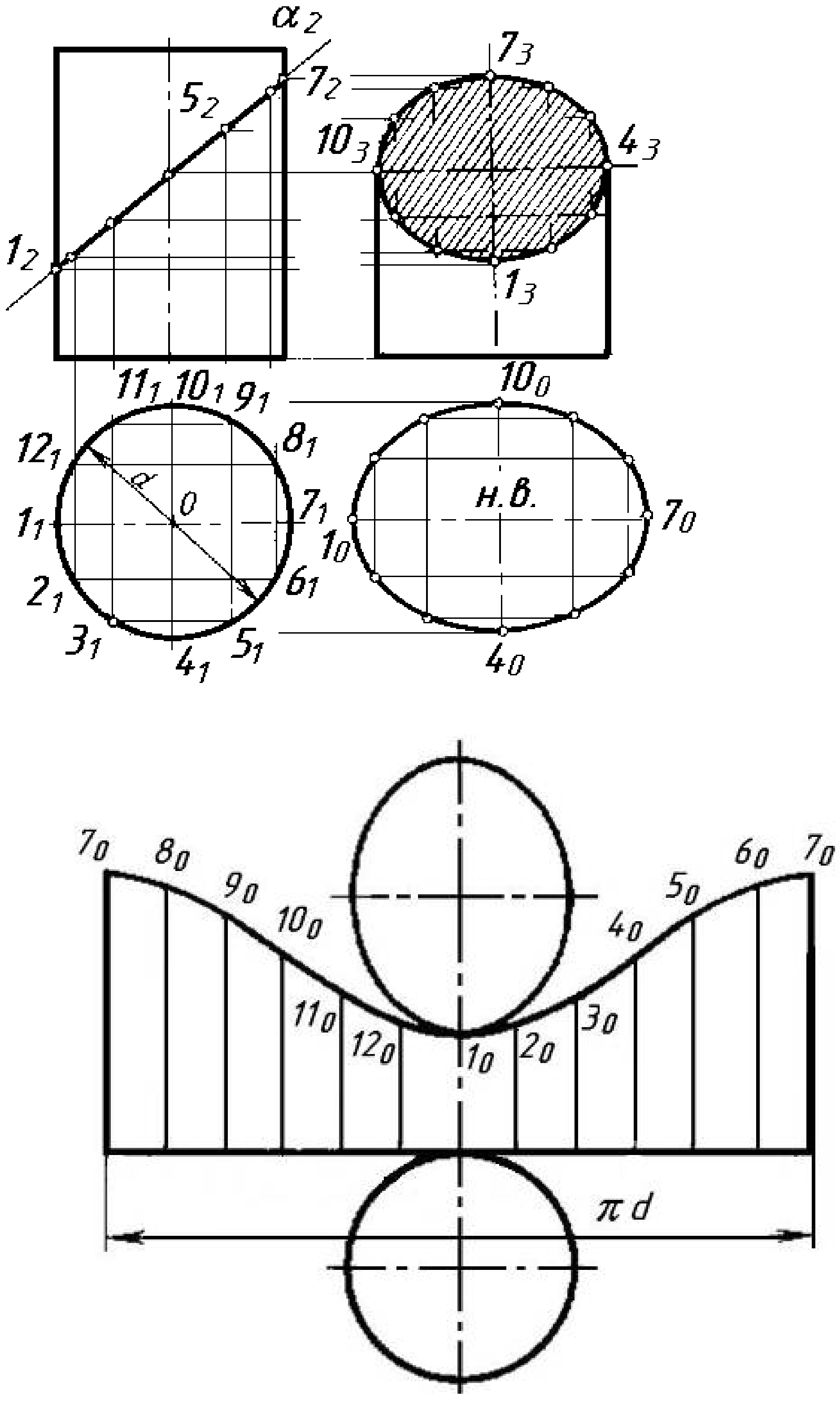


Рисунок 8.8

Розгортку нахиленого циліндра будують наближено (рис. 8.9). На його поверхні спочатку виконують заміну фронтальної площини проекції так, щоб на додатковій площині проекції твірні відобразились в натуральну величину. Бічну поверхню циліндра замінюють призмою, бічні ребра якої збігаються з дискретним каркасом твірних циліндра. Розгортку призми будують так само, як показано на рисунку 8.5.

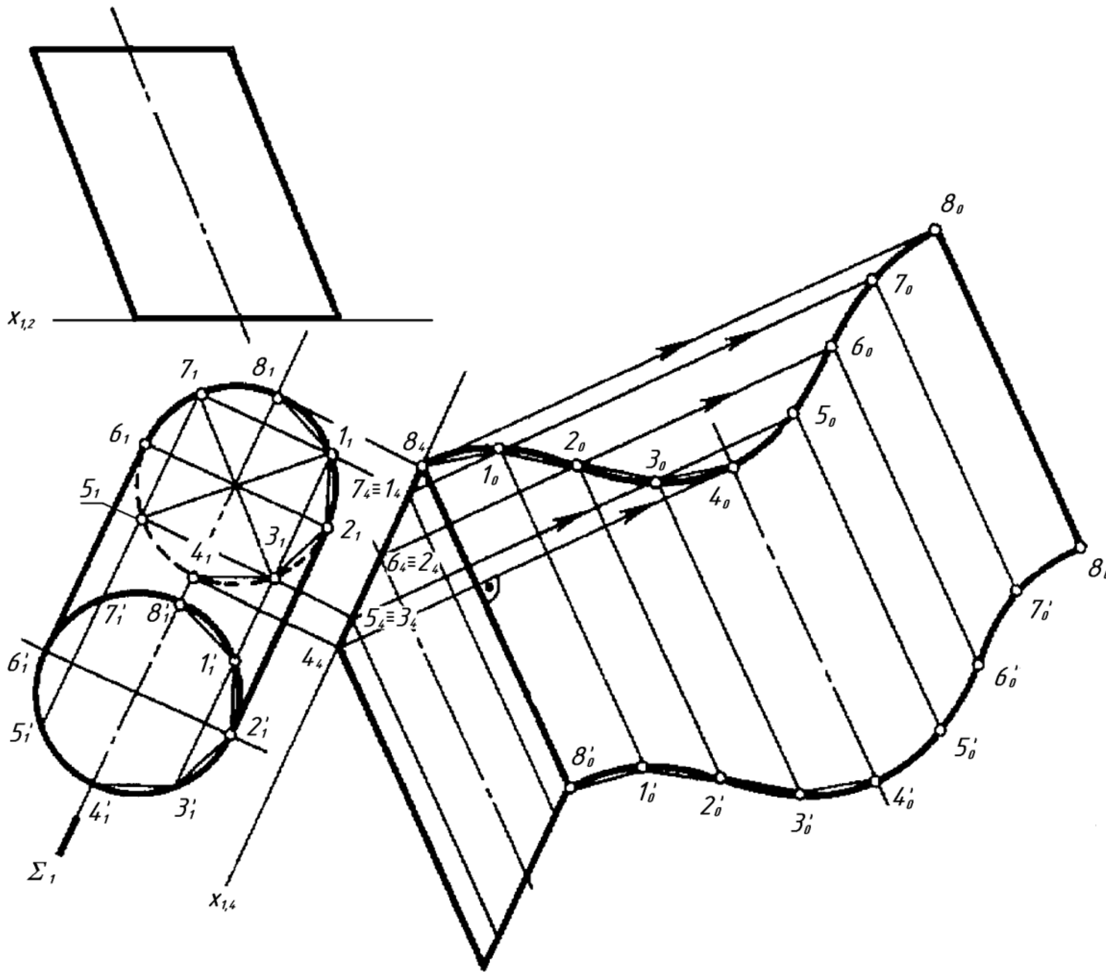


Рисунок 8.9

Поверхня сфери нерозгортна і може бути виконана приближними методами (рис. 8.10). Елементи нерозгортної поверхні замінюють елементами простої розгортної поверхні, наприклад, циліндричної (спосіб допоміжних циліндрів). Сферичну поверхню розбивають за допомогою меридіанів на рівні частини. Частину сфери, у якої середнім меридіаном є головний меридіан $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{l_2}$) замінюють циліндричною поверхнею. Твірні $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{EF}$ циліндричної поверхні, що проходять через точки $\boldsymbol{1_1}$, $\boldsymbol{2_1}$, $\boldsymbol{3_1}$ меридіана $\boldsymbol{l}$ будуть перпендикулярно до $\boldsymbol{\Pi_2}$. Вони проекціюються на $\boldsymbol{\Pi_1}$ в натуральну величину в межах кута $\boldsymbol{\alpha}$. Половину головного меридіана $\boldsymbol{N_2S_2}$ поділяють на шість рівних частин. Через горизонтальні проекції точок $\boldsymbol{1_1}$, $\boldsymbol{2_1}$, $\boldsymbol{3_1}$ проводять проекції $\boldsymbol{A_1B_1}$, $\boldsymbol{C_1D_1}$, $\boldsymbol{E_1F_1}$. Потім фронтальну проекцію головного меридіана випрямляють у пряму лінію. Через його точки ділення $\boldsymbol{1_0}$, $\boldsymbol{2_0}$, $\boldsymbol{3_0}$, $\boldsymbol{4_0}$, $\boldsymbol{5_0}$ проводять перпендикулярно $\boldsymbol{N_0} - \boldsymbol{S_0}$ твірні $\boldsymbol{E_0F_0}=\boldsymbol{E_1F_1}$, $\boldsymbol{C_0D_0}=\boldsymbol{C_1D_1}$ і т.д. Точки $\boldsymbol{N_0}$, $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{C_0}$ і т.д. з'єднують плавними кривими лініями і отримують приближену розгортку однієї шостої частини сфери. Аналогічним способом виконують розгортку поверхні закритого тора (рис. 8.11).

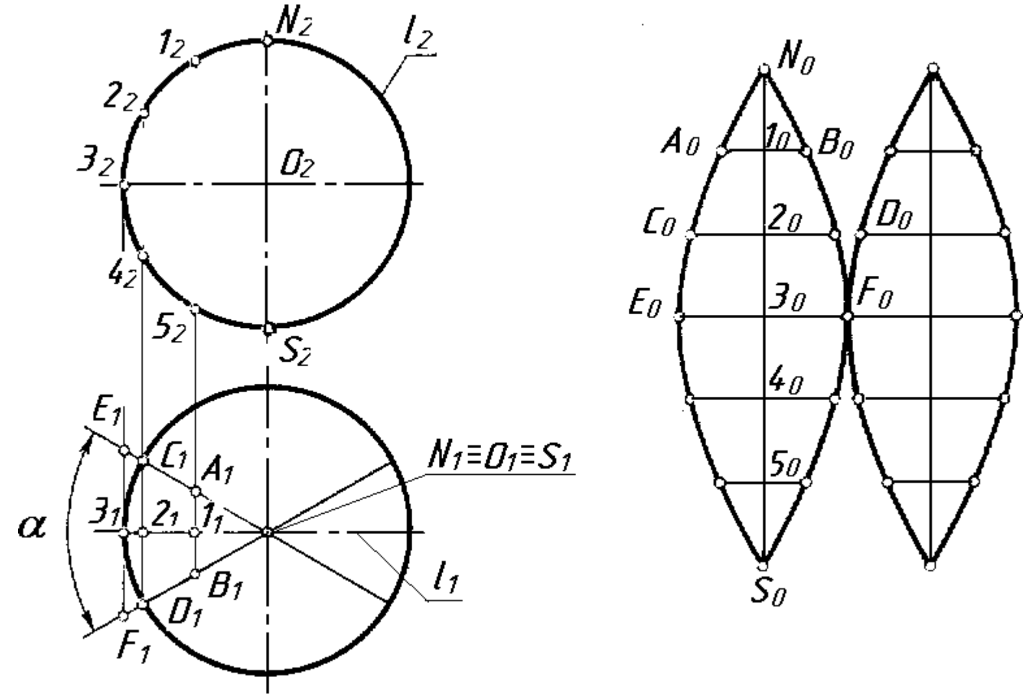


Рисунок 8.10

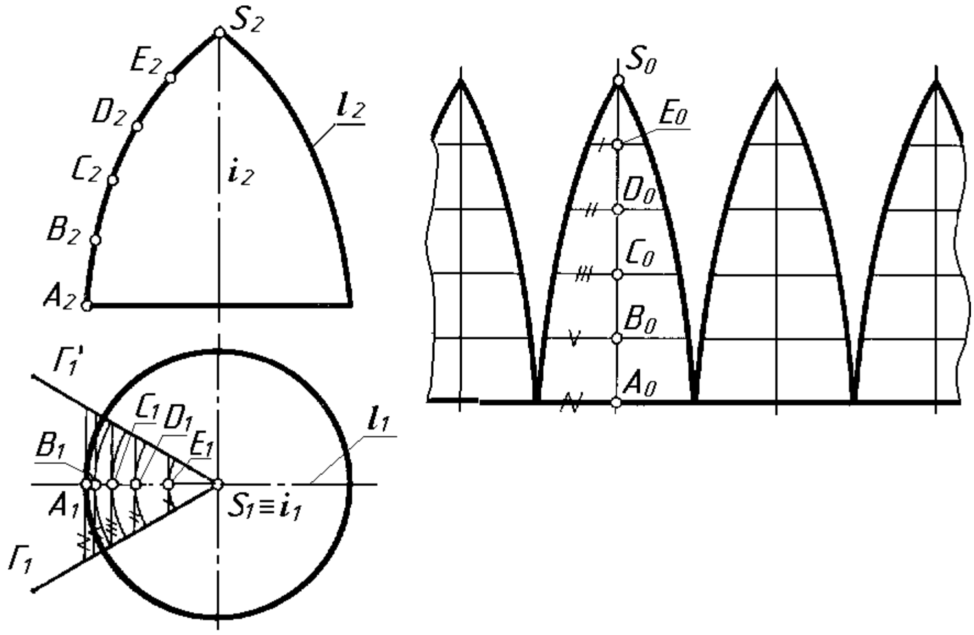


Рисунок 8.11

Запитання для самоконтролю

1. Що називають розгорткою поверхні?
2. Якими методами можна будувати розгортки поверхонь?

9 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ ЛІНІЇ З ПОВЕРХНЕЮ

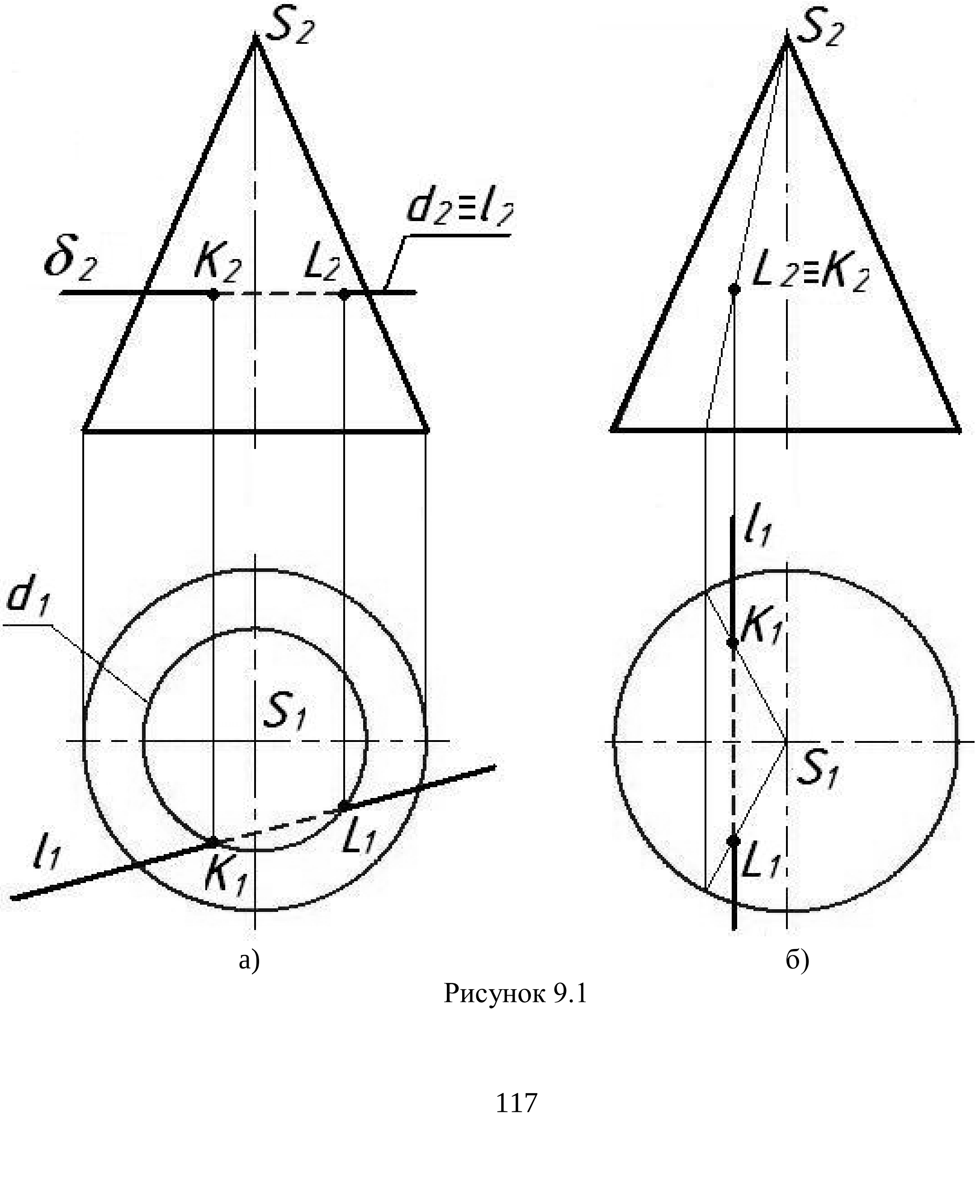
Пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках. Винятком є випадок, коли пряма дотична до поверхні і має з нею одну спільну точку.

9.1 Перетин прямої лінії з кривою поверхнею

Задача 1. Побудувати точки перетину прямої ***l*** з конусом (рис. 9.1).

Розв'язування. Через пряму ***l*** (рис.9.1,а) проводять горизонтальну площину $\boldsymbol{\delta}$, яка при перерізі конуса утворює на його поверхні коло ***d***. Там, де горизонтальна проекція прямої $\boldsymbol{l_1}$ перетинає коло $\boldsymbol{d_1}$, знаходять точки ***K*** і ***L*** й визначають видимість прямої.

Через пряму ***l*** (рис. 9.1,б) проводять фронтально-проекціювальну площину, яка проходить через вершину конуса і в перерізі на поверхні конуса утворює трикутник. Точки ***K***, ***L*** знаходять на перетині прямої $\boldsymbol{l_1}$ з трикутником.



а) б)

Рисунок 9.1

Задача 2. Побудувати точки перетину прямої ***l*** зі сферою (рис.9.2).

Розв'язування. Через пряму ***l*** проводять фронтальну площину, яка при перетині сфери утворює на її поверхні коло.

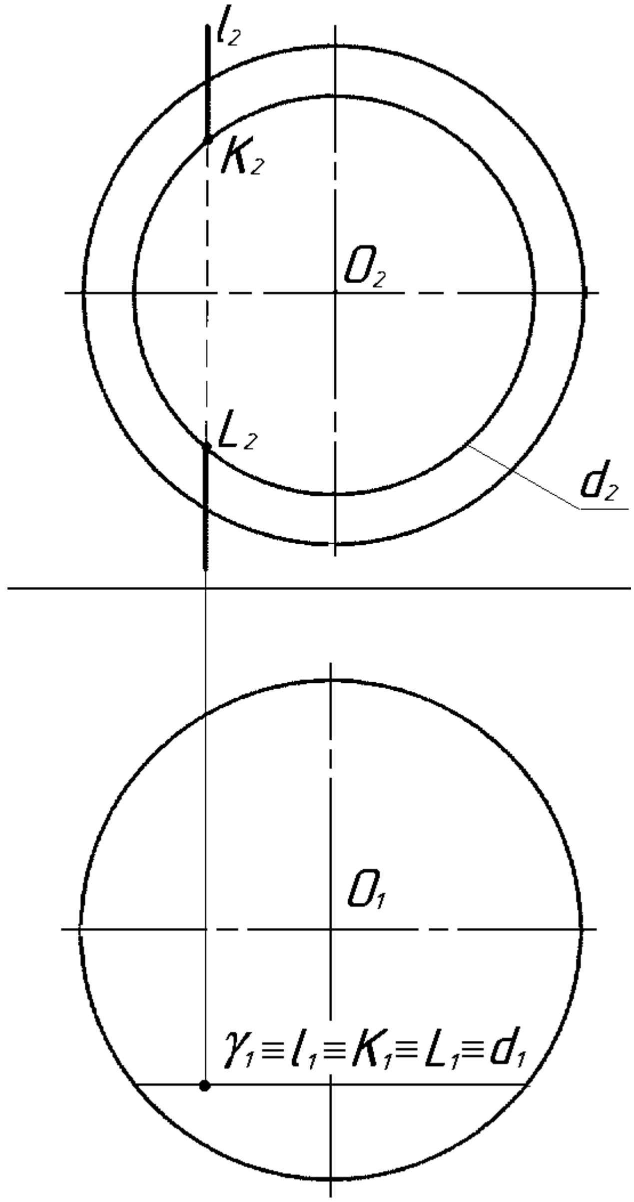


Рисунок 9.2

Задача 3. Побудувати точки перетину прямої загального положення ***АВ*** з поверхнею конуса (рис. 9.3).

Розв'язування. Якщо пряма загального положення перетинає поверхню прямого кругового конуса і перетинає вісь обертання, то через таку пряму можна провести проекціювальну січну площину. В даному випадку це буде горизонтально-проекціювальна площина α, яка проходить через вершину конуса і пряму ***АВ***. На Π_1 січна площина збігається з горизонтальною проекцією прямої ***АВ*** (A_1B_1). На поверхні конуса фігурою перерізу буде трикутник $S_2C_2D_2$. На фронтальній площині проекції $П_2$ визначають точки перетину ***1*** і ***2*** прямої ***AB*** з трикутником. Це будуть точки перетину прямої з поверхнею конуса, тому що сторони трикутника є твірними конуса.

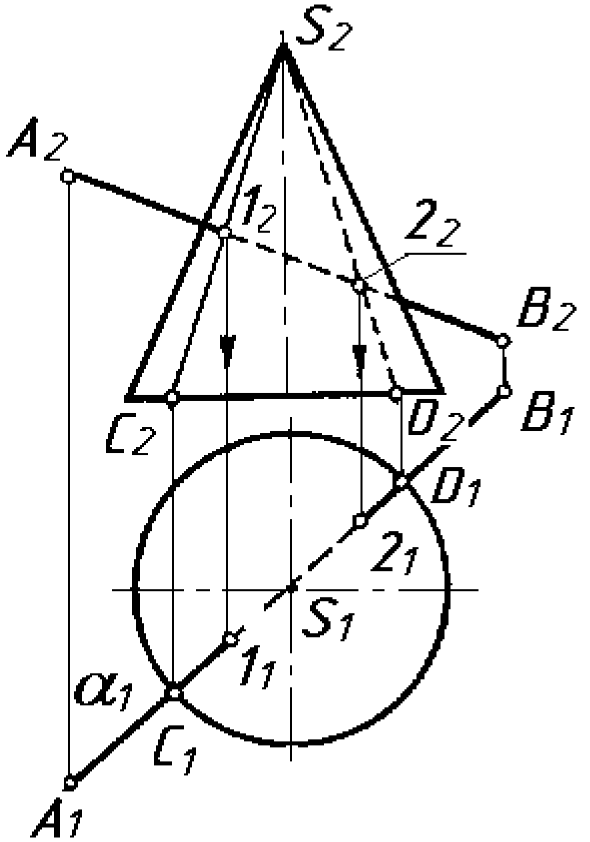


Рисунок 9.3

Задача 4. Побудувати точки перетину прямої ***AB*** з поверхнею сфери (рис. 9.4).

Розв'язування. Цю задачу можна розв'язати способом заміни площини проекції. Січна площина перетинає поверхню сфери по колу. Натуральну величину фігури перерізу знаходять на додатковій площині проекції $П_4$. Відрізок ***AB*** проекціюється на $П_4$ в натуральну величину. Там, де проекція відрізка A_4B_4 перетинає коло, визначають точки 1_4 і 2_4. Потім точки ***1*** і ***2*** проекціюють на $П_1$ і $П_2$ і визначають видимість прямої відносно поверхні сфери.

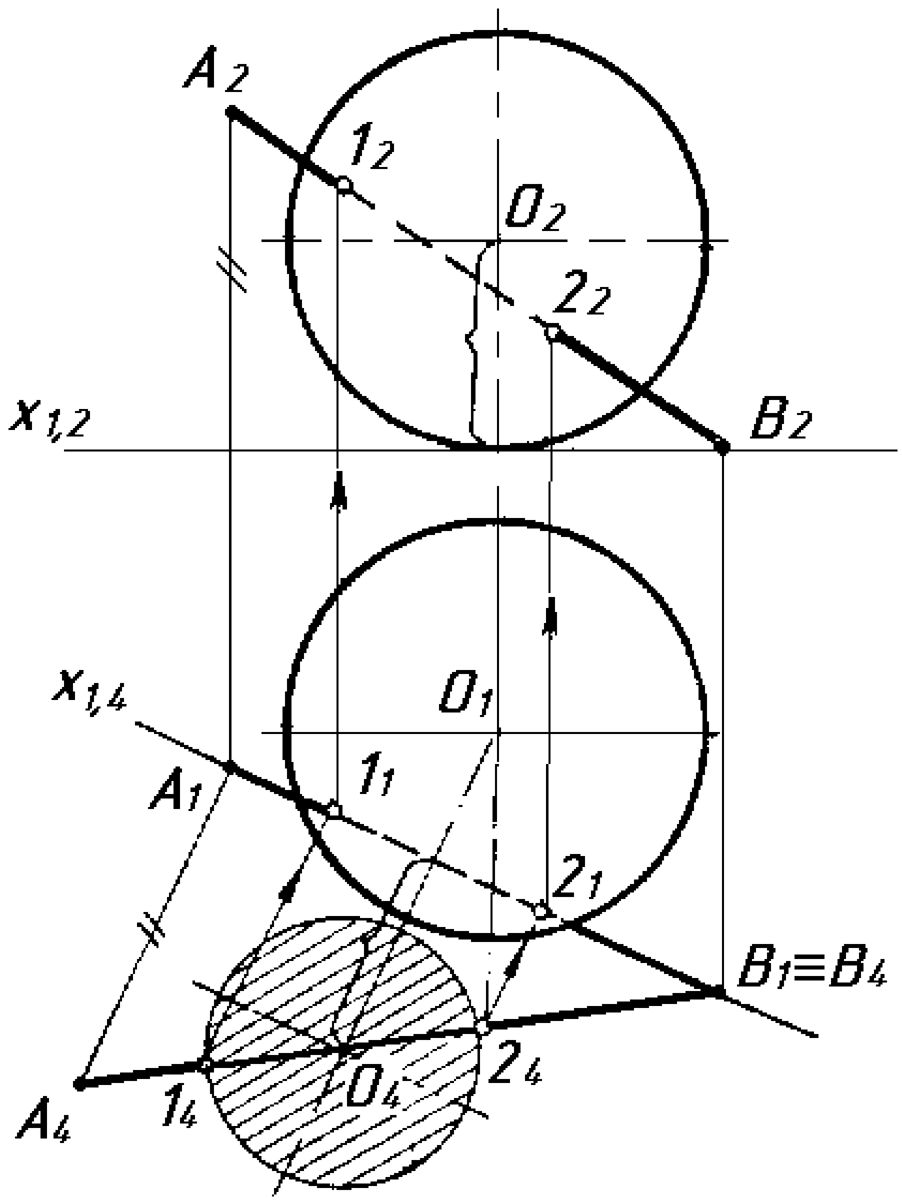


Рисунок 9.4

Задача 5. Побудувати точку перетину прямої ***AB*** з відкритим тором (рис. 9.5).

Розв'язування. Для побудови точок перетину ***M*** і ***N*** прямої ***AB*** з поверхнею тора використовують метод обертання. Пряма ***AB*** проходить через вісь обертання відкритого тора. Пряму ***AB*** обертають навколо осі ***i***. Точка ***B*** залишається нерухомою, а точка ***A*** на Π_2 переміщується по колу і суміщається з площиною Π_1. На Π_1 горизонтальна проекція точки ***A*** переміщується по лінії, паралельно осі $x_{1,2}$. Так визначається проекція A'_1 точки після повороту точки ***A***. На Π_1 визначають точки перетину відрізка $A'_1 B_1$ з колом (твірною тора) M'_1 і N'_1. Ці точки переміщують по горизонтальних лініях зв'язку на відрізок A_1B_1 і отримують точки M_1 і N_1. Точки ***M*** і ***N*** проекціюють на Π_2 на фронтальну проекцію відрізка A_2B_2. Потім на горизонтальній і фронтальній площинах проекцій визначають видимість відрізка ***AB*** відносно поверхні тора.

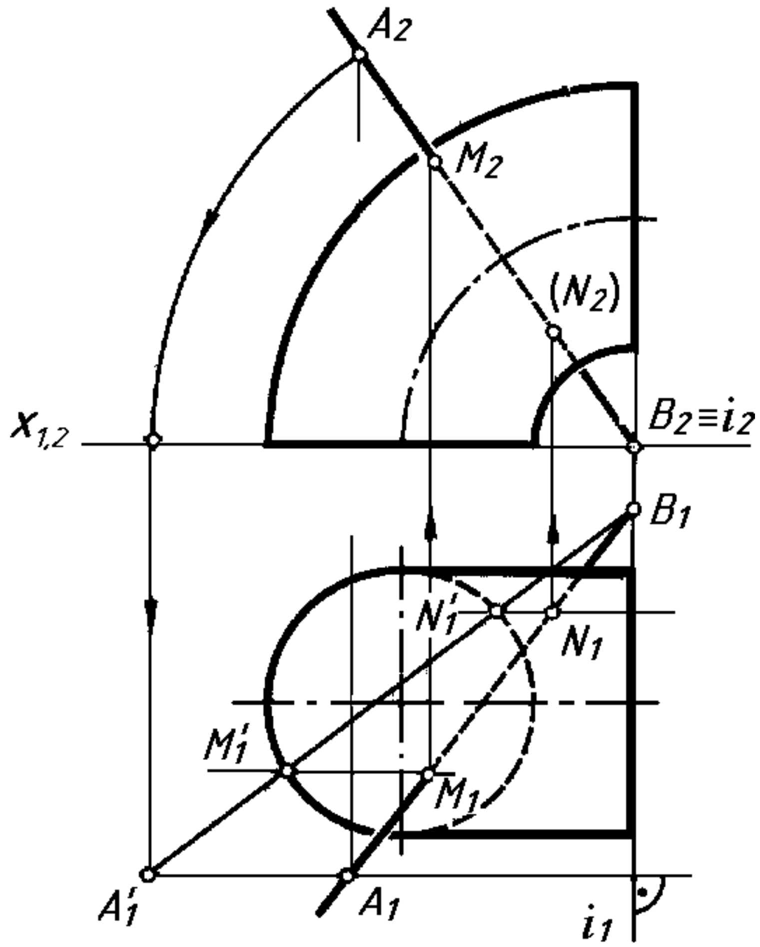


Рисунок 9.5

Задача 6. Побудувати точку перетину прямої ***l*** з конусом (рис. 9.6).

При розв'язанні цієї задачі через ***l*** можна провести допоміжну січну площину окремого положення, яка при перерізі конуса утворює криву лінію. Найпростішим способом розв'язання цієї задачі є такий, у якому через пряму ***l*** проводиться допоміжна січна площина загального положення. Ця площина обов'язково повинна проходити через вершину конуса, утворюючи при його перерізі на поверхні конуса трикутник.

Розв'язування. 1. Через вершину конуса ***S*** проводять пряму ***m***, яка перетинається з прямою ***AB*** в точці ***A***. Отримують площину, задану двома прямими ***AB*** і ***m***, що перетинаються.

2. Будують горизонтальний слід січної площини. Для цього визначають горизонтальні сліди прямих ***AB*** і ***m*** та з'єднують їх.

3. Зважаючи на те, що основа конуса і горизонтальний слід січної площини лежать в ***Π_1***, помічають точки перетину сліду січної площини з основою конуса. З'єднавши ці точки з вершиною конуса, отримують переріз конуса – трикутник.

4. Визначають точки перетину ***1***,***2*** прямої ***AB*** з перерізом (трикутником ***SCD***) і визначають видимість прямої.

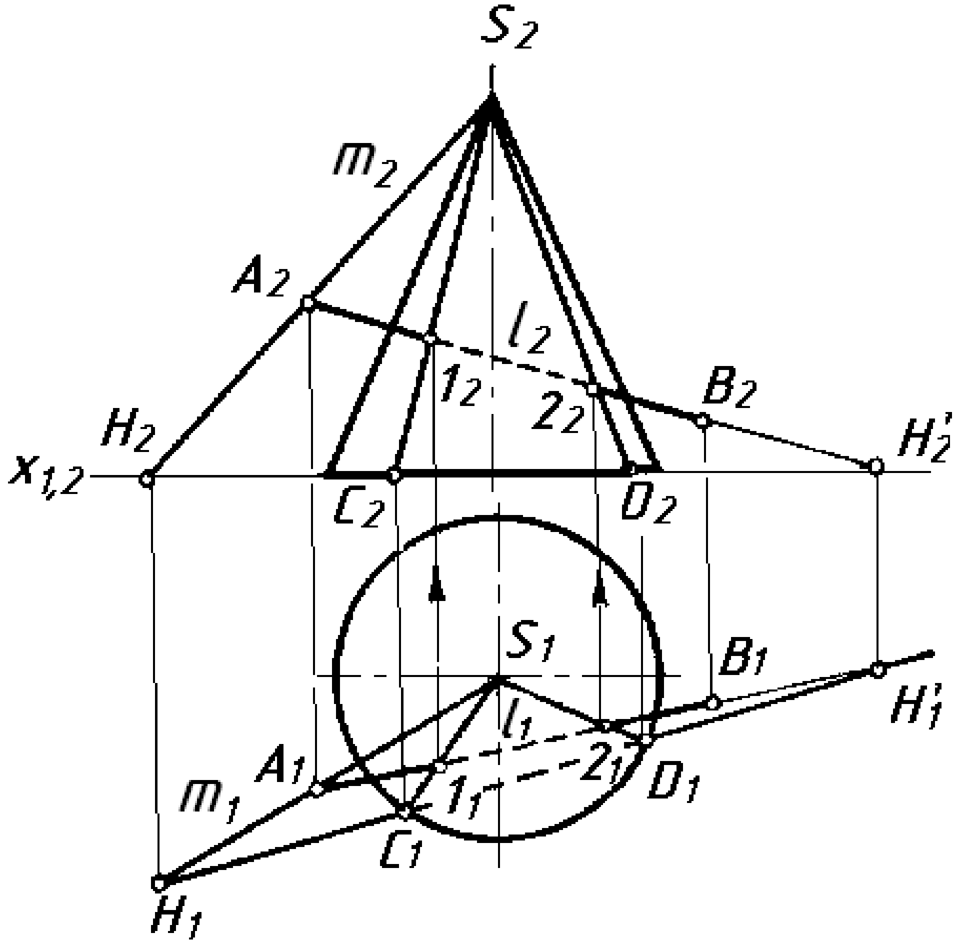


Рисунок 9.6

Задача 7. Побудувати точки перетину прямої загального положення ***AB*** з циліндром (рис. 9.7).

Розв'язування. У цій задачі проводять допоміжну січну площину загального положення паралельно до твірних циліндра. Ця площина задається двома прямими ***AM*** і ***AN***. При перерізі циліндра такою площиною на його поверхні утворюється паралелограм. Позначають точки перетину ***C*** і ***D*** відрізка ***AB*** з циліндром і визначають видимість прямої відносно пове- рхні циліндра.

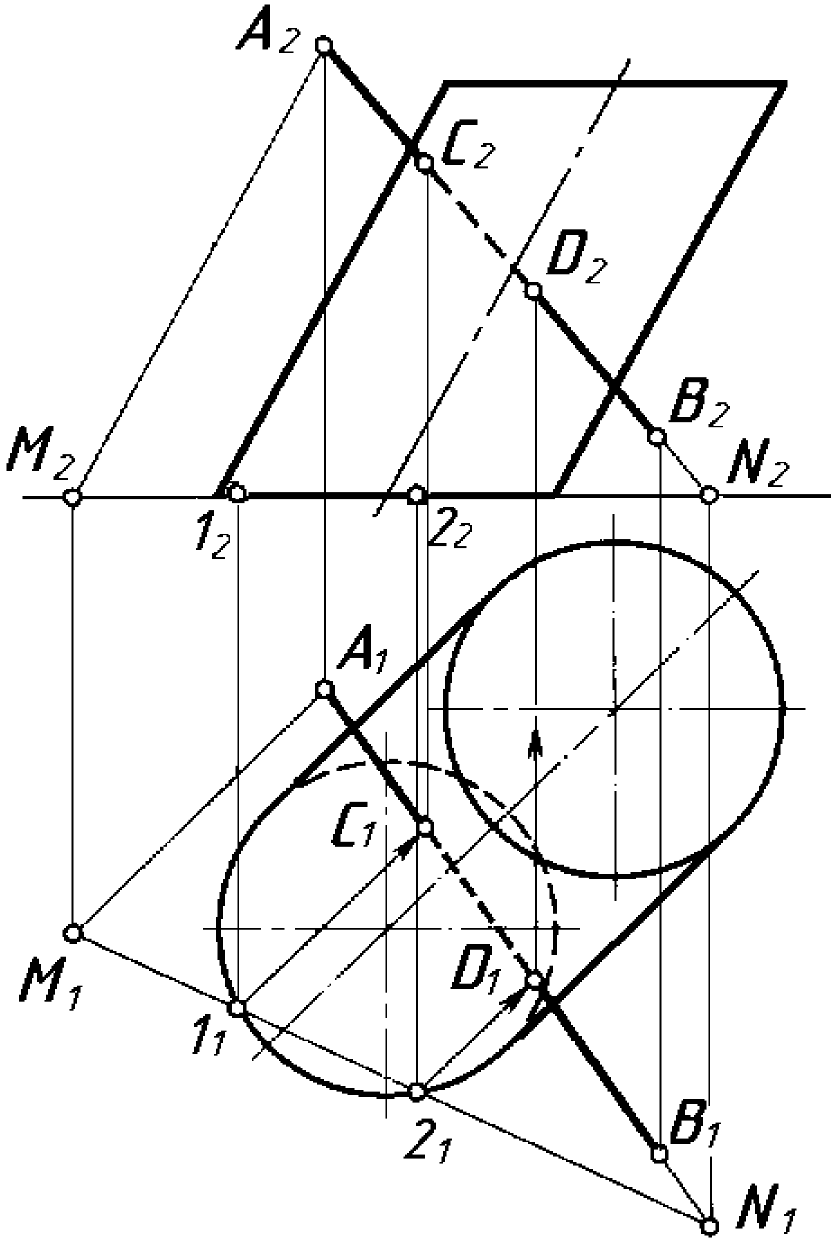


Рисунок 9.7

У загальному випадку точки перетину прямої з кривою поверхнею або багатогранником можуть бути визначені за допомогою січної площи- ни, що проводиться через пряму.

Алгоритм розв'язування задачі

1. Через дану пряму, яка перетинає поверхню, проводять допоміжну січну площину (площину окремого положення).
2. Будують лінію перетину (фігуру перерізу) поверхні з січною площиною. На кривій поверхні фігура перерізу – це плоска крива лінія другого порядку, на багатограннику – це багатокутник.
3. Знаходять точки перетину прямої з фігурою перерізу.

4. Визначають видимість прямої відносно поверхні.

При виборі допоміжної площини слід враховувати, що ця площина при перетині з поверхнею повинна давати такі лінії, як коло, трикутник, паралелограм тощо.

На рисунку 9.8 показано приклад перетину прямої загального положення з поверхнею тора.

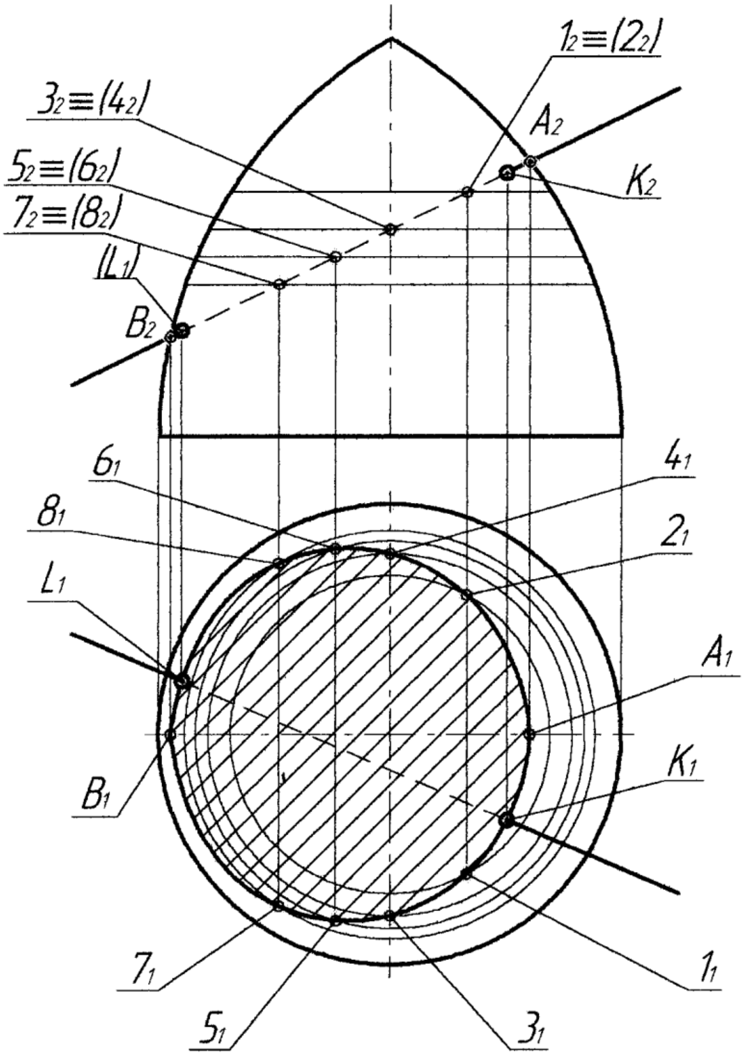


Рисунок 9.8

9.2 Перетин прямої лінії з багатогранником

Задача 1. Побудувати точки перетину прямої загального положення $\boldsymbol{l}$ з нахиленою призмою (рис. 9.9).

Розв'язування.

Через пряму $\boldsymbol{l}$ проводять фронтально-проекціювальну площину $\boldsymbol{\alpha}$. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ визначають точки перетину площини $\boldsymbol{\alpha}$ з боковими ребрами призми: $\boldsymbol{\alpha \cap AD=1}$, $\boldsymbol{\alpha \cap CF=2}$, $\boldsymbol{\alpha \cap BE=3}$. Отримані точки **1, 2, 3** проекціюють на $\boldsymbol{\Pi_1}$ на відповідні ребра. Горизонтальні проекції точок $\boldsymbol{1_1, 2_1, 3_1}$ з'єднують і отримують фігуру перерізу – трикутник. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ відмічають точки перетину $\boldsymbol{M_1}$ і $\boldsymbol{N_1}$ з трикутником $\boldsymbol{1_1\ 2_1\ 3_1}$. Фронтальні проекції точок $\boldsymbol{M_2}$ і $\boldsymbol{N_2}$ визначають там, де лінії зв'язку перетинають проекцію прямої $\boldsymbol{l_2}$. Визначають видимість прямої відносно поверхні призми.

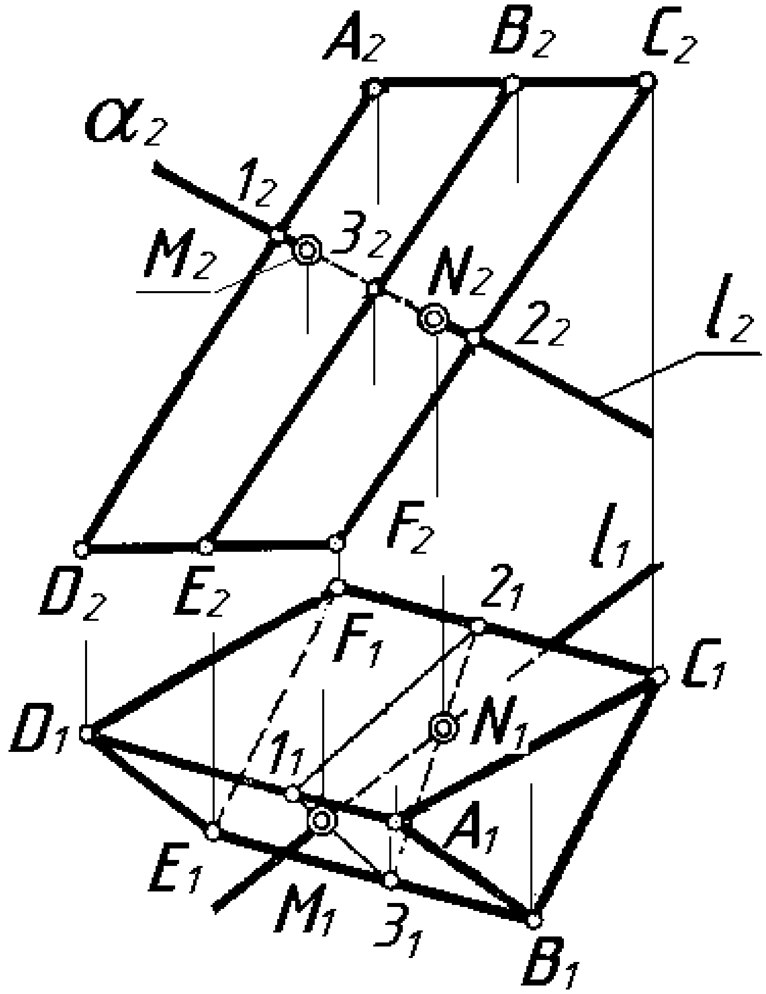


Рисунок 9.9

Запитання для самоконтролю

1. Яка послідовність знаходження точок перетину прямої лінії з поверхнею?
2. Які площини бажано використовувати для побудови точок перетину прямої з поверхнею?
3. Яка послідовність побудови точок перетину прямої загального положення з конусом?
4. Яким способом можна розв'язати задачу побудови точок перетину прямої загального положення з поверхнею обертання другого порядку?

10 ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

У задачах конструювання складних форм машинобудівних виробів або інженерних конструкцій виникає необхідність у побудові ліній перетину простих форм, які утворюють ці складні форми. Лінію, яка утворюється як множина спільних точок двох поверхонь, що перетинаються, називають ***лінією перетину поверхонь***.

Для побудови точок лінії взаємного перетину двох поверхонь застосовують два способи: перетворення проекцій та допоміжних перерізів.

10.1 Метод допоміжних січних площин

Для побудови лінії перетину двох поверхонь використовують допоміжні січні площини окремого положення. Цей метод застосовують у тому випадку, коли фігура перерізу буде мати просту для побудови лінію (коло або пряму лінію).

Розглянемо цей метод на прикладі розв'язання задачі побудови лінії перетину циліндра і півсфери (рис. 10.1).

Розв'язання задачі розпочинають з аналізу умови. Оскільки циліндр займає фронтально-проекціювальне положення, то фронтальна проекція лінії перетину співпадає з проекцією циліндра. Спочатку на $\boldsymbol{\Pi_2}$ визнача- ють опорні точки $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$, там де перетинаються контури поверхонь. Для побудови поточних точок лінії перетину використовують горизонтальні допоміжні січні площини $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. За допомогою площини $\boldsymbol{\alpha}$ будують то- чки ***1***, ***2***, ***9***, ***10***. Ці точки знаходяться на контурних твірних циліндра і визначають видимість лінії перетину. Всі інші поточні точки будують за допомогою горизонтальних січних площин $\boldsymbol{\beta}$ і $\boldsymbol{\gamma}$. Отримані точки з'єднують плавною кривою, враховуючи їх видимість. Метод січних площин можна також використовувати при побудові лінії перетину поверхні обертання з гранними поверхнями.

Задача 1. Побудувати лінію перетину прямого кругового конуса з фронтально-проекціювальним циліндром (рис. 10.2).

Розв'язування. На фронтальній площині проекції $\boldsymbol{\Pi_2}$ циліндр відображається в коло, а конус в трикутник. На перетині цих контурних ліній визначають опорні точки ***F*** й ***E***. За допомогою горизонтальних січних площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ будують поточні точки ***A***, ***B***, ***C***, ***D***. Точки ***C***, ***D*** знаходяться в площині $\boldsymbol{\beta}$, яка проходить через вісь обертання циліндра і розділяє циліндричну поверхню на дві частини – видиму і невидиму. Точки лінії перетину, які знаходяться вище точок ***C***, ***D*** на $\boldsymbol{\Pi_1}$ будуть видимі, а точки, що знаходяться нижче точок ***C***, ***D*** на $\boldsymbol{\Pi_1}$ будуть невидимі.

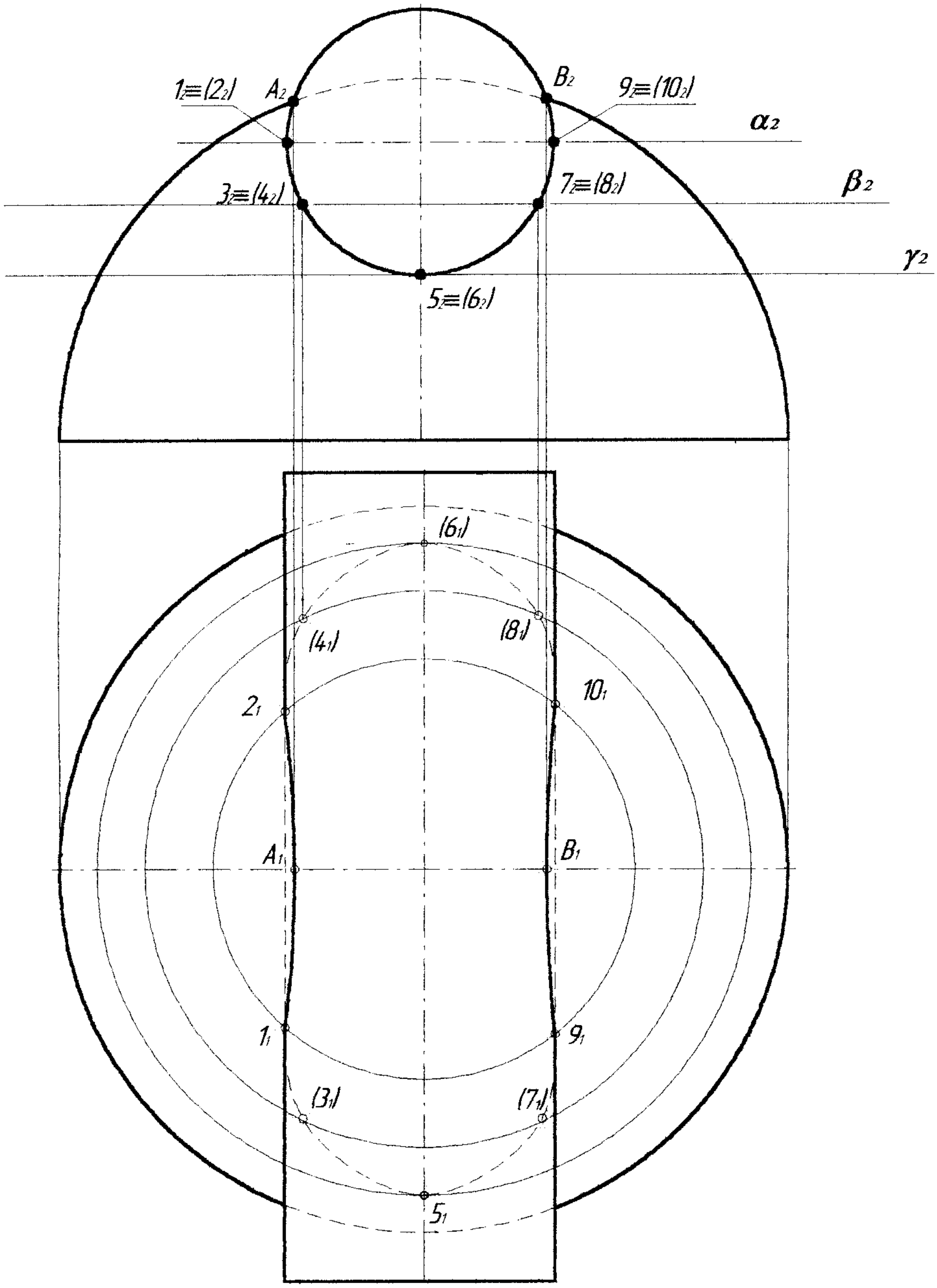

1₂≡(2₂)
A₂
B₂
9₂≡(10₂)
α₂
3₂≡(4₂)
7₂≡(8₂)
β₂
γ₂
5₂≡(6₂)
(6₁)
(4₁)
(8₁)
2₁
10₁
A₁
B₁
1₁
9₁
(3₁)
(7₁)
5₁

Рисунок 10.1

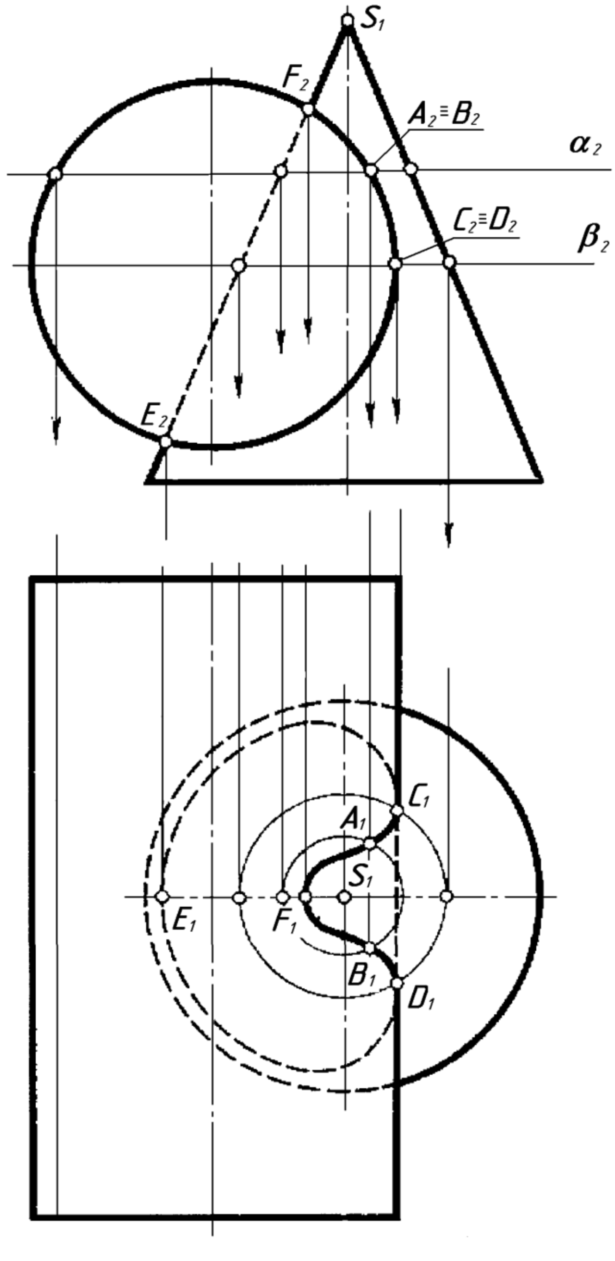


Рисунок 10.2

Задача 2. Побудувати лінію перетину прямого кругового конуса зі сферою (рис. 10.3).

Розв'язування. Опорні точки ***A*** й ***B*** можна побудувати за допомогою способу заміни площин проекцій. Ці точки знаходяться в площині симетрії ***Σ***, що проходить через осі обертання сфери і конуса. Площина ***Σ*** займає положення горизонтально-проекціювальне. Точки ***A*** й ***B*** знаходять на $\boldsymbol{\Pi_4}$ на перетині контурних ліній сфери і конуса. Всі інші точки лінії перетину можна будувати за допомогою горизонтальних січних площин.

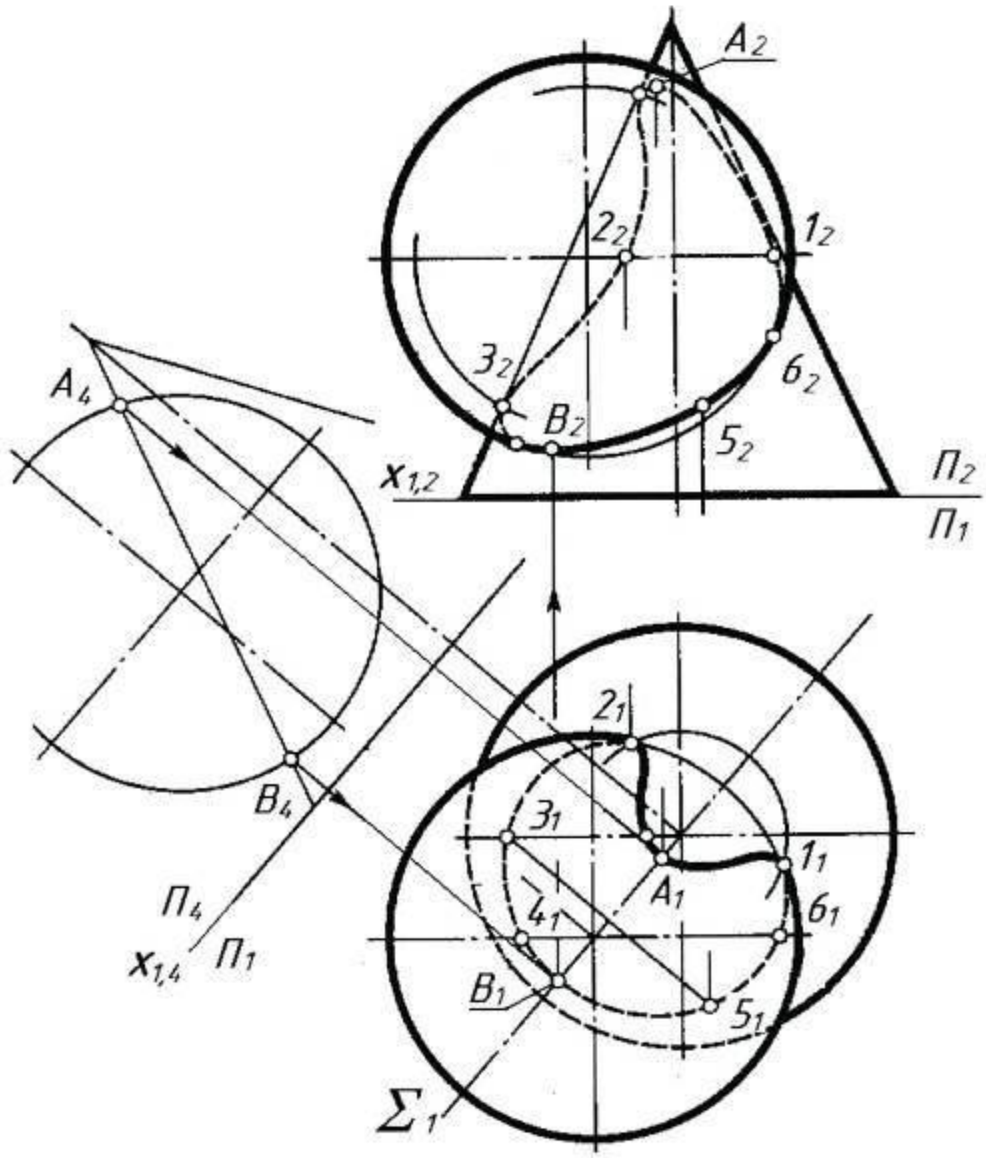


Рисунок 10.3

Задача 3. Побудувати лінію перетину півсфери з горизонтально-проекціювальним циліндром (рис. 10.4).

Розв'язування. На рисунку показано приклад перетину циліндра і півсфери. Крива поверхня циліндра відображається на $\boldsymbol{П_1}$ в коло. Тому лінія перетину двох поверхонь співпадає з цим колом. Саму низьку точку ***1*** і найвищу точку ***2*** будують там, де горизонтально-проекціювальна площина проходить через осі обертання циліндра і півсфери. Всі інші точки буду- ють за допомогою фронтальних допоміжних січних площин.

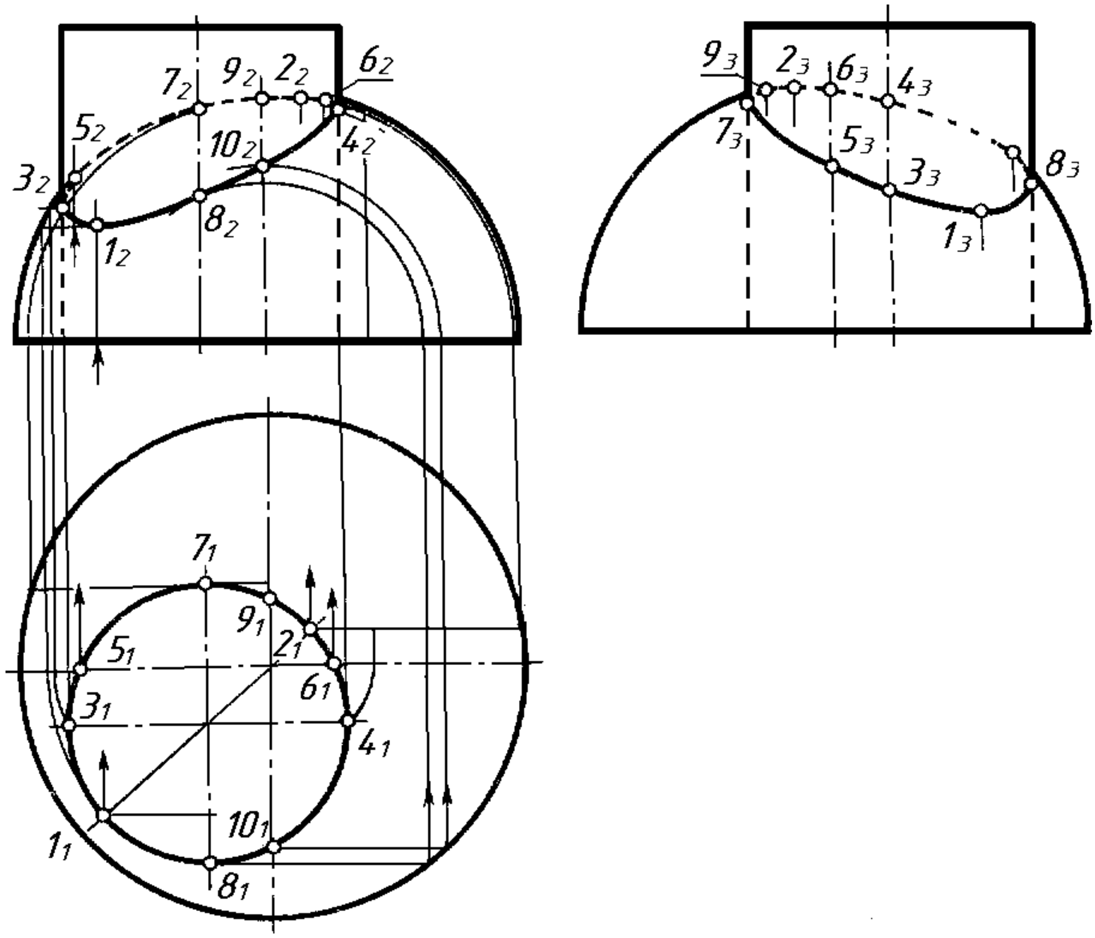


Рисунок 10.4

Задача 4. Побудувати лінію перетину тригранної призми з профільно-проекціювальним циліндром.

Розв'язування. На рисунку 10.5 показано приклад перетину тригранної призми і циліндра. Всі бокові грані призми на $\boldsymbol{\Pi_1}$ відображаються у прямі лінії. Крива поверхня циліндра відображається на $\boldsymbol{\Pi_3}$ в коло. Лінія перетину двох поверхонь на $\boldsymbol{\Pi_1}$ збігається з гранями призми, а на $\boldsymbol{\Pi_3}$ з контуром циліндра – колом.

Задача 5. Побудувати лінію перетину тригранної призми з пірамідою.

Розв'язування. На рисунку 10.6 показано приклад перетину багатогранників – призми і піраміди. Всі бокові грані призми на $\boldsymbol{\Pi_1}$ відображаються в прямі лінії. Лінія перетину збігається з горизонтальними проекціями граней призми. Точки ліній перетину двох поверхонь знаходять на перетині граней призми з ребрами піраміди.

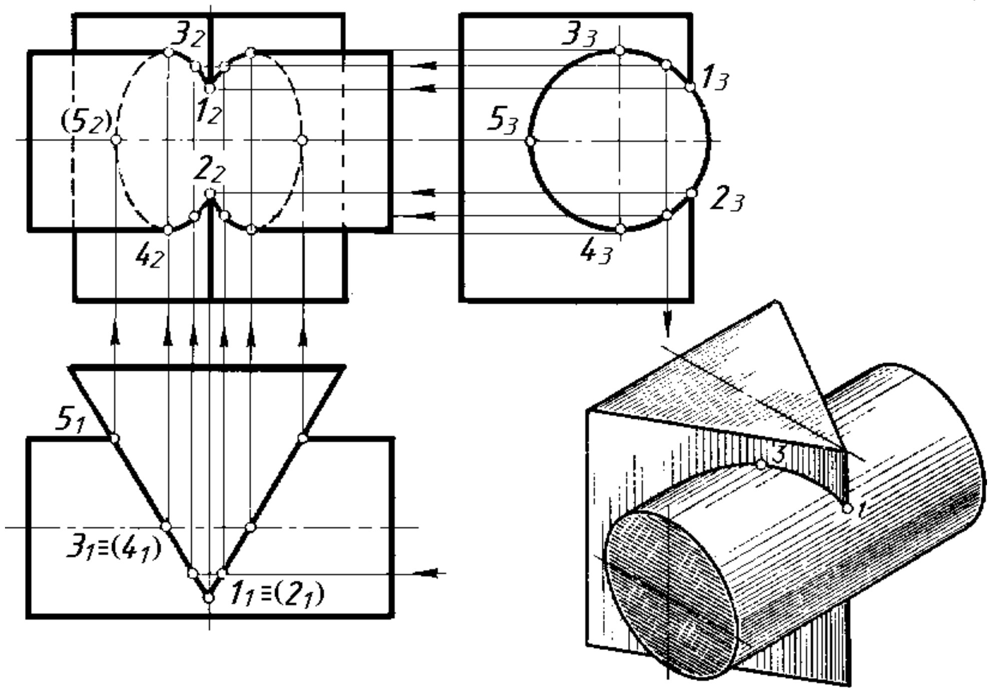


Рисунок 10.5

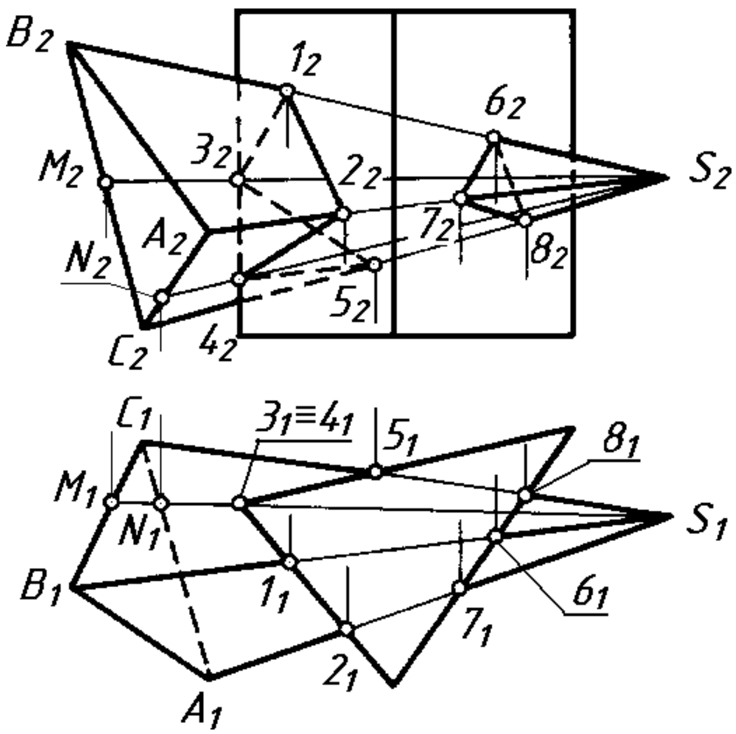


Рисунок 10.6

10.2 Перетин поверхонь, що мають спільну вісь обертання

Дві поверхні обертання називаються співвісними, якщо вони мають спільну вісь обертання. Якщо центр сфери лежить на осі обертання будь-якої поверхні, така пара поверхонь також називається співвісною. Дві співвісні поверхні завжди перетинаються по колу (рис. 10.7). Якщо сфера перетинається з будь-якою поверхнею обертання і центр сфери знаходиться на осі обертання цієї поверхні, то лінією перетину цих поверхонь є коло.

У перетині утворюється стільки кіл, скільки разів обрис сфери перетинається з обрисом поверхні обертання. Якщо вісь поверхні обертання паралельна або перпендикулярна до неї, то ці кола проекціюються (відображаються) на площину проекцій як прямі лінії.

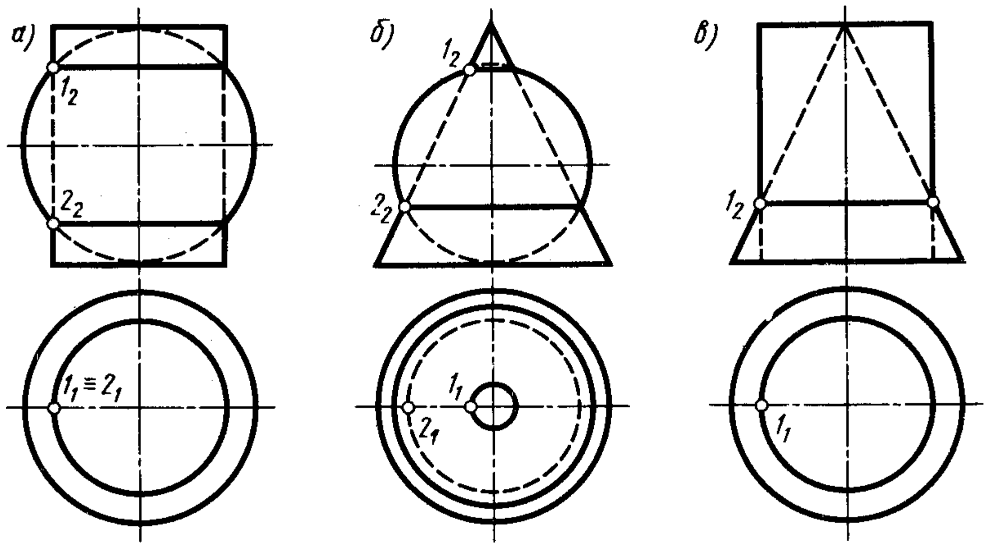


Рисунок 10.7

10.3 Метод концентричних сфер

Для побудови лінії перетину двох кривих поверхонь використовують метод концентричних сфер, якщо виконуються такі умови:

- обидві поверхні повинні бути поверхнями обертання;
- осі обертання обох поверхонь повинні перетинатися (знаходитися в одній площині);
- площина, в якій перетинаються осі обертання, повинна бути паралельна до однієї з площин проекцій.

На рисунку 10.8 наведено приклад, де перетинаються дві циліндричні поверхні обертання. Для такого випадку всі три умови виконуються. Лінію перетину поверхонь будують за таким алгоритмом. Спочатку там, де перетинаються контурні лінії обох поверхонь, визначаються опорні точки ***A*** і ***B***. Контурні лінії утворені фронтальною площиною симетрії. Далі визначають діапазон сфер-посередників, які можна використовувати для побудови поточних точок лінії перетину. Визначають сфери з мінімальним радіусом R_{min} і максимальним радіусом R_{max}. Сфера з мінімальним радіусом R_{min} повинна вписуватися в ту поверхню, яка більша. Сфера з радіусом R_{max} дорівнює відстані від точки перетину осей обертання O_2 до найвіддаленішої опорної точки B_2. Поточні точки **1-5** лінії перетину визначають там, де перетинаються кола на циліндричних поверхнях. Ці кола є лініями перетину концентричних сфер-посередників з циліндричними поверхнями, що перетинаються. На $П_2$ кола відображаються в прямі лінії. Побудовані точки з'єднують і отримують лінію перетину циліндричних поверхонь, що перетинаються.

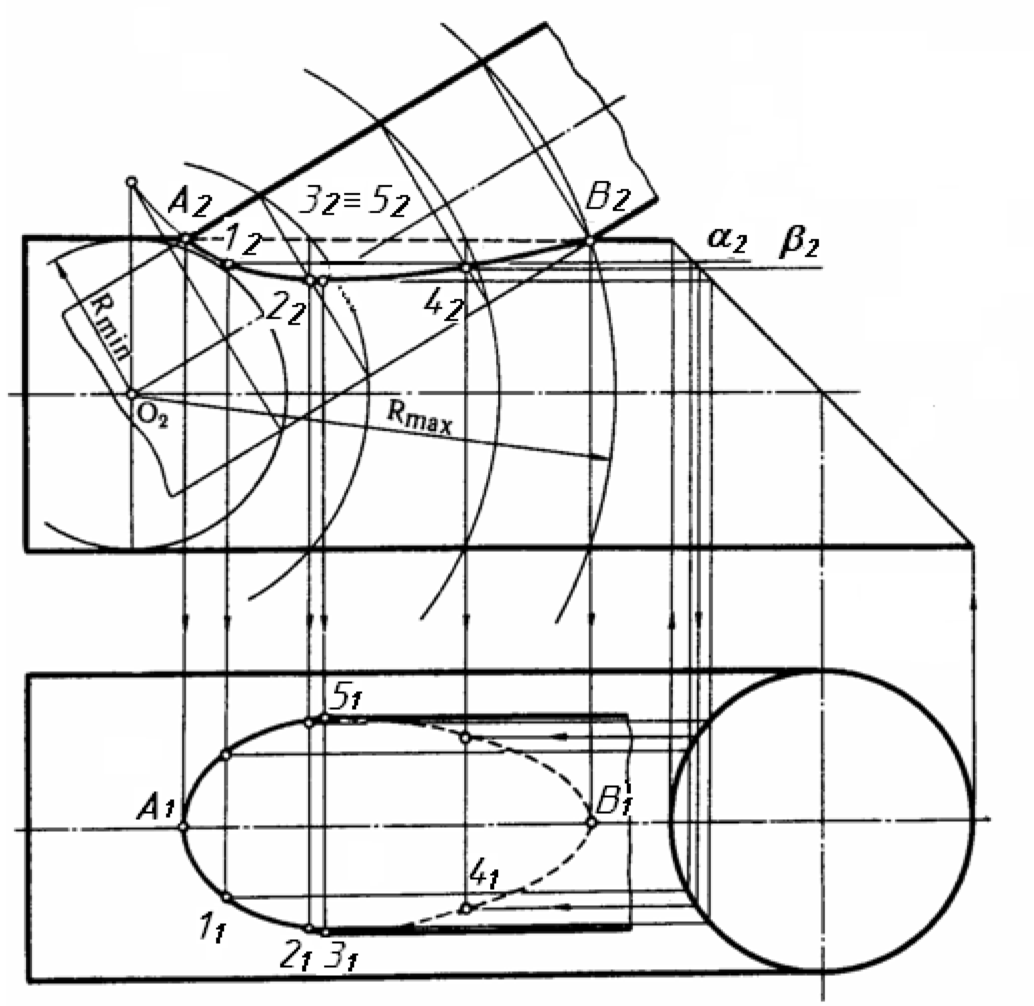


Рисунок 10.8

Задача. Побудувати лінію перетину закритого тора з конусом (рис. 10.9).

Розв'язування. Опорні точки ***A*** і ***B*** знаходять на перетині контурних ліній на фронтальній площині проекції. Проводять допоміжну сферу радіуса R_{min}, яка вписується в одну з поверхонь і перетинається з другою. У даній задачі сфера радіуса R_{min} вписується в тор. Радіус сфери R_{max} визначається відстанню від центру сфер до самої віддаленої точки. Поточні точки лінії перетину будують за допомогою концентричних сфер, радіуси яких можуть бути менше R_{max} або більше R_{min}.

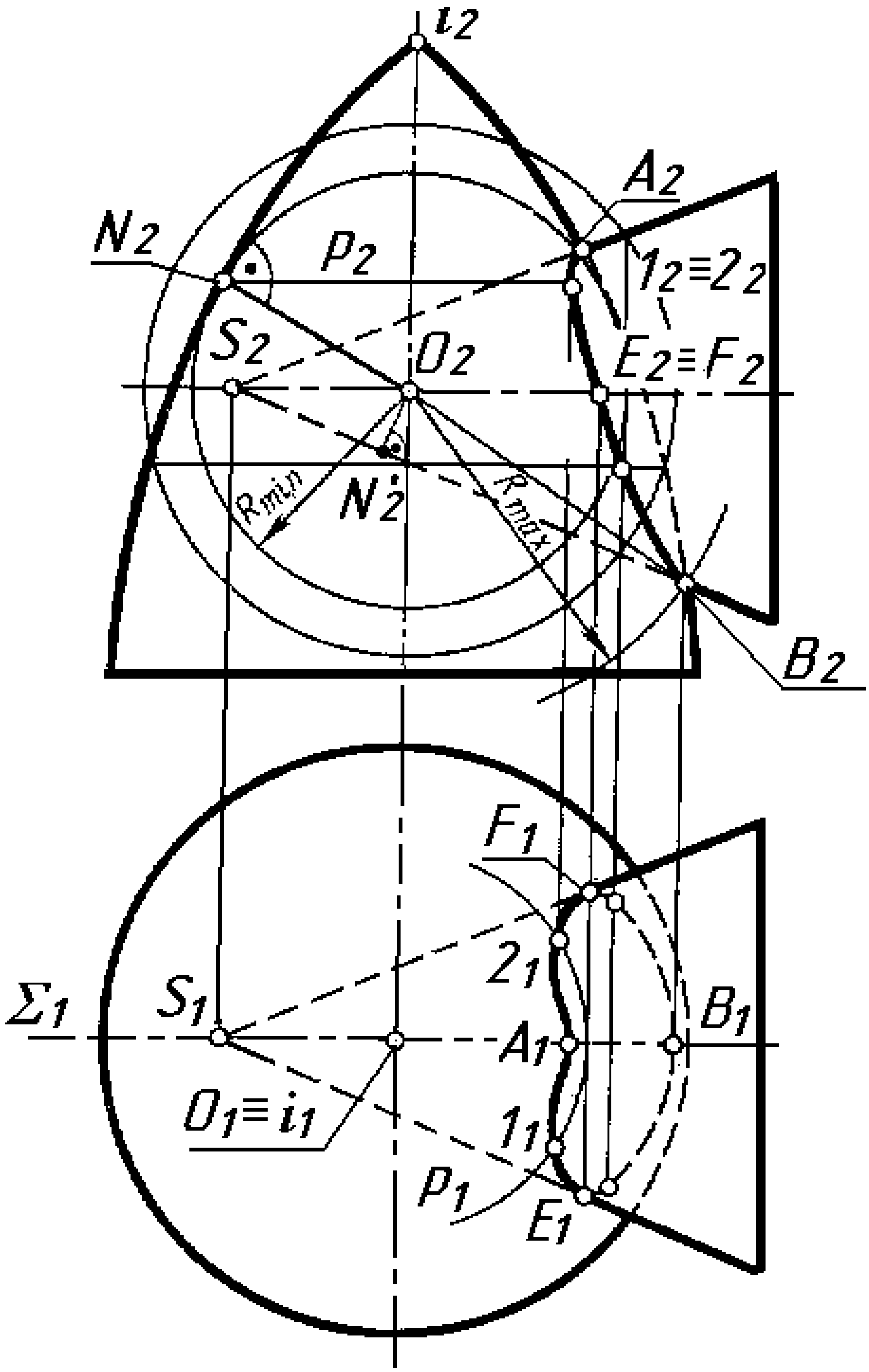

i2
A2
N2
P2
12≡22
S2
O2
E2≡F2
Rmin
N'2
Rmax
B2
F1
21
Σ1
S1
B1
A1
O1≡i1
11
P1
E1

Рисунок 10.9

10.4 Теорема Монжа

Якщо дві поверхні, що перетинаються, описані навколо третьої поверхні другого порядку – сфери, то лінія перетину розпадається на дві плоскі криві.

На рисунку 10.10 показано побудову лінії взаємного перетину конуса та циліндра обертання, які огинають спільну сферу □. Ця умова відповідає теоремі Монжа про розпад лінії перетину поверхонь другого порядку. Отже, лінія перетину цих поверхонь розпадається на дві плоскі криві другого порядку (еліпси), розміщені у фронтально-проекціювальних площинах. Безпосередньо на фронтальній проекції можна визначити вершини еліпсів. На **Π_2** проекції пар опорних точок **A_2, D_2** і **B_2, C_2** з’єднують прямими лініями. Горизонтальні проекції вершин еліпсів визначають за допомогою вертикальних ліній зв’язку. Еліпси можна побудувати відомими способами за двома осями.

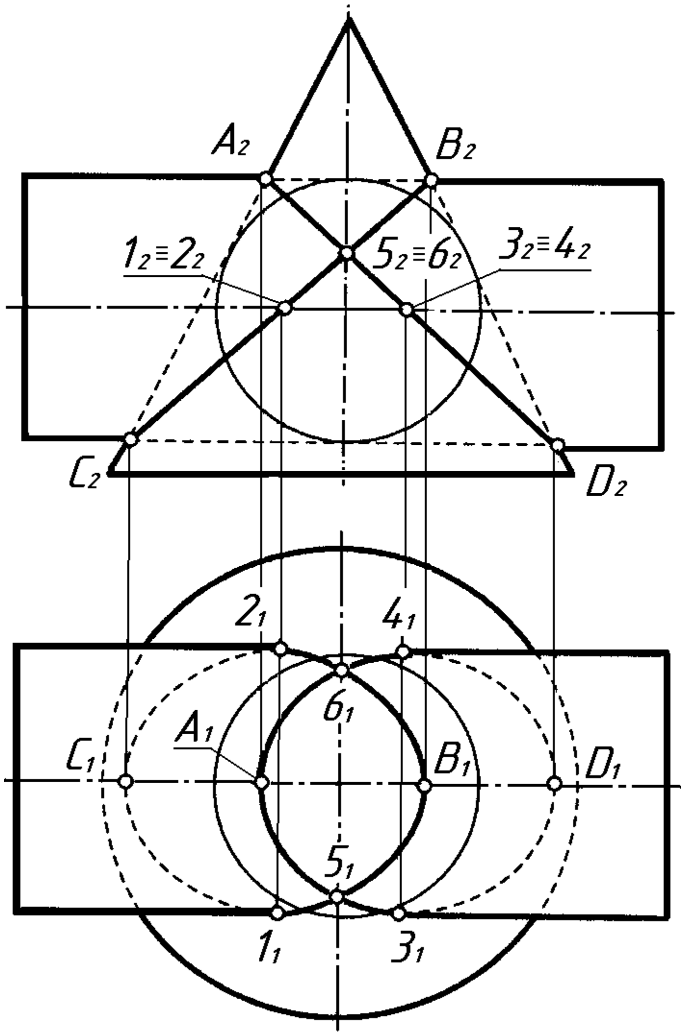


Рисунок 10.10

10.5 Метод ексцентричних сфер

При розв’язанні задач на перетин поверхонь цим методом повинні змінитися положення центрів допоміжних сфер: вони мають знаходитися на осі поверхні обертання.

Задача 1. Побудувати лінію перетину урізаного конуса й тора (рис. 10.11).

Розв’язування. Опорні точки A, D визначають на перетині конту- рів конуса і тора. Через вісь обертання i_2 тора, яка на Π_2 займає фронталь- но-проекціювальне положення, проводять січну площину α, яка перетинає контур тора в точках 1_2 і 2_2, а також перетинає осьову лінію тора в точці 3_2. Через точку 3_2 проводять лінію, перпендикулярну площині α. Ця лінія буде перетинати вісь обертання конуса в точці O_2. Радіусом $R1 = O_2 1_2$ ($R1 = O_2 2_2$) проводять сферу, яка перетинає контур конуса в точках 4_2, 5_2. Це буде проекція паралелі d_2 на поверхні конуса, яка на Π_1 проекціюється в коло. Там, де проекція січної площини α_2 перетинає проекцію паралелі d_2 визначають поточні точки $B_2 \equiv B'_2$ лінії перетину. За таким алгоритмом будують точки $C_2 \equiv C'_2$ та інші поточні точки лінії перетину, використо- вуючи допоміжні січні площини і сфери.

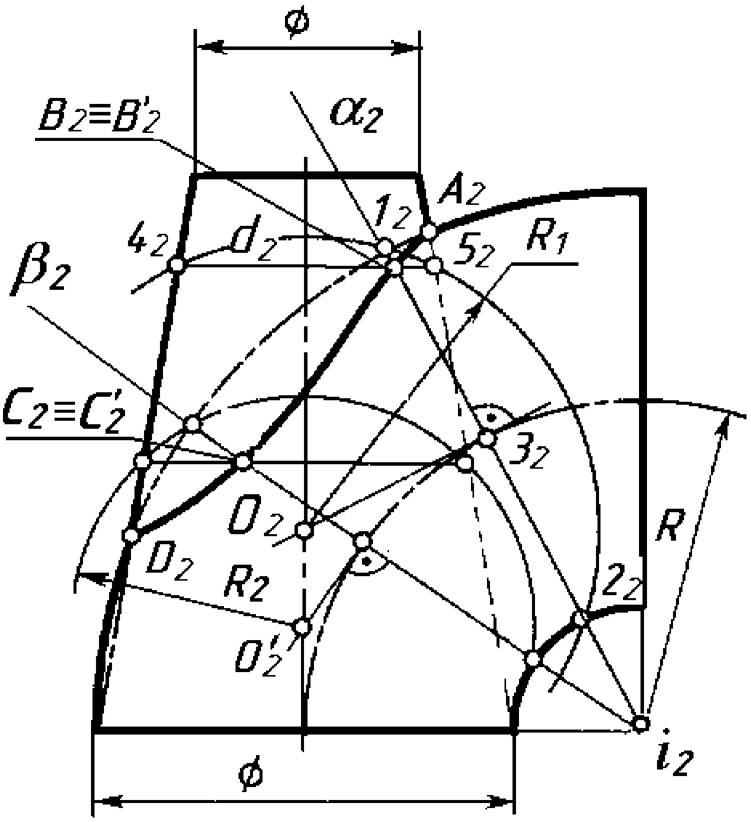


Рисунок 10.11

Задача 2. Побудувати лінію перетину циліндра обертання і нахиленого конуса.

Розв'язування. На рисунку 10.12 показано приклад, де перетинаються прямий круговий циліндр і еліптичний конус. Опорні точки знаходять на фронтальній площині проекції на перетині контурних ліній циліндра і конуса. Поточні точки будують за допомогою горизонтальних січних площин і ексцентричних сфер. Січна площина перетинає вісь конуса. З цієї точки проводять перпендикуляр до перетину з віссю обертання циліндра в точці $\boldsymbol{O_2}$. Радіус сфери підбирають від точки $\boldsymbol{O_2}$ до точки перетину січної площини з контуром конуса. Будують лінію перетину сфери з контуром циліндра. Поточні точки $\boldsymbol{1_2}$ і $\boldsymbol{2_2}$ визначають там, де січна площина (паралель) перетинає лінію на поверхні конуса. За таким алгоритмом будують інші точки лінії перетину циліндра і конуса.

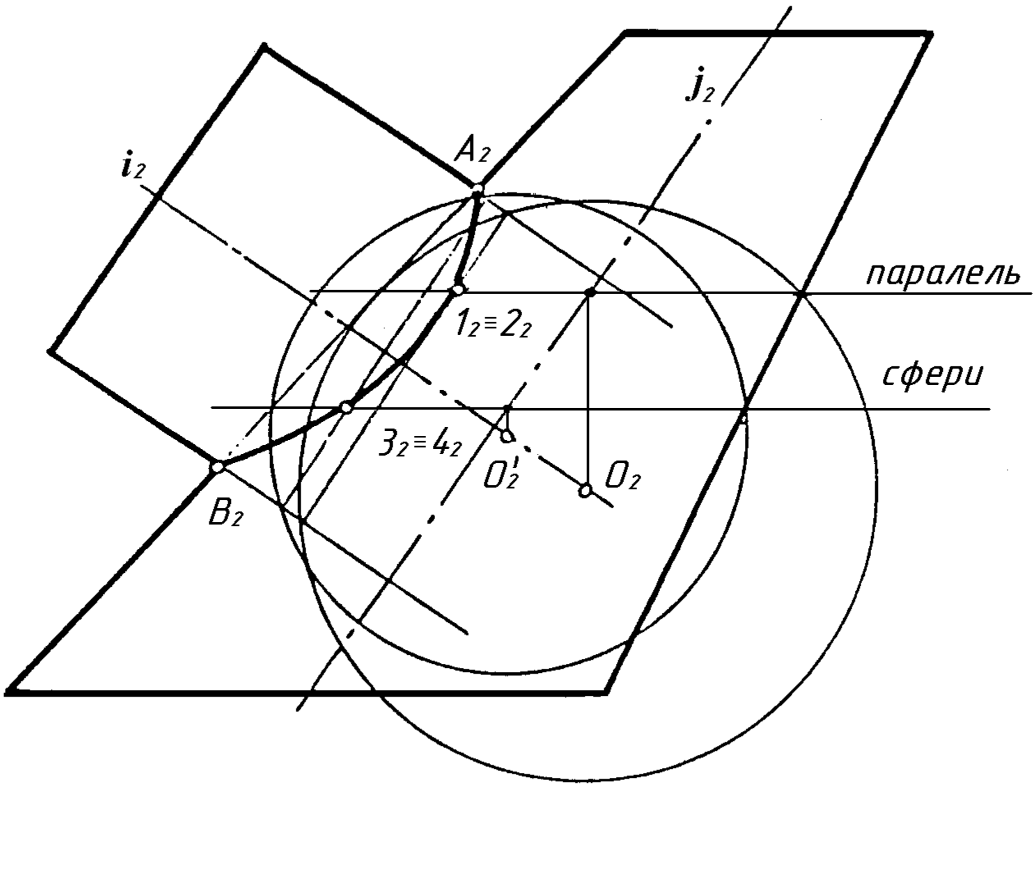


Рисунок 10.12

Запитання для самоконтролю

1. З чим збігається проекція лінії перетину двох поверхонь, одна з яких проекціювальна?
2. У чому полягає суть способу допоміжних перерізів?
3. У яких випадках застосовують спосіб допоміжних січних сфер?
4. Коли просторова лінія перетину двох поверхонь другого порядку розпадається на дві плоскі криві?
5. Які методи використовуються для побудови лінії взаємного перетину поверхонь?
6. Який метод для побудови лінії взаємного перетину поверхонь вважається універсальним?
7. У яких випадках використовують метод концентричних сфер?
8. У яких випадках використовують метод ексцентричних сфер?
9. Сформулюйте теорему Монжа.

11 МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ГРАФІЧНИХ РОБІТ

Графічне завдання № 1

Умова:

1. Побудувати горизонтальну і фронтальну проекції геометричних тіл. Знайти проекції точок ***A*** і ***B***, що знаходяться на цих поверхнях.

2. Побудувати групу геометричних тіл на $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$, $\boldsymbol{\Pi_3}$ за таким взаємним розташуванням, як показано на горизонтальній площині проекції.

Мета завдання:

Навчитися будувати проекції геометричних тіл на три площини проекції, визначати положення точок, що знаходяться на поверхнях геометричних тіл.

Послідовність виконання

1. Вивчити теоретичний матеріал.
2. Виконати горизонтальну і фронтальну проекції кожного геометричного тіла за вказаними розмірами.
3. Визначити положення точок ***A*** і ***B*** на поверхні кожного геометричного тіла.
4. Побудувати проекції геометричних тіл на $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$, $\boldsymbol{\Pi_3}$ за таким розташуванням, як показано на горизонтальній площині проекції.
5. Визначити видимість геометричних тіл.

Завдання для графічної роботи № 1 студент вибирає з додатка **А** (стор. 155-163) за варіантом, який йому пропонує викладач.

Приклад графічної роботи № 1 показано на рисунку 11.1

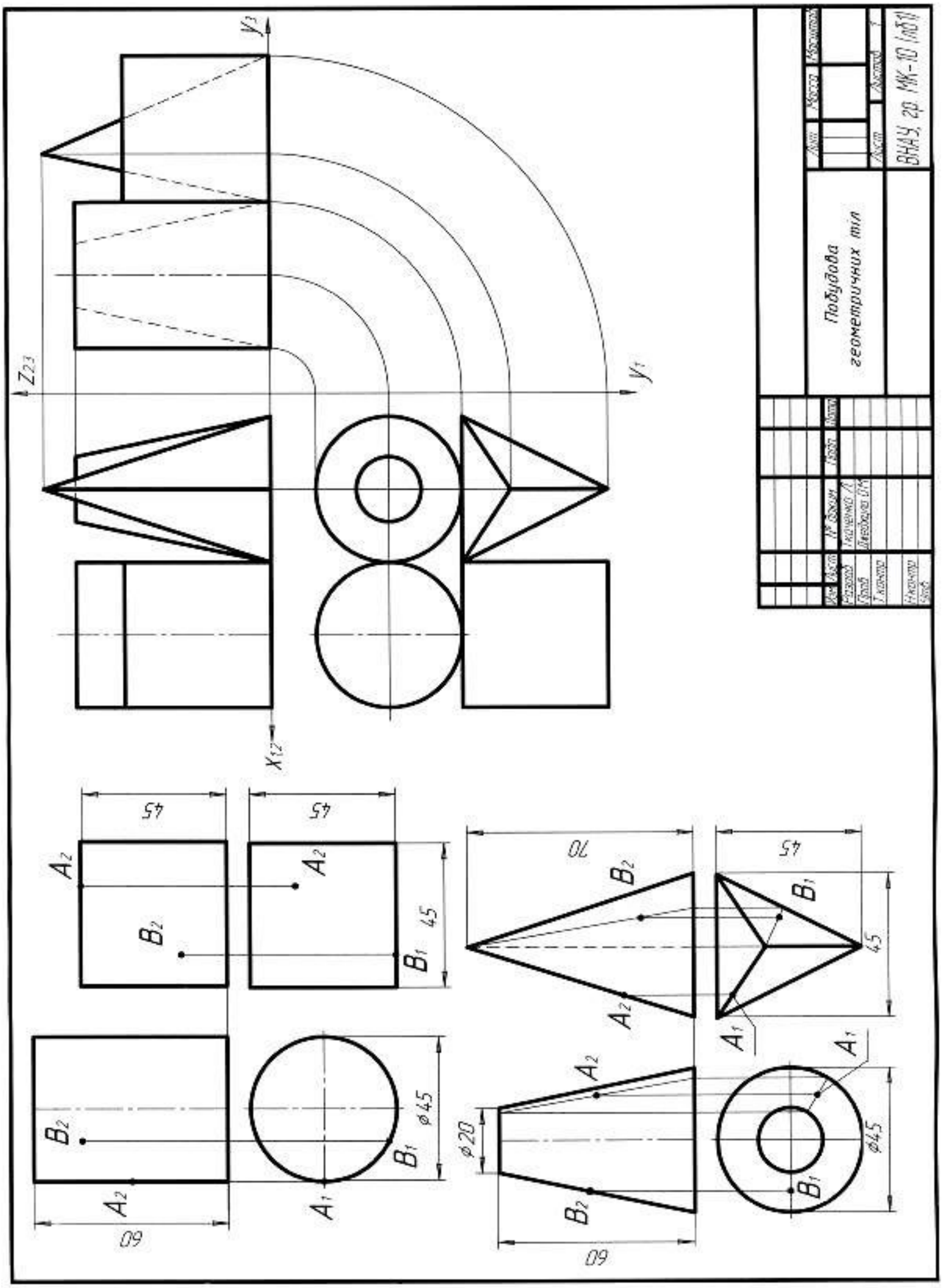

Побудова
геометричних тіл
45
60
70
⌀45
⌀20
A₁
A₂
B₁
B₂
X₁₂
Y₁
Y₃
Z₂₃

Рисунок 11.1

Графічне завдання № 2

Умова:

1. За двома заданими проекціями багатогранника (фронтальною та горизонтальною) побудувати третю (профільну).

2. Визначити положення ребер та граней багатогранника відносно площин проекцій та записати їх до таблиці.

3. Визначити взаємне положення ребер та граней багатогранника і також занести їх до таблиці.

4. Методом прямокутного трикутника побудувати натуральну величину ребра загального положення і визначити кути нахилу цього ребра до площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$, $\boldsymbol{\Pi_3}$.

5. Побудувати сліди ребра загального положення на $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Мета завдання:

Навчитись за двома проекціями предмета (багатогранника) будувати третю, уявити його об′ємне зображення, вміти аналізувати положення ребер та граней, уміти будувати натуральну величину і кути нахилу до площин проекцій прямої загального положення, уміти будувати сліди прямої загального положення на площинах проекцій.

Послідовність виконання

1. Побудувати дві проекції багатогранника, позначити всі його вершини великими латинськими буквами ***A***, ***B***, ***C***,... Побудувати третю проекцію за допомогою ліній зв'язку.

2. Визначити положення ребер багатогранника, кожне з яких являє собою відрізок прямої. Для цього необхідно вивчити тему «Пряма». Результати записати в таблицю.

3. Визначити положення граней багатогранника, кожна з яких являє собою площину. Для цього необхідно вивчити тему «Площина», познайомитись з епюрами площин загального та окремого положення. Результати необхідно теж записати до таблиці.

При аналізі прямих (ребер) і площин (граней) враховують, що кожна пряма і кожна площина може мати лише одну назву. Тому для самоконтролю необхідно порахувати скільки ребер та скільки граней має заданий багатогранник.

4. Визначити взаємне положення тієї чи іншої пари прямих (ребер) та площин (граней), враховуючи всі можливі варіанти: паралельності, перетину або мимобіжності. До таблиці записати лише по два ребра або дві грані.

5. Методом прямокутного трикутника побудувати натуральну величину ребра загального положення і визначити кути нахилу ребра до площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$, $\boldsymbol{\Pi_3}$.

6. Побудувати сліди ребра загального положення на площинах проекції $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Завдання для графічної роботи № 2 студент вибирає з додатка **Б** (стор. 164-167) за варіантом, який йому пропонує викладач. Приклад вико- наного епюра № 2 показано на рисунку 11.2.

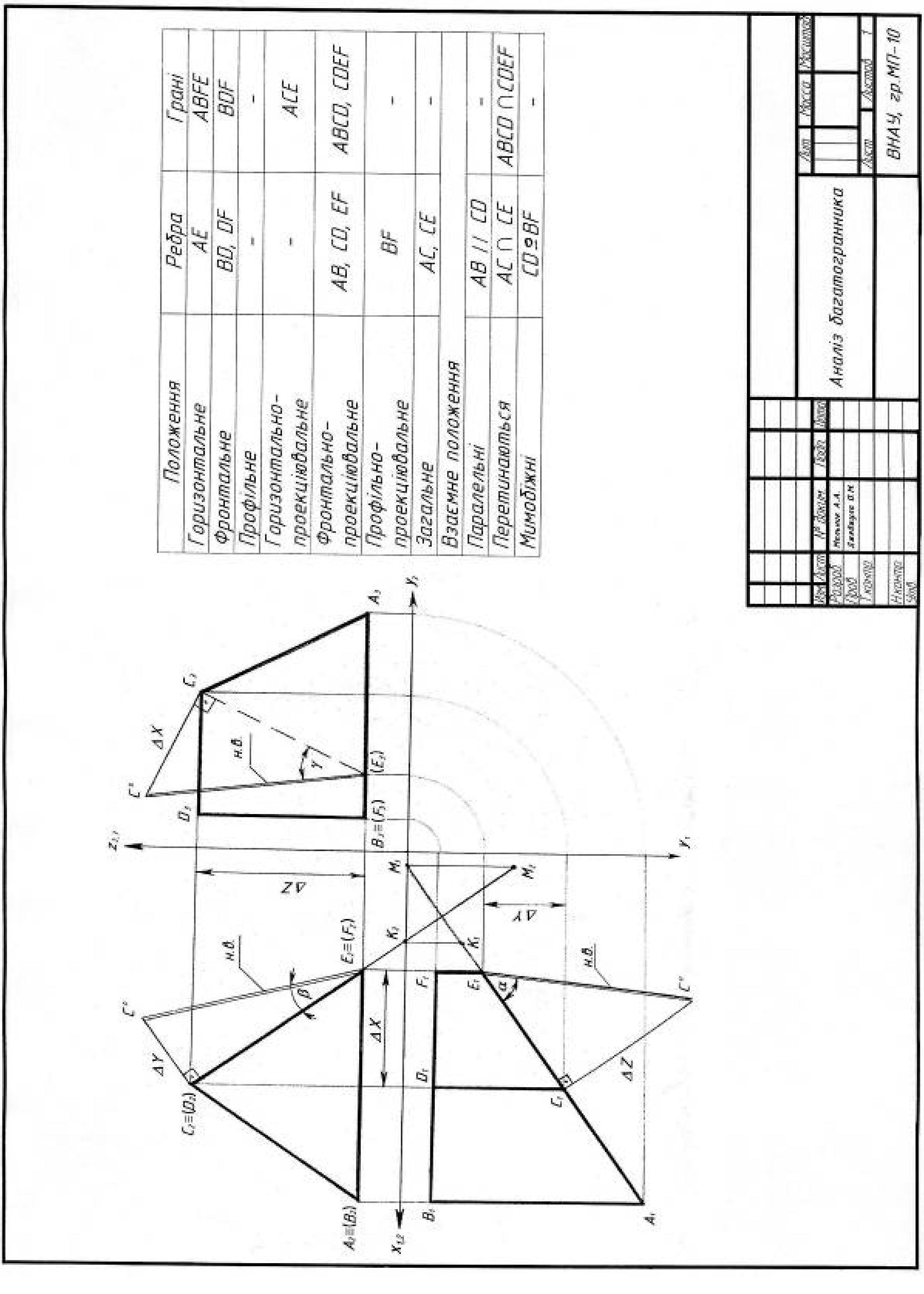


Рисунок 11.2

Графічне завдання № 3

Умова:

За заданими координатами точок побудувати три проекції площини, яка задана трикутником ***ABC*** та пряму ***MN***. Знайти точку перетину пря- мої ***MN*** з площиною Δ***ABC***. Визначити видимість прямої ***MN*** відносно площини, враховуючи те, що площина не прозора.

Мета завдання:

Знати алгоритм виконання першої позиційної задачі. Уміти будувати точку перетину прямої з площиною загального положення і визначати видимість прямої відносно площини за допомогою конкуруючих точок.

Послідовність виконання

1. Вивчити теоретичний матеріал на тему «Перетин прямої з площиною».
2. Через задану пряму ***MN*** провести допоміжну січну площину окремого положення $\boldsymbol{\alpha}$.
3. Побудувати лінію перетину двох площин – заданої та допоміжної : $\boldsymbol{\alpha} \cap \Delta \boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{1},\boldsymbol{2})$.
4. Визначити точку перетину ***K*** прямої ***MN*** з площиною Δ***ABC***: $\boldsymbol{MN} \cap \boldsymbol{m} = \boldsymbol{K}$
5. Визначити видимість прямої ***MN*** відносно площини Δ***ABC*** за допомогою конкуруючих точок.

Завдання для графічної роботи № 3 студент вибирає з додатка **В** (стор. 168-169).

Приклад графічної роботи № 3 показано на рисунку 11.3

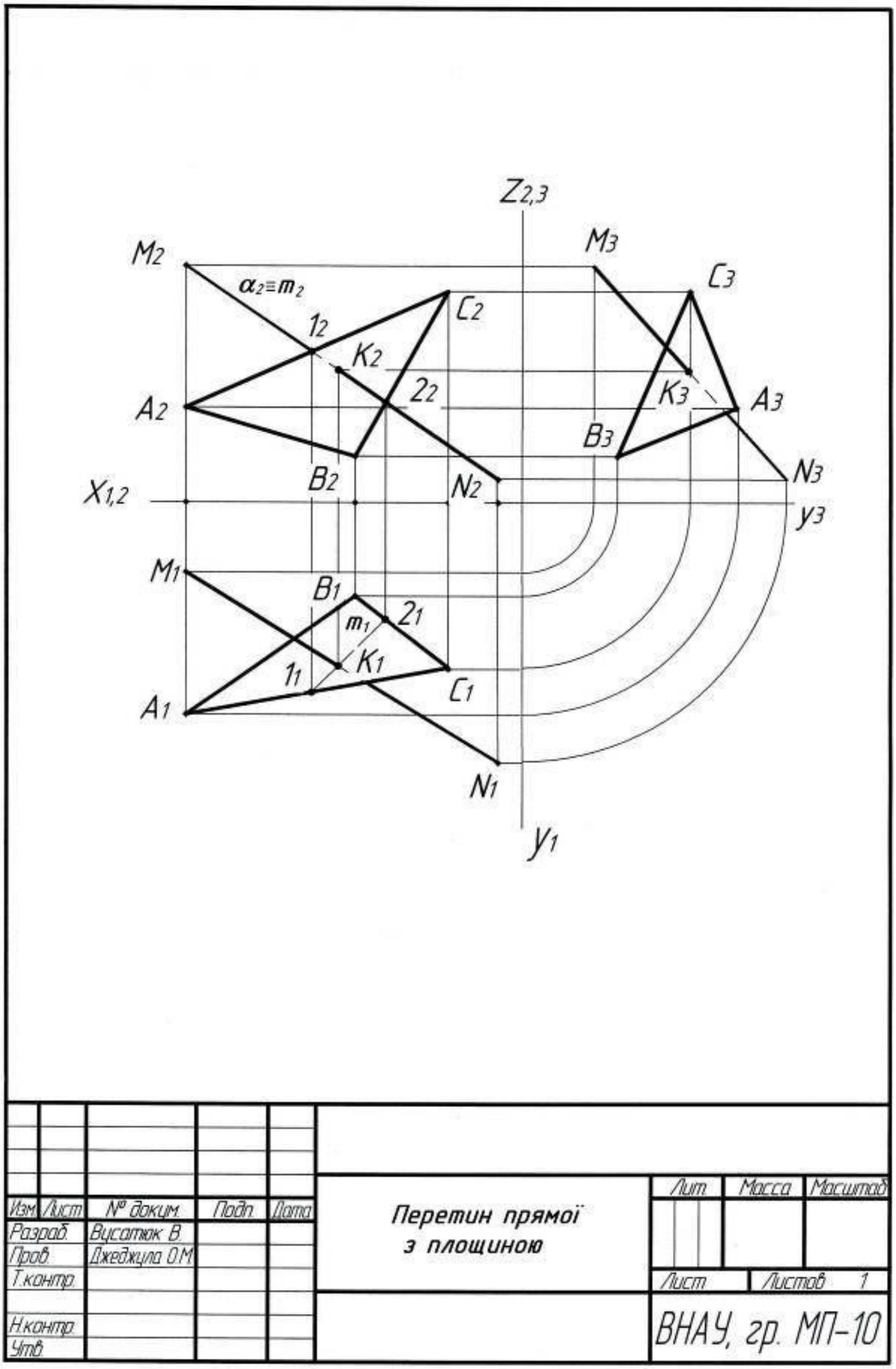

Z2,3
M2
M3
α2≡m2
C2
C3
12
K2
22
K3
A2
A3
B3
B2
N2
N3
X1,2
y3
M1
B1
21
m1
11
K1
C1
A1
N1
y1
Изм.
Лист
№ докум.
Подп.
Дата
Разраб.
Вусатюк В.
Пров.
Джеджула О.М.
Т.контр.
Н.контр.
Утв.
Перетин прямої з площиною
Лит.
Масса
Масштаб
Лист
Листов 1
ВНАУ, гр. МП-10

Рисунок 11.3

Графічне завдання № 4

Умова:

На поверхні (гранної або кривій) побудувати проекцію фігури перерізу площини окремого положення, визначити натуральну величину фігури перерізу. Побудувати розгортку поверхні.

Мета завдання:

Оволодіти методами побудови фігури перерізу на гранній та кривій поверхні та побудови розгортки поверхні.

Послідовність виконання

1. Визначити вид поверхні (криволінійна чи гранна), що задається, та встановити конкретне положення проекціювальної площини.
2. Визначити вихідну проекцію лінії перерізу. Оскільки поверхню перетинає проекціювальна площина, яка згідно з варіантом може бути перпендикулярною до $\boldsymbol{\Pi_1}$ чи $\boldsymbol{\Pi_2}$, то необхідно встановити, на якій із площин проекцій лінія перерізу уже відома. В даному випадку ця лінія перерізу завжди належить сліду проекціювальної площини.
3. За алгоритмом знаходження точок на поверхні визначити необхідну кількість точок для побудови лінії перерізу. У випадку, коли січна площина перерізає гранну поверхню, утворюється ламана лінія. Кількість точок, необхідних для її побудови, визначається кількістю ребер, які перетинає площина. У випадку, коли січна площина перерізає криволінійну поверхню, утворюється крива, для побудови якої необхідно мінімум 6-8 точок. Кожну з цих точок визначають на паралелях відповідного радіуса, який вимірюють від осі обертання до обрисової лінії поверхні.
4. Отримані точки лінії перерізу з’єднати з врахуванням видимості лінії на поверхні.
5. Для побудови натуральної величини фігури перерізу застосувати один із методів перетворень (заміна площин проекції або плоско- паралельне переміщення).
6. Побудувати розгортку поверхні.

Завдання для графічної роботи № 4 студент вибирає з додатка **Г** (стор. 170-173).

Приклад графічної роботи № 4 показано на рисунку 11.4

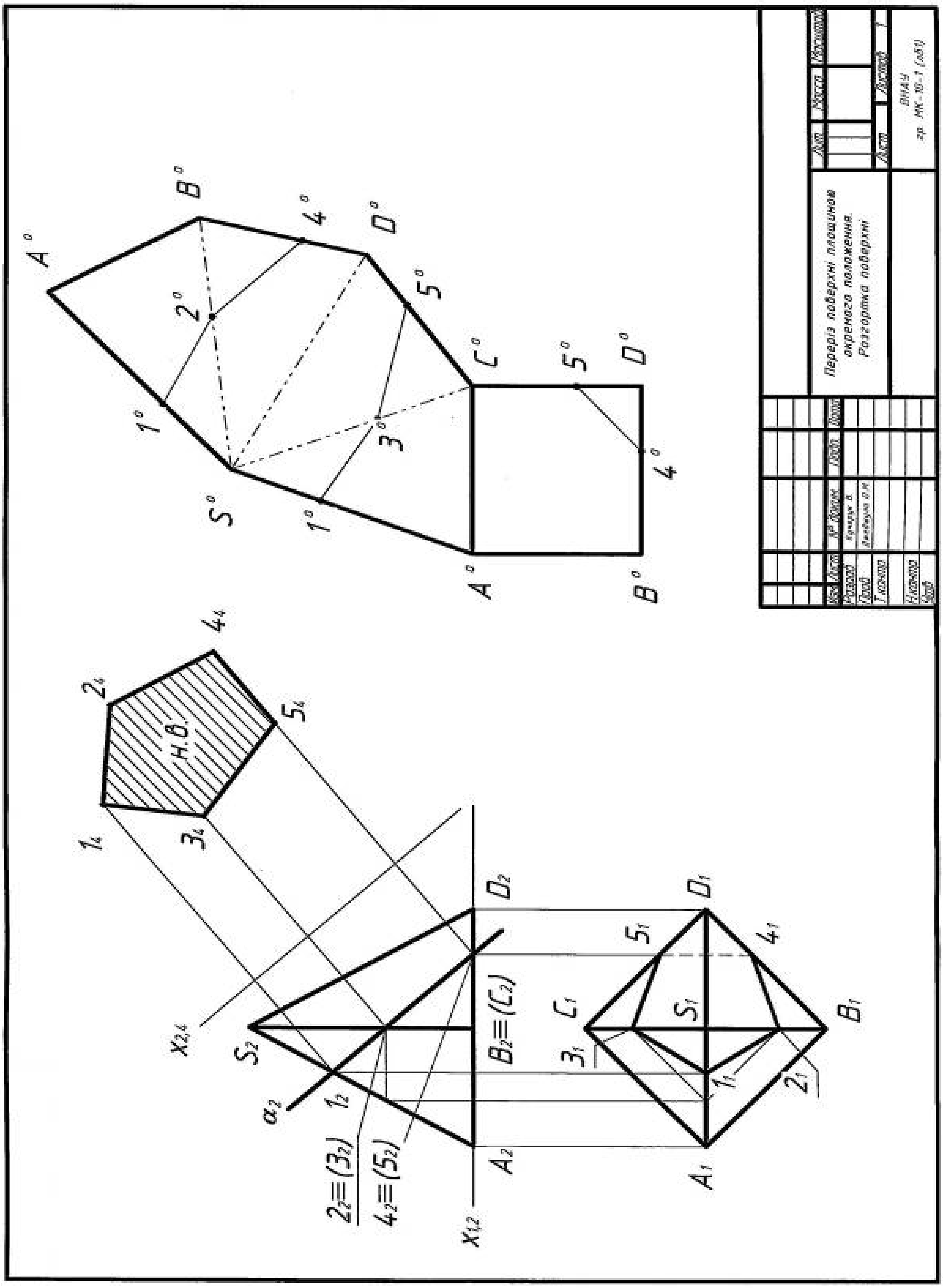

Переріз поверхні площиною окремого положення. Розгортка поверхні
Н.В.

Рисунок 11.4

Графічне завдання № 5

Умова:

Побудувати лінію взаємного перетину двох поверхонь, використовуючи метод січних площин. Визначити видимість проекцій лінії перетину.

Мета завдання:

Навчитись будувати точки та лінії на поверхні. Ці знання необхідні при виконанні креслень технічних деталей.

Послідовність виконання

1. Визначити опорні (характерні) точки, побудувати їх проекції.
2. Визначити особливості поверхонь, які перетинаються. Поверхня може бути проекціювальною або загального положення. Якщо в перетині бере участь проеціювальна поверхня, то одна проекція лінії перетину вже відома. Відсутні проекції лінії перетину будують за алгоритмом побудови точок на поверхні. Такий перетин поверхонь відносять до окремого випадку. Якщо перетинаються дві поверхні загального положення, то для побудови лінії перетину застосовують метод допоміжних січних площин. Допоміжну січну площину проводять таким чином, щоб вона перетинала обидві поверхні по найпростіших лініях (прямих або колах).
3. Побудувати лінії перерізу допоміжної січної площини з кожною із поверхонь. Точка перетину цих ліній буде спільною точкою для обох поверхонь.
4. Знайти поточні точки лінії перетину. Для цього використовують декілька допоміжних січних площин.
5. Всі отримані точки з’єднати з врахуванням видимості.
6. Обрисові лінії обох поверхонь навести з врахуванням видимості.

Завдання для графічної роботи № 5 студент вибирає з додатка **Д** (стор. 174-179).

Приклад графічної роботи № 5 показано на рисунку 11.5.

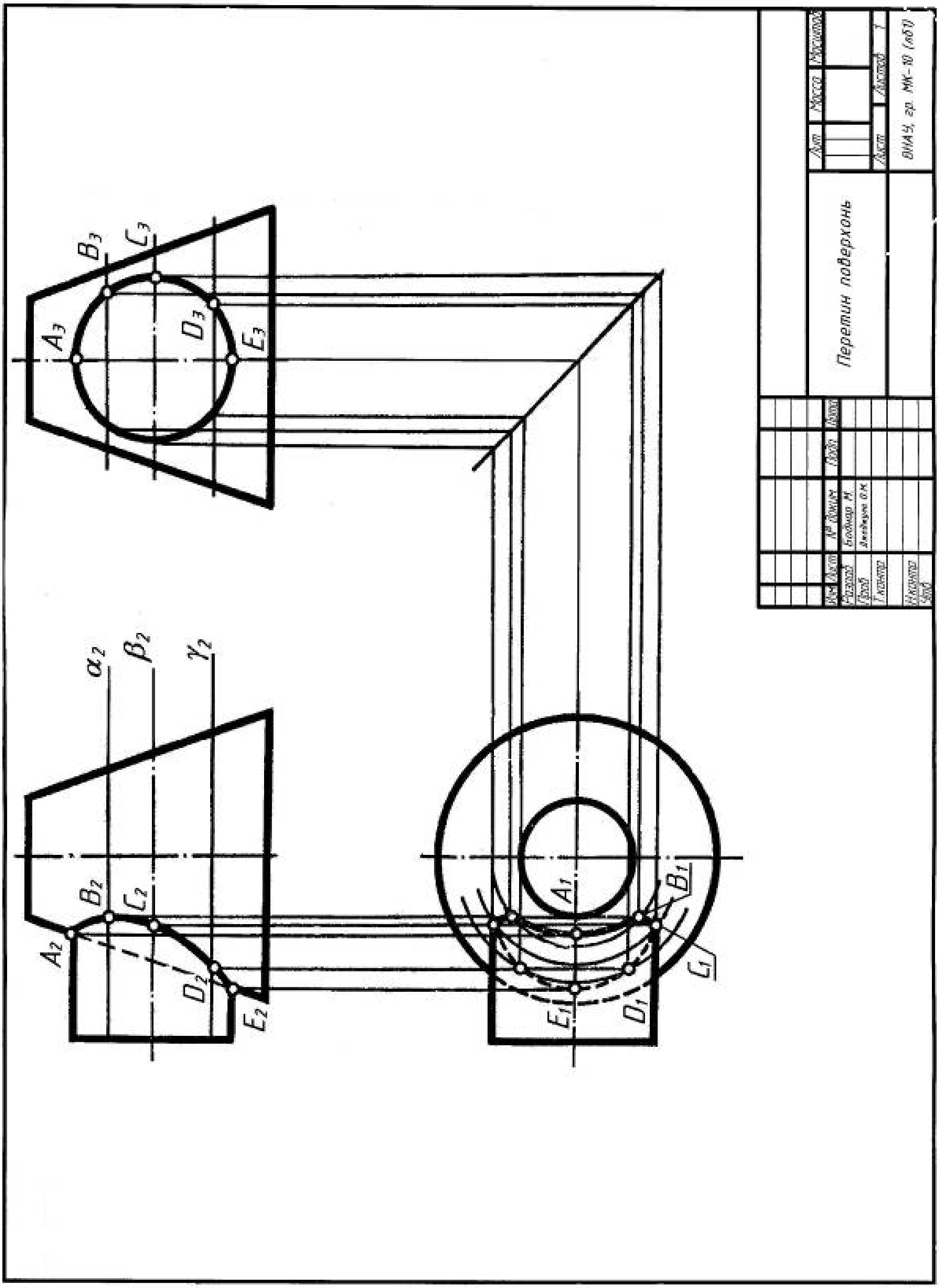


Рисунок 11.5

Графічне завдання № 6

Умова:

1. Побудувати лінію взаємного перетину двох поверхонь, використовуючи метод концентричних сфер. Визначити видимість проекцій лінії перетину.

2. Побудувати лінію взаємного перетину двох поверхонь, використовуючи метод ексцентричних сфер. Визначити видимість проекцій лінії перетину.

***Мета завдання*:**

Навчитись будувати точки та лінії на поверхні. Ці знання необхідні при виконанні креслень технічних деталей.

Послідовність виконання

1. Вивчити теоретичний матеріал на тему «Перетин поверхонь. Метод концентричних та ексцентричних сфер».
2. Побудувати лінію перетину двох поверхонь обертання за допомогою концентричних сфер.
   2.1. Там, де перетинаються контурні лінії обох поверхонь, визначити опорні точки.
   2.2. Визначити діапазон сфер-посередників, які можна використовувати для побудови поточних точок лінії перетину. Визначити сфери з мінімальним радіусом $\boldsymbol{R_{min}}$ і максимальним радіусом $\boldsymbol{R_{max}}$.
   2.3. Поточні точки лінії перетину побудувати там, де перетинаються кола на поверхнях. Ці кола є лініями перетину концентричних сфер-посередників з поверхнями, що перетинаються.
   2.4. Побудовані точки з’єднати і отримати лінію перетину поверхонь, що перетинаються.
3. Побудувати лінію перетину двох поверхонь за допомогою ексцентричних сфер.
   3.1 Побудувати лінію перетину двох кривих поверхонь, використовуючи метод ексцентричних сфер. При розв’язанні задач на перетин поверхонь цим методом повинні змінитися положення центрів допоміжних сфер: вони мають знаходитися на осі поверхні обертання.
   3.2 Побудувати опорні точки лінії перетину двох поверхонь.
   3.3 Побудувати поточні точки лінії перетину за допомогою січних площин та ексцентричних сфер.
   3.4 З’єднати точки лінії перетину двох поверхонь та визначити видимість лінії перетину двох поверхонь.

Завдання для графічної роботи № 6 студент вибирає з додатка **Е** (стор. 180-190). Приклад графічної роботи № 6 показано на рисунку 11.6.

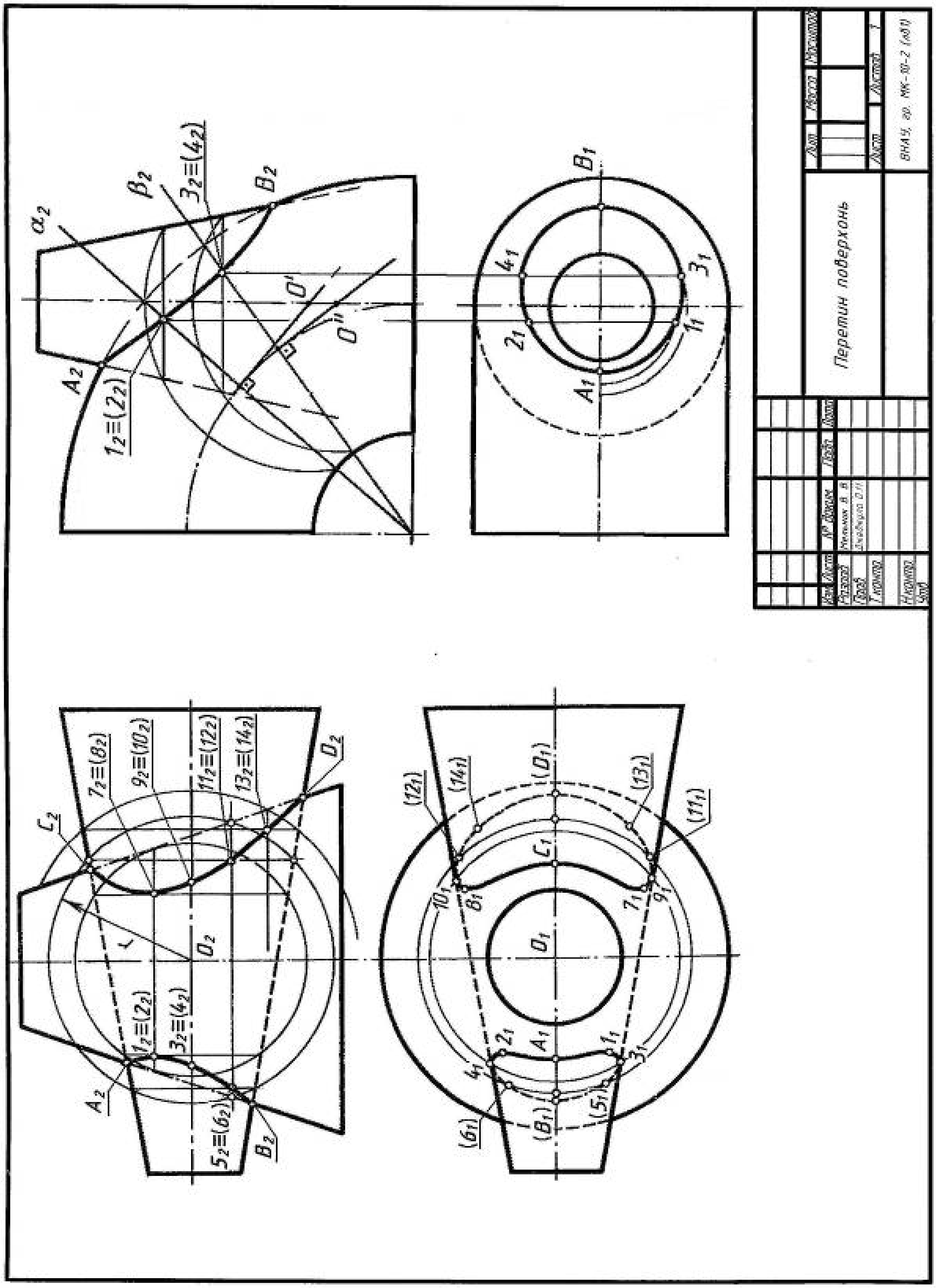


Рисунок 11.6

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Джеджула О. М. Курс лекцій з нарисної геометрії: Навчальний посібник / Джеджула О.М. – Винніця: ВДАУ, 2006. – 107 с.
2. Кормановський С. І. Конспект лекцій з інженерної графіки: Конспект лекцій / Кормановський С. І. – Винніца: ВНТУ, 2009. – 116 с.
3. Михайленко В. Є. Інженерна графіка: Підручник / Михайленко В. Є., Ванін В. В., Ковальов С. М.; за ред. В. Є. Михайленка. – К.: "Каравела", 2008. – 272 с.
4. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки: Навчальний посібник / [Михайленко В. Є., Найдиш В. М., Підкоритов А. М., Скидан І. А.]; за ред. В. Є. Михайленка. – К.: Вища шк., 2002. – 300 с.
5. Михайленко В. Є.Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник / [Михайленко В. Є., Найдиш В. М., Підкоритов А. М., Скидан І. А.]; за ред. В. Є. Михайленка. – К.: Вища шк., 2001. – 350 с.
6. Нарисна геометрія: Підручник / [Михайленко В. Є., Євстифєєв М. Ф., Ковальов С. М., Кащенко О. В.]; за ред. В. Є. Михайленка. – К.: Ви- ща шк., 1993. – 271 с.
7. Павлова А. А. Начертательная геометрия: Учебник / Павлова А. А. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 304 с.
8. Методичні вказівки до виконання графічних робіт з нарисної геометрії. /[Вітюк О. П., Кормановський С. І., Пащенко В. Н.] – Вінниця ВДТУ, 1994. – 64 с.
9. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов – 6 изд. / [Крылов Н. Н., Иконникова Г. С., Николаев В. Л., Лаврухина Н. М.]; Под ред. Н. Н. Крылова. – М.: Высш. шк., 1990. – 240 с.
10. Бубырь Ю. В. Начертательная геометрия: Учебно-методические материалы для самостоятельного изучения курса / Бубырь Ю. В., Пресис А. М. – Харьков : УЗПИ, 1989. – 306 с.
11. Лагерь А. И. Инженерная графика: Учеб. для инж.-техн. спец. вузов / Лагерь А. И., Колесникова Э. А. – М.: Высш. шк., 1985. – 176 с.
12. Курс начертательной геометрии (на базе ЭВМ): Учеб. для инж.-техн. вузов / [А. М. Тевлин, Г. С. Иванов, Л. Г. Нартова и др.]; под ред. А. М. Тевлина – М.: Высш. школа., 1983. – 175 с.
13. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов 2-е изд. / Кузнецов Н. С. – М.: Высш. школа., 1981. – 262 с.

УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ УЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

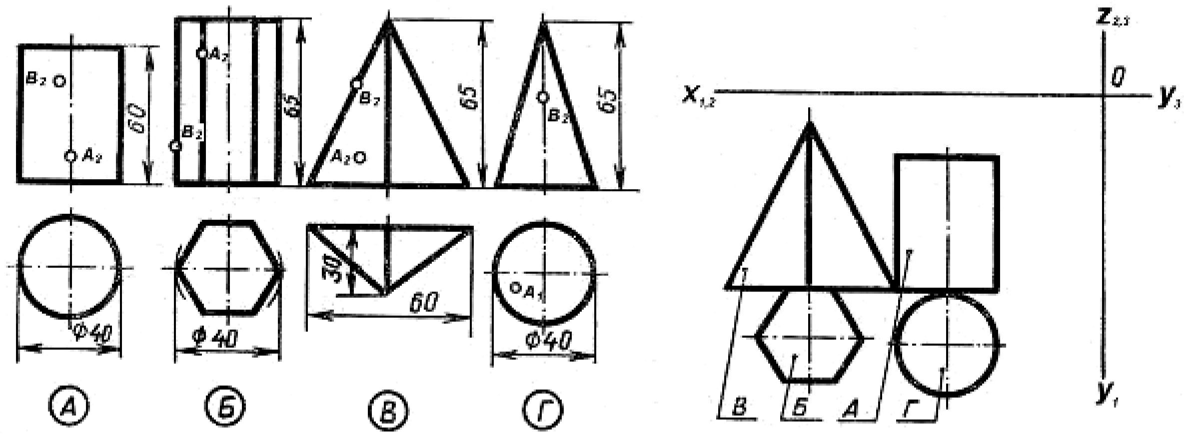
Українська	Російська	Англійська
Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
Багатокутник	Многоугольник	Polygon
Множина	Множество	Set
Вертикальна лінія	Вертикальная линия	Vertical line
Видимість	Видимость	Visibility
Визначник поверхні	Определитель поверхности	Surface determinant
Відстань	Расстояние	Distance
Відображення	Отображение	Map
Відрізок	Отрезок	Segment
Відсік	Отсек	Compartment
Вісь, ось	Ось	Axis
Гвинтова поверхня	Винтовая поверхность	Helical surface
Гіперболічний параболоїд	Гиперболический парабо-лоид	Hyperbolic paraboloid
Гіпотенуза	Гипотенуза	Hypotenuse
Горизонтальна лінія	Горизонтальная линия	Horizontal line
Горизонтальна площина	Горизонтальная плоскость	Horizontal plane
Горизонтальна пряма	Горизонтальная прямая	Horizontal straight line
Грань	Грань	Face
Допоміжна площина	Вспомогательная плоскость	Auxiliary plane
Епюр	Эпюр	Epure
Задача	Задача	Task
Зображення	Изображение	Image
Інженерна графіка	Инженерная графика	Engineering graphic arts
Катет	Катет	Leg
Кінематичний	Кинематический	Kinematic
Коло	Окружность	Circle
Коноїд	Коноид	Conoid
Конус	Конус	Cone
Координата	Координата	Coordinate
Крива лінія	Кривая линия	Curve
Крива поверхня	Кривая поверхность	Curve surface
Кут	Угол	Angle
Лінія	Линия	Line
Лінія зв’язку	Линия связи	Communication line
Меридіан	Меридиан	Meridian
Метод проекцій	Метод проекций	Projection method
Мимобіжні прямі	Скрещивающиеся прямые	Crossed lines
Напрямна	Направляющая	Directing
Нахил	Наклон	Inclination
Обертання	Вращение	Rotation
Обрис	Очертание	Outline
Окреме положення	Частное положение	Particular position
Паралель	Параллель	Parallel
Паралельність	Параллельность	Parallelism

Переріз	Сечение	Cut
Перетин	Пересечение	Intersection
Перпендикулярність	Перпендикулярность	Perpendicularity
Площина	Плоскость	Plane
Площина рівня	Плоскость уровня	Level plane
Побудова	Построение	Construction
Повертати	Поворачивать	Turn
Поверхня	Поверхность	Surface
Поверхня з ребром звороту	Поверхность с ребром возврата	Surface with a cuspidal edge
Позиційний	Позиционный	Positional
Початок координат	Начало координат	Coordinate origin
Проекціювання	Проецирование	Projection
Проекція точки	Проекция точки	Foot
Промінь	Луч	Ray
Профільна площина	Профильная плоскость	Profile plane
Пряма лінія	Прямая линия	Straight line
Пряма рівня	Прямая уровня	Level line
Прямий кут	Прямой угол	Right angle
Прямокутне проекціювання	Прямоугольное проециро-вание	Rectangular projection
Прямокутник	Прямоугольник	Rectangle
Радіус	Радиус	Radius
Ребро	Ребро	Edge
Рисунок	Рисунок	Figure
Різниця	Разность	Difference
Розгортка	Развертка	Evolvent
Рух	Движение	Movement
Система площин проекцій	Система плоскостей проек-ций	System of projection planes
Січна площина	Секущая плоскость	Intersecting plane
Слід площини	След плоскости	Plane trace
Слід прямої	След прямой	Line trace
Сфера	Сфера	Sphere
Твірна	Образующая	Generatrix
Тор	Тор	Torus
Торсова поверхня	Торсовая поверхность	Torso surface
Точка	Точка	Point
Трикутник	Треугольник	Triangle
Фронтальна площина	Фронтальная плоскость	Frontal plane
Фронтальна пряма	Фронтальная прямая	Frontal line
Центральне проекціювання	Центральное проецирова-ние	Central projection
Циліндр	Цилиндр	Cylinder
Циліндроїд	Цилиндроид	Cylindroid

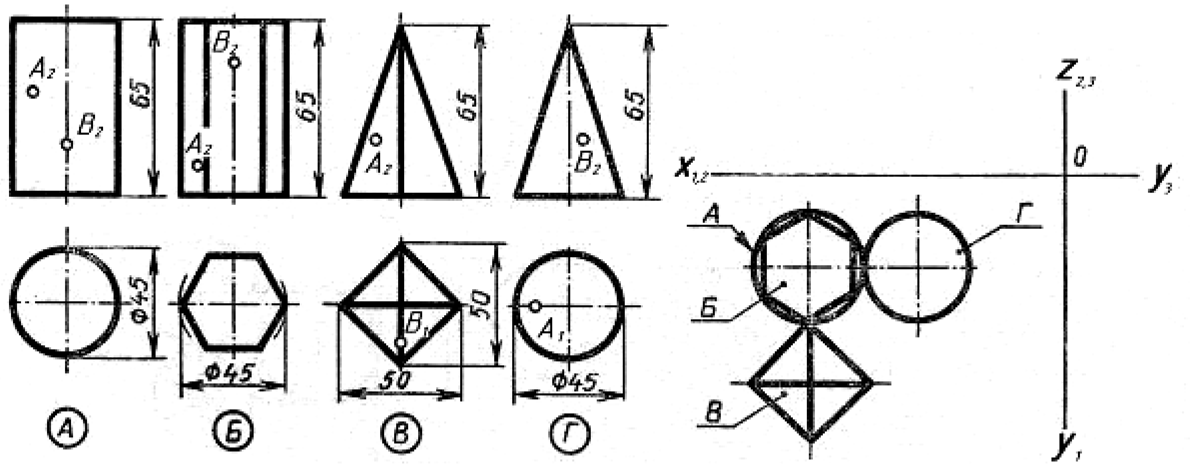
Додаток А

Варіанти завдань для виконання графічної роботи № 1

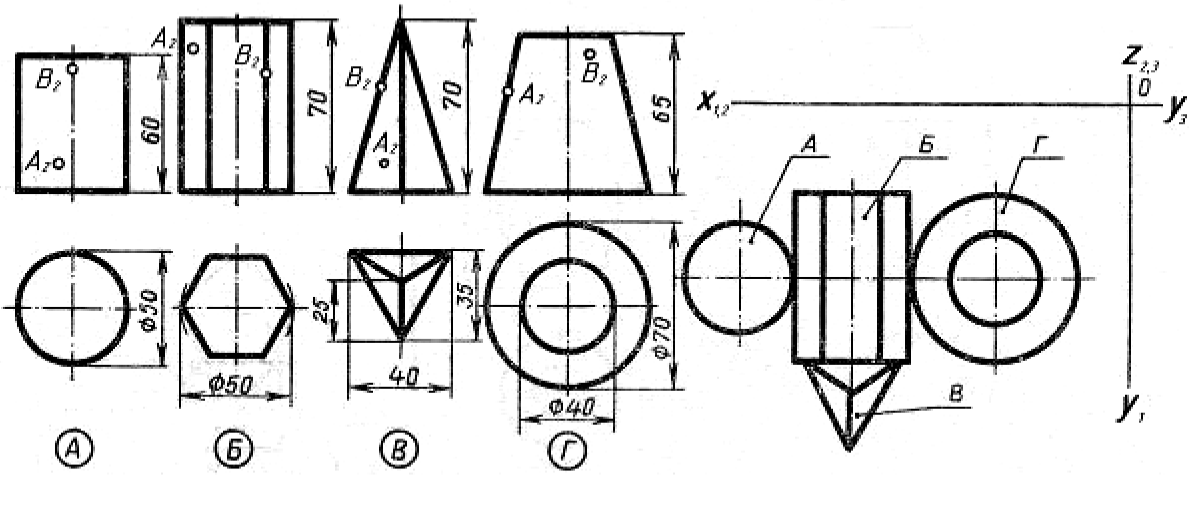
Варіант 1



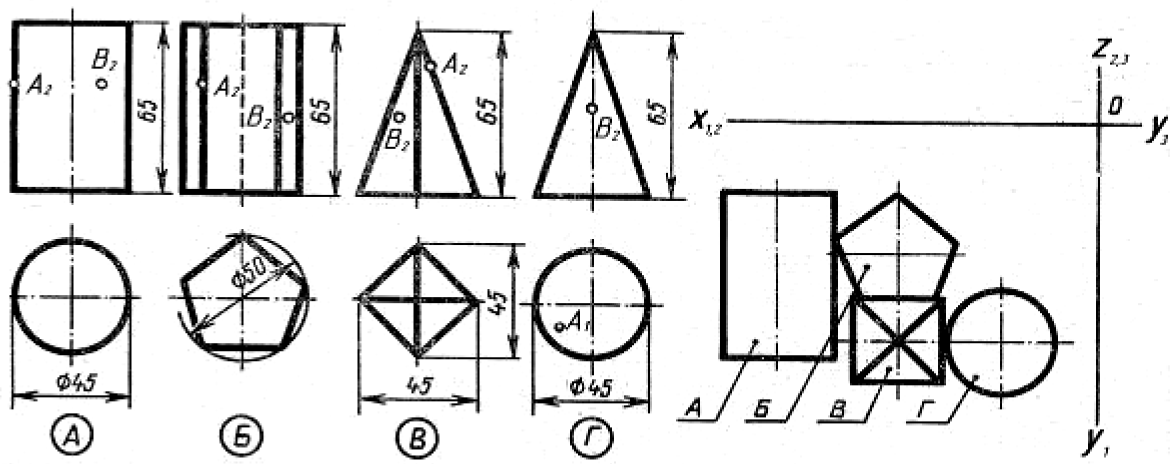
Варіант 2



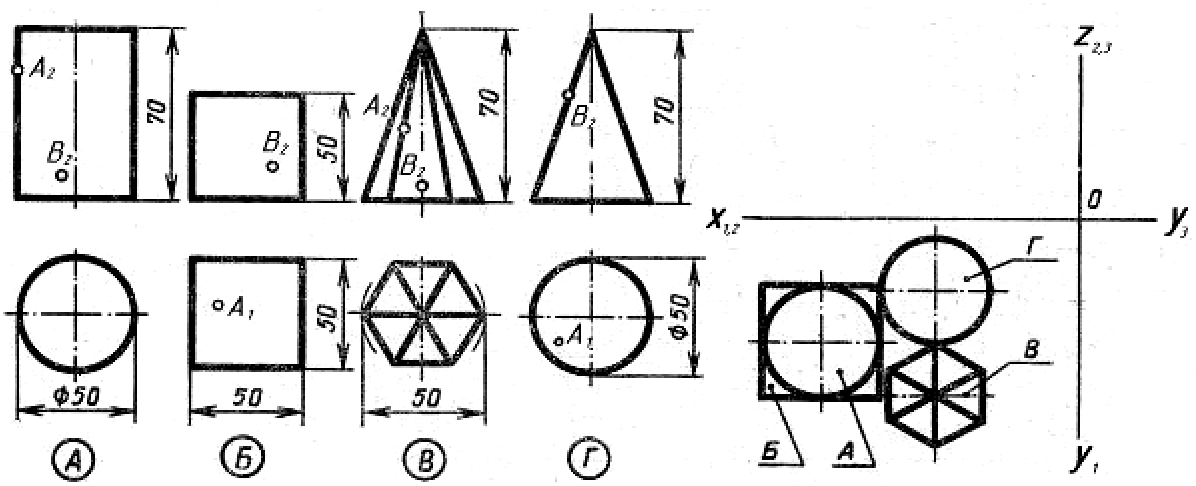
Варіант 3



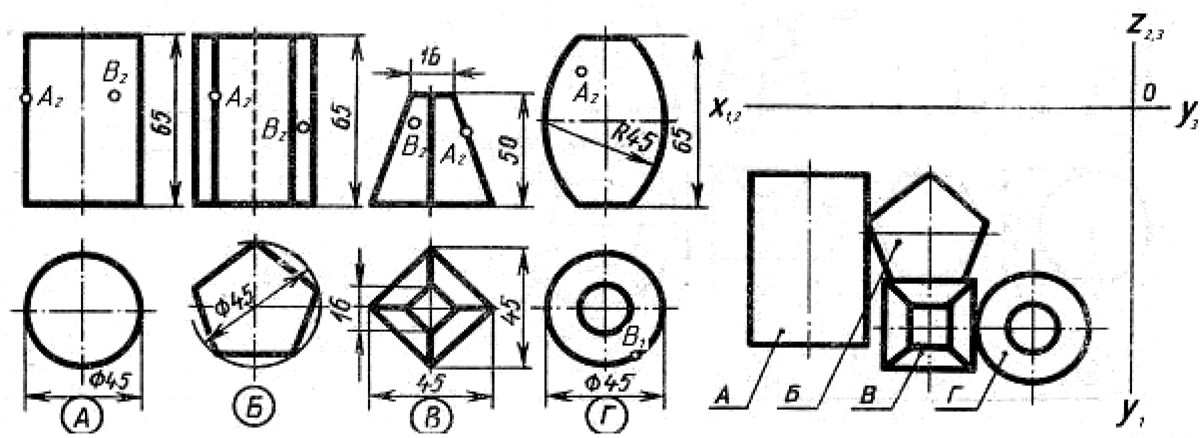
Варіант 4



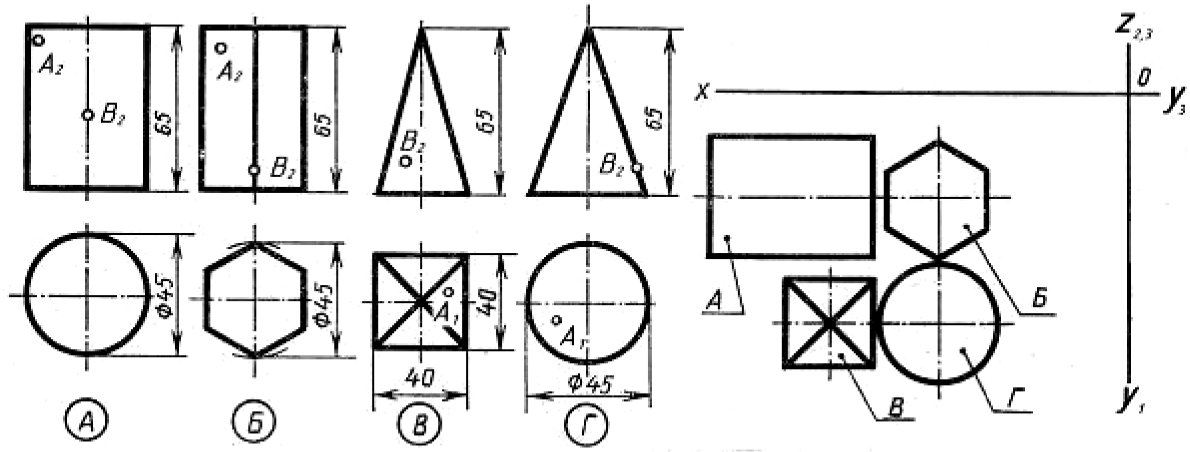
Варіант 5



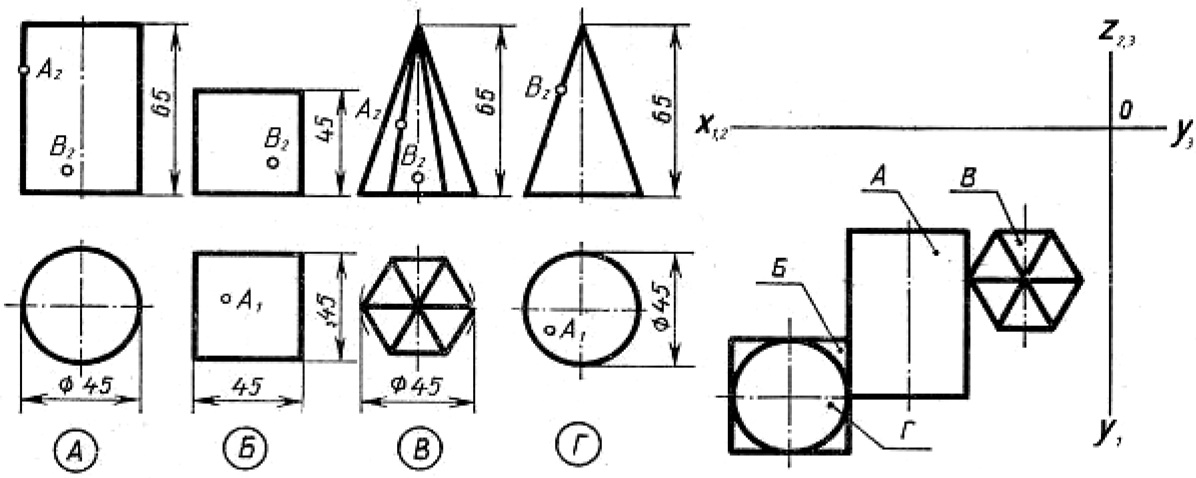
Варіант 6



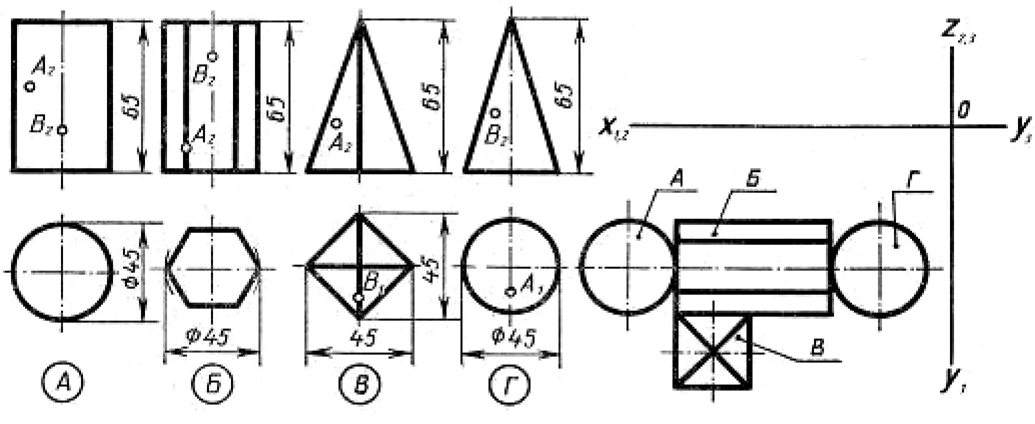
Варіант 7



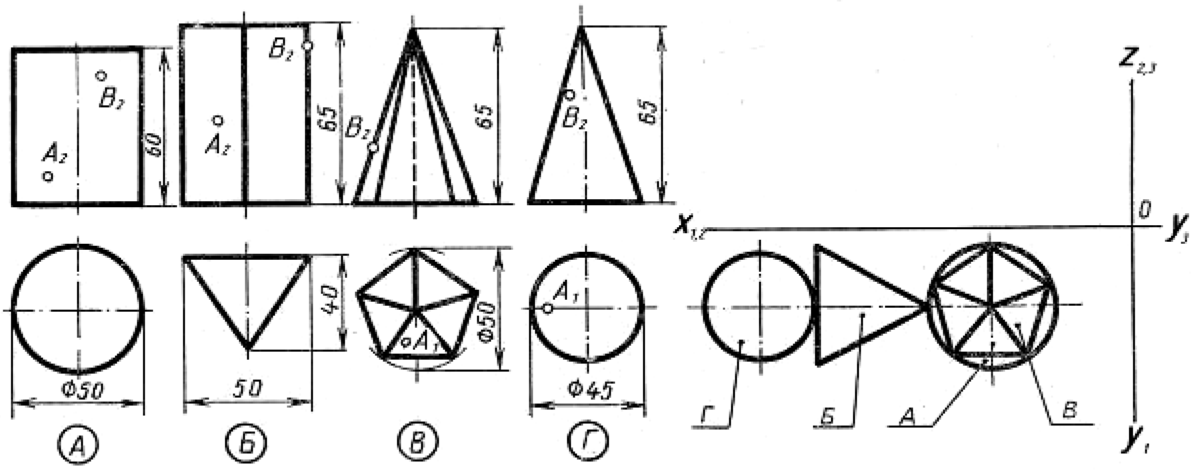
Варіант 8



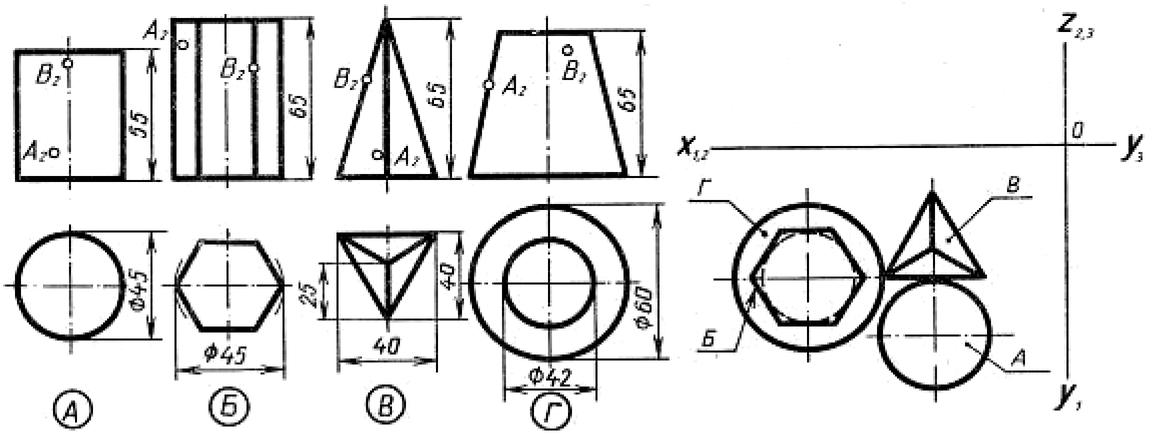
Варіант 9



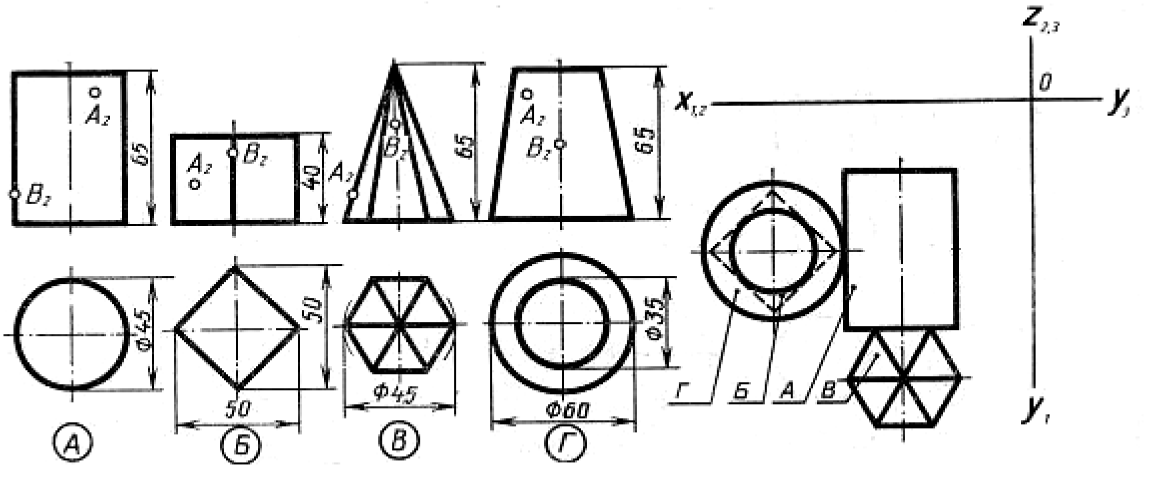
Варіант 10



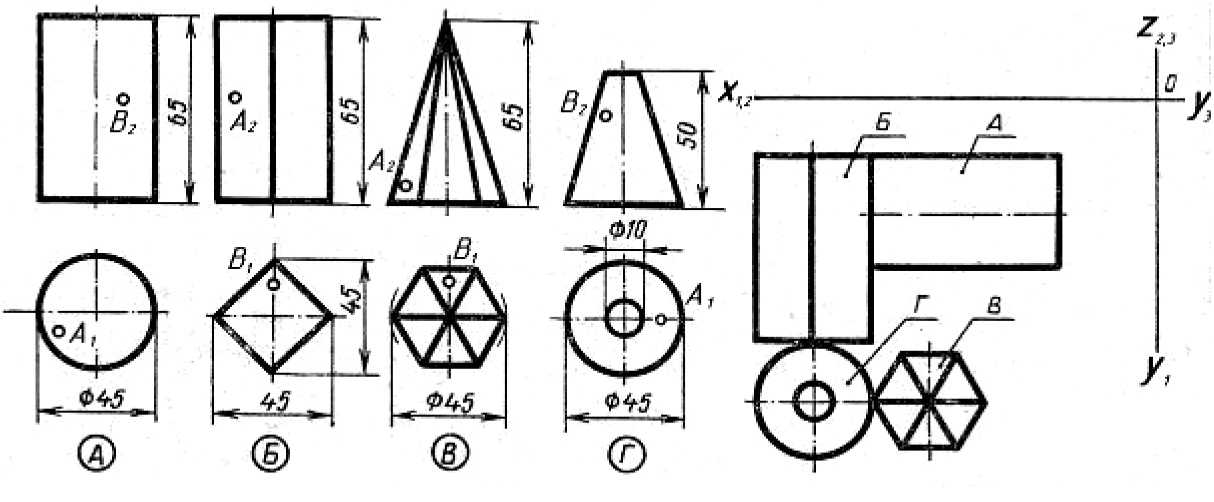
Варіант 11



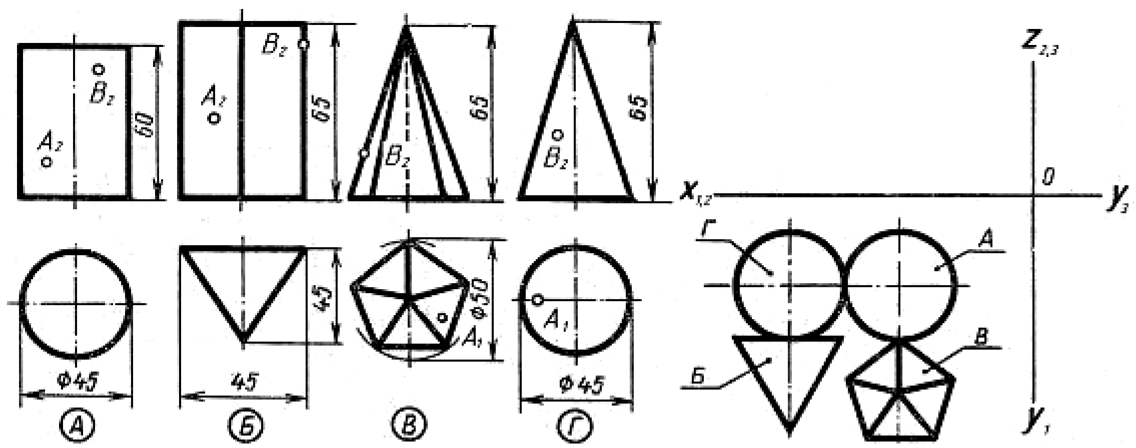
Варіант 12



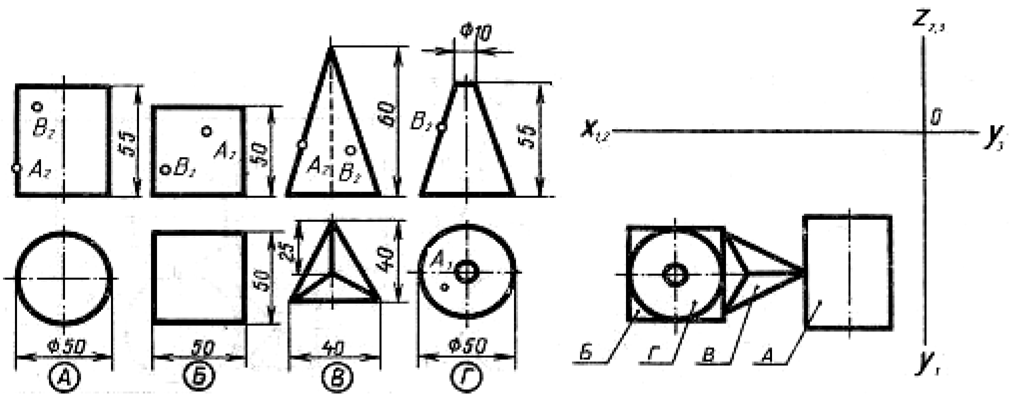
Варіант 13



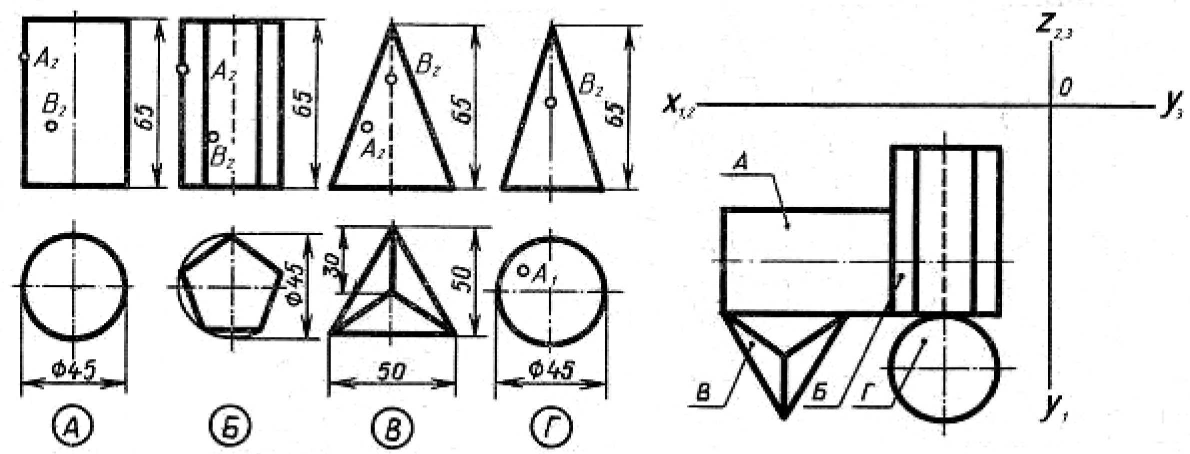
Варіант 14



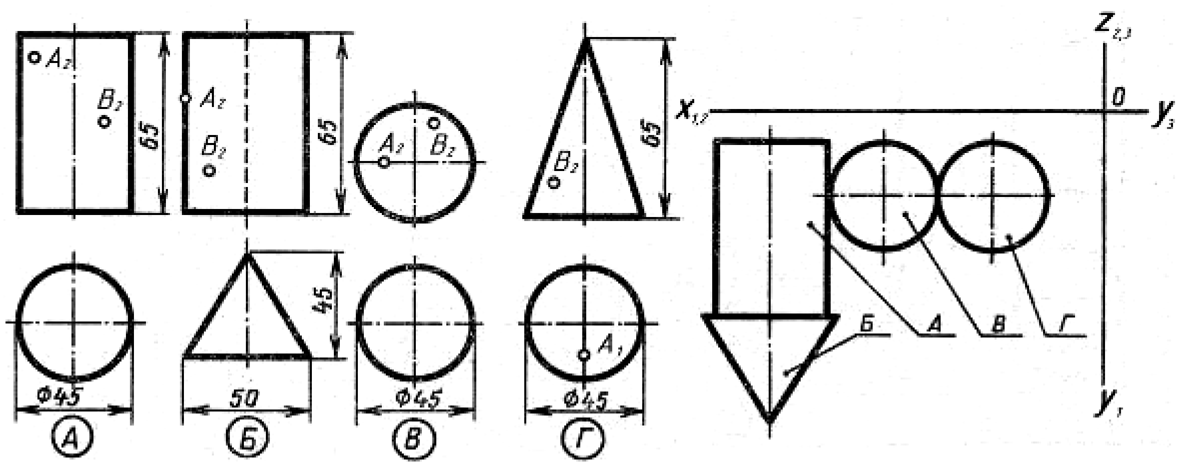
Варіант 15



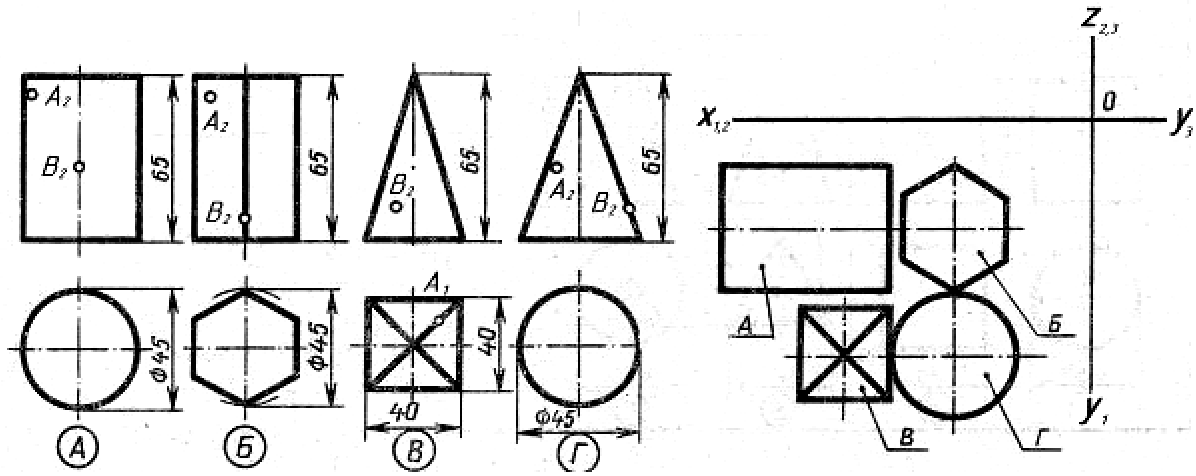
Варіант 16



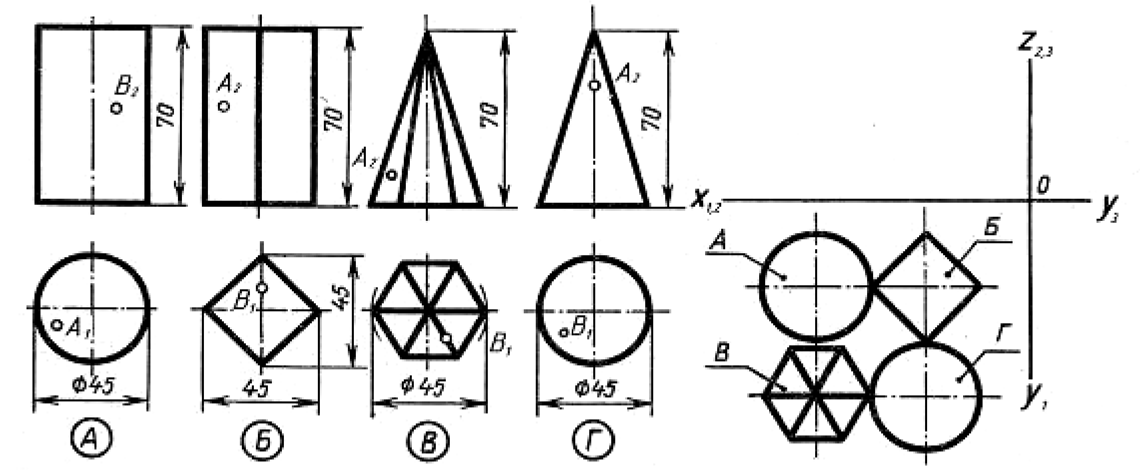
Варіант 17



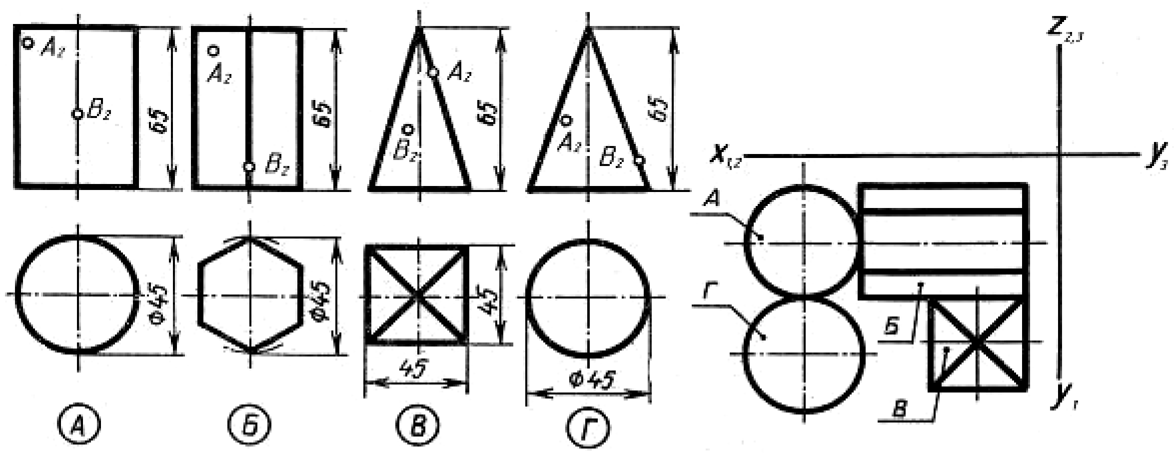
Варіант 18



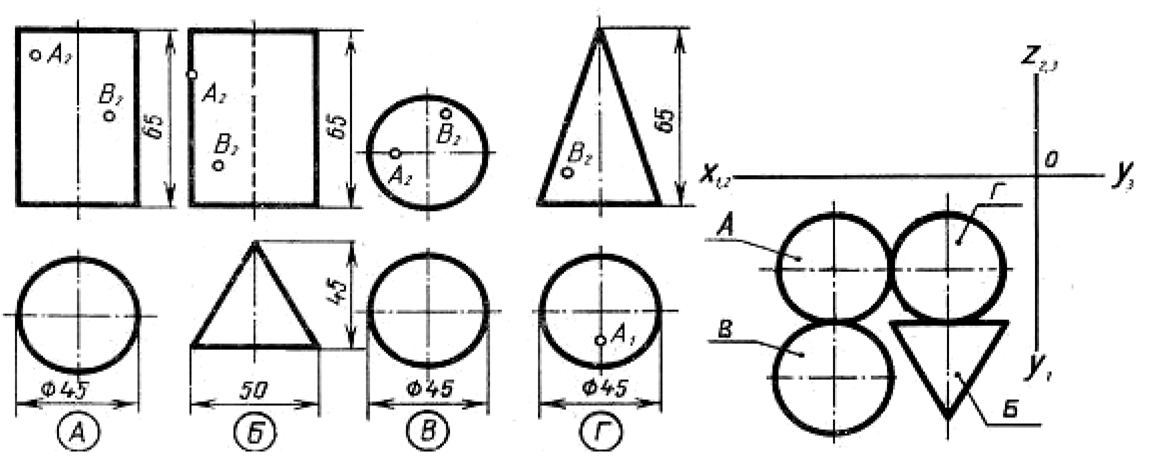
Варіант 19



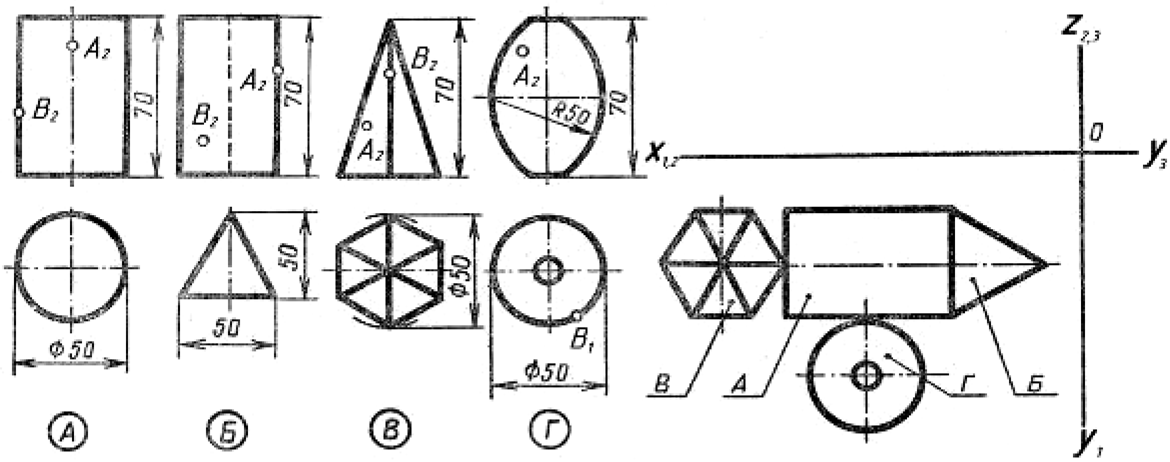
Варіант 20



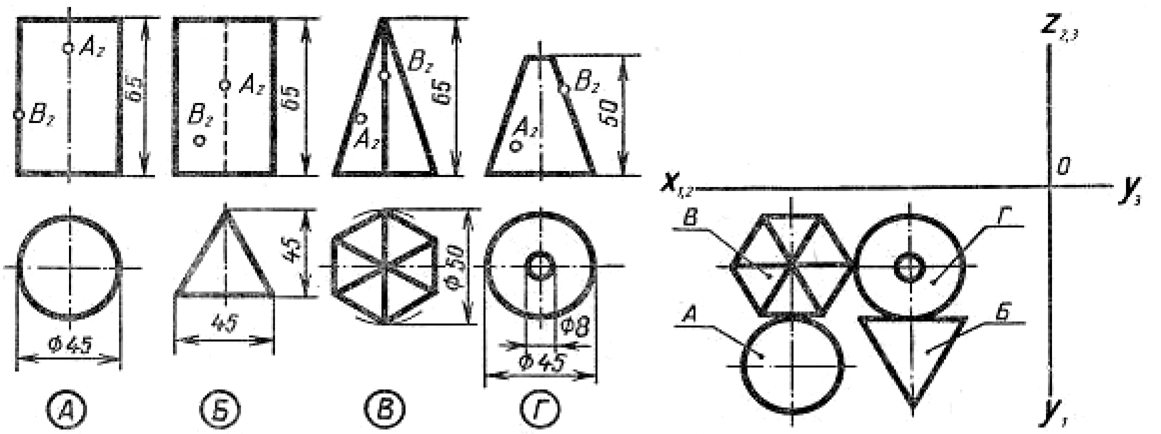
Варіант 21



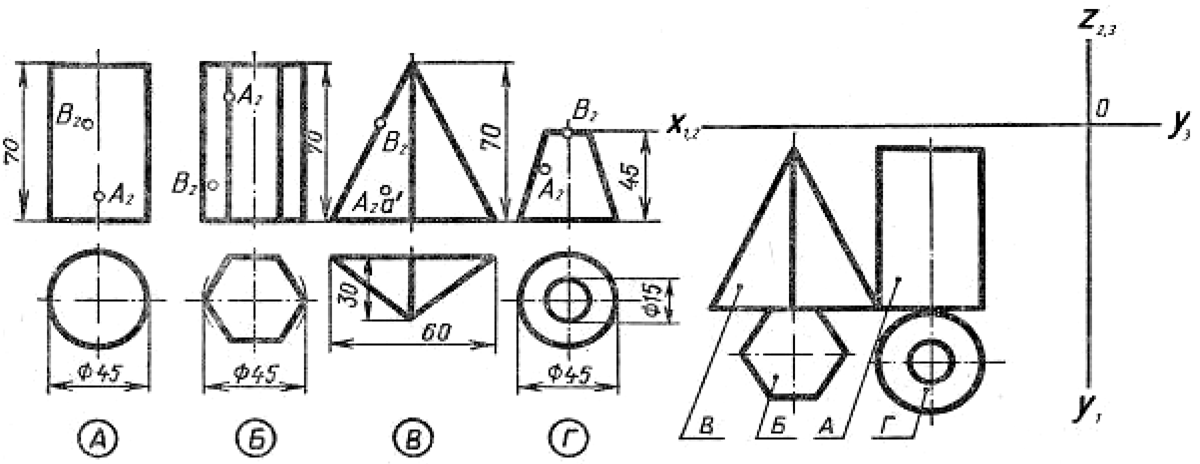
Варіант 22



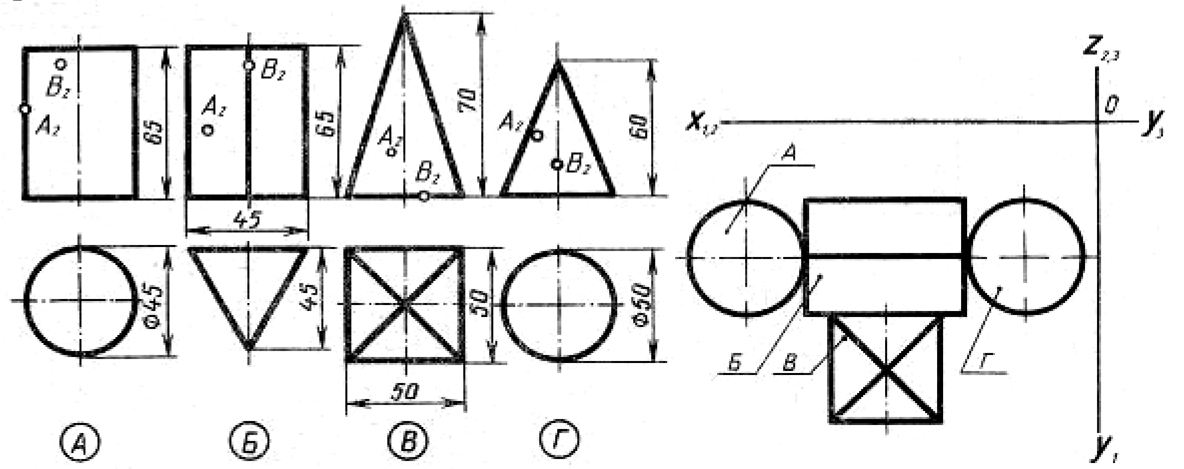
Варіант 23



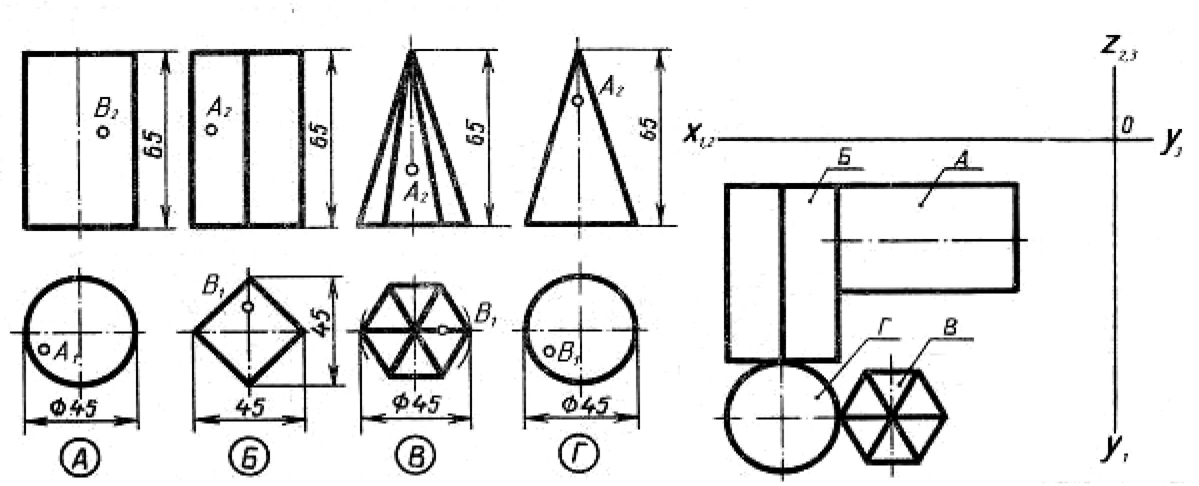
Варіант 24



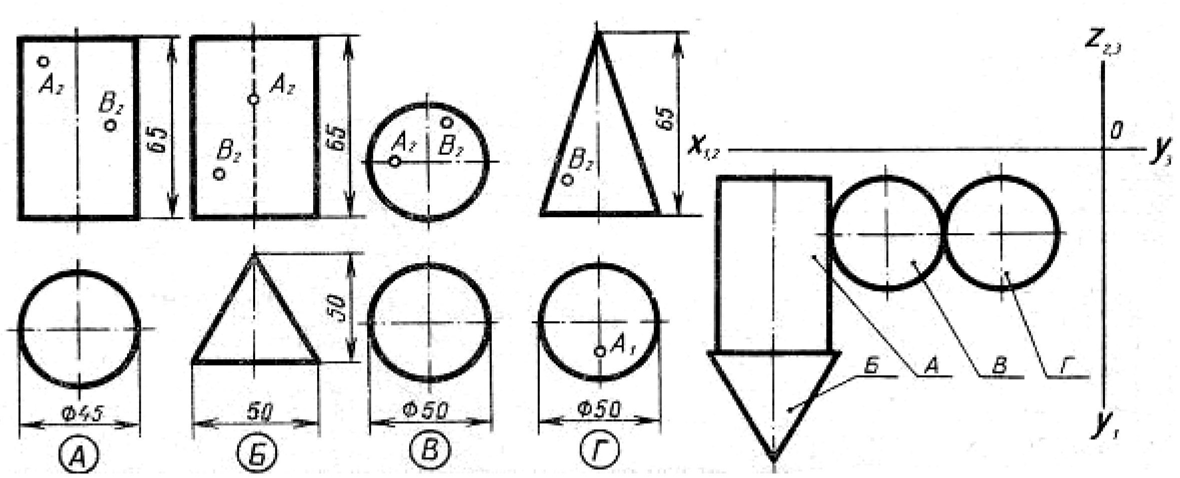
Варіант 25



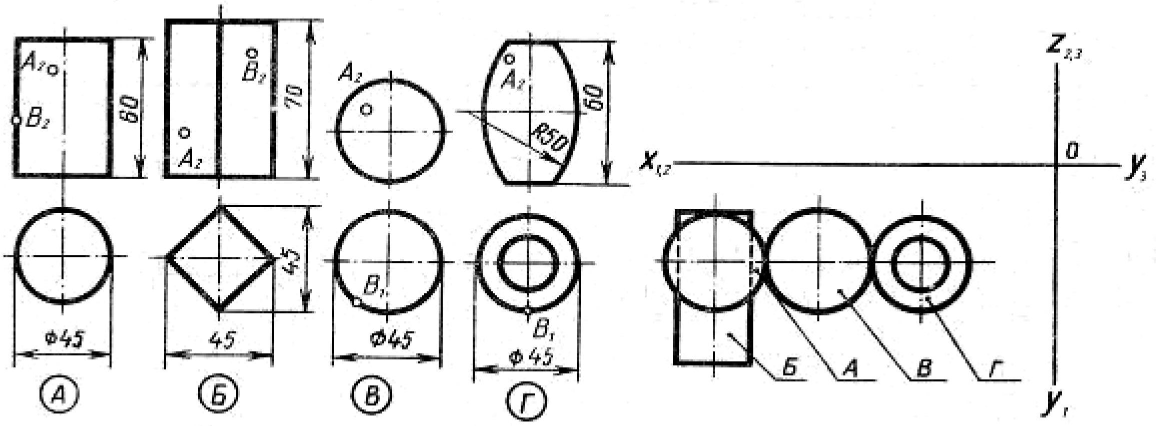
Варіант 26



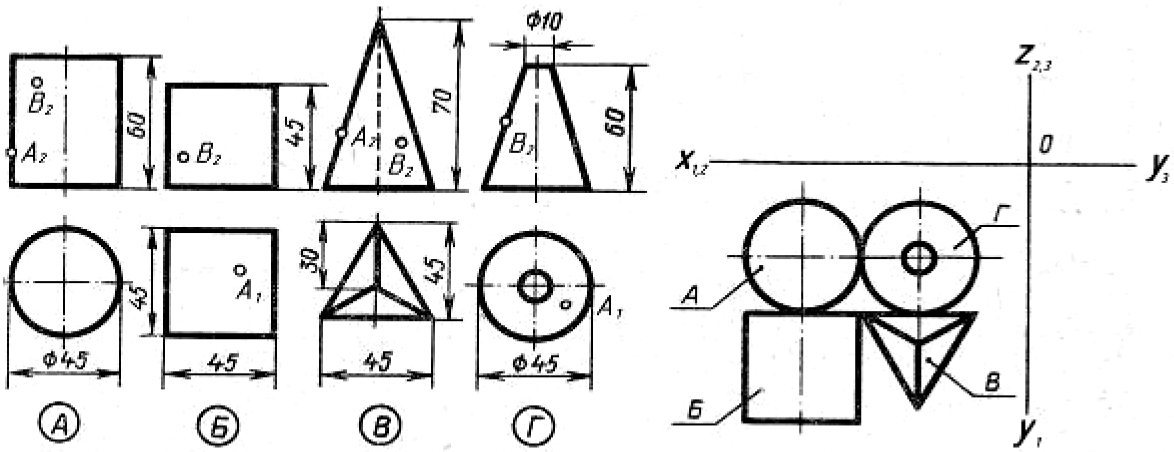
Варіант 27



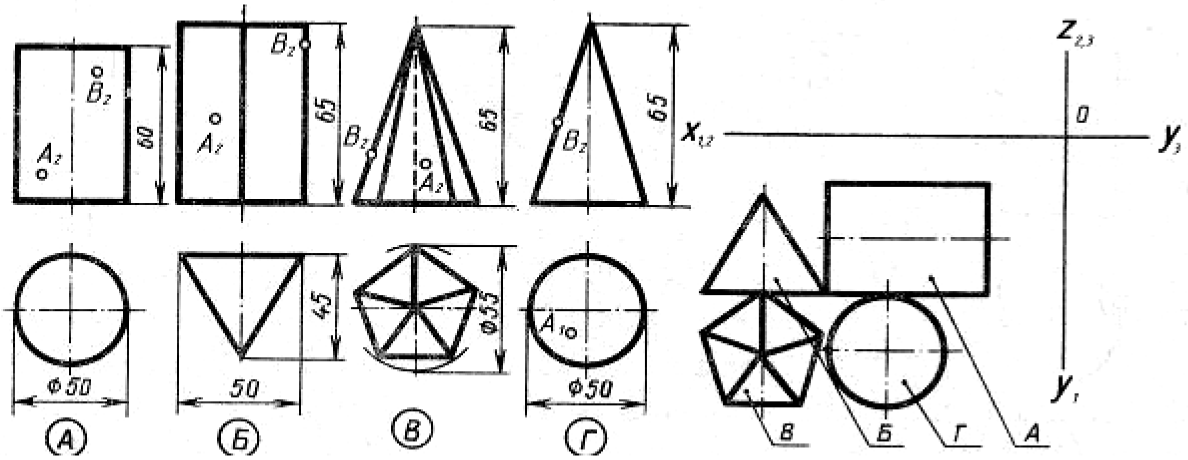
Варіант 28



Варіант 29

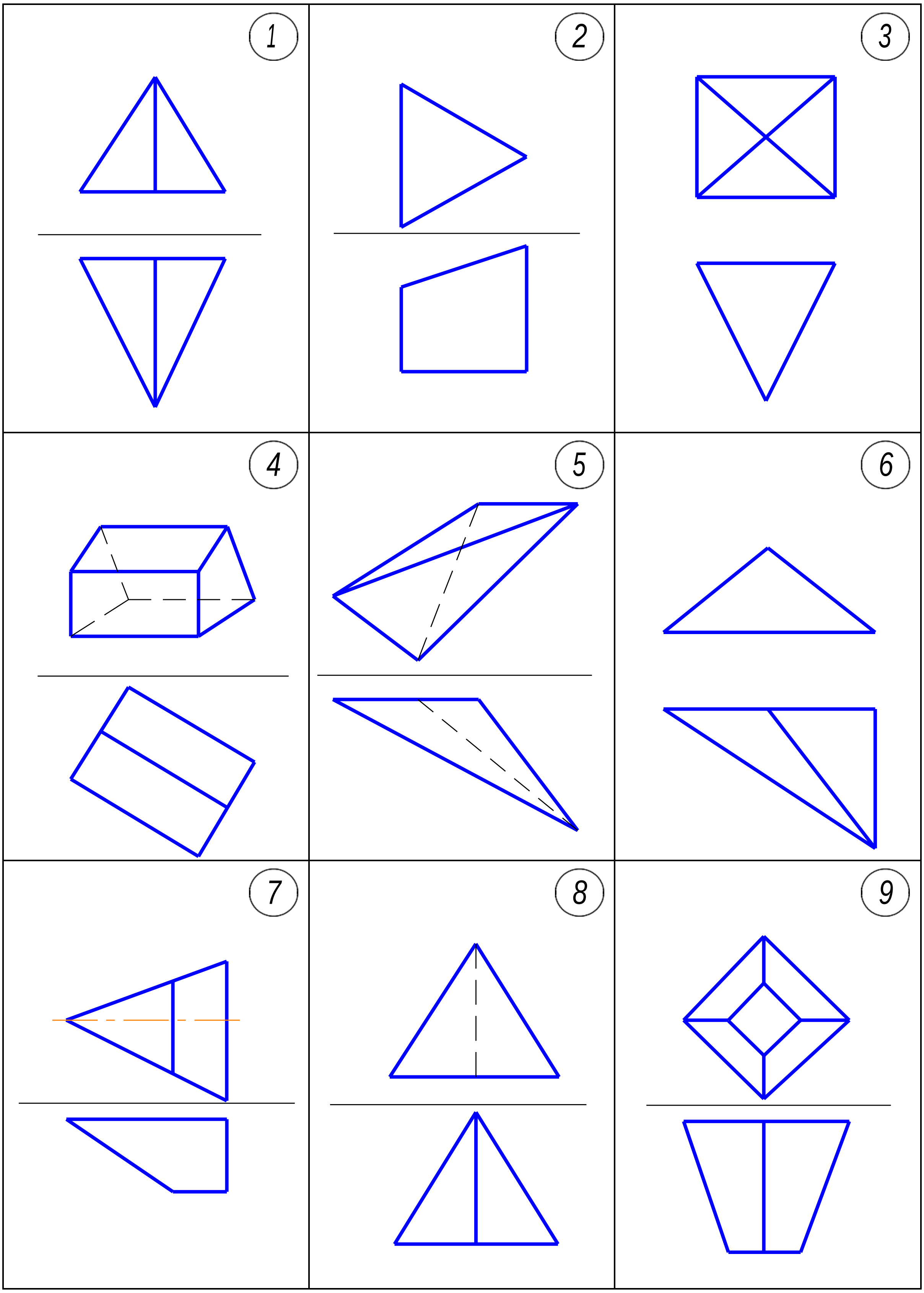


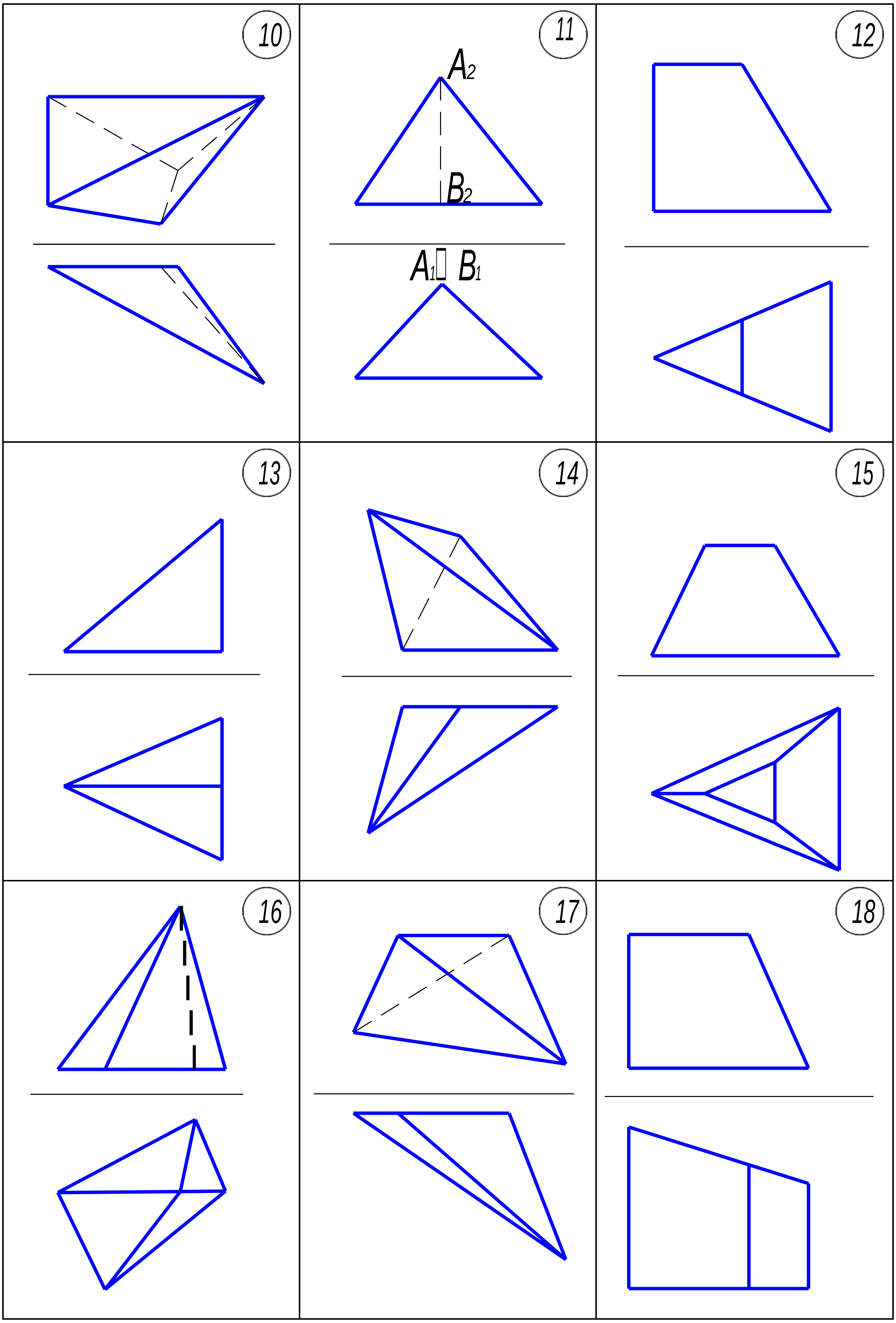
Варіант 30



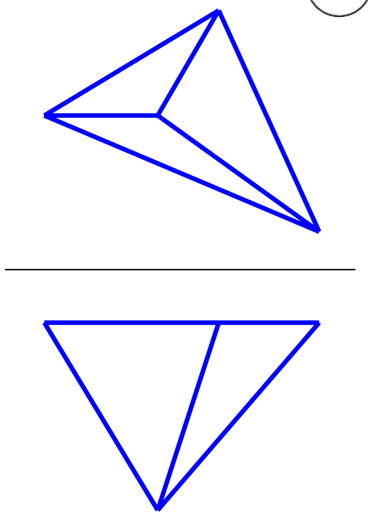
Додаток Б

Варіанти завдань до виконання графічної роботи № 2

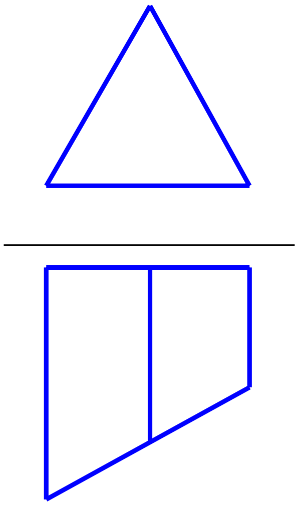



10
11
A_2
B_2
A_1 B_1
12
13
14
15
16
17
18

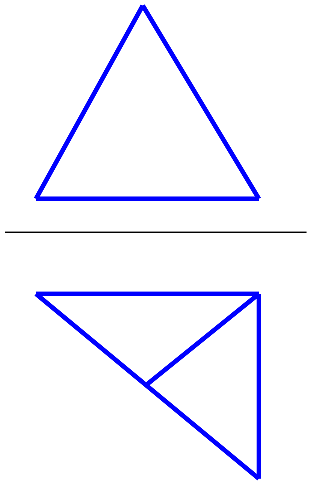
19



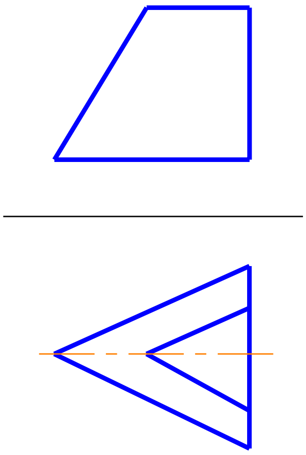
20



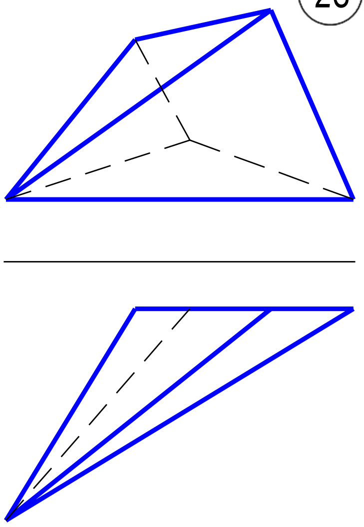
21



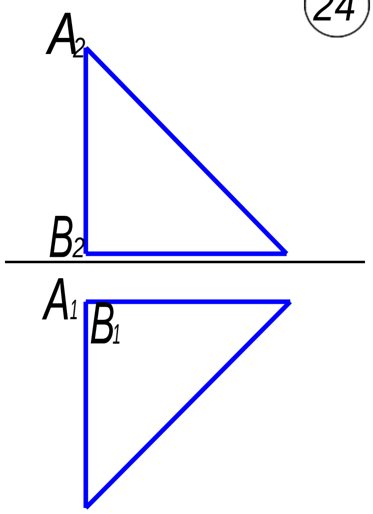
22



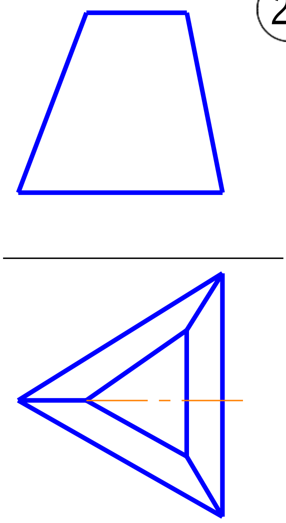
23



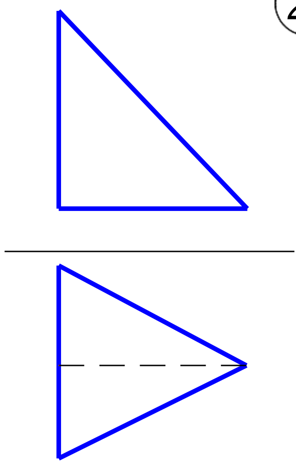
24



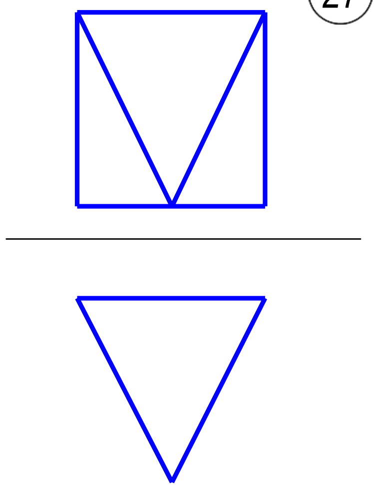
25

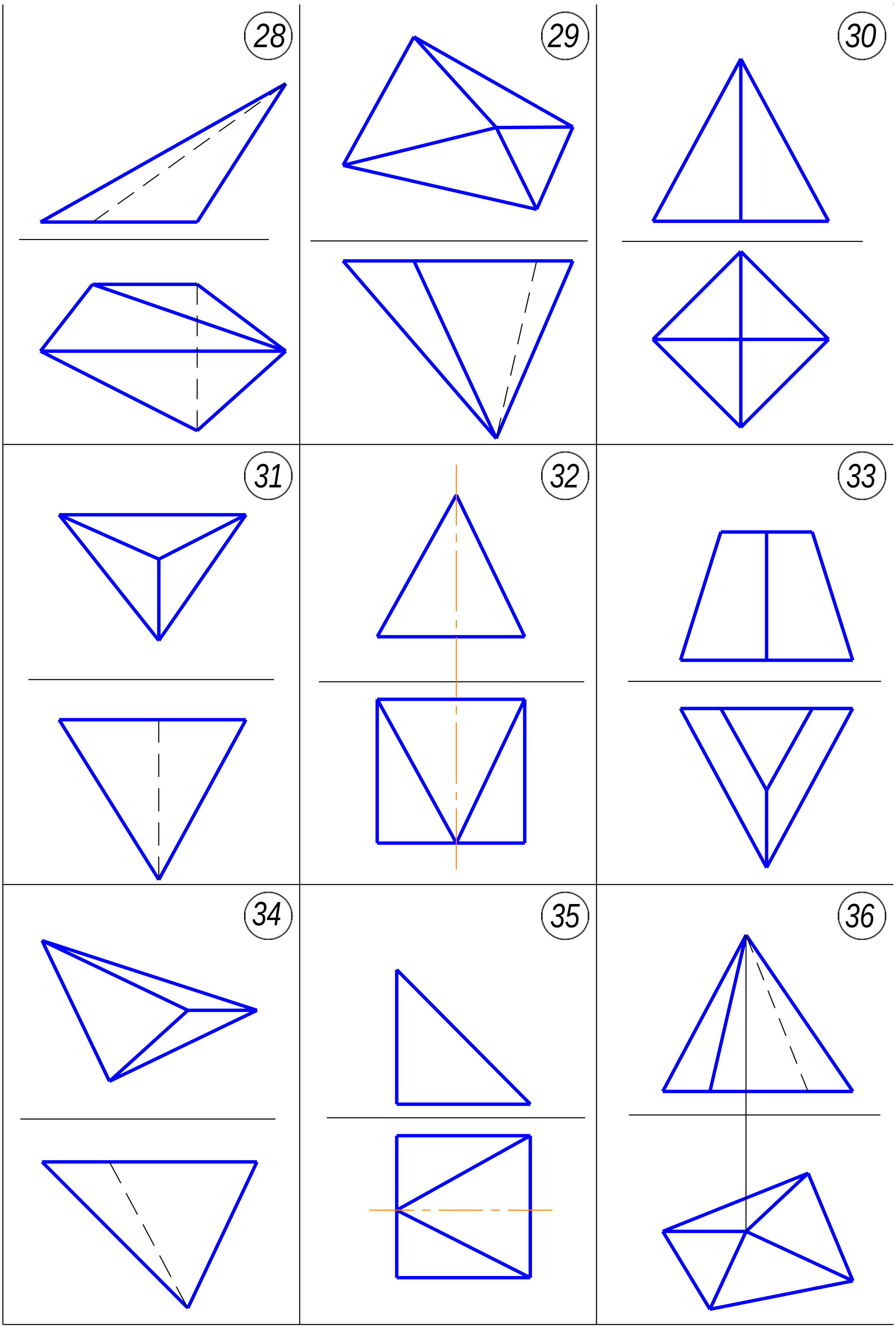


26



27




28
29
30
31
32
33
34
35
36

Додаток В

Варіанти завдань для виконання графічної роботи № 3

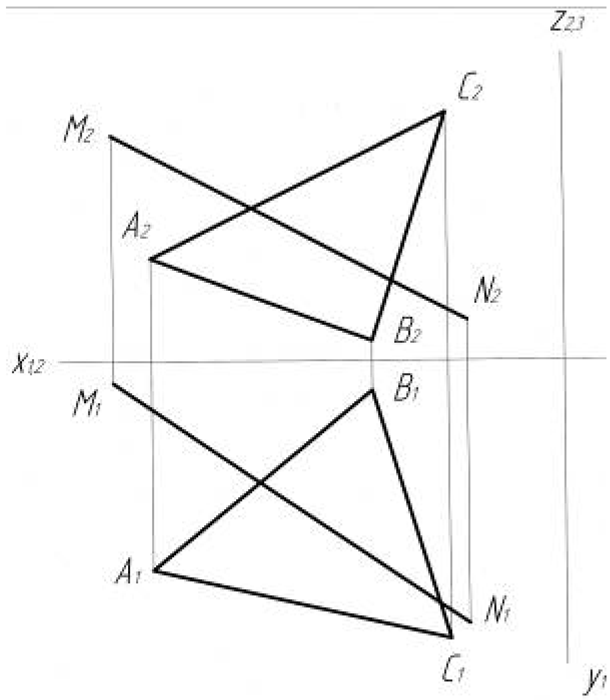


Рисунок Б1

№ варіанта	1			2			3			4			5		
Координати	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
A	65	45	20	70	50	10	50	15	15	70	45	19	66	50	9
B	15	35	50	60	20	40	15	55	60	15	38	47	61	21	39
C	35	20	10	10	10	20	35	10	5	35	19	8	11	11	21
M	70	15	50	95	25	10	80	5	40	70	15	52	92	24	9
N	10	55	5	5	45	45	10	40	20	5	54	5	6	44	44

№ варіанта	6			7			8			9			10		
Координати	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
A	50	15	15	60	40	20	65	40	20	65	60	10	60	40	15
B	15	55	55	15	35	45	15	35	45	60	20	40	15	35	45
C	35	10	5	35	20	10	34	20	10	15	15	20	35	20	10
M	80	5	40	70	15	50	70	15	50	90	25	10	70	15	50
N	10	35	20	5	55	0	5	55	5	5	45	45	5	55	5

№ варіанта	11			12			13			14			15		
Координати	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
A	50	15	15	65	45	20	65	40	20	65	50	10	50	15	15
B	15	55	55	15	35	45	15	35	50	60	20	40	15	55	55
C	35	10	5	35	20	5	35	20	10	10	10	20	35	10	5
M	80	5	40	70	15	50	70	15	50	95	25	10	80	5	40
N	10	40	20	5	55	5	5	55	5	5	45	45	10	40	20

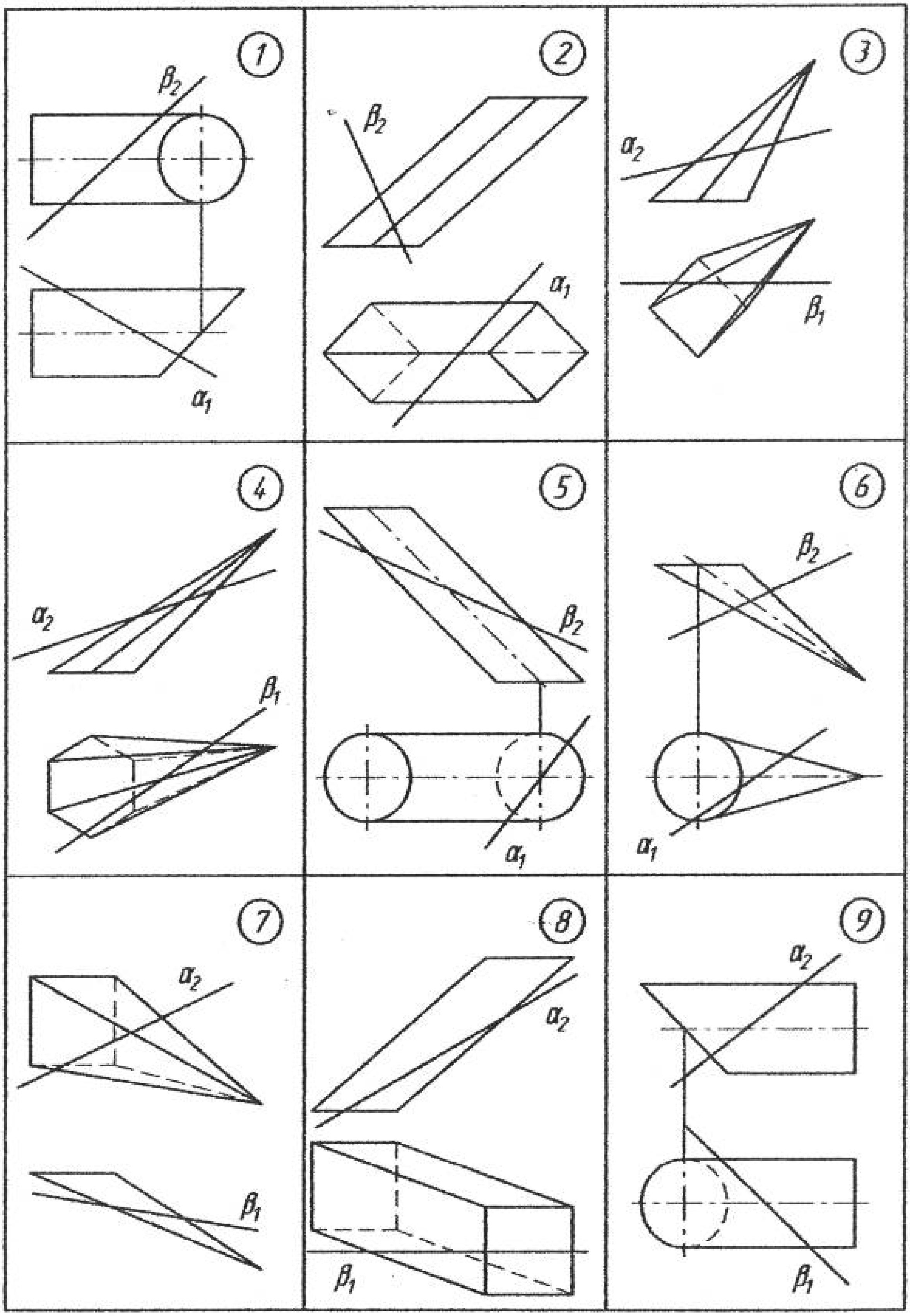
№ варіанта	16			17			18			19			20		
Координати	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
A	60	40	20	65	45	15	70	60	10	50	15	15	65	40	15
B	15	35	45	15	35	45	60	20	40	15	55	55	15	35	45
C	35	15	10	35	20	10	15	15	20	35	10	5	35	20	10
M	70	15	50	70	15	50	95	25	10	80	5	40	70	15	50
N	5	55	5	5	55	5	5	45	45	10	40	20	5	55	5

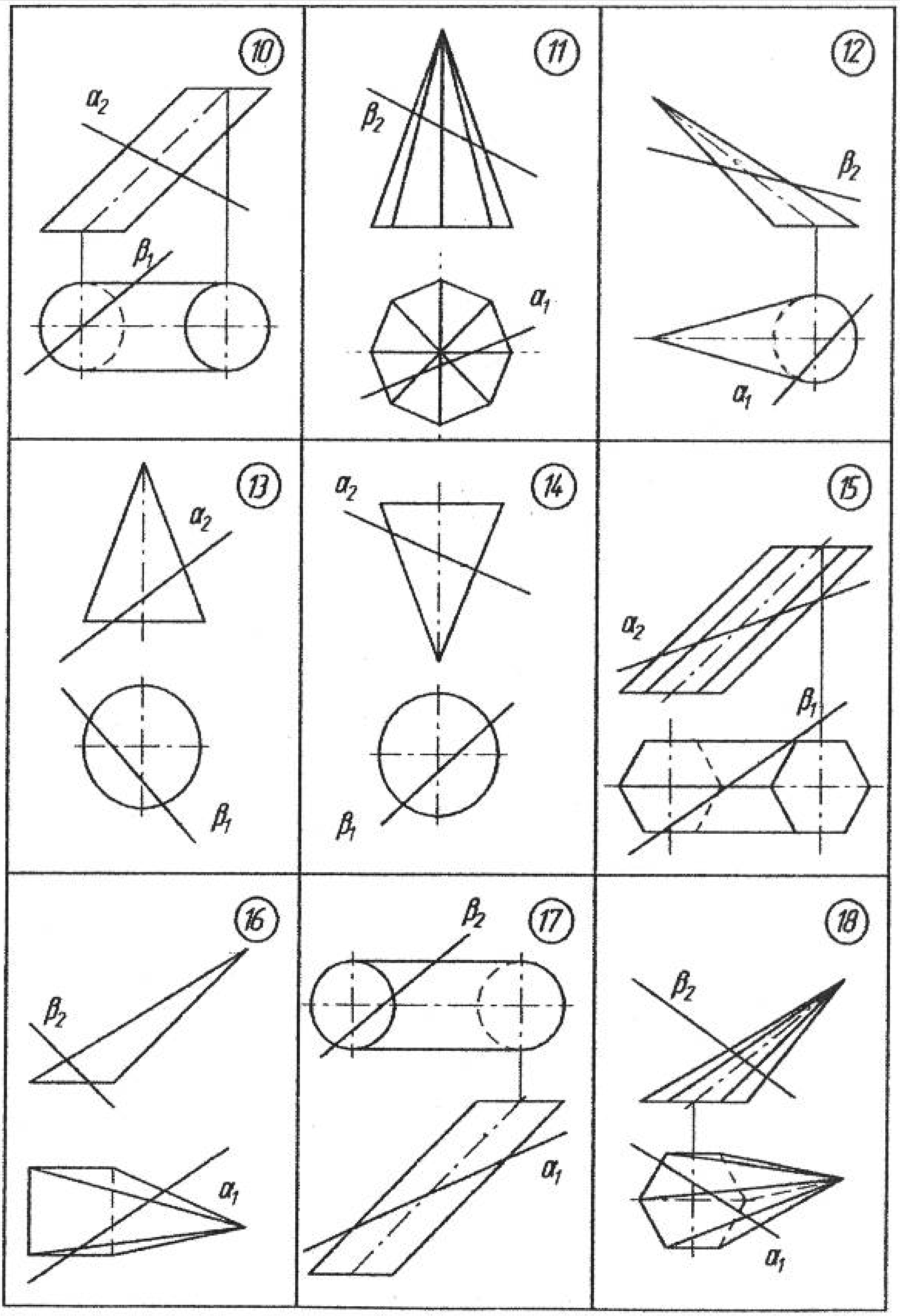
№ варіанта	21			22			23			24			25		
Координати	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
A	50	15	15	70	50	10	65	45	20	65	40	20	55	15	15
B	15	55	55	60	25	40	15	35	50	15	35	45	10	55	55
C	35	10	5	15	15	25	35	20	5	35	20	10	35	5	5
M	80	5	40	90	25	10	70	15	50	70	15	50	80	5	40
N	10	35	20	5	45	45	5	55	5	5	55	5	10	35	20

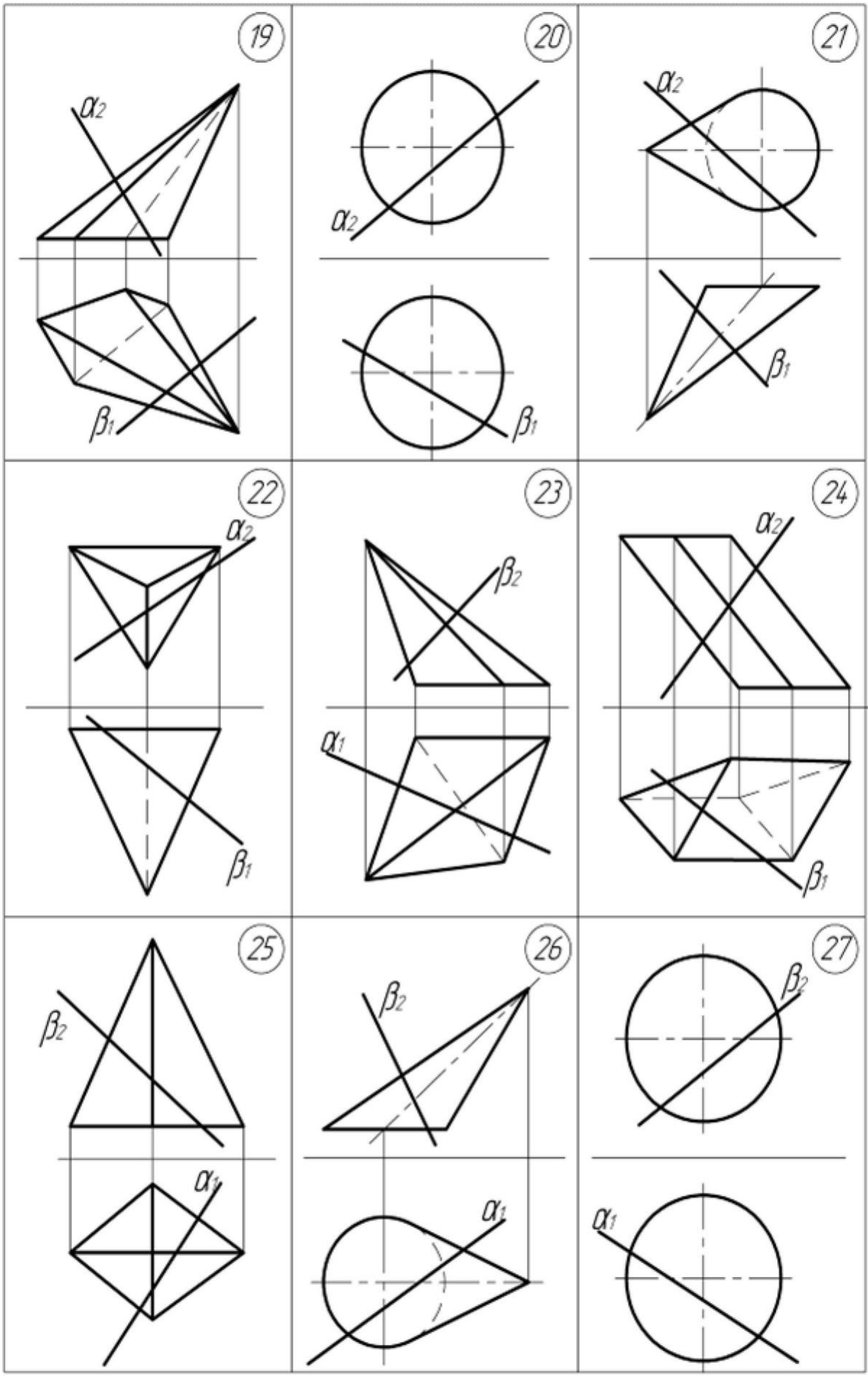
№ варіанта	26			27			28			29			30		
Координати	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
A	50	15	15	65	60	10	50	15	15	55	15	20	70	45	20
B	15	55	55	60	20	40	15	55	55	15	55	15	15	35	45
C	35	10	5	10	10	20	35	10	5	5	5	35	35	20	10
M	80	5	40	95	25	10	80	5	40	5	40	70	70	15	50
N	10	40	20	5	45	45	10	35	20	35	20	5	5	55	5

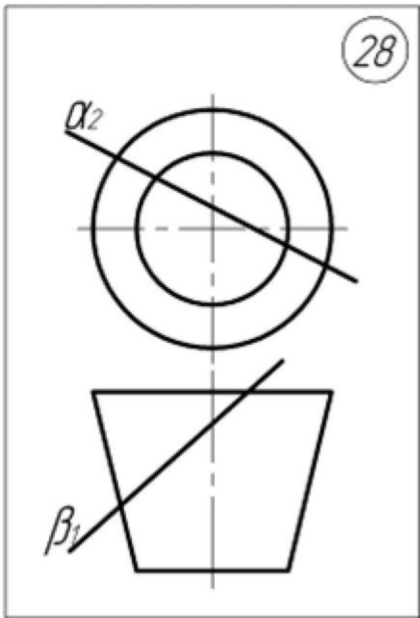
Додаток Г

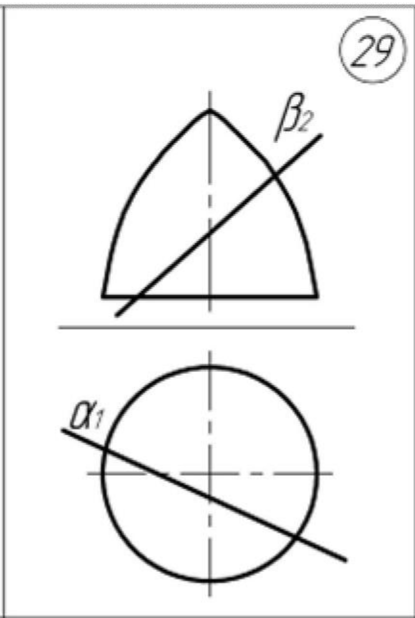
Варіанти завдань до виконання епюра № 4

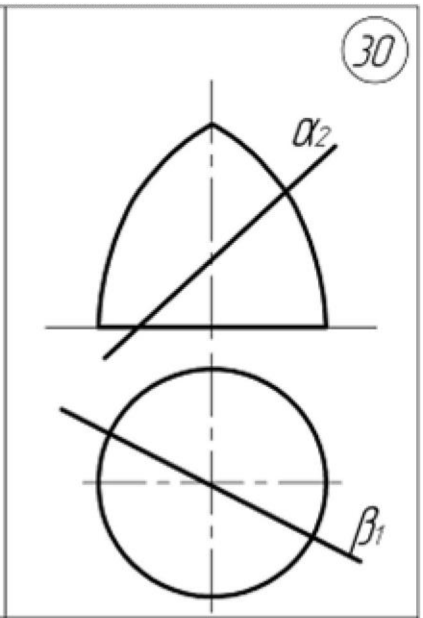


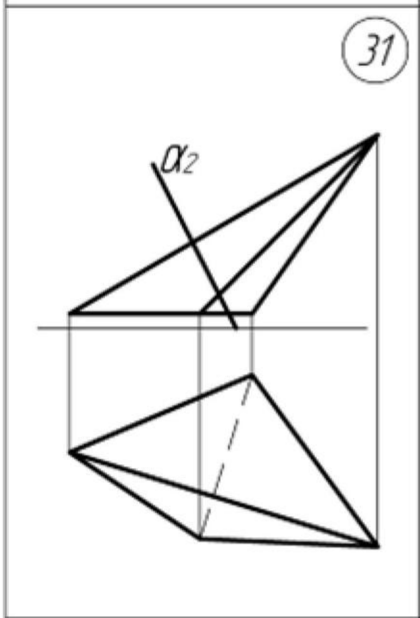

10
α2
β1
11
β2
α1
12
β2
α1
13
α2
β1
14
α2
β1
15
α2
β1
16
β2
α1
17
β2
α1
18
β2
α1

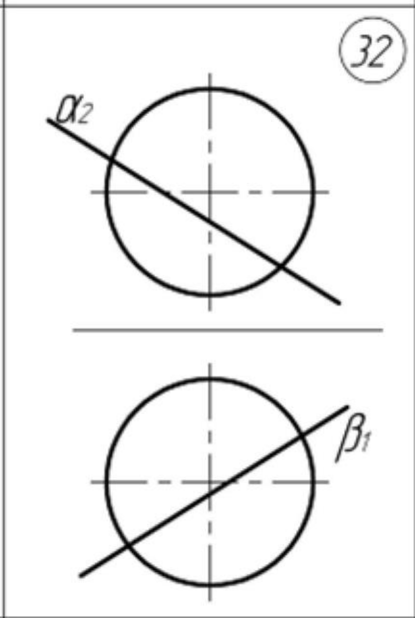

19
α2
β1
20
α2
β1
21
α2
β1
22
α2
β1
23
β2
α1
24
α2
β1
25
β2
α1
26
β2
α1
27
β2
α1

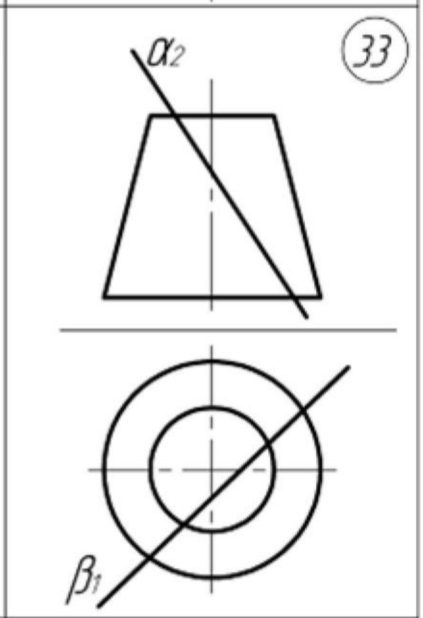

28
α_2
β_1

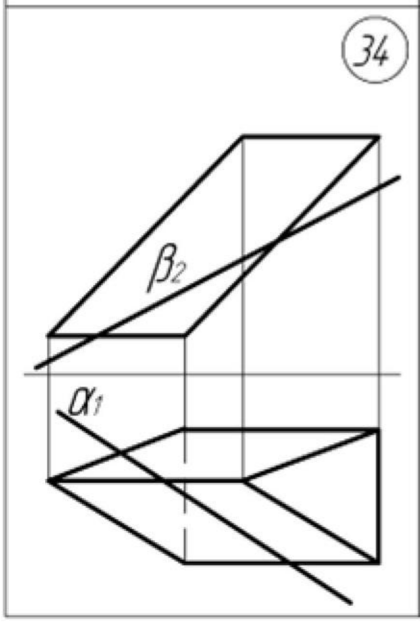

29
β_2
α_1

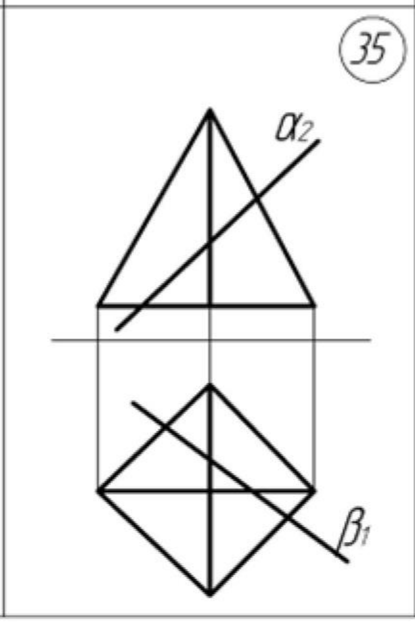

30
α_2
β_1

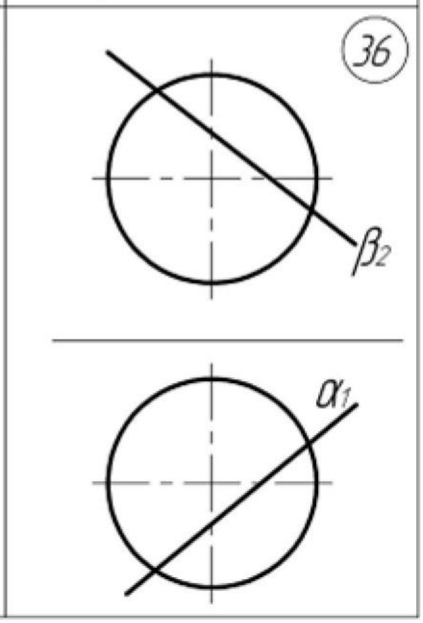

31
α_2


32
α_2
β_1


33
α_2
β_1

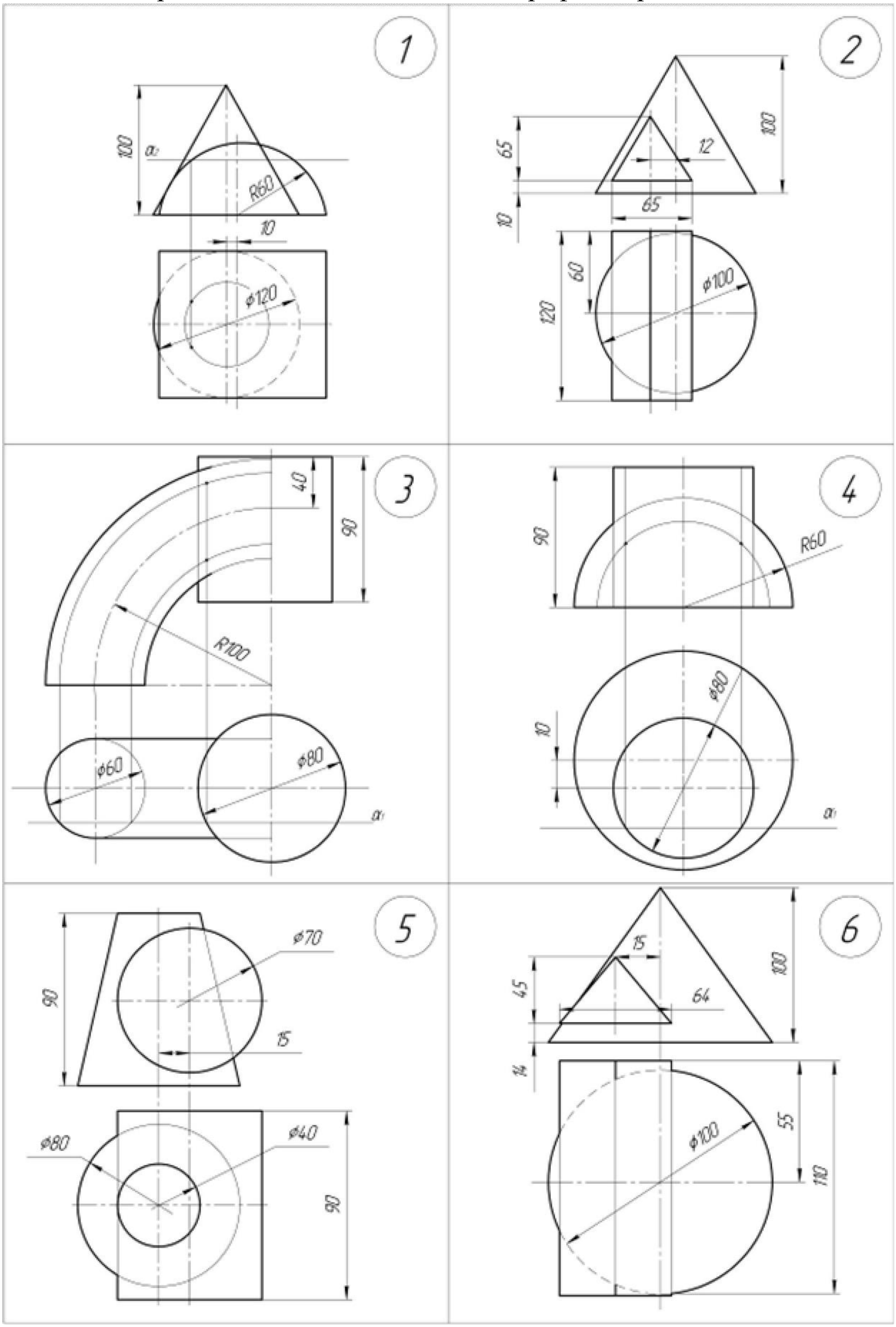

34
β_2
α_1

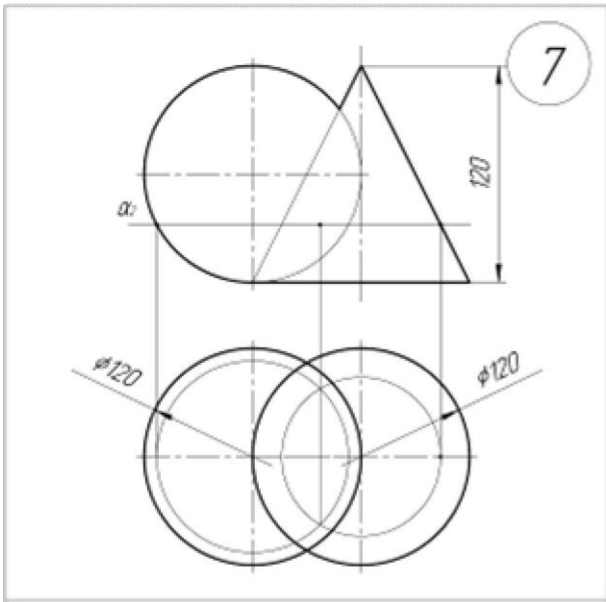

35
α_2
β_1

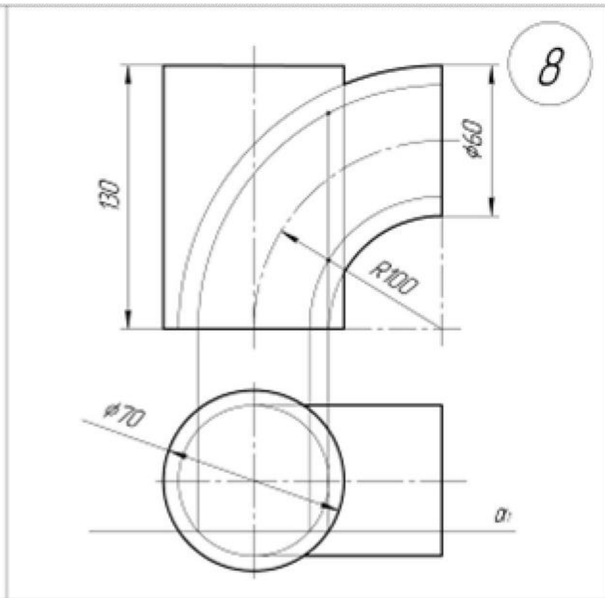

36
β_2
α_1

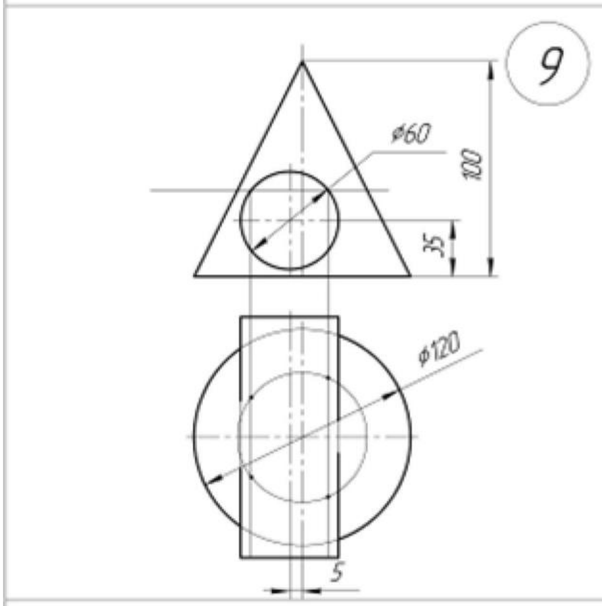
Додаток Д

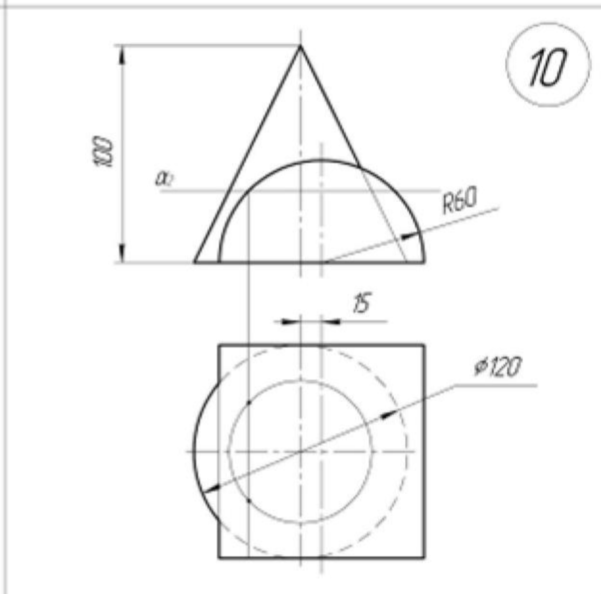
Варіанти завдань для виконання графічної роботи № 5

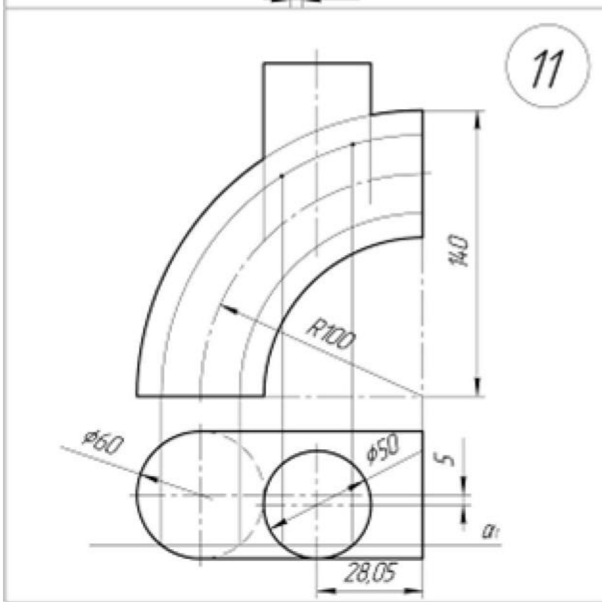


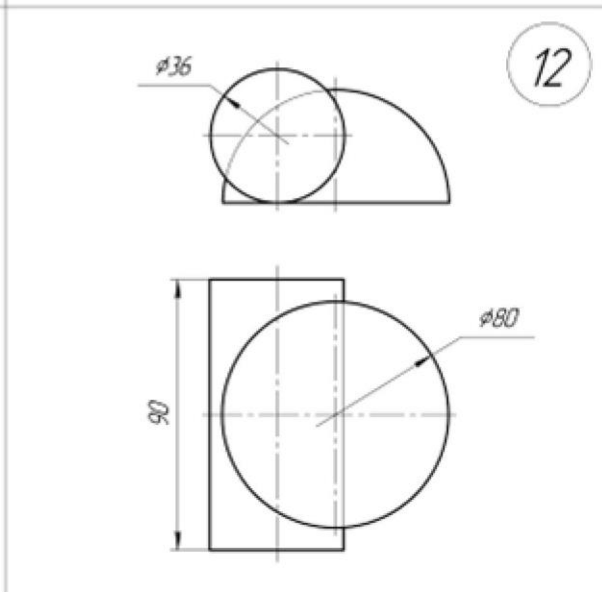

7
120
α2
ø120
ø120

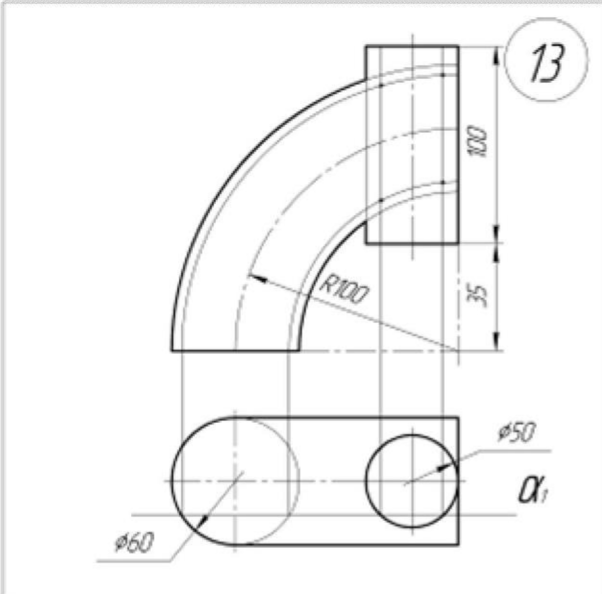

8
130
ø60
R100
ø70
α1

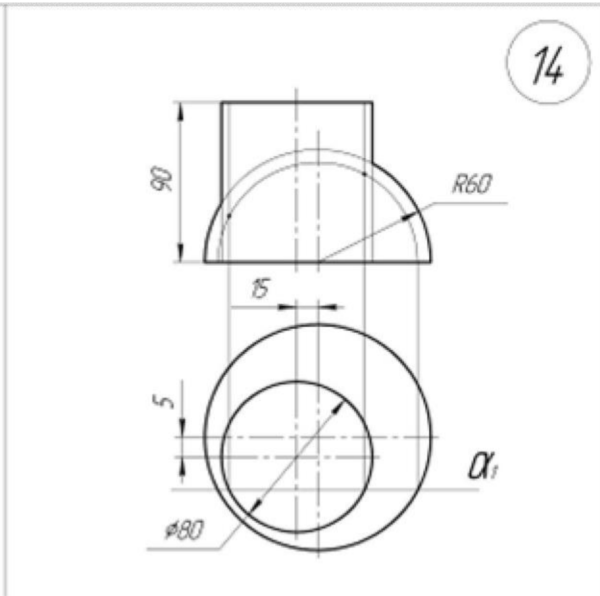

9
ø60
100
35
ø120
5

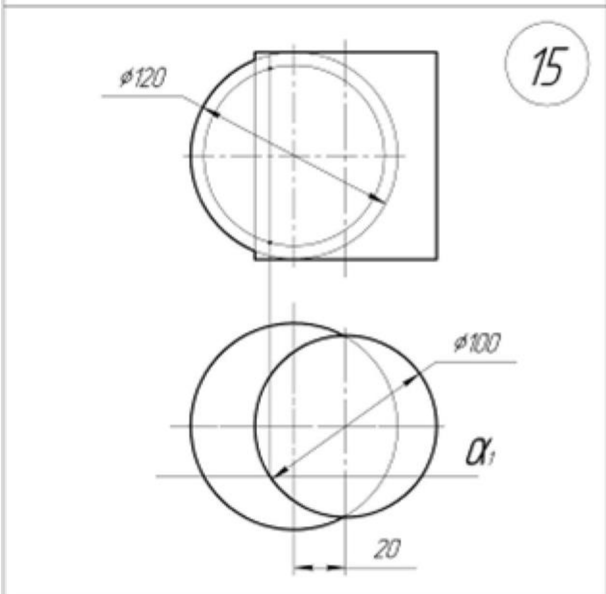

10
100
α2
R60
15
ø120

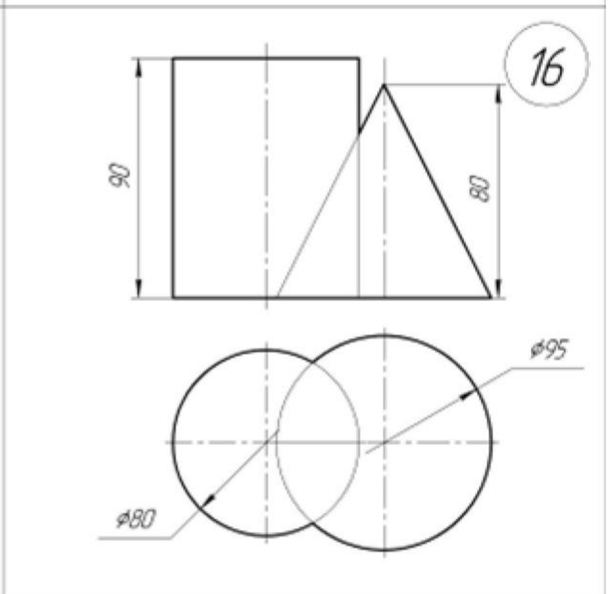

11
140
R100
ø60
ø50
5
α1
28,05

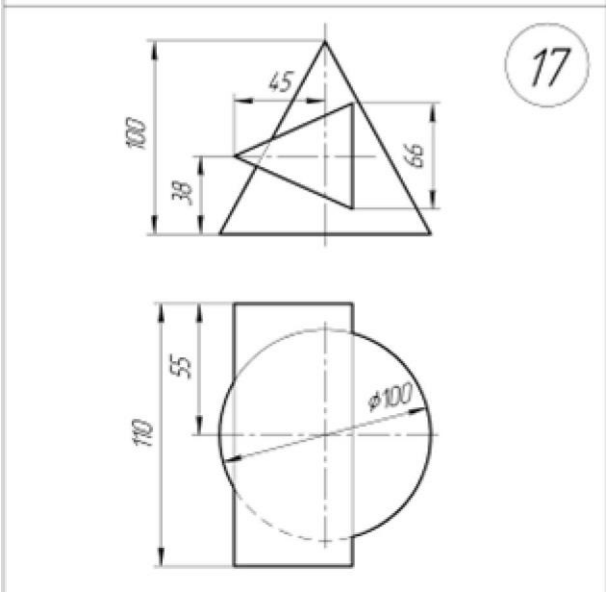

12
ø36
ø80
90

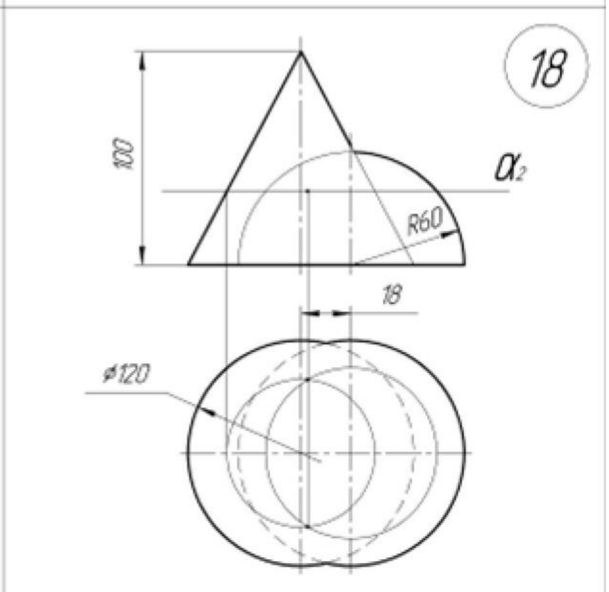

13
100
35
R100
ø50
α_1
ø60

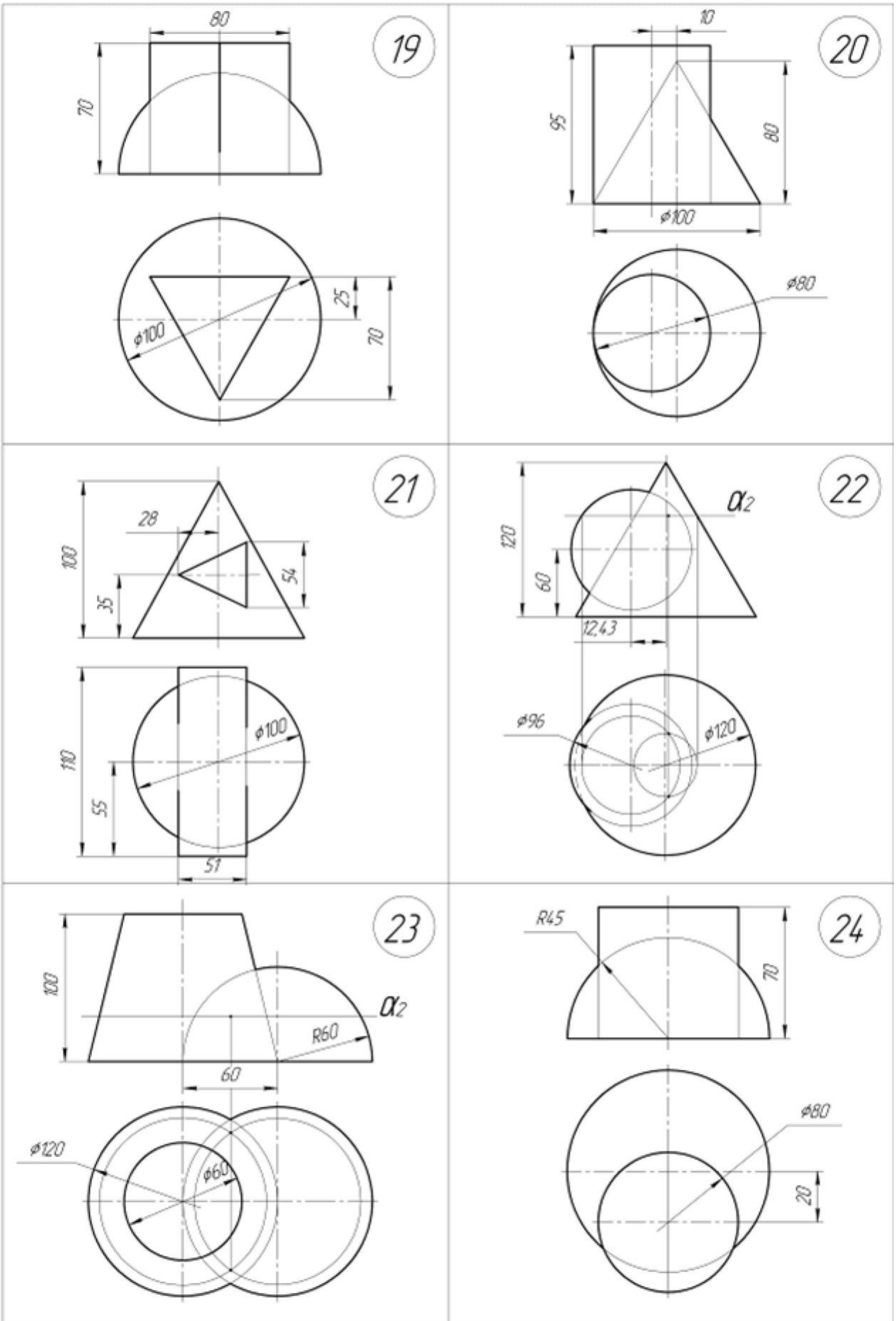

14
90
R60
15
5
α_1
ø80

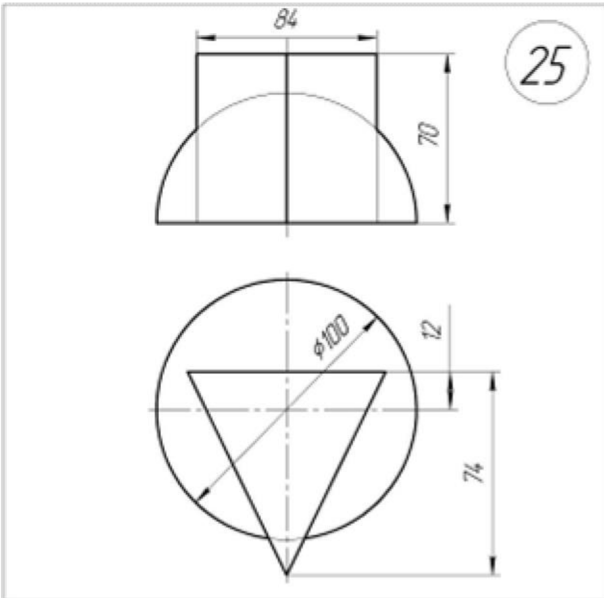

15
ø120
ø100
α_1
20

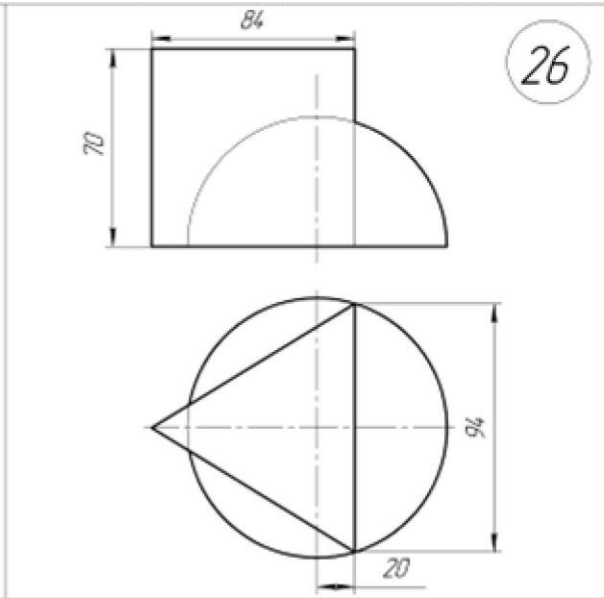

16
90
80
ø95
ø80

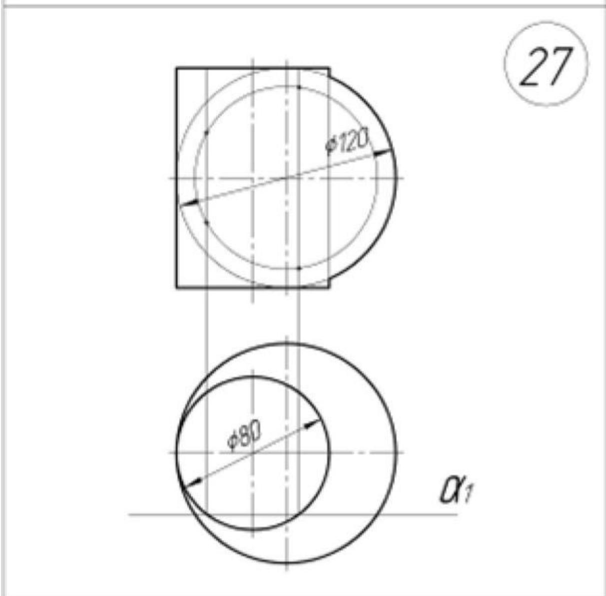

17
100
45
66
38
55
110
ø100

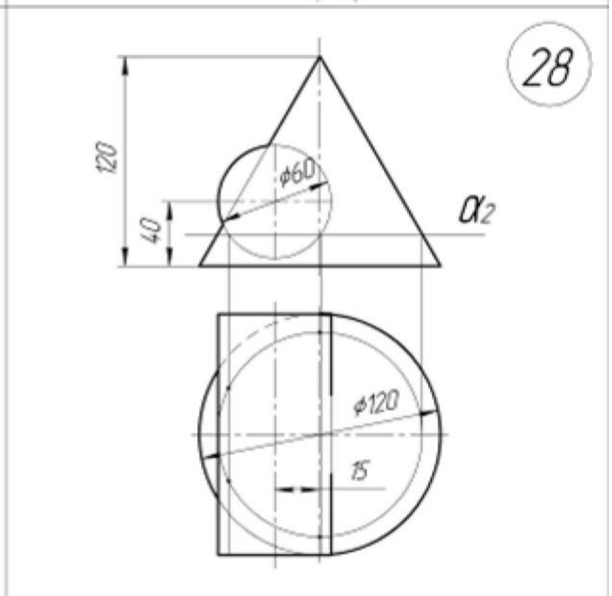

18
100
α_2
R60
18
ø120

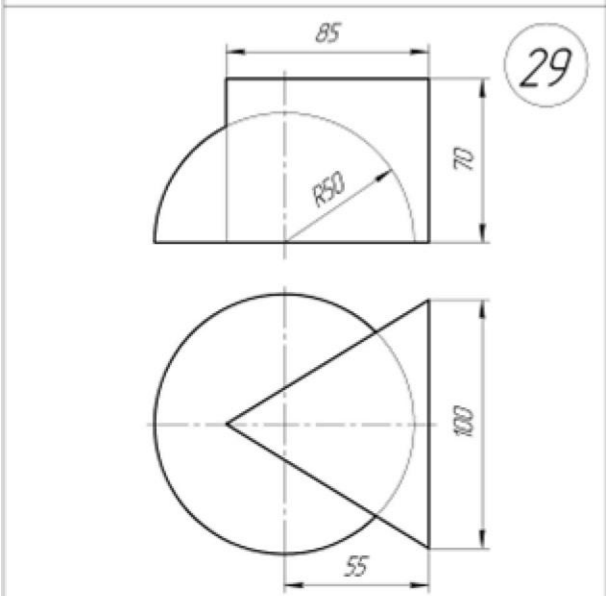

19
80
70
ø100
25
70
20
10
95
80
ø100
ø80
21
28
100
54
35
110
ø100
55
51
22
α2
120
60
12,43
ø96
ø120
23
100
α2
R60
60
ø120
ø60
24
R45
70
ø80
20

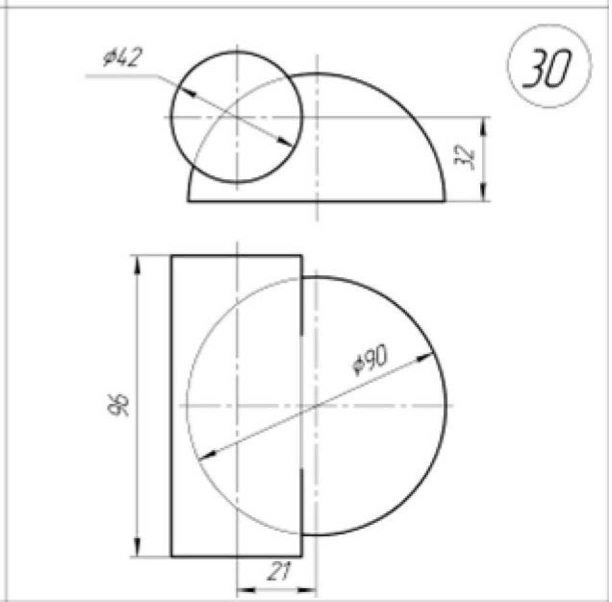

25
84
70
ф100
12
74

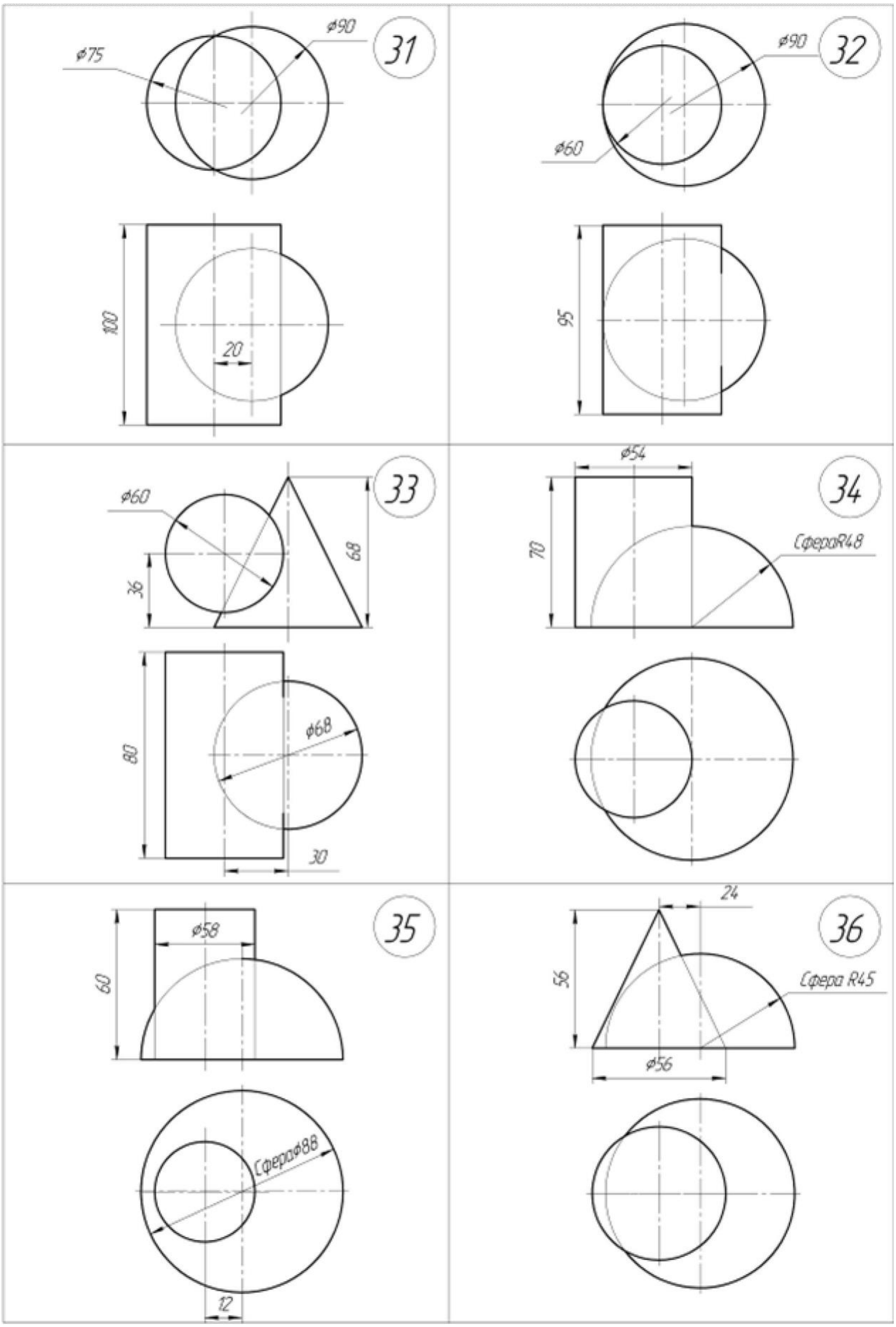

26
84
70
94
20


27
ф120
ф80
α1


28
120
40
ф60
α2
ф120
15

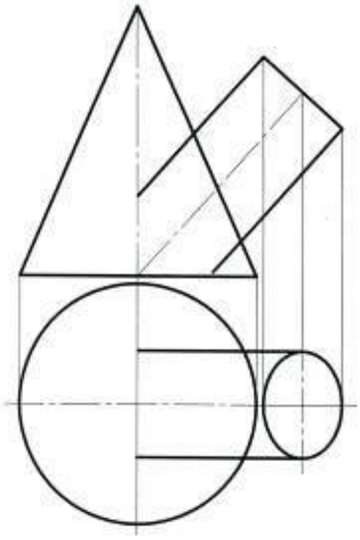
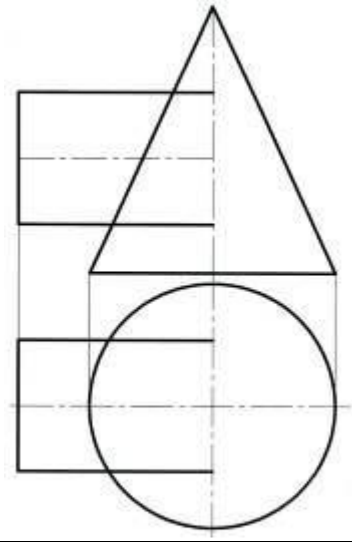
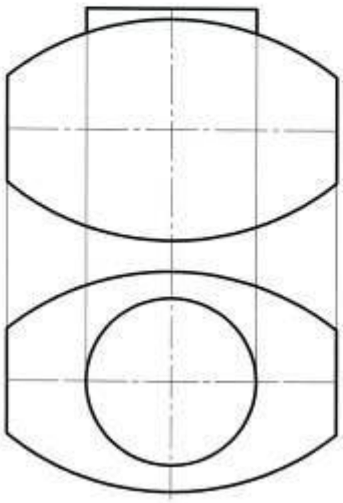
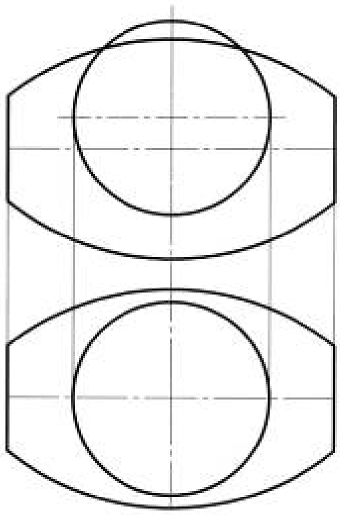
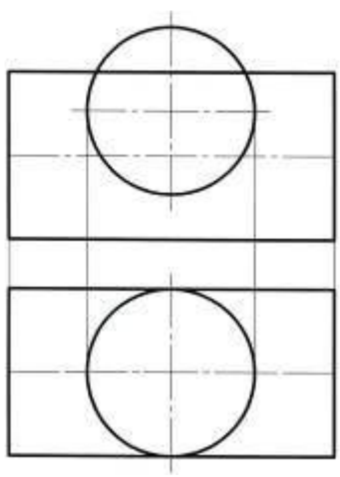
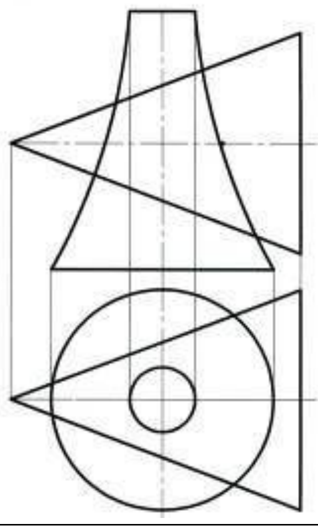

29
85
70
R50
100
55

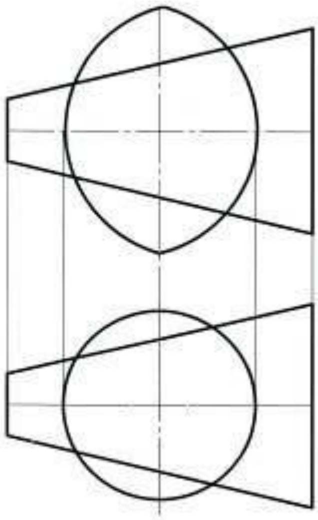
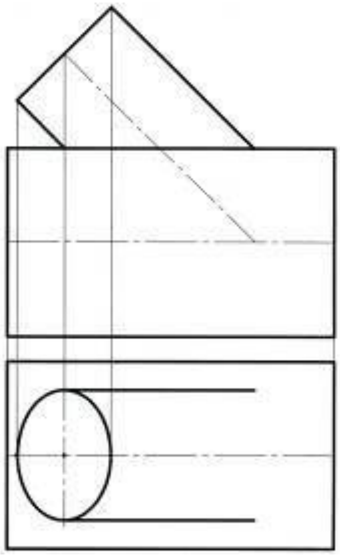
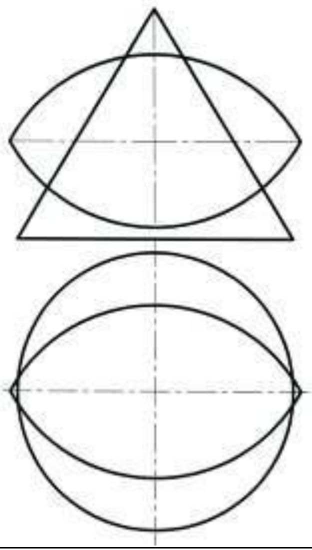
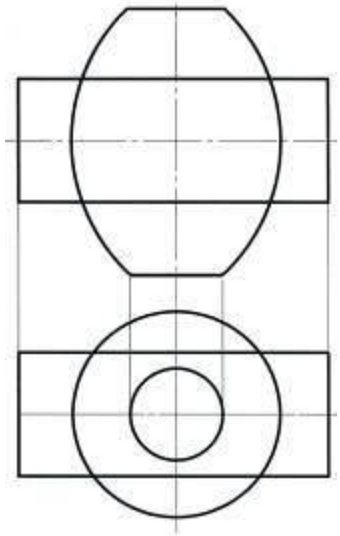
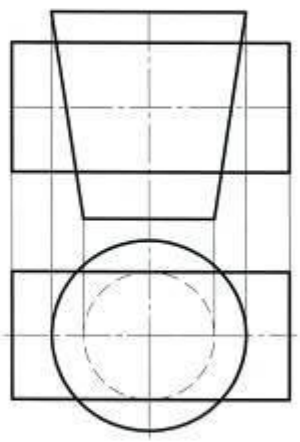
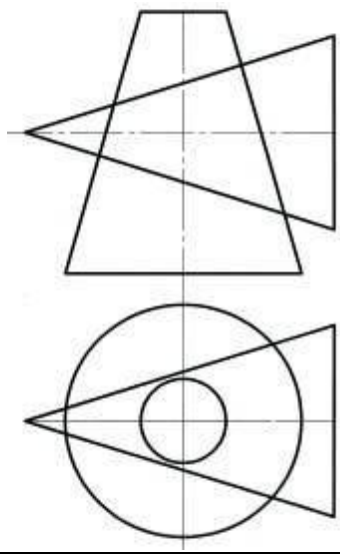

30
ф42
32
96
ф90
21

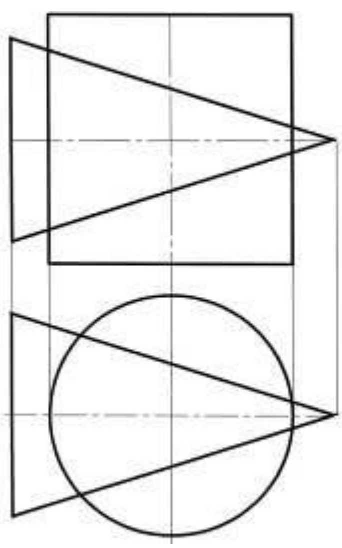
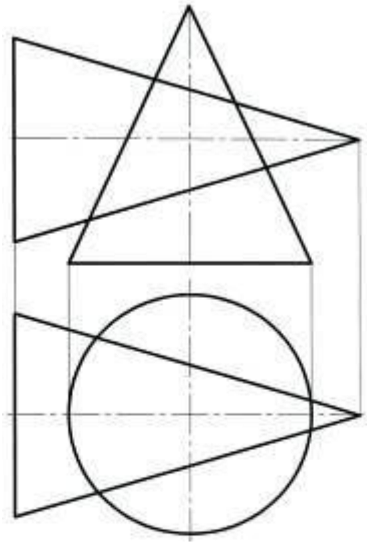
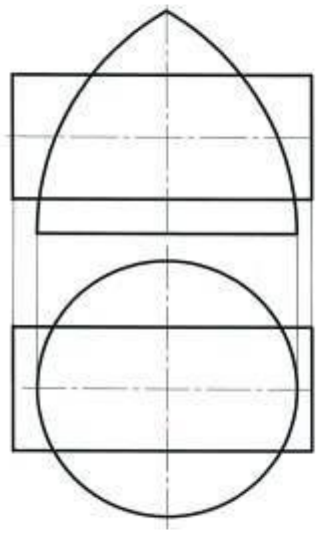
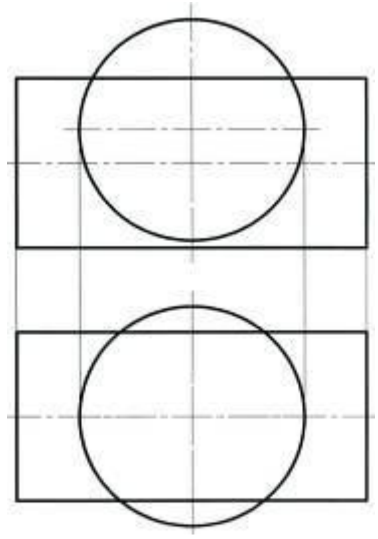
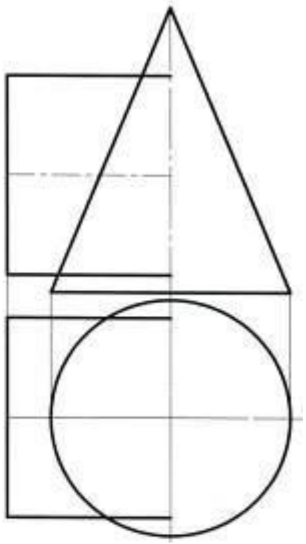
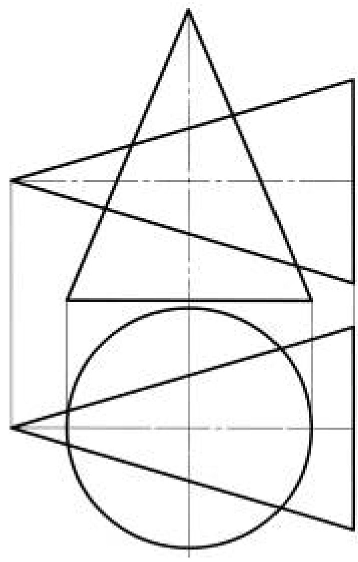

31
⌀75
⌀90
100
20
32
⌀90
⌀60
95
33
⌀60
36
68
80
⌀68
30
34
⌀54
70
СфераR48
35
⌀58
60
Сфера⌀88
12
36
24
56
Сфера R45
⌀56

Додаток Е

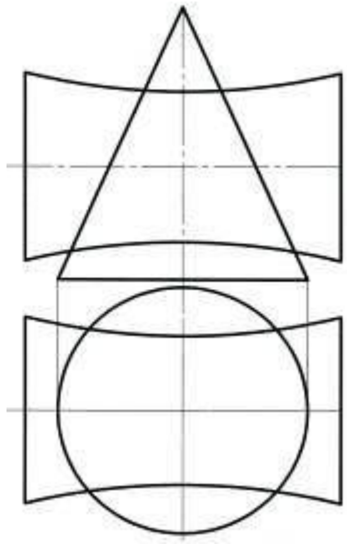
Варіанти завдань для виконання графічної роботи № 6

Варіант 1 	Варіант 2 
Варіант 3 	Варіант 4 
Варіант 5 	Варіант 6 

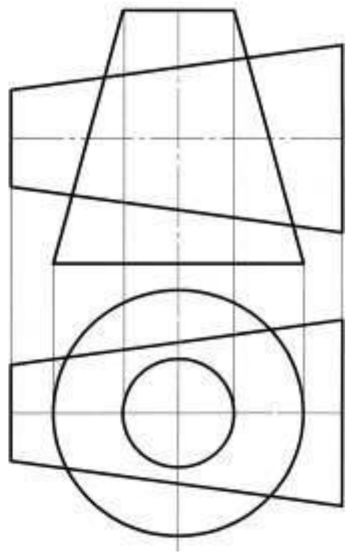
Варіант 7 	Варіант 8 
Варіант 9 	Варіант 10 
Варіант 11 	Варіант 12 

Варіант 13 	Варіант 14 
Варіант 15 	Варіант 16 
Варіант 17 	Варіант 18 

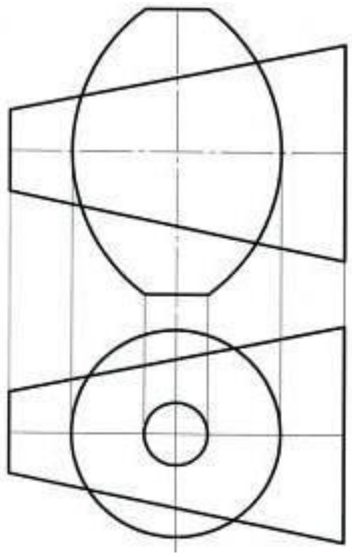
Варіант 19



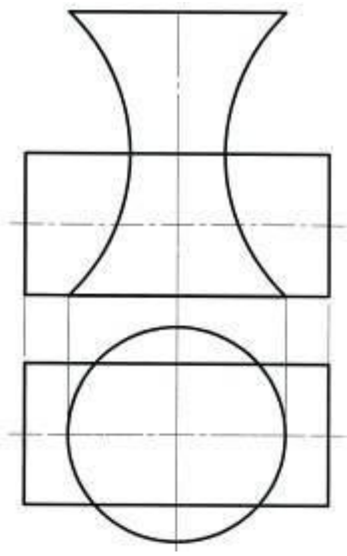
Варіант 20



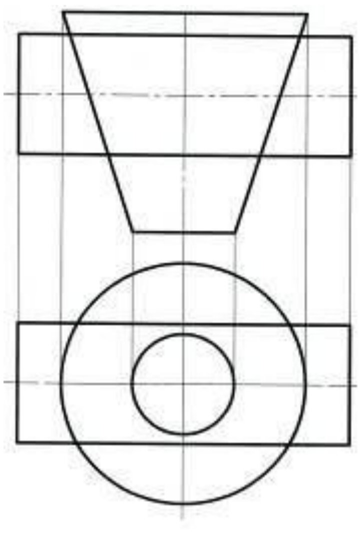
Варіант 21



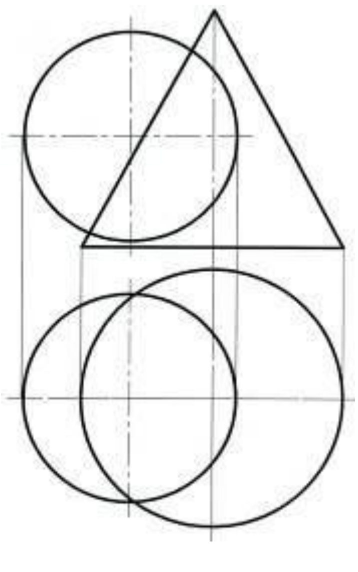
Варіант 22

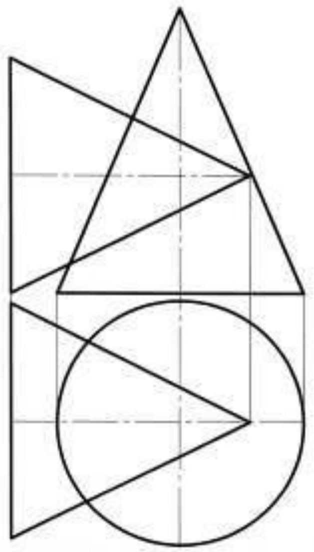
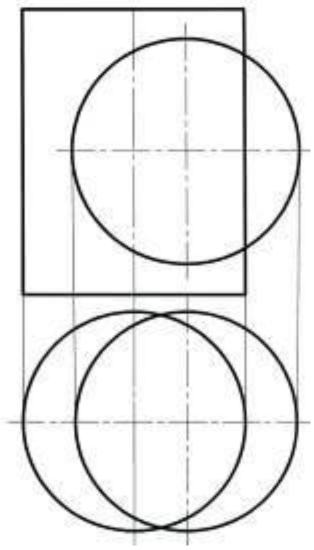
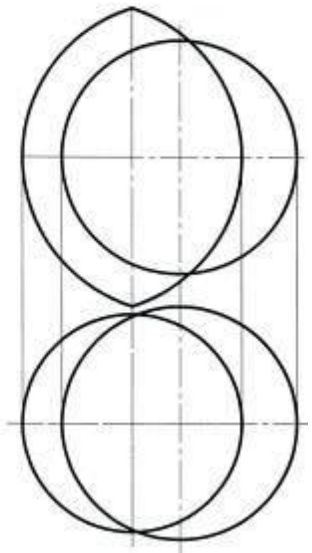
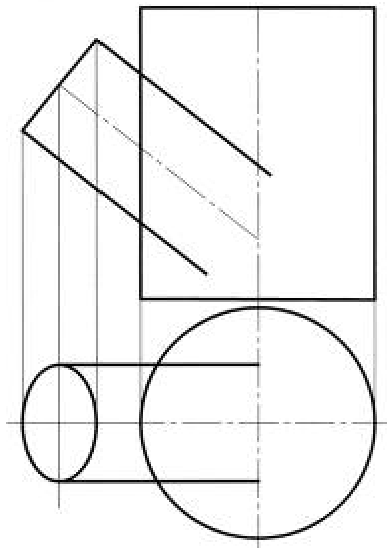
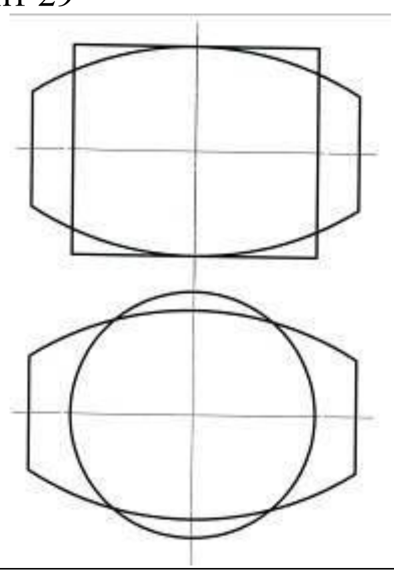
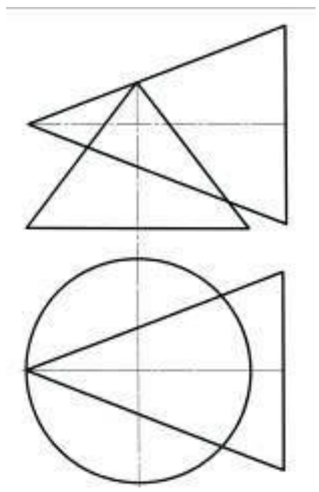


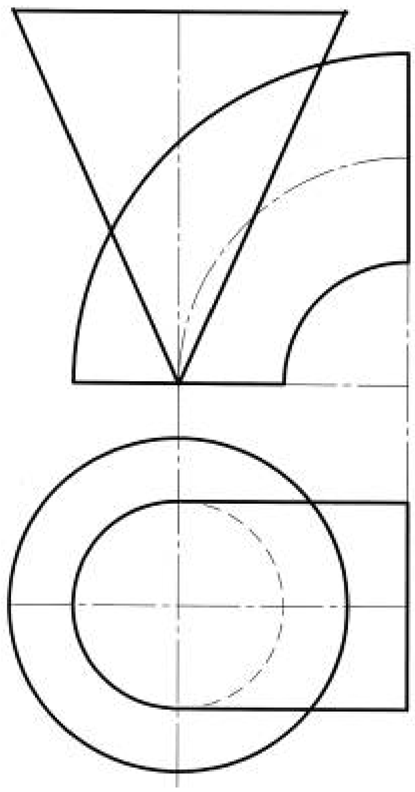
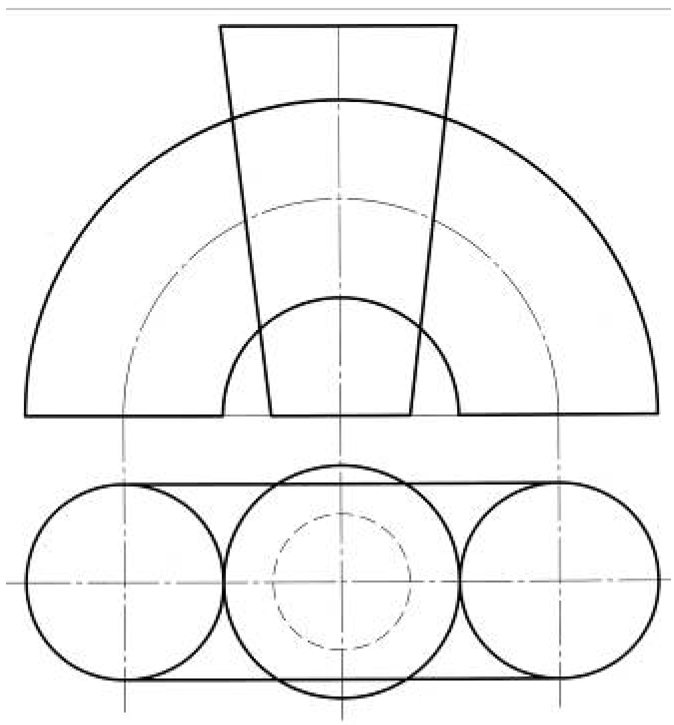
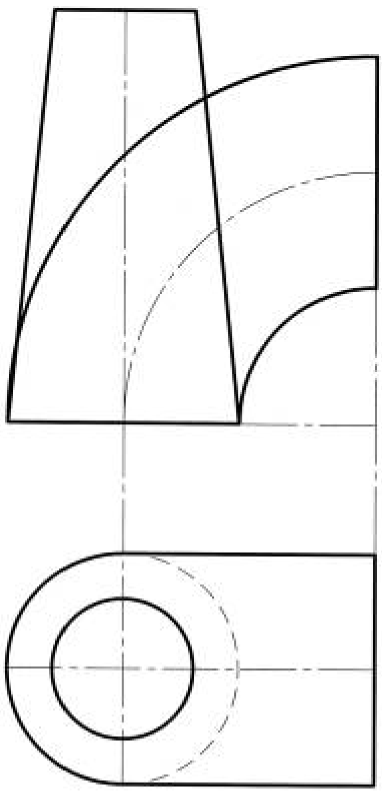
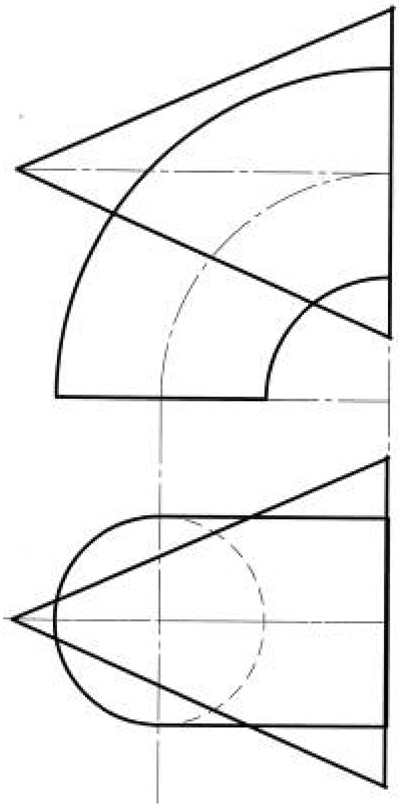
Варіант 23

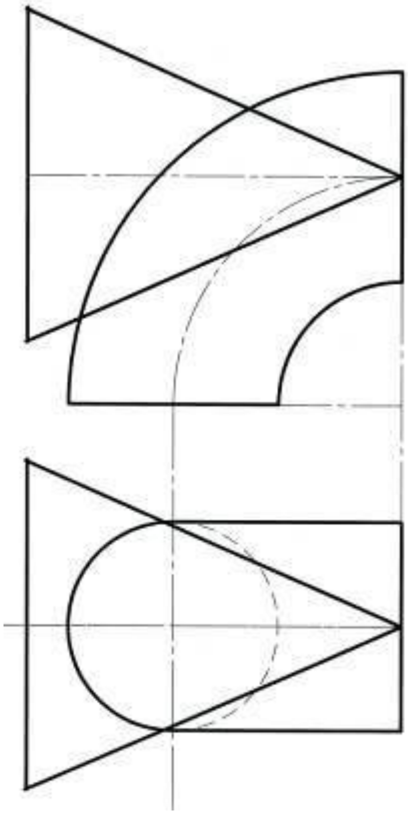
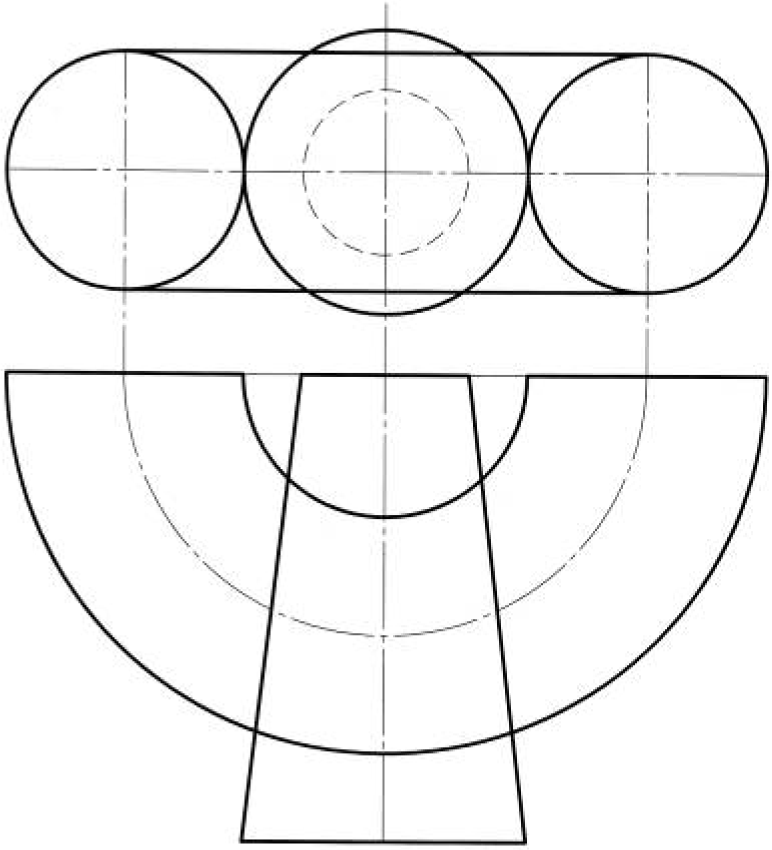
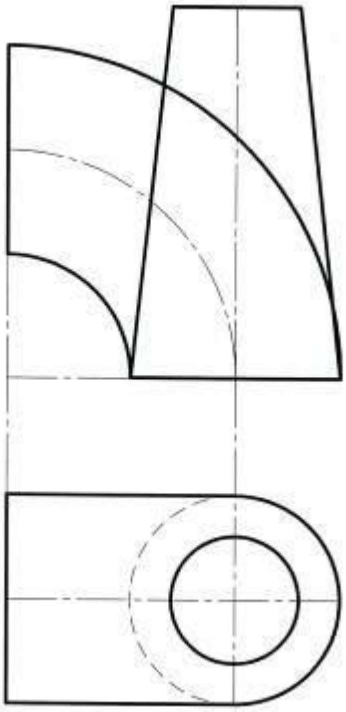
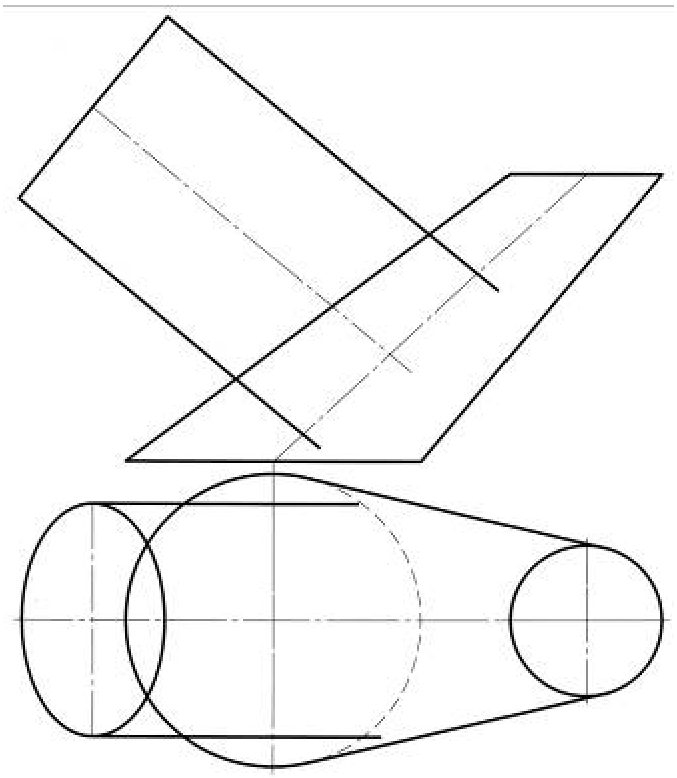


Варіант 24

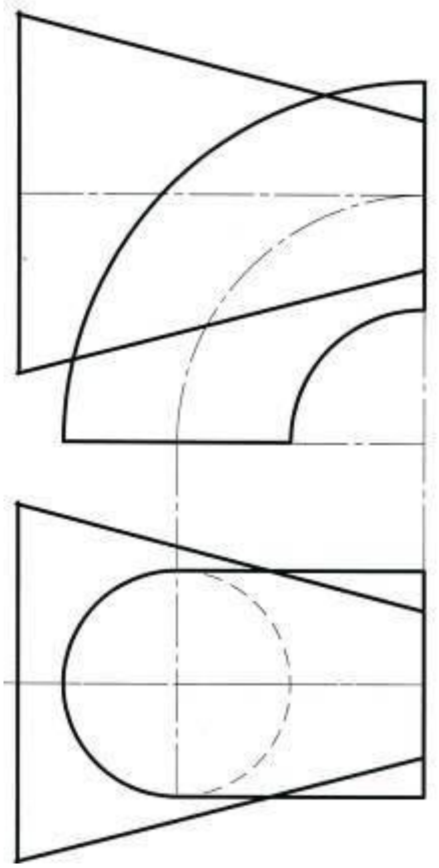


Варіант 25 	Варіант 26 
Варіант 27 	Варіант 28 
Варіант 29 	Варіант 30 

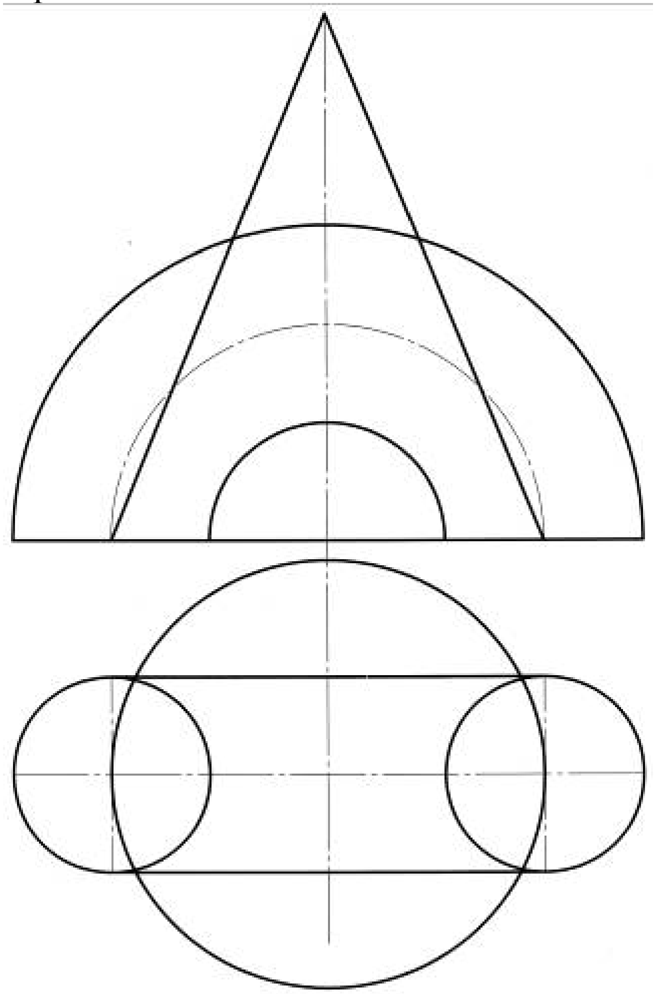
Варіант 31 	Варіант 32 
Варіант 33 	Варіант 34 

Варіант 35 	Варіант 36 
Варіант 37 	Варіант 38 

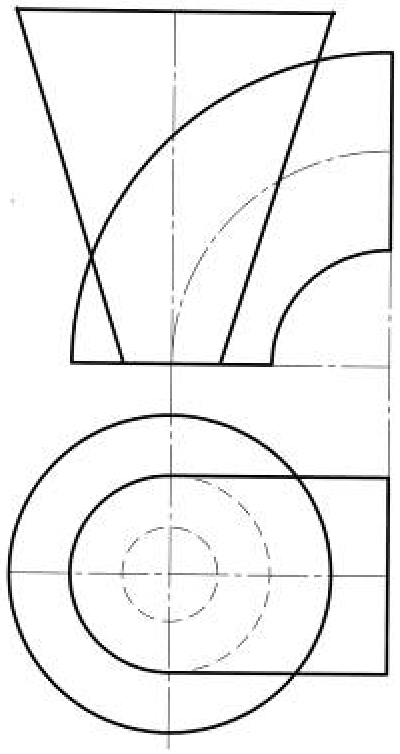
Варіант 39



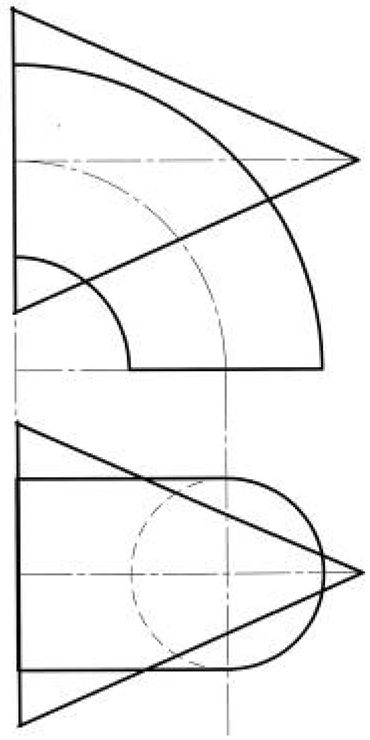
Варіант 40



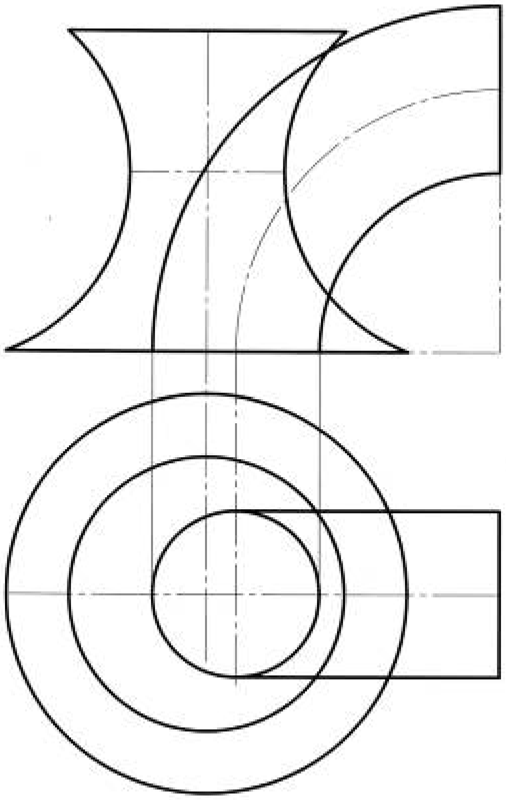
Варіант 41



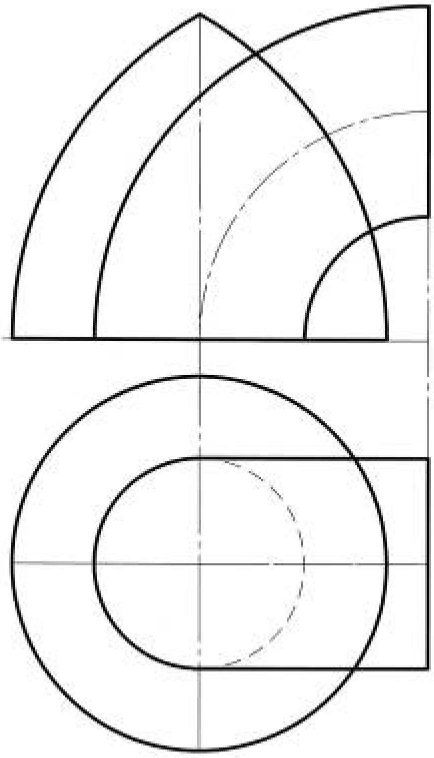
Варіант 42



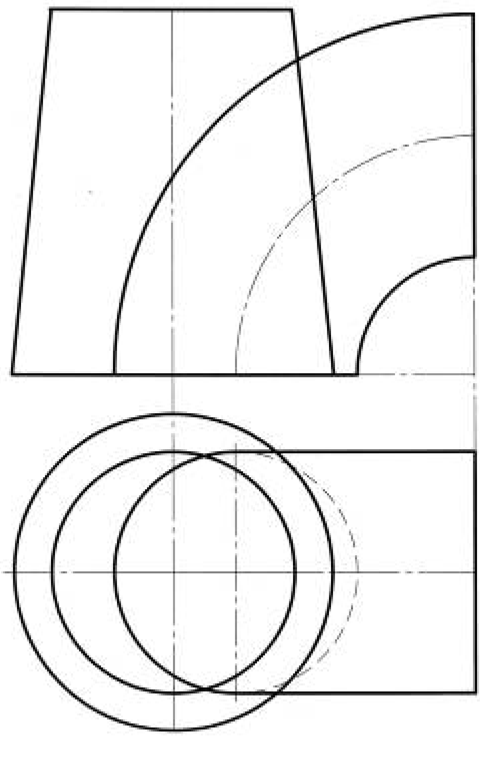
Варіант 43



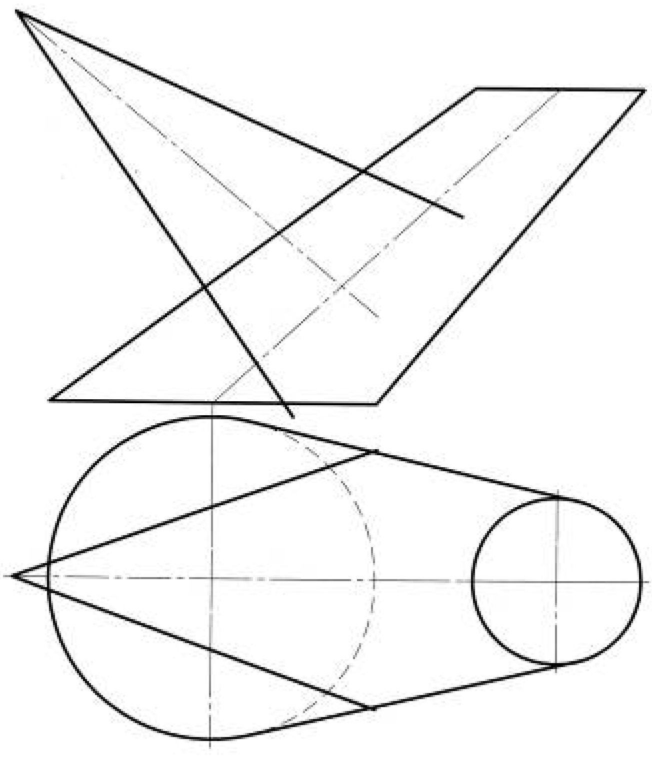
Варіант 44



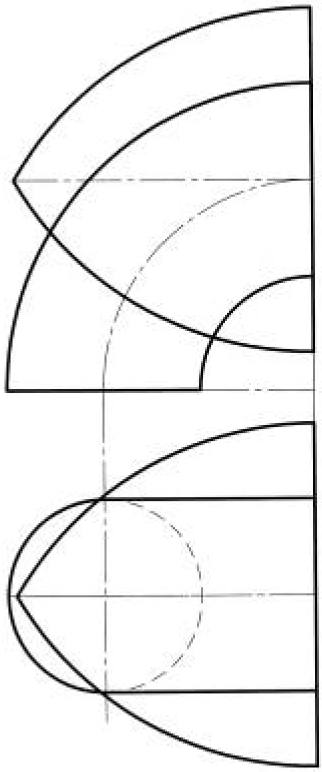
Варіант 45



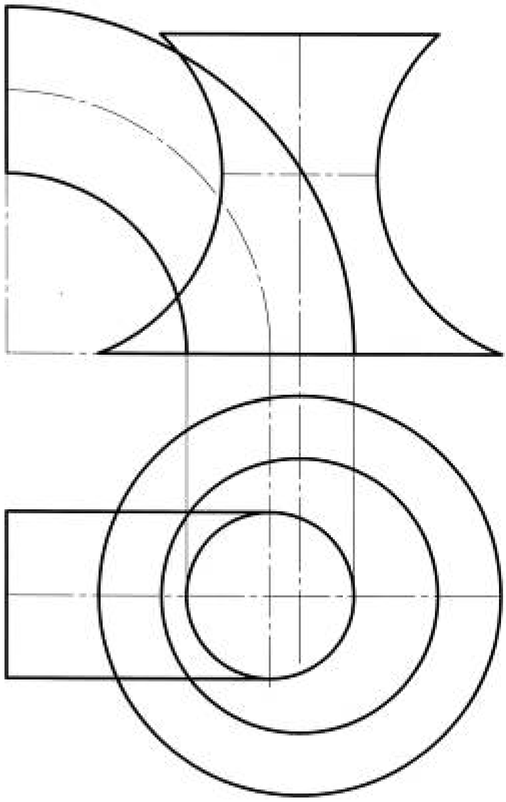
Варіант 46



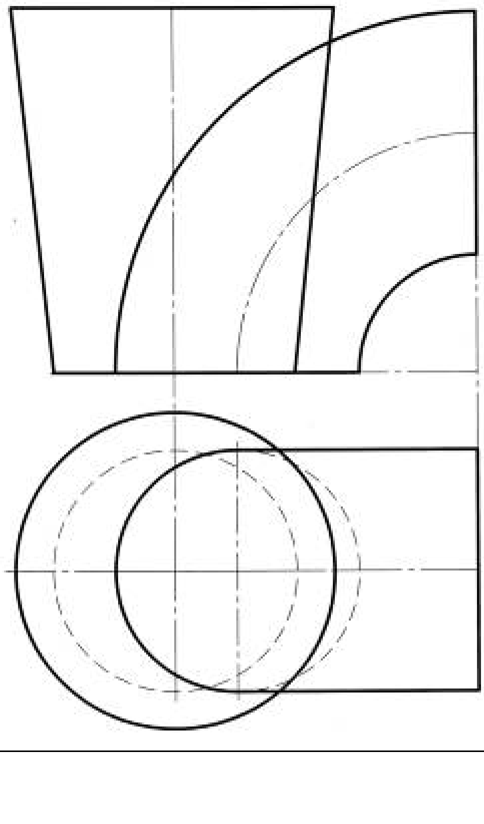
Варіант 47



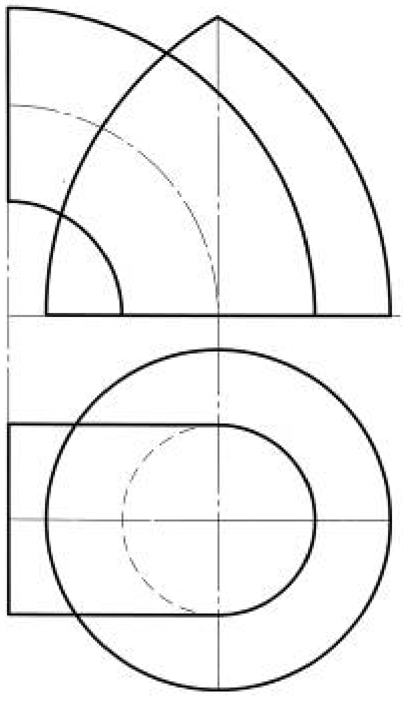
Варіант 48

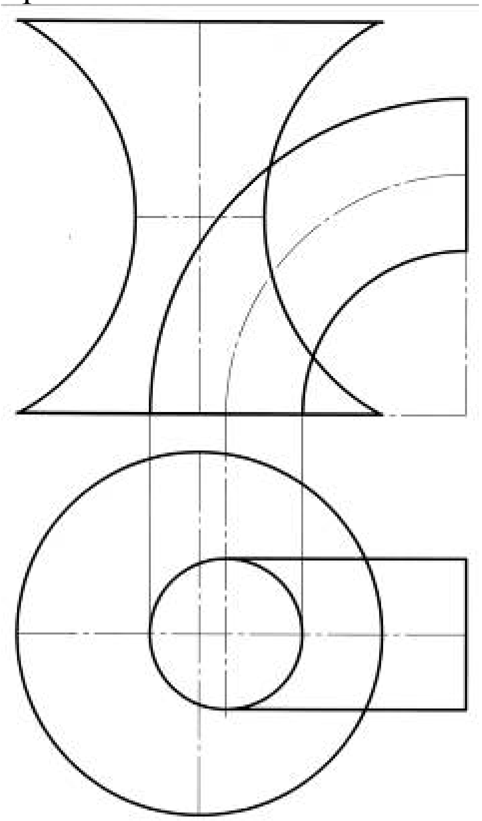
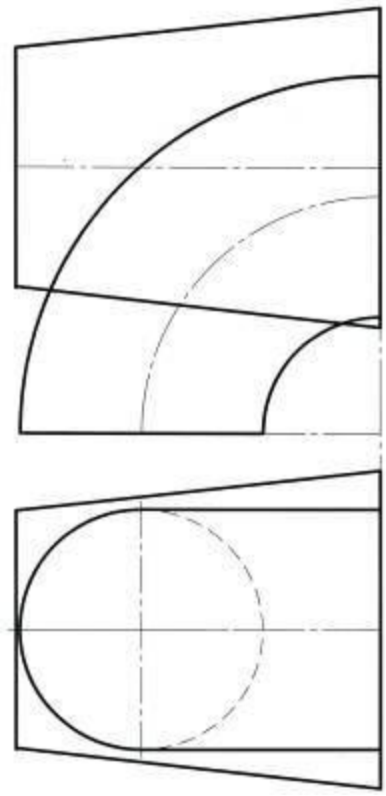
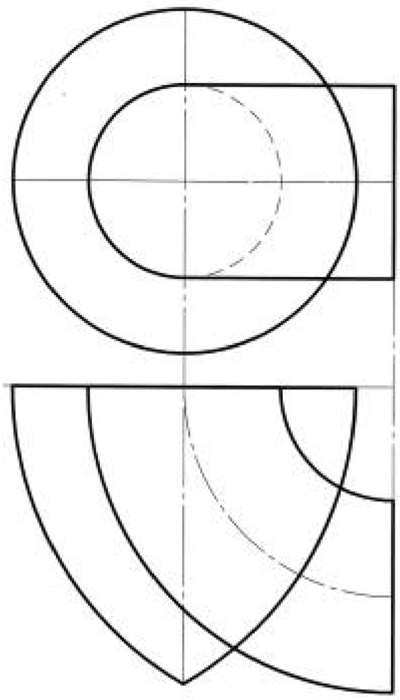
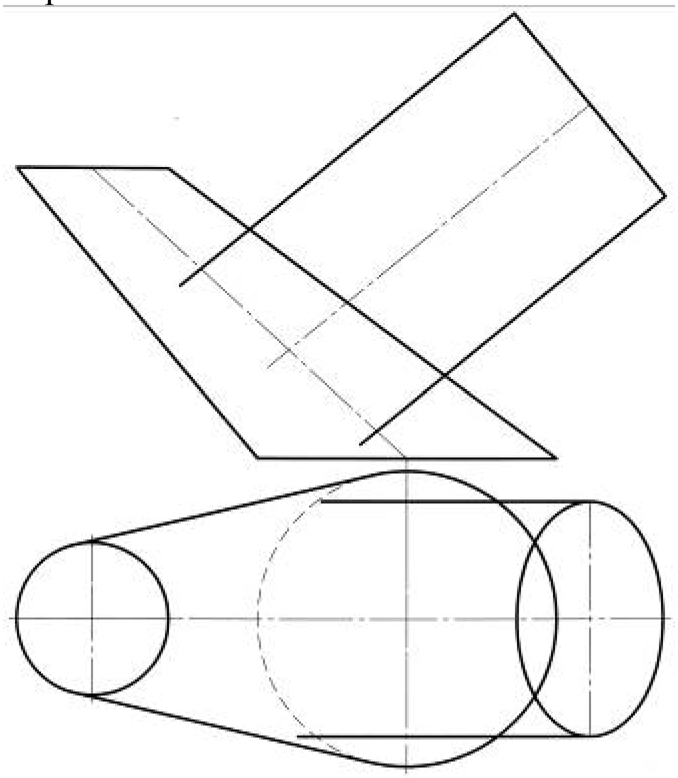


Варіант 49



Варіант 50



Варіант 51 	Варіант 52 
Варіант 53 	Варіант 54 

Додаток Ж

Тести для самоконтролю

1. Точка *A* з координатами (0;0;8) знаходиться:

а) на площині $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) на площині $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) на осі ***Ox***;
г) на осі ***Oz***.

2. Профільна площина проекції позначається:

а) $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) $\boldsymbol{\Pi_3}$;
г) $\boldsymbol{\Pi_4}$.

3. Профільною прямою називається пряма:

а) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_3}$;
б) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_3}$;
в) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_1}$;
г) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_2}$.

4. Профільно-проекціювальною прямою називається пряма:

а) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_3}$;
б) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_1}$;
г) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_2}$.

5. Фронтально-проекціювальною площиною називається площина:

а) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_2}$;
б) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_1}$;
г) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_1}$.

6. Слідом площини називається:

а) точка перетину площини з площиною проекції;
б) крива перетину площини з площиною проекцій;
в) лінія перетину площини з площиною проекцій;
г) перетин площин проекцій.

7. **Площину можна задати:**
а) трьома точками, що лежать на одній прямій;
б) двома точками;
в) двома прямими, що перетинаються;
г) прямою і точкою, що лежать на ній.

8. **Для конуса є можливі такі перерізи:**
а) коло, трикутник, еліпс, парабола, гіпербола;
б) трикутник, еліпс, квадрат;
в) коло, ромб, трапеція, парабола;
г) еліпс, квадрат, гіпербола, парабола.

9. **Якщо січна площина перетинає циліндр паралельно до основи, то в перерізі утворюється:**
а) коло;
б) прямокутник;
в) еліпс;
г) квадрат.

10. **Точка A(40;20;20) знаходиться:**
а) у просторі;
б) на площині $\boldsymbol{\Pi_1}$;
в) на площині $\boldsymbol{\Pi_2}$;
г) на площині $\boldsymbol{\Pi_3}$.

11. **Фронтальна площина проекцій позначається:**
а) $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) $\boldsymbol{\Pi_3}$;
г) $\boldsymbol{\Pi_4}$.

12. **Фронталлю називається пряма:**
а) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_3}$;
г) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_1}$.

13. **Горизонтально-проекціювальною прямою називається пряма:**
а) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_3}$;
г) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_1}$.

14. Фронтальною площиною називається площина:

а) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) паралельна до $\boldsymbol{\Pi_3}$;
г) перпендикулярна до $\boldsymbol{\Pi_1}$.

15. Площину можна задати:

а) прямою і точкою, що не лежить на прямій;
б) прямою і точкою, що лежить на прямій;
в) двома мимобіжними прямими;
г) двома точками.

16. Якщо січна площина проходить через вершину конуса, то в перерізі конуса утворюється:

а) трикутник;
б) коло;
в) еліпс;
г) квадрат.

17. Пряма належить площині, якщо вона:

а) має з нею дві спільні точки;
б) не має спільних точок;
в) паралельна до площини;
г) має одну спільну точку.

18. Метод концентричних сфер для побудови лінії взаємного перетину можна використовувати при перетині:

а) многогранників;
б) многогранника і поверхні обертання;
в) поверхонь обертання, що не мають спільної площини симетрії, й вісі яких не перетинаються;
г) поверхонь обертання, що мають спільну площину симетрії, й вісі яких перетинаються.

19. Як спрямований проекціювальний промінь в ортогональному проекціюванні по відношенню до площини проекції:

а) під кутом 90°;
б) під кутом 120°;
в) під кутом 45°;
г) під кутом 30°.

20. Точка *A* (55;60;0) знаходиться:

а) у просторі;
б) на площині $\boldsymbol{\Pi_1}$;
в) на площині $\boldsymbol{\Pi_2}$;
г) на площині $\boldsymbol{\Pi_3}$.

21. Горизонтальна площина проекцій позначається:

а) $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) $\boldsymbol{\Pi_3}$;
г) $\boldsymbol{\Pi_4}$.

22. Пряма, паралельна тільки до $\boldsymbol{\Pi_1}$ називається:

а) горизонталлю;
б) фронталлю;
в) профільною прямою;
г) прямою загального положення.

23. Горизонтальна площина є паралельною:

а) до $\boldsymbol{\Pi_1}$;
б) до $\boldsymbol{\Pi_2}$;
в) до $\boldsymbol{\Pi_3}$;
г) до $\boldsymbol{\Pi_4}$.

24. Скільки існує способів завдання площини:

а) 3;
б)4;
в) 5;
г) 6.

25. Точка належить площині якщо вона:

а) лежить на прямій, яка паралельна до цієї площини;
б) лежить на двох, що перетинаються й паралельні до цієї площини;
в) лежить на прямій, яка належить цій площині;
г) лежить на прямій, що перетинає цю площину.

26. Метод допоміжних січних площин є:

а) універсальним;
б) використовується тільки для гранних поверхонь;
в) використовується тільки для поверхонь обертання;
г) використовується коли одна з фігур-циліндр.

27. Дві прямі називаються мимобіжними якщо:
а) вони не паралельні;
б) вони не перетинаються;
в) вони не паралельні й не перетинаються;
г) вони паралельні до одної площини проекцій.

28. Якщо січна площина паралельна основи конуса, то в перерізі для конуса утворюється:
а) еліпс;
б) коло;
в) трикутник;
г) парабола.

29. Якщо проекціювальні промені виходять з однієї точки, проекціювання називається:
а) паралельне;
б) центральне;
в) ортогональне.

30. При ортогональному проекціюванні промені утворюють з площиною:
а) гострі кути;
б) прямі кути;
в) тупі кути.

31. Для визначення точки у просторі достатньо задати її проекції:
а) одну;
б) дві;
в) три.

32. Відстань від точки до фронтальної площини проекцій визначає координата:
а) ***Ox***;
б) ***Oy***;
в) ***Oz***.

33. Точка, що задана координатами *A* (12;10;0) належить:
а) горизонтальній площині;
б) фронтальній площині;
в) профільній площині;
г) осі ***Ox***;
д) осі ***Oz***;
є) лежить в просторі.

34. Яка з точок заданих координатами знаходиться в V октанті:

а) A (20;10;10);

б) B (-10;15;20);

в) C (15;-10;-10);

г) D (-10;-10;20);

д) F (-15;-20;-10).

35. Якщо дві координати точки дорівнюють нулю, то точка:

а) належить площині проекцій;

б) знаходиться у просторі;

в) належить осі проекцій;

г) співпадає з початком координат.

37. За комплексним кресленням точок (рис. Ж1) визначити яка з точок належить фронтальній площині проекцій.

а) ***A***;

б) ***B***;

в) ***C***;

г) ***D***;

д) ***F***;

е) жодна.

38. За комплексним кресленням точок (рис. Ж1) визначити яка з точок належить осі *Oy*.

а) ***A***; б) ***B***; **в)** ***C***; г) ***D***; д) ***F***

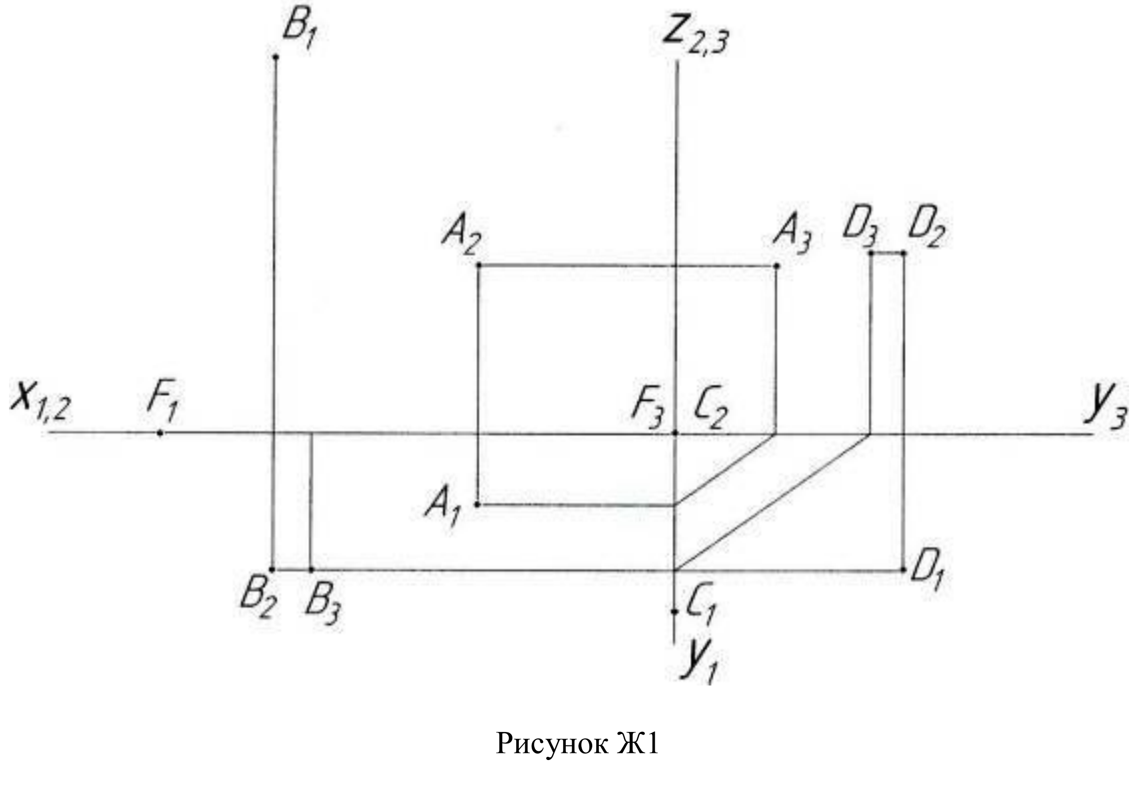


Рисунок Ж1

39. За комплексним кресленням точок (рис. Ж2) визначити яка з точок найвіддаленіша від горизонтальної площини проекцій.

а) ***A***; б) ***B***; в) ***C***; г) ***D***; д) ***F***

40. За комплексним кресленням точок (рис. Ж2) визначити яка з точок найближче розташована до профільної площини проекцій.

а) ***A***; б) ***B***; в) ***C***; г) ***D***; **д)** ***F***

41. За комплексним кресленням точок (рис. Ж2) визначити які точки рівновіддалені від фронтальної площини проекцій.

а) ***A*** і ***B***;

б) ***B*** і ***C***;

в) ***E*** і ***D***;

г) ***F*** і ***E***;

д) ***D*** і ***B***.

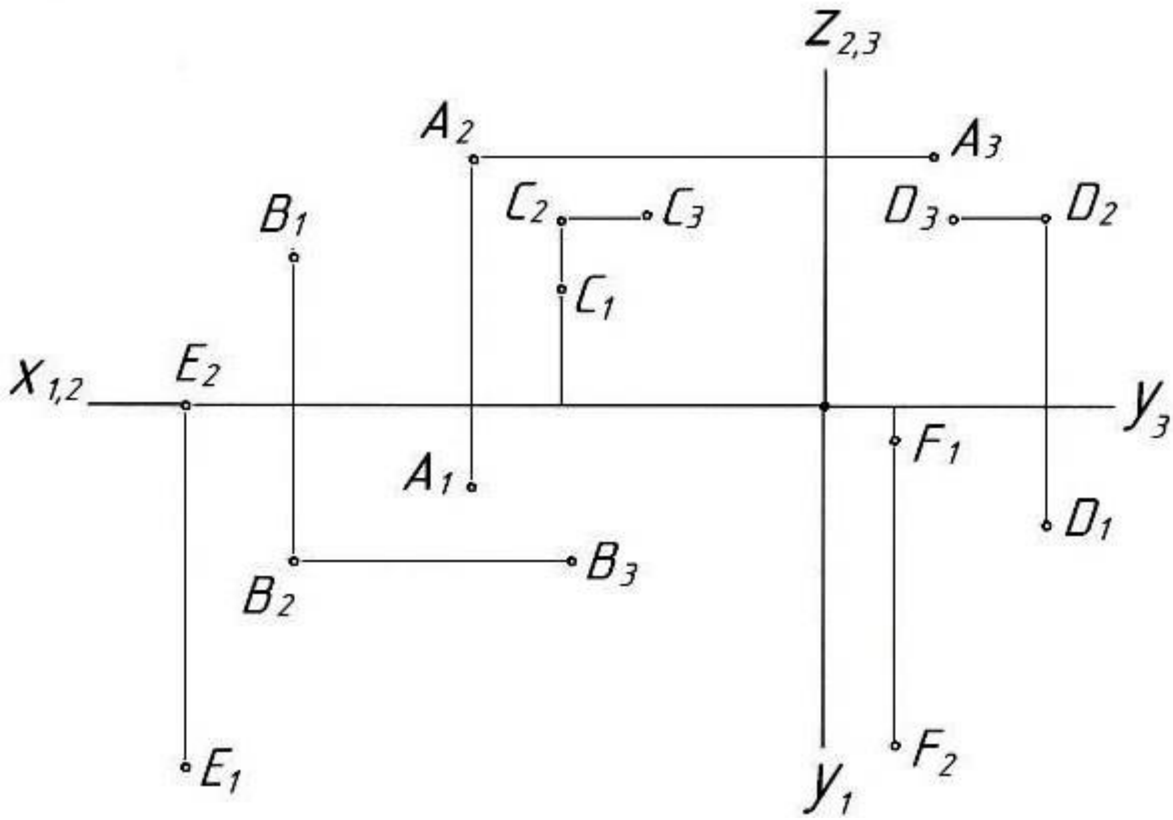


Рисунок Ж2

42. При перетині двох многогранників, лінія перетну маєхарактер:
а) ламаної лінії;
б) складається з частинок кривих 2-го порядку;
в) кривої лінії вищого порядку.

43. До часткових випадків перетину тіл обертання відноситься:
а) перетин циліндрів вісі яких перетинаються під кутом 45°;
б) перетин циліндра і конуса, вісі яких співвісні;
в) перетин конуса і піраміди;
г) перетин сфери і конуса.

44. При розв'язку задачі перетину циліндрів, в які можна вписати у спільну сферу використовують:
а) метод січних площин;
б) метод концентричних сфер;
в) метод ексцентричних сфер;
г) Метод Монжа.

45. При побудові точки зустрічі сфери і горизонталі в площину залучають проекцію прямої:
а) a_1;
б) a_2;
в) a_3.

46. Із скільки плоских фігур складається повна розгортка правильної п'ятигранної призми:
а) 7;
б) 6;
в) 8;
г) 5.

47. Яка площина утворює в перерізі багатокутник з найбільшою кількістю вершин (рис. Ж3):

а) α;

б) β;

в) γ;

г) δ.

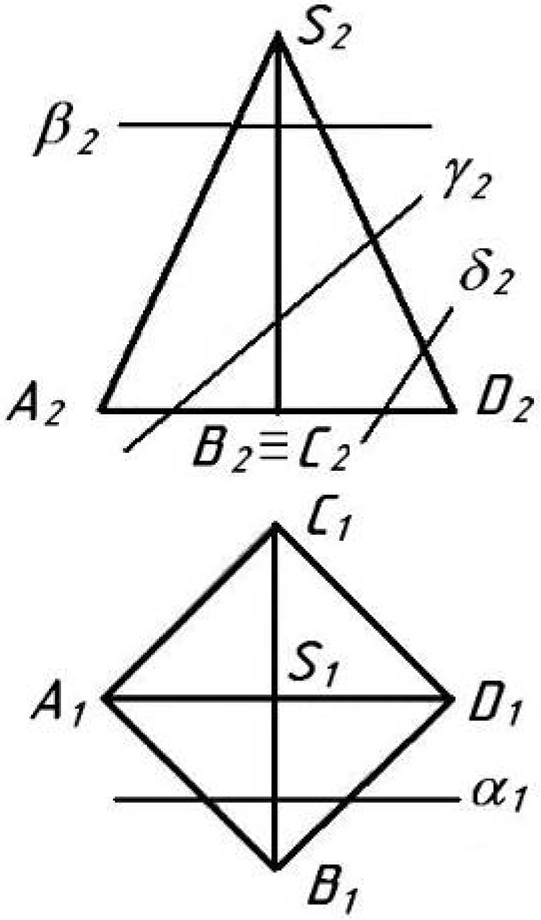


Рисунок Ж3

48. Визначником $\Phi\{\imath, m[(\imath // \imath) \cap m]\}$задається поверхня:

а) конічна;
б) циліндрична;
в) коноїд;
г) гвинтова поверхня.

49. Аксонометрія, в якій коефіцієнти спотворення по всім осям рівні називається:

а) ізометрія;
б) диметрія;
в) триметрія.

50. Коло, що паралельне до фронтальної площини проекцій, зображається без спотворень в аксонометрії:

а) прямокутній ізометрії;
б) прямокутній діаметрії;
в) косокутній фронтальній ізометрії;
г) косокутній горизонтальній ізометрії.

Навчальний посібник

Джеджула Олена Михайлівна
Кормановський Сергій Іванович

КУРС НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Редактор Романов О.М

Дизайн обкладинки

Комп'ютерна верстка

Здано у видавництво

Підписано до друку

Формат Папір офсетний

Умови друк. арк. 7. Обл.-вид. арк.

Тираж прим.

Видавництво: ВНАУ, Вінниця, - 2011