

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кафедра математичного аналізу

ЗАТВЕРДЖУЮ

Декан
Математичного факультету
_____ С.І. Гоменюк
“ _____ ” _____ 20__ р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ»

напрямок підготовки 6.040201 – «Математика»
спеціалізація «Математичний аналіз»
математичний факультет

2016 – 2017 навчальний рік

Робоча програма «Основи векторного і тензорного аналізу» для студентів за напрямом підготовки 6.040201 - «Математика», 2016 р.- 12 с.

Розробники: ст. викладач Ю.М. Стреляєв

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол від “28” серпня 2016 року № 1

Завідувач кафедри _____ С.М. Гребенюк

“ _____ ” _____ 20__ року

Схвалено науково-методичною радою математичного факультету

Протокол від “ _____ ” _____ 2016 року № _____

Голова _____ П.Г.Стеганцева

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	заочна форма навчання
Кількість кредитів – 2,5	Галузь знань 0402 –«Фізико-математичні науки»	За вибором	
	Напрям підготовки 6.040201 – «Математика»		
Модулів – 2		Рік підготовки:	
Змістових модулів – 2		4-й	-
Індивідуальне науково-дослідне завдання <i>комплексне практичне завдання</i>		Семестр	
Загальна кількість годин – 90		7-й	-
		Лекції	
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 1,5 самостійної роботи студента – 2	Рівень вищої освіти бакалаврський	16 год.	-
		Практичні заняття	
		14 год.	-
		Самостійна робота	
		60 год.	-
		Вид контролю:	
	Залік	-	

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить:
для денної форми навчання – 1:2;

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: систематичне викладення основ векторного і тензорного аналізу.

Завдання:

- ознайомити студентів з основними поняттями та методами векторного і тензорного аналізу, необхідними для застосування у ряді галузей знань.
- забезпечити засвоєння основних теоретичних відомостей і набуття практичних вмінь і навичок розв'язування основних типів задач;
- формувати навички самостійної роботи над матеріалом.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- основні поняття векторної алгебри;
- означення тензора;
- закон перетворення компонент тензора;
- елементи простору в криволінійних координатах;
- основи тензорної алгебри;
- основні характеристики скалярних і векторних полів;
- інтегральні теореми векторного аналізу;
- спеціальні види векторних полів;
- правила коваріантного диференціювання тензора другого рангу.

вміти:

- знаходити контраваріантні і коваріантні компоненти вектора;
- знаходити компоненти тензора в новому базисі;
- виконувати основні операції над тензорами;
- виконувати диференціальні операції в ортогональних системах координат;
- знаходити основні характеристики скалярних і векторних полів;
- користуватись інтегральними теоремами векторного аналізу;
- знаходити скалярний потенціал потенціального поля;
- знаходити векторний потенціал соленоїдального поля;
- знаходити потік тензорного поля;
- знаходити похідну тензорного поля за напрямом;
- виконувати коваріантне диференціювання тензора другого рангу.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Векторна і тензорна алгебра.

Тема 1. Основні елементи векторної алгебри.

Основні операції над векторами та їх властивості. Лінійна залежність векторів. Векторний базис. Розклад вектора за базисними векторами. Поняття ортонормованого базису. Взаємні базиси та їх властивості. Контраваріантні і коваріантні компоненти вектора. Закон перетворення компонент вектора як основа аналітичного визначення вектора. Зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами вектора. Метричний тензор та його властивості. Ортогональні базиси. Прямокутна декартова система координат.

Тема 2. Поняття тензора. Закон перетворення компонент тензора. Приклади тензорів. Властивості тензорів.

Часткові випадки тензорів у тривимірному просторі. Скаляр і вектор як тензори нульового і першого рангу. Означення тензора в загальному випадку. Закон перетворення компонент тензора. Розклад тензора за векторами. Фізичні компоненти тензора. Тензор напружень та тензор моментів інерції як фізичні приклади тензорів другого рангу. Метричний тензор.

Тема 3. Криволінійні координати. Ортогональні системи координат.

Радіус-вектор точки. Способи завдання координат у просторі. Координатні поверхні та координатні лінії. Поняття криволінійних координат. Локальний базис криволінійної системи координат. Елементи простору в криволінійних координатах. Ортогональні системи координат. Коефіцієнти Ламе та їх геометричний зміст. Циліндрична та сферична системи координат як приклади ортогональних криволінійних систем координат.

Тема 4. Операції над тензорами. Головні осі тензора. Інваріанти тензора.

Визначення операцій додавання, множення, згортки, симетрування та альтернування тензорів. Головні осі та інваріанти тензора другого рангу. Приведення тензора до головних осей. Шаровий тензор і девіатор тензора другого рангу.

Змістовий модуль 2. Векторний і тензорний аналіз.

Тема 5. Тензорні поля. Скалярні і векторні поля та їх характеристики.

Поняття тензорного поля. Стаціонарні і нестаціонарні тензорні поля. Фізичні та геометричні приклади тензорних полів. Тензор-функція скалярного аргументу та її похідна. Скалярні поля та їх характеристики. Поверхні рівня скалярного поля. Градієнт скалярного поля в точці. Властивості градієнта. Векторні поля та їх характеристики. Потік, дивергенція, циркуляція та ротор векторного поля.

Тема 6. Інтегральні теореми векторного аналізу. Диференціальні операції першого і другого порядку. Дії з оператором «набла».

Теореми Остроградського та Стокса у векторному вигляді. Диференціальні операції першого і другого порядків. Оператор Лапласа і гармонічні функції. Оператор Гамільтона набла та його властивості. Застосування оператору набла до добутків скалярних і векторних полів.

Тема 7. Спеціальні види векторних полів.

Потенціальне векторне поле. Критерій потенціальності векторного поля. Визначення скалярного потенціалу поля. Фізичні приклади потенціальних полів. Соленоїдальне векторне поле. Критерій соленоїдальності. Визначення векторного потенціалу поля. Лапласове векторне поле. Критерій гармонічності поля. Основна теорема векторного аналізу.

Тема 8. Елементи тензорного аналізу. Коваріантне диференціювання тензорів.

Поле тензора другого рангу. Потік тензорного поля. Приклади обчислення потоку тензорного поля. Похідна тензорного поля в точці за напрямом. Коваріантне диференціювання тензора другого рангу. Символи Кристофеля.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Змістовий модуль 1. Векторна і тензорна алгебра.												
<i>Тема 1. Основні елементи векторної алгебри.</i>	11	2	1			8						
<i>Тема 2. Поняття тензора. Закон перетворення компонент тензора. Приклади тензорів. Властивості тензорів.</i>	12	2	2			8						
<i>Тема 3. Криволінійні координати. Ортогональні системи координат.</i>	12	2	2			8						
<i>Тема 4. Операції над тензорами.</i>	12	2	2			8						

<i>Головні осі тензора. Інваріанти тензора.</i>												
Разом за змістовим модулем 1	47	8	7			32						
Змістовий модуль 2. Векторний і тензорний аналіз.												
<i>Тема 5. Тензорні поля. Скалярні і векторні поля та їх характеристики.</i>	12	2	2			8						
<i>Тема 6. Інтегральні теореми векторного аналізу. Диференціальні операції першого і другого порядку. Дії з оператором «набла».</i>	9	2	1			6						
<i>Тема 7. Спеціальні види векторних полів.</i>	12	2	2			8						
<i>Тема 8. Елементи тензорного аналізу. Коваріантне диференціювання тензорів.</i>	10	2	2			6						
Разом за змістовим модулем 2	43	8	7			28						
Усього годин	90	16	14			60						

5. Теми лекційних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна форма	заочна форма
1	<i>Тема 1. Основні елементи векторної алгебри.</i>	2	
2	<i>Тема 2. Поняття тензора. Закон перетворення компонент тензора. Приклади тензорів. Властивості тензорів.</i>	2	
3	<i>Тема 3. Криволінійні координати. Ортогональні системи координат.</i>	2	
4	<i>Тема 4. Операції над тензорами. Головні осі тензора. Інваріанти тензора.</i>	2	
5	<i>Тема 5. Тензорні поля. Скалярні і векторні поля та їх характеристики.</i>	2	
6	<i>Тема 6. Інтегральні теореми векторного аналізу. Диференціальні операції першого і другого порядку. Дії з оператором «набла».</i>	2	
7	<i>Тема 7. Спеціальні види векторних полів.</i>	2	
8	<i>Тема 8. Елементи тензорного аналізу. Коваріантне диференціювання тензорів.</i>	2	
	Разом	16	

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна форма	заочна форма
1	<i>Тема 1. Основні елементи векторної алгебри.</i>	1	
2	<i>Тема 2. Поняття тензора. Закон перетворення компонент тензора. Приклади тензорів. Властивості тензорів.</i>	2	
3	<i>Тема 3. Криволінійні координати. Ортогональні системи координат.</i>	2	
4	<i>Тема 4. Операції над тензорами. Головні осі тензора. Інваріанти тензора.</i>	2	
5	<i>Тема 5. Тензорні поля. Скалярні і векторні поля та їх характеристики.</i>	2	
6	<i>Тема 6. Інтегральні теореми векторного аналізу. Диференціальні операції першого і другого порядку. Дії з оператором «набла».</i>	1	

7	Тема 7. Спеціальні види векторних полів.	2	
8	Тема 8. Елементи тензорного аналізу. Коваріантне диференціювання тензорів.	2	
	Разом	14	

7. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна форма	заочна форма
1	Тема 1. Основні елементи векторної алгебри.	8	
2	Тема 2. Поняття тензора. Закон перетворення компонент тензора. Приклади тензорів. Властивості тензорів.	8	
3	Тема 3. Криволінійні координати. Ортогональні системи координат.	8	
4	Тема 4. Операції над тензорами. Головні осі тензора. Інваріанти тензора.	8	
5	Тема 5. Тензорні поля. Скалярні і векторні поля та їх характеристики.	8	
6	Тема 6. Інтегральні теореми векторного аналізу. Диференціальні операції першого і другого порядку. Дії з оператором «набла».	6	
7	Тема 7. Спеціальні види векторних полів.	8	
8	Тема 8. Елементи тензорного аналізу. Коваріантне диференціювання тензорів.	6	
	Разом	60	

8. Завдання для самостійної роботи

Комплексне практичне завдання.

1. Типове завдання №1 – Елементи векторної і тензорної алгебри.

Зміст:

- Довести, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, знайти координати вектора \bar{d} в цьому базисі.
- Задано базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, вектори якого виражені через орти прямокутної декартової системи координат $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$.

Визначити:

- праву чи ліву систему координат утворює базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$;

- б) вектори взаємного базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$;
- в) об'єми паралелепіпедів побудованих на векторах основного й взаємного базисів;
- г) ко- і контраваріантні компоненти вектора \bar{a} ;
- д) ко- і контраваріантні компоненти метричного тензора.

3. Задано компоненти тензора другого рангу \hat{A} в базисі $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$ й новий базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Знайти аналогічні за будовою компоненти тензора \hat{A} в новій системі координат.

4. Задано тензор T^{ij} і вектор A_k . Знайти вектор, утворений множенням тензора на вектор із подальшою згорткою за першим індексом тензора й індексом вектора.

5. Задано тензор третього рангу \hat{t} . Симетризувати й альтернувати його по парі нижніх індексів.

6. Знайти головні значення і головні напрями тензора \hat{t} . Визначити вид тензорної поверхні.

2. Типове завдання №2 – Векторний і тензорний аналіз.

Зміст:

1. Задано скалярне поле $u(x_1, x_2, x_3)$ й точки M_0, M .
Знайти:
 - а) поверхні рівня, що проходять через точки M_0 і M .
 - б) похідну поля u в точці M_0 в напрямку вектора $\overline{M_0M}$.
 - в) напрям і швидкість найбільшого зростання поля u в точці M_0 .
2. Знайти потік векторного поля \bar{A} через поверхню S . Обчислення провести двома способами: безпосередньо і за теоремою Остроградського - Гауса.
3. Знайти циркуляцію векторного поля \bar{A} уздовж контуру L . Обчислення провести двома способами: безпосередньо і за теоремою Стокса.
4. Переконатися, що векторне поле \bar{A} є потенціальним і знайти його скалярний потенціал.
5. Переконатися, що векторне поле \bar{A} є соленоїдальним і знайти його векторний потенціал.
6. Обчислити в криволінійній системі координат.
7. Обчислити потік векторного поля \bar{A} через поверхню S , в криволінійній системі координат.
8. Обчислити циркуляцію векторного поля \bar{A} уздовж контуру L в криволінійній системі координат.
9. Знайти потік тензорного поля P_{ij} через частину площини p , відсічену координатними площинами.

10. Знайти символи Крістоффеля для системи координат (q^1, q^2, q^3) , що зв'язана з прямокутною декартовою системою координат (x_1, x_2, x_3) заданими співвідношеннями.

11. Знайти коваріантну похідну тензора \hat{A} , що заданий у системі координат (q^1, q^2, q^3) попередньої задачі.

9. Методи навчання

- метод евристичної бесіди;
- проблемний метод;
- метод дистанційного навчання.

10. Методи контролю

- контрольні роботи;
- перевірка конспектів лекцій;
- контрольне опитування за матеріалом для самостійної роботи;
- захист індивідуального завдання;
- залік.

11. Розподіл балів, які отримують студенти

В межах кожного півсеместру студент має можливість набрати 30 балів. Максимальна кількість балів за індивідуальне завдання – 20; залік - 20. Підсумкова оцінка з дисципліни формується із загальної кількості набраних балів за результатами поточних контрольних заходів, індивідуального завдання та заліку.

Система накопичення балів за результатами контрольних заходів

Вид контролю	Кількість балів
1) відповіді на практичних заняттях	5
2) тестування	5
3) контрольна робота	15
4) відсутність пропусків лекційних та практичних занять	5
Разом за 1-й півсеместр	30
5) відповіді на практичних заняттях	5
6) тестування	5
7) контрольна робота	10
8) відсутність пропусків лекційних та практичних занять	10
Разом за 2-й півсеместр	30
9) захист індивідуального завдання	20

10) виконання залікової роботи	20
Разом за семестр	100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

ЗА ШКАЛОЮ ECTS	За шкалою університету	За національною шкалою	
		Екзамен	Залік
A	90 – 100 (відмінно)	5 (відмінно)	Зараховано
B	85 – 89 (дуже добре)	4 (добре)	
C	75 – 84 (добре)		
D	70 – 74 (задовільно)	3 (задовільно)	
E	60 – 69 (достатньо)		
FX	35 – 59 (незадовільно – з можливістю повторного складання)	2 (незадовільно)	Не зараховано
F	1 – 34 (незадовільно – з обов’язковим повторним курсом)		

12. Методичне забезпечення

1. Киричевский В. В., Кудря В. І., Стреляєв Ю. М. Основи тензорного аналізу. Навчальний посібник для студентів математичного факультету. – Запоріжжя: ЗНУ, – 2005. – 88 с.
2. Кудря В. І., Стреляєв Ю. М. Методичні вказівки до типового завдання з курсу “Основи векторного і тензорного аналізу”. – Запоріжжя: ЗДУ, 1999. – 35 с.
3. Стреляєв Ю. М. Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Фізика» / Ю.М. Стреляєв, М.І. Клименко – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – 69 с.
4. [Методичні матеріали для забезпечення семінарських, практичних занять.](#)
5. [Методичні матеріали для забезпечення самостійної роботи студентів.](#)
6. [Методичні матеріали та тематика контрольних робіт для студентів заочного відділення.](#)
7. [Контрольні завдання та тести.](#)
8. [Перелік питань до іспиту.](#)

13. Рекомендована література

Основна

1. Борисенко А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов – Х.: Вища шк., 1986. – 216 с.
2. Кильчевский Н. А. Основы тензорного исчисления с применением в механике / Н. А. Кильчевский – К.: Наук. Думка, 1972. – 148 с.
3. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – М.: Наука, 1973. – 468 с.
4. Очан Ю. С. Сборник задач по методам математической физики / Ю. С. Очан – М.: Высш шк., 1973. – 192 с.

Додаткова

1. Дубовин Б. А. Современная геометрия: методы и приложения / Б. А. Дубовин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко – М.: Наука, 1979. – 986 с.
2. Киричевский В. В. Курс высшей математики / В. В. Киричевский, Н. А. Копылова – К.: Наук. думка, – 1998. – 572 с.
3. Ландау Л. Д. Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – М.: Гостехиздат, 1954. – 567 с.
4. Победря Б.Е. Лекции по тензорному аналізу / Б.Е. Победря – М.: Изд-во гос.ун., 1974. – 206 с.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов – М.: Наука, 1976. – 438 с.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2 / В. И. Смирнов – М.: Гостехиздат, 1951. – 628 с.

14. Інформаційні ресурси

1. <http://www.math.ru/lib/>
2. <http://www.edu.ru/modules/>
3. <http://www.exponenta.ru/educat/>
4. <http://www.pm298.ru/mintegral.php>
5. <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>