ТЕОРІЯ МАТРИЧНИХ ІГОР

Завдання: за наданими матрицями гри $[a_{ij}]_{4\times5}$ виконати:

- розрахунок нижньої та верхньої ціни гри;
- зробити висновок про наявність чистої або мішаної стратегії;
- скласти взаємодвоїсті задачі лінійного програмування згідно до матриці гри $[a_{ij}]_{4\times5}$; знайти їх розв'язок за допомогою інструменту «Поиск решений» Microsoft Excel;
- розрахувати ціну гри;
- розрахувати оптимальні стратегії для першого та другого гравця, зробити висновки.

Вариант 1

11	1	-6	-8	-7
-6	9	-10	-2	8
-1	4	-7	0	8
-9	-7	9	-1	7

Вариант 2

-2	-2	-6	5	6
-2	9	7	-7	2
-2	11	-6	4	-6
7	-8	-4	-3	8

Вариант 3

-7	6	9	7	9
-2	6	6	1	6
4	8	-1	0	2
-6	2	-1	-4	9

Вариант 4

-3	0	5	-6	8
9	9	3	-1	2
-10	3	-3	10	-9
-9	8	-2	0	1

Вариант 5

4	-3	-7	-5	-7
-4	7	-3	3	-6
10	-6	-4	2	4
6	7	-6	-1	1

Вариант 6

-10	-1	1	9	-1
-8	11	1	2	-6
-6	-10	-6	4	6
6	3	-9	7	-3

Вариант 7

-8	4	4	-5	9
7	-3	2	11	1
2	-4	7	3	1
-6	-2	1	5	6

Вариант 8

-3	9	-2	-3	1
-1	3	-3	-4	6
3	-4	4	-3	3
1	9	-8	7	-9

Вариант 9

-9	9	7	-10	-4
3	-7	6	0	-3
-1	7	10	1	-9
6	3	11	-1	7

Вариант 10

11	-8	3	-5	7
-10	3	-3	-5	-2
9	4	10	10	4
-7	10	8	9	9

Вариант 11

10	6	8	6	-8
3	9	7	4	6
-6	10	2	1	6
-6	6	-9	3	0

Вариант 12

6	7	1	10	7
8	3	-3	-1	5
0	5	-5	-9	9
-1	-3	4	-3	-10

Вариант 13

8	5	-9	-4	2
8	-1	-3	-6	-7
0	9	-9	2	3
0	-9	2	10	-2

Вариант 14

-3	9	3	1	8
2	-1	-2	9	-10
10	2	10	10	10
2	0	-6	-9	6

Вариант 15

-7	-1	7	-2	-1
-1	1	-3	-6	2
-1	-9	-4	4	-3
-3	7	-1	8	10

Вариант 16

4	9	-8	-6	4
4	-5	1	-9	-3
4	6	-6	-8	7
-7	1	-5	-6	5

Вариант 17

0	3	-7	10	5
-7	5	-4	-6	3
4	-3	4	7	5
7	11	4	2	7

Вариант 18

6	-4	3	-2	-4
4	9	2	5	3
-4	-6	4	-3	10
-2	-9	8	-10	11

Вариант 19

-9	-9	9	-1	-3
2	7	5	-9	7
6	-5	-6	-10	0
2	-6	8	8	-9

Вариант 20

0	2	11	10	-6
-9	-3	2	-7	-5
8	4	8	2	9
-6	0	-1	7	-9

Вариант 21

-3	0	2	-8	11
6	-1	-4	-8	-2
-8	-1	6	-9	6
-9	6	1	-6	10

Вариант 22

-5	7	4	3	2
7	-1	4	3	-4
-3	6	7	-2	3
6	4	-8	7	10

Вариант 23

6	9	7	6	-9
2	9	7	-9	3
9	8	-7	6	-7
6	-9	-5	-2	-7

Вариант 24

-10	-6	0	5	8
3	3	-5	-7	-3
-5	0	9	-8	7
8	-3	-1	-9	-6

Вариант 25

11	1	1	10	4
-4	10	-2	8	-6
-2	6	-4	-5	-10
6	-5	8	-6	5

Вариант 26

4	10	3	8	-1
-7	-9	10	9	6
-1	-5	1	4	7
9	6	-1	10	1

Вариант 27

-2	-1	-10	-6	5
7	-3	-5	-4	-8
-6	4	-3	8	6
4	-9	-8	-9	-8

Вариант 28

-1	3	-1	11	8
-5	-7	2	6	-3
1	1	-5	11	4
4	5	-2	-1	5

Вариант 29

-2	-3	7	9	8
-9	2	-2	6	9
8	1	2	3	2
5	-1	-1	-7	6

Вариант 30

-10	2	-7	-3	1
2	2	8	5	0
5	-7	-7	2	6
6	-9	7	-1	2

ПРИКЛАД. Нехай у грі беруть участь дві сторонм А і В. Умови гри задаються матрицею виграшів (платіжною матрицею

A		B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	Y_1	-8	3	-7	1	-3
A_2	Y_2	2	2	6	0	2
A_3	Y_3	4	-7	-7	6	3
A_4	Y_4	5	-4	4	1	-3

Якщо елемент матриці гри додатній, то його значення відповідає виграшу сторони А, якщо від'ємне, то його абсолютне значення дорівнює виграшу сторони В.

Якщо виграш сторони А дорівнює програшу сторони В, то така гра називається **грою з нульовою сумою**.

Стратегію, яку обирає сторона А будемо позначати A_1, A_2, A_3, A_4, а стратегію сторони В символами B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Ймовірність використання відповідної стратегії гравцем А позначимо Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , а гравцем В - X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Змішаною стратегією гравця А, відповідно, гравця В, називаються вектори

$\overline{Y}=(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$, $\overline{X}=(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$,

для яких

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 1,\ \sum_{i=1}^{5} X_i = 1,\ Y_i \ge 0\ (i=\overline{1,4}),\quad X_j \ge 0\ (j=\overline{1,5}). \tag{1}$$

Цілі гравців: А намагається забезпечити собі максимальний виграш, а В намагається зробити свій програш мінімальним за рахунок обрання відповідної стратегії. Таким чином, цілі гравців А і В є протилежними. Розв'язання задачі полягає у тому, щоб знайти найкращі (оптимальні) стратегії сторін, а також очікуваний середній результат (виграш). Вважаємо, що гравці діють без зайвого ризику і використовують *мінімаксну та максимінну стратегії*. А саме: гравці обирають таку з альтернатив стратегій, песимістична оцінка якої найкраща.

Гравець А використовує принцип максиміна: для кожної стратегії обирається найгірший для А (мінімальний) виграш, і серед них вибирається гарантований максимальний виграш – **нижня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим максимальним виграшем, а гарантованим найбільшим виграшем серед мінімальних виграшів.

Гравець В використовує принцип мінмакса: для кожної стратегії обирається найгірший для А (максимальний) програш, і серед них вибирається гарантований найменший програш – **верхня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим мінімальним програшем, а гарантованим найменшим програшем серед максимальних програшів.

A		B					
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Мінімум рядків
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
A_1	Y_1	-8	3	-7	1	-3	-8
A_2	Y_2	2	2	6	0	2	0^*
A_3	Y_3	4	-7	-7	6	3	-7
A_4	Y_4	5	-4	4	1	-3	-4
Максимум стовпчиків		5	2^*	6	6	3	

Нижня ціна гри у даному випадку дорівнює 0, а верхня - 2.

У тих випадках, коли верхня і нижня ціни гри співпадають, гра є грою з сідловидною точкою. У такому випадку стратегії, що відповідають цим цінам, є єдиним можливим способом дій двох гравців, що відповідають розв'язку задачі в чистих стратегіях.

У даному прикладі сідловидної точки не існує, тому для розв'язання задачі використовується *змішана стратегія*, яка пов'язана з випадковим обранням гравцями на кожному ході однієї стратегії серед кількох чистих стратегій.

У випадку гри з нульовою сумою середня величина виграшу (програшу) – математичне сподівання, є функцією від змішаних стратегій $\overline{Y}=(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\overline{X}=(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$:

$$S(\overline{Y},\overline{X}) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} a_{ij} Y_i X_j .$$

Функція $S(\overline{Y},\overline{X})$ називається **платіжною функцією гри з матрицею** $[a_{ij}]_{4\times 5}$. Стратегії $\overline{Y}^* = \left(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\right)$ і $\overline{X}^* = \left(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*\right)$ називаються оптимальними, якщо для довільних стратегій $\overline{Y}=(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\overline{X}=(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ виконуються умови

$$S(\overline{Y},\overline{X}^*) \le S(\overline{Y}^*,\overline{X}^*) \le S(\overline{Y}^*,\overline{X})$$

Це означає, що використання в грі оптимальних змішаних стратегій $\overline{Y}^* = \left(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\right)$ і $\overline{X}^* = \left(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*\right)$ забезпечує гравцеві А виграш не менший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{Y}=(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$; другому гравцеві – програш не більший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{X}=(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає **ціну гри С**, тобто

$$S(\overline{Y}^*,\overline{X}^*) = C.$$

Застосуємо теореми теорії матричних ігор, отримаємо, що для того, щоб значення C було ціною гри, а $\overline{Y}^* = \left(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\right)$ і $\overline{X}^* = \left(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*\right)$ - оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} Y_i^* \ge C \ (j = \overline{1,5}) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij} X_j^* \le C \ (i = \overline{1,4}) \tag{3}$$

Для подальшого розв'язування потрібно, щоб C>0. Це завжди можна мати завдяки тому, що додавання до всіх елементів матриці виграшів одного і того ж постійного числа d не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на d.

Тепер після зазначених припущень можна обидві частини (2) і (3) поділити на C і увести позначення

$$y_i = Y_i / C, \quad x_j = X_j / C,$$

змінивши відповідним чином рівності (1)

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^* = 1/C, \ \sum_{i=1}^{5} x_i^* = 1/C,$$

отримати пару двоїстих задач лінійного програмування:

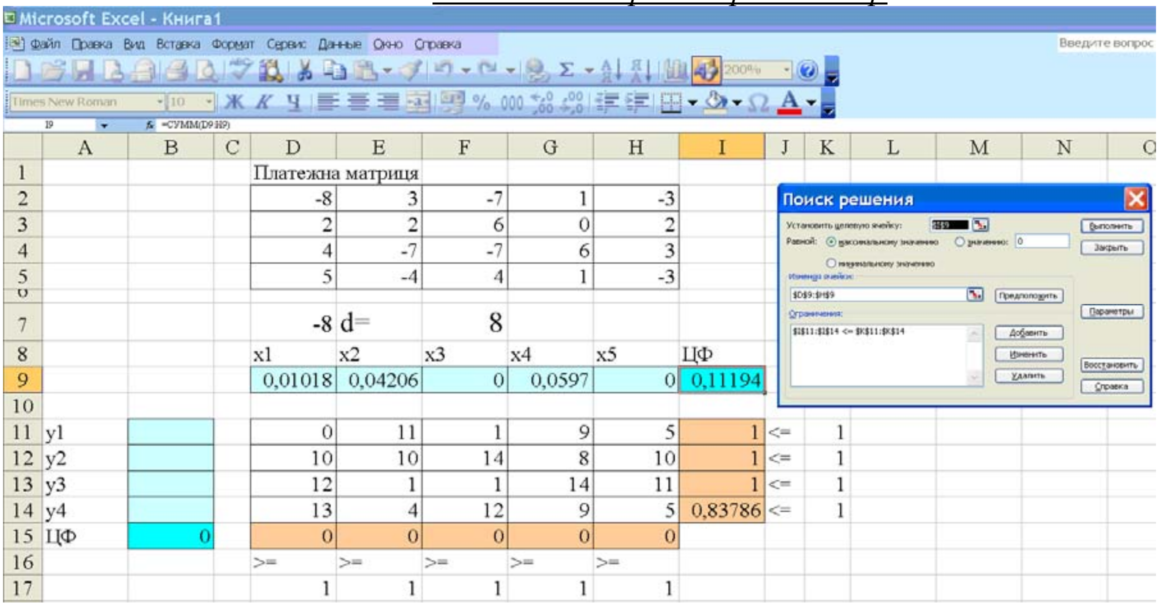
$f = \sum_{i=1}^{4} y_i \to \min$	$F = \sum_{i=1}^{5} x_i \to \max$
$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} y_i \ge 1 \ (j = \overline{1,5}), \quad y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,4})$	$\sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j \le C \ (i = \overline{1,4}), \quad x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,5})$

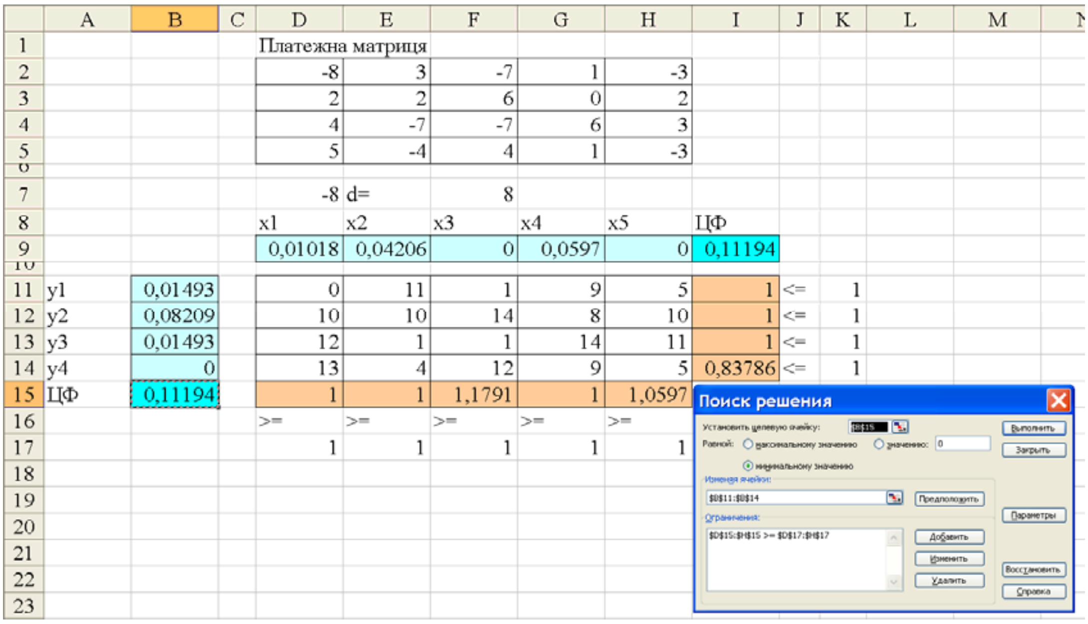
Алгоритм розв'язання задачі теорії матричних ігор

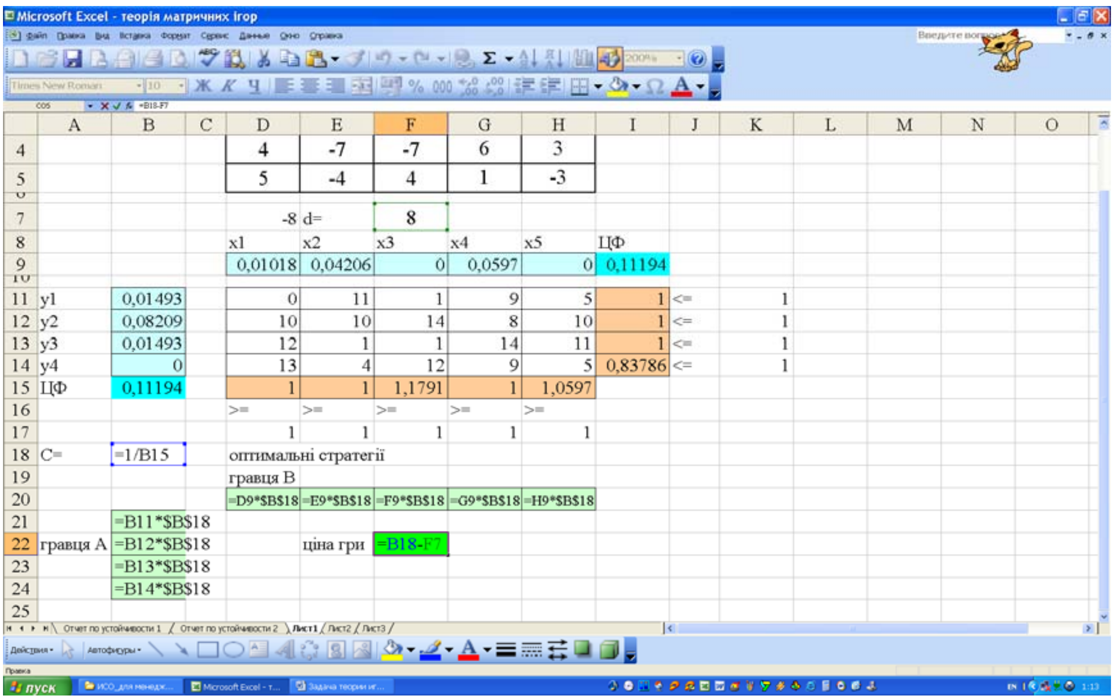
1) знаходимо верхню та нижню ціни гри і робимо висновок про розв'язання задачі у чистих чи мішаних стратегіях (у даному випадку задача розв'язується у мішаних стратегіях);
2) якщо серед елементів матриці є від'ємні, то для того, щоб ціна гри була додатною, знаходимо модуль мінімального елементу матриці, позначивши його через d (у даному випадку $d = 8$); додаємо його до всіх елементів матриці;
3) розв'язуємо пару двоїстих задач лінійного програмування;
4) знаходимо значення C за формулою
   $$C = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{4} y_i^* \ \text{ або } \ C = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{5} x_i^*;$$
5) визначаємо стратегії гравців:
   гравця A: $Y_i^* = y_i^* \cdot C \quad (i = \overline{1,4})$ гравця B: $X_j^* = x_j^* \cdot C \quad (j = \overline{1,5})$,
6) робимо висновок з врахуванням пункту 2 алгоритму, що ціна гри дорівнює $C - d$.

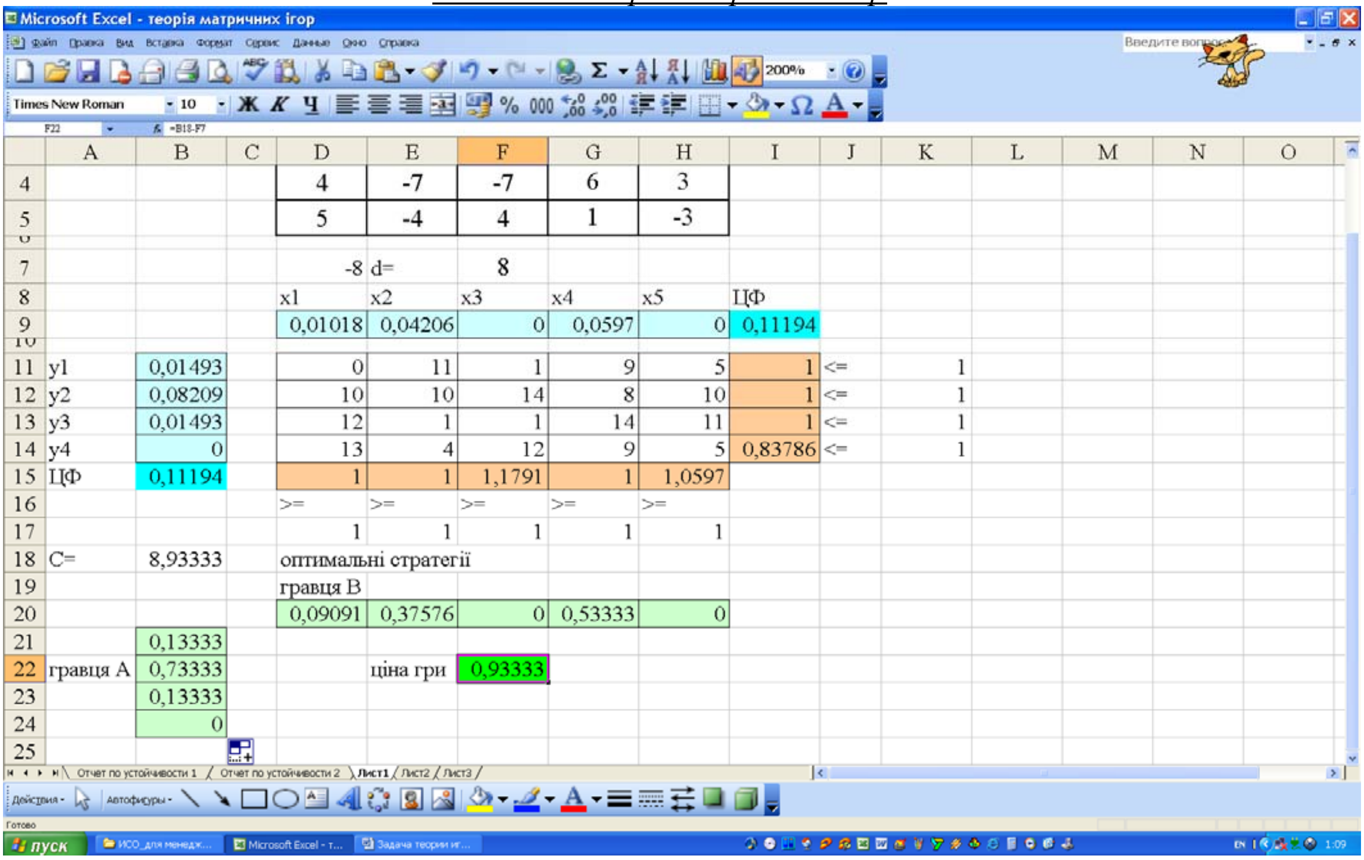
Зразок розв'язання задачі матричних ігор за допомогою інструменту «Поиск решений» Microsoft Excel наведено на послідовності наступних рисунків.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				Платежна матриця							
2				-8	3	-7	1	-3			
3				2	2	6	0	2			
4				4	-7	-7	6	3			
5				5	-4	4	1	-3			
6											
7				=МИН(D2:H5)	d=	8					
8				x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ		
9									=СУММ(D9:H9)		
10											
11	y1			=D2+$F$7	=E2+$F$7	=F2+$F$7	=G2+$F$7	=H2+$F$7	=СУММПРОИЗВ($D$9:$H$9;D11:H11)	<=	1
12	y2			=D3+$F$7	=E3+$F$7	=F3+$F$7	=G3+$F$7	=H3+$F$7	=СУММПРОИЗВ($D$9:$H$9;D12:H12)	<=	1
13	y3			=D4+$F$7	=E4+$F$7	=F4+$F$7	=G4+$F$7	=H4+$F$7	=СУММПРОИЗВ($D$9:$H$9;D13:H13)	<=	1
14	y4			=D5+$F$7	=E5+$F$7	=F5+$F$7	=G5+$F$7	=H5+$F$7	=СУММПРОИЗВ($D$9:$H$9;D14:H14)	<=	1
15	ЦФ	=СУММ(B11:B14)		=СУММПРОИЗВ($B$11:$B$14;D11:D14)	=СУММПРОИЗВ($B$11:$B$14;E11:E14)	=СУММПРОИЗВ($B$11:$B$14;F11:F14)	=СУММПРОИЗВ($B$11:$B$14;G11:G14)	=СУММПРОИЗВ($B$11:$B$14;H11:H14)			
16				>=	>=	>=	>=	>=			
17				1	1	1	1	1			


Microsoft Excel - Книга1
Платежна матриця
-8 3 -7 1 -3
2 2 6 0 2
4 -7 -7 6 3
5 -4 4 1 -3
-8 d= 8
x1 x2 x3 x4 x5 ЦФ
0,01018 0,04206 0 0,0597 0 0,11194
y1 0 11 1 9 5 1 <= 1
y2 10 10 14 8 10 1 <= 1
y3 12 1 1 14 11 1 <= 1
y4 13 4 12 9 5 0,83786 <= 1
ЦФ 0 0 0 0 0 0
>= >= >= >= >=
1 1 1 1 1
Поиск решения


Платежна матриця
-8 3 -7 1 -3
2 2 6 0 2
4 -7 -7 6 3
5 -4 4 1 -3
-8 d= 8
x1 x2 x3 x4 x5 ЦФ
0,01018 0,04206 0 0,0597 0 0,11194
y1 0,01493 0 11 1 9 5 1 <= 1
y2 0,08209 10 10 14 8 10 1 <= 1
y3 0,01493 12 1 1 14 11 1 <= 1
y4 0 13 4 12 9 5 0,83786 <= 1
ЦФ 0,11194 1 1 1,1791 1 1,0597
>= >= >= >= >=
1 1 1 1 1
Поиск решения


Microsoft Excel - теорія матричних ігор
4 -7 -7 6 3
5 -4 4 1 -3
-8 d= 8
x1 x2 x3 x4 x5 ЦФ
0,01018 0,04206 0 0,0597 0 0,11194
y1 0,01493 0 11 1 9 5 1 <= 1
y2 0,08209 10 10 14 8 10 1 <= 1
y3 0,01493 12 1 1 14 11 1 <= 1
y4 0 13 4 12 9 5 0,83786 <= 1
ЦФ 0,11194 1 1 1,1791 1 1,0597
>= >= >= >= >=
1 1 1 1 1
C= =1/B15 оптимальні стратегії
гравця B
=D9*$B$18 =E9*$B$18 =F9*$B$18 =G9*$B$18 =H9*$B$18
=B11*$B$18
гравця A =B12*$B$18 ціна гри =B18-F7
=B13*$B$18
=B14*$B$18



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
4				4	-7	-7	6	3			
5				5	-4	4	1	-3			
7				-8	d=	8					
8				x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ		
9				0,01018	0,04206	0	0,0597	0	0,11194		
11	y1	0,01493		0	11	1	9	5	1	<=	1
12	y2	0,08209		10	10	14	8	10	1	<=	1
13	y3	0,01493		12	1	1	14	11	1	<=	1
14	y4	0		13	4	12	9	5	0,83786	<=	1
15	ЦФ	0,11194		1	1	1,1791	1	1,0597			
16				>=	>=	>=	>=	>=			
17				1	1	1	1	1			
18	C=	8,93333		оптимальні стратегії							
19				гравця В							
20				0,09091	0,37576	0	0,53333	0			
21		0,13333									
22	гравця А	0,73333			ціна гри	0,93333					
23		0,13333									
24		0									
25											

ВІДПОВІДЬ: оптимальна мішана стратегія гравця А включає стратегії A_1, A_2, А, які застосовується гравцем А з ймовірностями Y_1=0,13333, Y_2=0,73333, Y_3=0,13333, а мішана стратегія гравця В включає стратегії B_1, B_2, B_4 з ймовірностями X_1=0,09091, X_2=0,37576, X_4=0,53333. При цьому ціна гри складатиме 0,93333. Це означає, що гравець А виграє 0,93333 у.о., а гравець В – програє 0,93333 у.о.

ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учебник для Втузов / Ред. Зарубин В.С., Крищенко В.П. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 435 с.
2. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование. – Мн.: Выш. Шк., 2001. -351 с.
3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. = Сьоме видання, перероблене та доповнене. – К.: Видавн. Дім «Слово», 2006. – 816с.
4. Катренко А.В. Дослідження операцій / За наук. Ред.. В.В.Пасчника. 2=е видання, виправлене та доповнене. – Львів: «Магнолія 2006», 2007. – 480с.

Додаткова література

5. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій; Навчальний посібник. – 2-е видання, виправлене. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с.
6. Таха Х. Введение в исследование операций: В двух книгах. Кн. 2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 496с., ил.
7. Вентцель Е.С. Исследование операций. Т. III. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
8. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів / Харк. нац. аграр. ун-т ім. В.В. Докучаєва. – Харків: Гриф, 2002. – 580с.
9. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. – 272 с.
10. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир,1971. – 230 с.

Перелік навчально-методичних матеріалів

11. Математическое программирование. Конспект лекций для студентов экономических специальностей дневного и заочного отделений / Глущевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 150с.
12. Методы исследования операций. Методические указания к выполнению практических и лабораторных заданий (тема: «Решение задач линейного программирования с использованием Microsoft Excel for Windows») для студентов ЗГИА экономических специальностей дневного и заочного отделений / Сост. Глущевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 42с.