

Поэтому для приложений возникает вопрос о нахождении условий, при которых достаточно малое изменение начальных значений вызывает сколь угодно малое изменение решения. При непрерывном изменении времени t , которое может принимать сколь угодно большие значения. Этим вопросом занимается *теория устойчивости*.

В простейшем случае понятие устойчивости связано со способностью некоторой физической системы возвращаться (с определенной точностью) в состояние равновесия после исчезновения внешнего фактора, выведшего её из состояния равновесия. Если система неустойчива, то она не возвращается в состояние равновесия, из которого её вывели, а либо удаляется от него, либо совершает вокруг него недопустимо большие колебания.

Наблюдения показывают, что некоторые положения равновесия системы устойчивы к небольшим возмущениям, а другие принципиально возможные равновесные положения практически не могут быть реализованы.

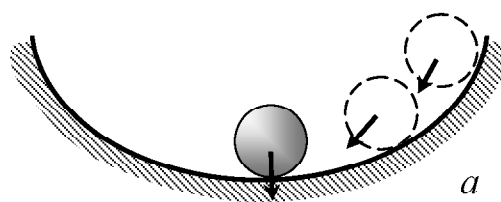
В общем случае, рассматривая физические системы, вводятся понятия устойчивости «в малом», «в большом», «в целом». Система устойчива «в малом», если констатируется лишь факт наличия области устойчивости, но не определяются ее границы. Система называется устойчивой «в большом», когда определены границы области устойчивости, т. е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и выяснено, что реальные начальные отклонения принадлежат этой области. В случае, когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, система называется устойчивой «в целом». Устойчивость «в целом» часто называется «абсолютной» устойчивостью.

Очевидно, что система, устойчивая «в целом», будет устойчивая «в большом» и «в малом», а система, устойчивая «в большом», будет устойчива и «в малом».

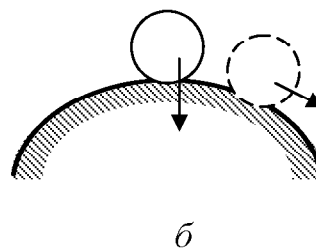
Система будет устойчивой, если из возмущенного состояния она перейдет в некоторую заданную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

Наглядно устойчивость равновесия представлена на рис. 1.1, где:

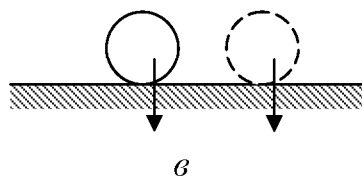
а) устойчивое равновесие
(устойчивость «в целом»);



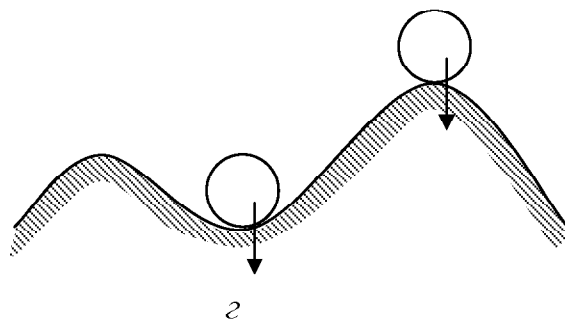
б) неустойчивое положение
равновесия;



в) безразличное равновесие;



г) устойчивое равновесие;



д) полуустойчивое состояние
равновесия.

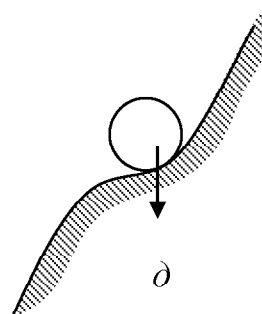


Рис. 1.1

Понятие устойчивости можно распространить и на более общий случай, когда в качестве невозмущённого состояния рассматривается не положение равновесия системы, а её движение по некоторой, наперёд заданной траектории.

Пусть заданное движение системы при отсутствии возмущений определяется некоторым законом изменения независимых координат $y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_n^*(t)$. По аналогии со случаем положения равновесия, заданное движение называется *невозмущённым движением*. При воздействии на систему внешних возмущений произойдет отклонение действительного движения от заданного. Действительное движение системы называется *возмущённым движением*. Если действительное движение системы определяется независимыми координатами $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, то в общем случае $y_1(t) \neq y_1^*(t), y_2(t) \neq y_2^*(t), \dots, y_n(t) \neq y_n^*(t)$.

Заданное невозмущённое движение будет устойчивым, если после приложения внешних сил (возмущений), которые затем снимают, возмущённое движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область пространства

$$\left| y_i(t) - y_i^*(t) \right| \leq \varepsilon_i,$$

где ε_i – заданные величины, $i = 1, 2, \dots, n$.

1.2. Общая постановка задачи устойчивости по Ляпунову.

Впервые строгое определение устойчивости было дано академиком Петербургской АН А. М. Ляпуновым в 1892 г. Это определение оказалось настолько удачным и наилучшим образом удовлетворяющим многим техническим задачам, что оно в настоящее время принято как основное.

Пусть движение физической системы S описывается дифференциальными уравнениями, которые могут быть приведены к нормальному виду (1.1)

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1; y_2; \dots; y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

где y_i – вещественные переменные, характеризующие состояние системы (обобщенные координаты); а f_i – правые части уравнений, которые являются функциями обобщенных координат и не зависят от времени.

Кроме того, исходное состояние системы при $t = t_0$ однозначно определяется начальными значениями $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$.

Системы вида (1.2), в которых функции f_i не зависят явно от времени называются *автономными системами*.

Полагается, что функции $f_i(y_1; y_2; \dots; y_n)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в выпуклой области G пространства размерности n , координатами которого являются переменные y_1, y_2, \dots, y_n . Из этого следует, что система (1.2) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Поэтому каждой совокупности начальных значений соответствует единственное решение (1.2) для всех $t > t_0$

$$y_i = y_i(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}),$$

т. е. это решение определяется исходным состоянием $t = t_0$.

Некоторое вполне определённое движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость, называется *невозмущённым движением*. Выбор невозмущённого движения является произвольным. Это может быть любое возможное движение системы.

Предположим, что в виде функций $y_i = y_i^*$ получено частое решение системы дифференциальных уравнений (1.2)

$$\frac{dy_i^*}{dt} = f_i(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

удовлетворяющее начальным условиям $y_{10}^*, y_{20}^*, \dots, y_{n0}^*$.

Если изменить начальные условия, дав им небольшие по модулю приращения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, то можно записать

$$y_{10} = y_{10}^* + \varepsilon_1; y_{20} = y_{20}^* + \varepsilon_2; \dots; y_{n0} = y_{n0}^* + \varepsilon_n. \quad (1.4)$$

Движение системы, отвечающее измененным начальным условиям (1.4), называется *возмущённым движением*. Другими словами, *возмущённое движение* – это любое движение системы, отличное от невозмущённого.

Введем в рассмотрение разности переменных y_i в возмущённом и невозмущённом движении

$$x_i = y_i - y_i^*, \quad (1.5)$$

которые называются *отклонениями* или *вариациями* величин y_i .

Если все отклонения

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

то возмущённое и невозмущённое движения совпадают, т. е. невозмущённому движению отвечают ненулевые значения отклонений.

Пусть при $t = t_0$ среди всех начальных отклонений, по крайней мере, одно не равно нулю

$$x_i(t_0) = x_{i0} = y_{i0} - y_{i0}^* = \varepsilon_i. \quad (1.6)$$

Начальные значения отклонений (1.6) называется *возмущениями*.

Ляпуновым было сформулировано следующее определение устойчивости: *невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к переменным x_i , если при всяком произвольно заданном положительном числе ε , как бы мало оно ни было, можно выбрать другое такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что при всяких возмущениях x_{i0} , удовлетворяющих условию*

$$\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 \leq \delta,$$

и при любом $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < \varepsilon,$$

в противном случае движение неустойчиво.

Допущения, принятые в определении устойчивости по Ляпунову:

- 1) возмущение налагается только на начальные условия, т. е. возмущённое движение происходит при тех же силах, что и невозмущённое движение;
- 2) устойчивость рассматривается на бесконечно большом промежутке времени;
- 3) возмущения предполагаются малыми.

1.3. Геометрическая интерпретация устойчивости по Ляпунову.

Совокупность отклонений x_1, x_2, \dots, x_n в n -мерном пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_n определяет некоторую точку M (изображающую точку). В возмущённом движении при изменении величин x_1, x_2, \dots, x_n изображающая точка описывает некоторую траекторию, а невозмущённому движению $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ отвечает неподвижная точка – начало координат.

Для наглядности рассмотрим случай трехмерного пространства (при $n = 3$). Вокруг начала координат строятся две сферы: сфера $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n=3} x_i^2$ с радиусом $\sqrt{\varepsilon}$ и сфера $\delta = \sum_{i=1}^{n=3} x_{i0}^2$ с радиусом $\sqrt{\delta}$. Радиус сферы ε выбирается произвольно малым. Тогда, если невозмущённое движение устойчиво, то для сферы ε должна найтись другая сфера δ , обладающая следующим свойством: изображающая точка M , начав своё движение из любой точки M_0 , лежащей внутри или на поверхности сферы δ , при своём дальнейшем движении останется всегда внутри сферы ε , никогда не достигая её поверхности (рис. 1.2).

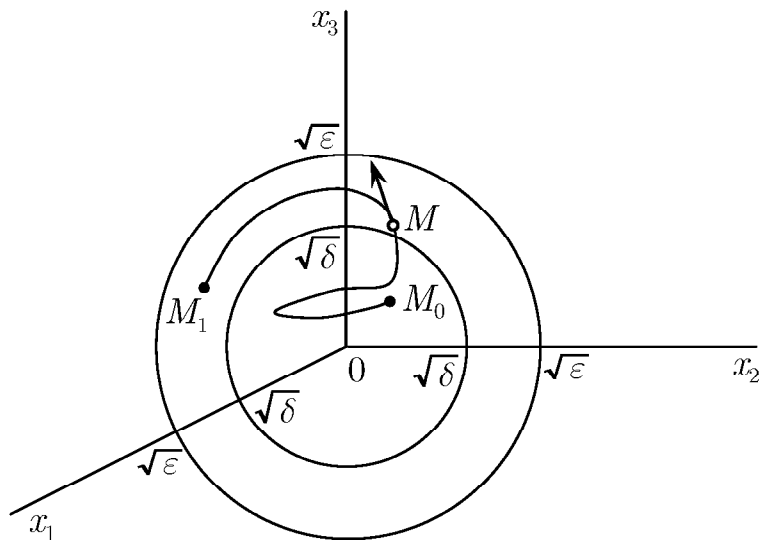


Рис. 1.2

Если же невозмущённое движение неустойчиво, то траектория изображающей точки M с течением времени пересечёт сферу ε изнутри наружу (или попадёт на её поверхность) при сколь угодно близком положении точки M_0 к началу координат.

Практически устойчивость данного невозмущённого движения означает, что при достаточно малых начальных возмущениях возмущённое движение будет сколь угодно мало отличаться от невозмущённого движения. Если невозмущённое движение неустойчиво, то возмущённое движение будет отходить от него, как бы малы ни были начальные возмущения.

Если невозмущённое движение устойчиво и при этом любое возмущённое движение при достаточно малых x_{i0} стремится к невозмущённому движению, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = 0,$$

то невозмущённое движение называется *асимптотически устойчивым*, а изображающая точка M с течением времени неограниченно стремится к началу координат, не выходя из сферы ε .

2. ФАЗОВАЯ ТРАЕКТОРИЯ И ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

2.1 Теорема о свойствах фазовых траекторий.

Т е о р е м а 2.1. Если имеется некоторое решение автономной системы (1.2) $y_i = y_i(t)$, то выражение $y_i = y_i(t + c)$, где $c = \text{const}$, $i=1,2,\dots,n$, есть также решение этой системы.

Доказательство

Для решений системы (1.2) $y_i = y_i(t)$ справедливы тождества

$$\frac{dy_i(t)}{dt} \equiv f_i(y_1(t); y_2(t); \dots; y_n(t)), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Если в этих тождествах заменить $y_i(t)$ на $y_i = y_i(t + c)$, то можно записать

$$\frac{dy_i(t + c)}{d(t + c)} \equiv f_i(y_1(t + c); y_2(t + c); \dots; y_n(t + c)).$$

Учитывая, что

$$\frac{dy_i(t + c)}{d(t + c)} = \frac{dy_i(t + c)}{dt} = \frac{d\bar{y}_i(t)}{dt}, \quad \text{где } y_i = y_i(t + c),$$

справедливым оказывается тождество

$$\frac{d\bar{y}_i(t)}{dt} \equiv f_i(\bar{y}_1(t); \bar{y}_2(t); \dots; \bar{y}_n(t)),$$

т.е. функции

$$y_i = \bar{y}_i = y_i(t + c), \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.1)$$

являются решениями системы (1.2).

Дадим геометрическую интерпретацию решений автономной системы (1.2).

Пусть

$$y_i = y_i(t), \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.2)$$

некоторое решение системы (1.2). Рассмотрим n – мерное пространство с координатами y_1, y_2, \dots, y_n и поставим в соответствие этому решению движение точки в n – мерном пространстве, задаваемое уравнениями (2.2).

При непрерывном изменении времени t в диапазоне $-\infty < t < \infty$ точка опишет некоторую траекторию, называемую *фазовой траекторией*. Точка, которая в соответствии с (2.2) перемещается по фазовой траектории, называется *изображающей точкой*, а пространство размерности n , в котором геометрически интерпретируются решения системы (1.2) в виде фазовых траекторий, называется *фазовым пространством*.

Фазовые траектории, соответствующие различным решениям системы (1.2), не могут пересекаться. Однако различным решениям этой системы может соответствовать одна и та же фазовая траектория, т. е. фазовые траектории для различных решений могут совпадать.

Теорема 2.2. *Если фазовые траектории для различных решений системы (1.2) имеют хотя бы одну общую точку, то они совпадают.*

Доказательство

Пусть

$$y_i = \xi_i(t), \quad i=1,2,\dots,n, \quad (2.3)$$

есть некоторое другое решение системы (1.2) и пусть траектории, соответствующие решениям (2.2) и (2.3) имеют общую точку, т. е.

$$y_i(t_1) = \xi_i(t_2). \quad (2.4)$$

В силу теоремы 2.1, решением системы также будет

$$\bar{y}_i(t) = y_i(t + c), \quad (2.5)$$

где $c = t_1 - t_2$.

Решение (2.5) в момент времени t_2 согласно (2.4) имеет одинаковые начальные условия с решением (2.3):

$$\bar{y}_i(t) = y_i(t_2 + c) = y_i(t_2 + t_1 - t_2) = y_i(t_1) = \xi_i(t_2), \quad i=1,2,\dots,n$$

и поэтому в силу теоремы о единственности решения, решения (2.3) и (2.5) совпадают друг с другом, т.е.

$$\xi_i(t) \equiv y_i(t + c), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Из этого тождества следует вывод: для обоих решений (2.2) и (2.3) изображающая точка описывает в фазовом пространстве одну и ту же траекторию, но для первого решения эта точка отстает по траектории на время c .

Таким образом, решение автономной системы дифференциальных уравнений (1.2) интерпретируются как *процесс движения изображающей точки по фазовой траектории в n – мерном фазовом пространстве*, причем фазовые траектории для различных решений системы (1.2) либо не пересекаются, либо совпадают.

2.2. Геометрическая интерпретация фазовых траекторий.

Если решения системы (1.2) рассматривать как интегральные кривые в $(n + 1)$ – мерном пространстве с координатами t, y_1, y_2, \dots, y_n , то каждому решению в той области пространства, в которой выполняются условия существования и единственности решения, соответствует единственная интегральная кривая. При этом фазовые траектории можно рассматривать как проекции интегральных кривых в $(n + 1)$ – мерном пространстве на n – мерное пространство y_1, y_2, \dots, y_n , причем проекции различных интегральных кривых либо не пересекаются, либо совпадают.

Интегральные кривые и их проекции для случая $n = 2$ показаны на рис. 2.1. Здесь двум решениям $y(t)$ и $\bar{y}(t) = y(t + c)$, отличающимся сдвигом во времени, соответствуют различные интегральные кривые, но одна фазовая траектория.

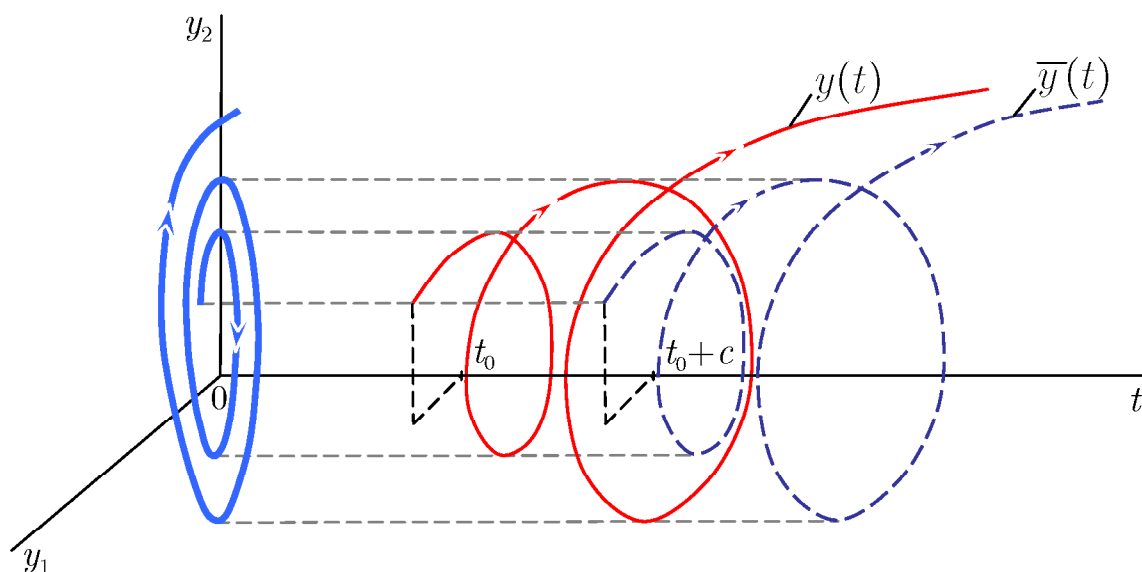


Рис. 2.1

Дадим геометрическую интерпретацию не только решениям, но и самой системе (1.2). Для этого каждой точке $y_0 = (y_{10}; y_{20}; \dots; y_{n0})$ области G фазового пространства поставим в соответствие вектор $\bar{f}(y_0)$ с координатами $f_1(y_0), f_2(y_0), \dots, f_n(y_0)$, выходящий из этой точки. Система (1.2) будет задавать в области G векторное поле. Пусть $y_i = y_i(t)$ – решение системы (1.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Этому решению соответствует фазовая траектория, выходящая в момент времени t_0 из точки y_0 . тогда вектор $\bar{f}(y_0)$ представляет собой, как следует из тождества

$$\left. \frac{dy_i(t_0)}{dt} \right|_{t=t_0} \equiv f_i(y_0) = f_i(y_{10}; y_{20}; \dots; y_{n0}), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

вектор скорости движения изображающей точки по траектории в момент времени t_0 .

Вектор $\bar{f}(y_0)$ носит название *вектора фазовой скорости*.

2.3. Виды фазовых траекторий.

В фазовом пространстве существует три вида фазовых траекторий.

1. Фазовые траектории, которые соответствуют решениям системы (1.2) вида

$$y_i(t) = a_i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (2.6)$$

В этом случае изображающая точка в фазовом пространстве при изменении t не перемещается, а стоит на месте. Фазовая траектория для решения (2.6) называются *состоянием равновесия*.

2. Фазовые траектории, для которых решение системы (1.2) является периодическим, т.е. существует такое действительное число $T > 0$, при котором выполняются условие периодичности

$$y_i(t + T) = y_i(t), \quad i=1,2,\dots,n.$$

В данном случае фазовая траектория будет замкнутой и называться *циклом*, число T носит название *периода цикла*.

Чтобы траектория не вырождалась в точку, требуется существование таких двух значений $t_1 \neq t_2$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < T$, чтобы хотя бы для одного i было справедливо неравенство

$$y_i(t_1) \neq y_i(t_2).$$

Состояния равновесия и циклы являются самопересекающимися фазовыми траекториями. Действительно, для состояния равновесия для любых t_1, t_2 справедливо соотношение

$$y_i(t_1) = y_i(t_2), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Это же состояние при $|t_1 - t_2| = T$ справедливо и для цикла.

3. Фазовые траектории без самопересечений, которые соответствуют решениям $y_i = y_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) системы (1.2), обладающим тем свойством, что не существует значений $t_1 \neq t_2$, удовлетворяющих условию

$$y_i(t_1) = y_i(t_2), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Таким образом через каждую точку фазового пространства проходит фазовая траектория, которая соответствует некоторому решению системы (1.2). Всё фазовое пространство оказывается заполненным не пересекающимися друг с другом фазовыми траекториями. Среди этих траекторий особое место занимают самопересекающиеся фазовые траектории, к которым относятся состояния равновесия и циклы.

Т е о р е м а 2.3. *Связь состояний равновесия с фазовыми скоростями. Для того, чтобы точка $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ была состоянием равновесия, необходимо и достаточно, чтобы вектор фазовой скорости $f(y_1; y_2; \dots; y_n)$ в этой точке обратился в ноль.*

Доказательство

В начале докажем достаточность условий теоремы. Пусть в точке $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ вектор фазовой скорости обращается в ноль, т. е.

$$f(a_1; a_2; \dots; a_n) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Тогда система (1.2) имеет решение $y_i = a_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), соответствующее состоянию равновесия, т. к. при подстановке $y_i = a_i = \text{const}$ в систему (1.2) получается тождество

$$\frac{da_i}{dt} \equiv f(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv 0.$$

Теперь докажем необходимость условия теоремы. Пусть система (1.2) имеет решение вида (2.6)

$$y_i(t) = a_i \quad i=1, 2, \dots, n,$$

т. е. точка $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ является состоянием равновесия. Подставив решение (2.6) в (1.2), получается

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{da_i}{dt} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

т. е. вектор фазовой скорости $f(y_1; y_2; \dots; y_n)$ в точке $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ обращается в ноль.

Таким образом доказаны достаточное и необходимое условия теоремы.

Из теоремы 2.3 следует, что состояния равновесия являются решениями системы уравнений

$$f(a_1; a_2; \dots; a_n) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

3.1. Вступительные замечания.

Исследование устойчивости движения, как правило, производят приближёнными методами, основанными на качественном анализе дифференциальных уравнений возмущённого движения, которым удовлетворяют отклонения (вариации) x_i .

Основной предпосылкой приближённых методов является допущение того, что свойства системы в отношении устойчивости её установившегося движения обнаруживаются уже в тех малых возмущённых движениях, какие возникают около невозмущённого движения в течение небольшого промежутка времени вслед за моментом сообщения системе достаточно малого начального возмущения. На этом основании при решении вопроса об устойчивости движения в уравнениях возмущённого движения отбрасываются все члены выше первого порядка (относительно координат и скоростей) и по форме интегралов линеаризованных уравнений делается заключение об устойчивости невозмущённого движения. Совокупность методов исследования устойчивости на основании линеаризованных уравнений составляет содержание теории первого приближения.

3.2. Вывод дифференциальных уравнений возмущенного движения (общий случай).

Чтобы вывести уравнения возмущённого движения, из (1.5) находятся $y_i = y_i^* + x_i$ и подставляются в систему уравнений (1.2). Тогда получается

$$\frac{d}{dt}(y_i^* + x_i) = f_i(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2; \dots; y_n^* + x_n), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Если первые части этой системы допускают разложение в системные ряды Тейлора, то после разложения по степеням $(y_i - y_i^*)$ в окрестности невозмущённого движения y_i^* получается

$$\begin{aligned} \frac{dy_i^*}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = & f_i(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*) + (y_1 - y_1^*) \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \Big|_{(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*)} + \\ & + (y_2 - y_2^*) \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \Big|_{(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*)} + \dots + (y_n - y_n^*) \frac{\partial f_i}{\partial y_n} \Big|_{(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*)} + \\ & + R_i(y_1 - y_1^*; y_2 - y_2^*; \dots; y_n - y_n^*), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $R_i(y_1 - y_1^*; y_2 - y_2^*; \dots; y_n - y_n^*)$ – совокупность членов, зависящих от отклонений $x_i = y_i - y_i^*$ в степенях выше первой.

Для невозмущённого движения, согласно (1.3) должно выполняться тождество

$$\frac{dy_i^*}{dt} \equiv f_i(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*).$$

Исключая из (3.1) невозмущённое движение, а также учитывая, что невозмущённому движению соответствует равновесное состояние изображающей точки в начале координат $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ из (3.1) выводятся дифференциальные уравнения возмущённого движения.

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = & x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{(0; 0; \dots; 0)} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{(0; 0; \dots; 0)} + \dots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{(0; 0; \dots; 0)} + \\ & + R_i(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{aligned}$$

или

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + R_i(x_1; x_2; \dots; x_n), \quad (3.2)$$

где коэффициенты $a_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{(0;0;\dots;0)} = \text{const}, \quad k=1,2,\dots,n.$

Если отклонения x_i достаточно малы, то пренебрегая R_i , получаются *линеаризованные уравнения*

$$\frac{dx_i}{dt} \approx a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (3.3)$$

называемые *уравнениями первого приближения*.

Основанием для линеаризации нелинейной системы в окрестности точки равновесия является желание извлечь информацию о поведении нелинейной системы с помощью анализа поведения её линеаризации. При этом полагается, что нелинейная система будет локально вести себя подобно линеаризованной, по крайней мере, в качественном смысле.

3.3. Уравнения возмущённого движения систем второго порядка.

Рассматривается нелинейная система уравнений второго порядка общего вида, характеризующая невозмущённое движение

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1; y_2); \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1; y_2), \end{cases} \quad (3.4)$$

в которой $f_1(y_1; y_2), f_2(y_1; y_2)$ полагаются аналитическими во всей плоскости y_1, y_2 .

Точки, характеризующие состояние равновесия, являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(y_1^*; y_2^*) = 0; \\ f_2(y_1^*; y_2^*) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

В общем случае система (3.5) может иметь не одно, а несколько решений.

Пусть $y_1^* = a_1$, $y_2^* = a_2$ – одно из решений (3.5).

Система уравнений (3.4) соответствует случаю $n = 2$, когда фазовое пространство представляет собой фазовую плоскость. Для возмущённого движения $y_i = y_i^* + x_i$ можно записать

$$\begin{cases} \frac{d(y_1^* + x_1)}{dt} = f_1(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2); \\ \frac{d(y_2^* + x_2)}{dt} = f_2(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2). \end{cases} \quad (3.6)$$

Система (3.6) может быть линеаризована с помощью разложений функций $(y_i - a_i)$ в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} f_1(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2) &= f_1(a_1; a_2) + (y_1 - a_1) \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \Big|_{(a_1; a_2)} + \\ &+ (y_2 - a_2) \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \Big|_{(a_1; a_2)} + R_1(y_1 - a_1; y_2 - a_2); \\ f_2(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2) &= f_2(a_1; a_2) + (y_1 - a_1) \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \Big|_{(a_1; a_2)} + \\ &+ (y_2 - a_2) \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \Big|_{(a_1; a_2)} + R_2(y_1 - a_1; y_2 - a_2). \end{aligned}$$

Для возмущённого движения из (3.6) с учётом (3.4), (3.5) теперь можно записать

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (y_1 - a_1) \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \Big|_{(a_1; a_2)} + (y_2 - a_2) \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \Big|_{(a_1; a_2)} + R_1(y_1 - a_1; y_2 - a_2); \\ \frac{dx_2}{dt} = (y_1 - a_1) \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \Big|_{(a_1; a_2)} + (y_2 - a_2) \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \Big|_{(a_1; a_2)} + R_2(y_1 - a_1; y_2 - a_2). \end{cases}$$

При исследовании нелинейных систем удобно с помощью линейного преобразования

$$x_1 = y_1 - a_1;$$

$$x_2 = y_2 - a_2,$$

начало координат параллельным переносом переместить в точку равновесия $(a_1; a_2)$.

Линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $a_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(0;0)}$; $a_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(0;0)}$; $a_{21} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(0;0)}$; $a_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(0;0)}$,

называется линеаризацией нелинейной системы при условии, что для нелинейных членов $R_1(x_1; x_2)$, $R_2(x_1; x_2)$ выполняются условия

$$\lim_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0} \frac{R_1(x_1; x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lim_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0} \frac{R_2(x_1; x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \text{ т.е. при } (x_1; x_2) \rightarrow O_1(0;0).$$

Из этих условий следует, что нелинейные члены полагаются пренебрежимо малыми по сравнению с x_1 и x_2 при приближении к точке равновесия $O_1(0;0)$.

Систему (3.7) удобно представлять в векторной форме

$$\dot{X} = A \cdot X,$$

$$\text{где } \dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(0;0)}.$$

Уравнения (3.7) можно истолковать как уравнения определяющие проекции скорости изображающей систему точки, движущейся в фазовой плоскости

$x_1 O_1 x_2$. Невозмущённому движению $x_1 = x_2 = 0$ на этой плоскости соответствует равновесное состояние изображающей точки в начале координат, так как когда $x_1 = x_2 = 0$, то и $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ

4.1. Приведение матриц к диагональному виду.

Пусть дано n -мерное действительное пространство, которое обозначим через R_n . Рассмотрим *преобразование* этого пространства, т.е. отображение, переводящее *каждый* вектор x пространства R_n в некоторый вектор y этого же пространства. В этом случае вектор x называется *прообразом*, а вектор y – *образом* вектора x . Это правило называется *преобразованием пространства R_n* или *оператором*, заданным в пространстве R_n .

Преобразование (оператор) A называется *линейным преобразованием* (линейным оператором), если сумму любых двух векторов x, y оно переводит в сумму образов этих векторов

$$A(x + y) = Ax + Ay,$$

а произведение любого вектора x на любое число λ

$$A(\lambda x) = \lambda(Ax).$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$y = Ax \tag{4.1}$$

и выясним, как будет меняться матрица A , если исходную систему координат подвергнуть некоторому линейному преобразованию с невырожденной матрицей T . Вектор $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ преобразуется при этом в новый вектор $x'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ составляющие которого выражаются через составляющие старого вектора

$$x' = T \cdot x.$$

Аналогично преобразуется и вектор y :

$$y' = T \cdot y.$$

Определяя из этих формул первоначальные значения векторов и подставляя их в (4.1), получим:

$$T^{-1}y' = T^{-1}Ty = y;$$

$$T^{-1}x' = T^{-1}Tx = x,$$

тогда

$$T^{-1}y' = AT^{-1}x'.$$

Окончательно

$$y' = TAT^{-1}x'.$$

Итак, в новой системе координат преобразование (4.1) будет осуществляться матрицей

$$A' = TAT^{-1}. \quad (4.2)$$

Матрицы A и A' , связанные между собой соотношением (4.2), называется *подобными*. Между собой они, конечно, не равны, но в геометрическом смысле эквивалентны, поскольку осуществляют одно и то же преобразование, выраженное в различных координатных системах.

Из (4.2) можно записать

$$A' - \lambda E = T(A - \lambda E)T^{-1}$$

и, следовательно

$$|A' - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Таким образом подобные матрицы A и A' имеют один и тот же характеристический многочлен.

Среди бесчисленного множества координатных систем исключительный интерес представляет одна система—та, в которой матрица преобразования принимает простейший, диагональный вид

$$A' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Если такая система существует, то преобразование, осуществляемое в старой системе матрицей A , сводилось бы в новых осях просто к растяжению вдоль этих осей

$$y'_i = \lambda_i x'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введем новую матрицу $V = T^{-1}$ и представим формулу (4.2) в виде

$$T^{-1} T A T^{-1} = T^{-1} A'$$

или

$$A V = V A'.$$

Если развернуть это соотношение, то можно записать

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} V_{jk} = V_{ik} \lambda_k, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

Обозначим векторы, составленные по столбцам из элементов матрицы

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix},$$

через $V_k = (V_{1k}, V_{2k}, \dots, V_{nk})$.

Уравнения (4.3) при фиксированном k принимают вид

$$A V_k = \lambda_k V_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Из этих уравнений видно, что отыскание матрицы V , приводящей матрицу A к диагональному виду, или, как еще говорят, к *главным осям*, сводится к определению векторов V_k . Эти векторы обладают тем свойством, что в результате линейного преобразования с матрицей A они воспроизводятся с точностью до постоянного множителя, т.е. преобразуются в коллинеарные векторы. Будем называть векторы V_k *собственными* или *фундаментальными векторами* матрицы A .

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)V_{1k} + a_{12}V_{2k} + \dots + a_{1n}V_{nk} = 0; \\ a_{21}V_{1k} + (a_{22} - \lambda_k)V_{2k} + \dots + a_{2n}V_{nk} = 0; \\ \dots\dots\dots ; \\ a_{n1}V_{1k} + a_{n2}V_{2k} + \dots + (a_{nn} - \lambda_k)V_{nk} = 0; \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.5)$$
$$\begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.6)$$
$$|A - \lambda E| = 0,$$

Если все характеристические числа различны между собой, то матрица

и будет диагональным представлением исходной матрицы A .

- 23 -

постоянного множителя. Для устранения этой неопределенности, собственные векторы обычно *нормируют*, т.е. выбирают множитель таким образом, чтобы длина вектора оказалась равной

$$\sum_{i=1}^n V_{i1}^2 = 1.$$

Аналогично определяются составляющие остальных $n - 1$ собственных векторов V_1, V_2, \dots, V_n и являются искомой матрицей преобразования V .

Существенный интерес представляют условия, при которых две матрицы A и B одновременно приводятся к главным осям.

Теорема 4.1. *Коммутативность двух матриц является необходимым условием одновременного их приведения к диагональному виду.*

Доказательство

Пусть A и B – две матрицы, характеристические числа которых равны соответственно α и β . Если их главные оси совпадают, то

$$Av = \alpha v, Bv = \beta v,$$

где v – общие для обеих матриц собственные векторы.

Умножим первое уравнение почленно на B , второе – на A и вычтем одно из другого:

$$(BA - AB)v = \alpha Bv - \beta Av.$$

Так как

$$\alpha Bv - \beta Av = \alpha \beta v - \beta \alpha v = 0,$$

то из выражения

$$(BA - AB)v = 0$$

следует, что матрицы должны коммутироваться, т.е.

$$BA = AB.$$

Справедливо и обратное положение: если две матрицы коммутируют, то при помощи одного и того же преобразования подобия их можно привести к диагональному виду. То есть, коммутативность двух матриц является не только

необходимым, но и достаточным условием возможности одновременного их приведения к главным осям.

До сих пор полагалось, что корни характеристического уравнения различны. Случай кратных корней представляет для исследования серьёзные трудности*.

Приведём лишь некоторые окончательные результаты для этого случая.

Рассмотрим характеристический определитель

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

который является многочленом n -ой степени. Этот многочлен может быть разложен на элементарные делители вида

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{\rho_j},$$

где $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_j = n$.

Для случая различных характеристических чисел λ_k , элементарные делители будут иметь вид

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2), \dots, (\lambda - \lambda_n),$$

т. е. будут линейными или *простыми*.

Если же среди характеристических чисел имеются одинаковые, то может оказаться, что:

1) все элементарные делители будут простыми; это значит, что каждый делитель, соответствующий корню кратности r_k , будет встречаться ровно r_k раз, т. е. элементарные делители будут иметь вид

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2), \dots, \overbrace{(\lambda - \lambda_k), (\lambda - \lambda_k), \dots, (\lambda - \lambda_k)}^{r_k \text{ раз}}, \dots, (\lambda - \lambda_j).$$

* См., например, Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т. 3, ч. 2 (дополнение). – М: Гостехиздат, 1953. – с.

Здесь как и в случае различных корней матрица A может быть приведены к диагональному виду

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \lambda_k & \\ & & & & \lambda_k & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \lambda_j \end{pmatrix};$$

2) все элементарные делители (или хотя бы часть из них) могут оказаться *нелинейными*

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{\rho_j}, \quad (4.7)$$

где хотя бы одно $\rho_k > 1$.

В этом случае матрица A к диагональному виду приведена быть не может. Существует, однако, простейшее, *каноническое* представление матрицы называемое *нормальной жордановой формой* матрицы A .

Каноническое представление имеет вид матрицы

$$A' = J = \begin{pmatrix} A_{\rho_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{\rho_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{\rho_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{\rho_j} \end{pmatrix},$$

элементы которой $A_{\rho_1}, A_{\rho_2}, \dots, A_{\rho_j}$ в свою очередь являются матрицами.

Матрицы такого вида называются *квазиматрицами*. Если у таких матриц, как у

матрицы A' все элементы, кроме диагональных равны нули, то такие матрицы называют *квазидиагональными*.

Рассмотрим один из нелинейных элементарных делителей $(\lambda - \lambda_k)^{\rho_k}$ (4.7) и поставим ему в соответствие матрицу $A_{\rho_k} = J_{\rho_k}$ порядка ρ_k , обладающую специальной структурой

$$A_{\rho_k} = J_{\rho_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

и имеющую только один элементарный делитель $(\lambda - \lambda_k)^{\rho_k}$. Матрицу J_{ρ_k} называют *жордановой клеткой порядка ρ_k* . Квазидиагональная матрица, имеющая своими элементарными делителями степени (4.7) может быть теперь представлена в виде

$$J = \text{diag}\{J_{\rho_1}, J_{\rho_2}, \dots, J_{\rho_j}\},$$

где $J_{\rho_k} = A_k$, $k = 1, 2, \dots, j$, $\sum_{k=1}^{k=j} \rho_k = n$.

В качестве примера, ниже выписана жорданова матрица J при элементарных делителях $(\lambda - \lambda_1)^2, (\lambda - \lambda_2)^3, \lambda - \lambda_3, (\lambda - \lambda_4)^2$

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array} \right).$$

Поскольку матрицы A и J имеют одни и те же элементарные делители, они подобны между собой, т.е. согласно (4.2) существует такая невырожденная матрица T (т.е. $|T| \neq 0$), что $A = TJT^{-1}$.

Если все элементарные делители матрицы A – простые, то матрицы $J_{\rho k}$ превращаются просто в числа λ_k . Поэтому для матрицы A каноническое представление совпадает с диагональной формой матрицы в том и только в том случае, когда все её элементарные делители простые (имеют первую степень).

Иногда вместо жордановой клетки вида (4.8) рассматривают «нижнюю» жорданову клетку ρ_k – го порядка

$$J_{\rho_k}^{(H)} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

а элементарным делителям (4.7) тогда соответствует «нижняя» жорданова матрица $J^{(H)}$.

$$J^{(H)} = \text{diag} \left\{ J_{\rho_1}^{(H)}, J_{\rho_2}^{(H)}, \dots, J_{\rho_j}^{(H)} \right\}.$$

4.2. Симметричные матрицы и их свойства.

Симметричными матрицами называются такие квадратные матрицы, у которых соответствующие элементы, стоящие по разные стороны от главной диагонали, равны между собой, т.е.

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Будем называть *транспонированной* по отношению к A такую новую матрицу A^T , которая получается из A путём замены строк столбцами. Симметричные матрицы удовлетворяют, очевидно, условию

$$A^T = A.$$

Важнейшим свойством симметричных матриц является то, что все характеристические числа симметричных матриц – *вещественные*, а *элементарные делители простые*, т.е. симметричная матрица всегда может быть приведена к диагональному виду.

Именно из-за вещественности характеристических чисел симметричные матрицы представляют особый интерес для приложений.

Введем в рассмотрение два вектора $U(U_1, U_2, \dots, U_n)$ и $V(V_1, V_2, \dots, V_n)$, которые будем называть *ортогональными*, если равно нулю их скалярное произведение (сумма произведений соответствующих координат):

$$\sum_{k=1}^n U_k V_k = 0.$$

Можно показать, что собственные векторы симметричных матриц всегда попарно ортогональны

$$\sum_{j=1}^n V_{ij} V_{jk} = 0, \text{ при } i \neq k.$$

Если собственные векторы нормированы

$$\sum_{j=1}^n V_{jk}^2 = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

то они составляют *ортонормированную* систему.

Применяя символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases}$$

условия ортонормирования запишется в виде

$$\sum_{j=1}^n V_{ij} V_{jk} = \delta_{ik}, \quad (4.9)$$

или

$$V \cdot V^T = E, \quad (4.10)$$

где V – матрица, составленная из V_{ik} по столбцам.

Из (4.9) видно, что любые два столбца (две строки) матрицы V взаимно ортогональны. Такие матрицы называют *ортогональными*.

Из (4.10) следует, что $V^T = V^{-1}$, т. е. у ортогональной матрицы обратная и транспонированная матрицы совпадают.

4.3. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Задача о приведении квадратичной матрицы к диагональному виду находится в тесной связи с задачей о приведении квадратичной формы к сумме квадратов. *Квадратичной формой* n переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется однородный многочлен второй степени

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad (4.11)$$

где полагается, что $a_{ik} = a_{ki}$.

Каждой квадратичной форме приводится в соответствие матрица ее коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая является симметричной.

Выясним как преобразуется матрица A при переходе от переменных x_1, x_2, \dots, x_n к новым переменным y_1, y_2, \dots, y_n :

$$x_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} y_k. \quad (4.12)$$

С учётом (4.12) из (4.11), получим преобразованную форму

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} y_i y_k,$$

$$\text{где } c_{ik} = c_{ki} = \sum_{r=1}^n b_{ri} \sum_{s=1}^n a_{rs} b_{sk}. \quad (4.13)$$

Обозначая $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik})$, перепишем (4.13) в виде

$$C = B^T A B.$$

Преобразование (4.12) можно подобрать таким образом, что матрица C окажется диагональной

$$C = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\},$$

в этом случае квадратичная форма не будет содержать произведений координат или, как говорят, приведется к сумме квадратов:

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n c_k y_k^2.$$

Преобразований (4.12) существует бесчисленное множество, среди которых представляет интерес ортогональное преобразование ($B^T = B^{-1}$). В этом случае можно записать

$$C = B^{-1} A B.$$

Таким образом, чтобы привести квадратичную форму к сумме квадратов при помощи ортогонального преобразования, нужно привести к главным осям ее матрицу. Тогда

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2.$$

Квадратичные формы могут быть классифицированы следующим образом:

- если при всех вещественных значениях x_k квадратичная форма остается положительной и обращается в нуль лишь при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, то она называется *определенно положительной*;
- квадратичная форма, принимающая только отрицательные значения, называется *определенно отрицательной*;
- если форма может принимать значения различных знаков, она называется *знакопеременной*.

Тип квадратичной формы легко установить, если она приведена каким-либо способом к сумме квадратов. Так, если все коэффициенты при квадратах переменных оказались положительными, то форма – определённо положительная (или наоборот).

Из сказанного следует важный вывод: *если квадратичная форма – определённо положительная, то все характеристические числа её матрицы положительны.*

5. ТИПЫ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Исследование различных случаев, которые могут выражаться при интегрировании линейных систем, в случае системы второго порядка (3.7) допускает замечательную геометрическую интерпретацию, наглядно демонстрирующую поведение системы в возмущенном движении вблизи исследуемого невозмущенного состояния. Возможны несколько качественно отличных друг от друга случаев, каждому из которых будет соответствовать особый тип расположения фазовых траекторий около особой точки – начала координат, – изображающей невозмущенное равновесное состояние системы. Этими типами расположения фазовых траекторий около начала координат и будет определяться характер устойчивости невозмущенного состояния линейной системы с одной степенью свободы.

Разделив в системе (3.7) второе уравнение на первое, из системы исключается время t . В полученном дифференциальном уравнении первого порядка

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}, \quad (5.1)$$

полагается, что x_1 – независимая переменная, а x_2 – неизвестная функция. Правая часть уравнения (5.1) определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную по x_2 всюду на плоскости $x_1O_1x_2$ за исключением прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$.

Разделив в системе (3.7) первое уравнение на второе, получается дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2},$$

правая часть которого определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную по x_2 всюду на плоскости $x_1O_1x_2$, за исключением прямой $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$.

Таким образом, условия теоремы существования и единственности решения для уравнения (5.1) выполняются всюду, за исключением общих точек прямых $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$ и $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$. Так как $\det A \neq 0$, то решением системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \end{cases}$$

будет $x_1 = 0, x_2 = 0$, т.е. прямые пересекаются в начале координат – т. $O_1(0;0)$.

Начало координат, изображающие равновесное состояние, есть изолированная особая точка фазовой траектории, так как здесь $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{0}{0}$. Это единственная особая точка уравнения (5.1) на плоскости $x_1O_1x_2$.

Приведение системы уравнений к каноническому виду.

Составим характеристический определитель системы (3.7)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $a_{11} + a_{22} = \text{tr} A$ – след матрицы A ; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$ – определитель матрицы A .

Корни характеристического уравнения (5.2)

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

в зависимости от знака дискриминанта

$$D = (\text{tr} A)^2 - 4 \det A$$

определяют форму интегралов уравнений (3.7) и вместе с тем дают возможность судить об устойчивости невозмущенного движения системы.

Если уравнение (5.2) имеет простые корни или один кратный, но с простыми элементарными делителями, то система (3.7) может быть приве-

дена к каноническому виду

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda Y_1 + Y_2; \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda Y_2. \end{cases}$$

Для упрощения построения фазовых траекторий, система, представленная в векторной форме (3.8), с помощью замены неизвестных функций $X = CY$, после преобразований

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= CY; \\ \dot{X} &= AX; \end{aligned} \right\} \Rightarrow CY = AX = ACY, \quad \dot{Y} = C^{-1}ACY,$$

приводится к виду

$$\dot{Y} = JY, \tag{5.3}$$

где J – жорданова форма матрицы A , $J=A^1=C^{-1}AC$;

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристические числа и фазовые портреты.

В зависимости от вида матрицы \dot{Y} возможны шесть случаев, каждому из которых соответствует особый тип расположения фазовых траекторий около особой точки – начала координат, – изображающей невозмущённое равновесие состояния системы. Этими типами расположения фазовых траекторий около начала координат и будет геометрически определяться характер устойчивости невозмущённого состояния линеаризованной системы второго порядка.

С л у ч а й 1. Характеристические числа матрицы A действительные, различные и одного знака, т. е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$), и матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае система (5.3) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda_1 Y_1; \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda_2 Y_2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Система (5.4) не изменится если:

- заменить Y_1 на $-Y_1$;
- заменить Y_2 на $-Y_2$;
- заменить одновременно Y_1 на $-Y_1$ и Y_2 на $-Y_2$, т.е. фазовые траек-

тории этой системы расположены симметрично относительно осей Y_1 и Y_2 .

Поэтому достаточно ограничиться выучиванием фазовых траекторий только в первом квадрате плоскости $Y_1 O_1 Y_2$.

Разделяя переменные в уравнениях системы (5.4)

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{Y_1} = \lambda_1 dt; \\ \frac{dY_2}{Y_2} = \lambda_2 dt, \end{cases}$$

решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int \frac{dY_1}{Y_1} &= \lambda_1 \int dt; & \int \frac{dY_2}{Y_2} &= \lambda_2 \int dt; \\ \ln |Y_1| &= \lambda_1 t + C_1; & \ln |Y_2| &= \lambda_2 t + C_2; \\ |Y_1| &= e^{\lambda_1 t + C_1}; & |Y_2| &= e^{\lambda_2 t + C_2}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$Y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad Y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (5.5)$$

где постоянные интегрирования, $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, так как фазовые траектории рассматриваются в первом квадрате.

Здесь возможны предельные случаи:

а) если $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, то тогда $Y_1(t) = 0$, $Y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$ – уравнение полуоси $O_1 Y_2$;

б) если $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, то тогда $Y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, а $Y_2(t) = 0$ – уравнение полуоси $O_1 Y_1$.

Таким образом, полуоси $Y_1 = 0$ и $Y_2 = 0$ являются фазовыми траекториями.

Рассмотрим случай отрицательных корней. Для определенности примем, что $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Тогда

$$Y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 (e^{\lambda_1 t})^{\lambda_2/\lambda_1} = \frac{C_2}{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}} \cdot Y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

или

$$Y_2 = C Y_1^\lambda, \quad (5.6)$$

где $C = \frac{C_2}{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}}$, $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 1$.

В соответствии с решением (5.6), фазовые траектории представляют собой параболы порядка λ (рис. 5.1 а).

Характеристические числа матрицы A отрицательные, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = 0,$$

т. е. изображающая точка стремиться к началу координат. В этом случае особая точка $O_1(0;0)$ называется особой точкой типа *устойчивый узел*.

Угловые коэффициенты касательных и фазовым траекториям в начале координат на плоскости $Y_1 O_1 Y_2$ вычисляются как $\frac{dY_2}{dY_1}$ при $Y_1 \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{Y_1 \rightarrow 0} \frac{dY_2}{dY_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_2/dt}{dY_1/dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 \cdot C_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \cdot C_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{C_2}{C_1} \lambda \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

Таким образом, фазовые траектории входят в начало координат, касаясь оси $O_1 Y_1$.

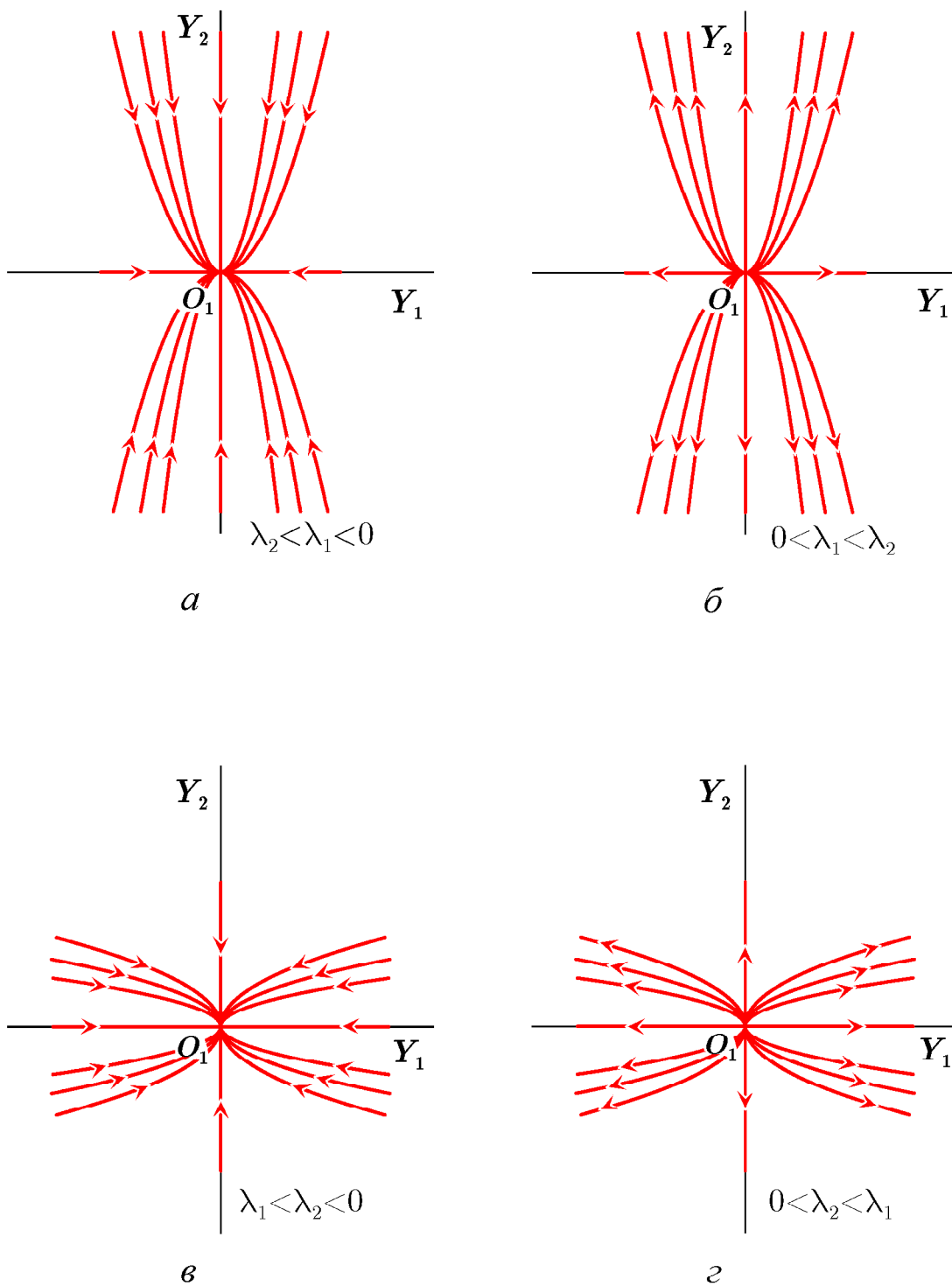


Рис. 5.1

Рассмотрим теперь случай положительных корней. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Фазовые траектории по-прежнему удовлетворяют уравнение (5.6), т.е. являются параболами.

Фазовые траектории в начале координат касаются оси O_1Y_1 , т.к.

$$\lim_{Y_1 \rightarrow 0} \frac{dY_2}{dY_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_2/dt}{dY_1/dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 \cdot C_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \cdot C_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{C_2}{C_1} \lambda \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

Кроме того, из формул (5.5) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \infty; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \infty,$$

т.е. изображающая точка удаляется от начала координат. В этом случае особая точка $O_1(0;0)$ называется особой точкой типа *неустойчивый узел* (рис. 5.1 б).

На рис. 5.1 в, г показаны случаи, соответствующие условию $\lambda_2/\lambda_1 < 1$, т.е. когда $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ и $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Здесь по отношению к фазовым траекториям оси координат меняются ролями и фазовые траектории касаются оси O_1Y_2 при входе в начало координат (устойчивый узел) или при выходе из него (неустойчивый узел). Уравнению параболы (5.6) можно придать канонический вид, если записать

$$Y_1 = C_* \cdot Y_2^{\lambda_*},$$

где $C_* = \frac{1}{C} = \frac{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}}{C_2}, \quad \lambda_* = \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1.$

С л у ч а й 2. Характеристические числа матрицы A одинаковы, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. При этом если матрица A диагональная, то для матриц A и \dot{J} можно записать:

$$A = \dot{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda = a_{11} = a_{22}.$$

Система (5.7) теперь принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda Y_1; \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda Y_2, \end{cases}$$

а её решение

$$Y_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad Y_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

Аналогично предыдущему случаю, здесь полуоси $O_1 Y_1$ и $O_1 Y_2$ также являются фазовыми траекториями. Исключая из решений время t , получается, что фазовые траектории – это прямые

$$Y_2 = \frac{C_2}{C_1} Y_1 = C Y_1,$$

проходящие через начало координат.

Ввиду симметрии полученных фазовых траекторий относительно осей координат достаточно рассмотреть траектории только в первом квадрате, где C_1 и C_2 неотрицательны.

Если $\lambda < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$$

и изображающая точка при $t \rightarrow \infty$ приближается к началу координат (рис. 5.2 а). Особая точка $O_1(0;0)$ в этом случае называется *устойчивым декритическим узлом*.

Если $\lambda > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \infty$$

и изображающая точка при $t \rightarrow \infty$ удаляется от начала координат (рис. 5.2 б). Особая точка $O_1(0;0)$ в этом случае называется *неустойчивым декритическим узлом*.

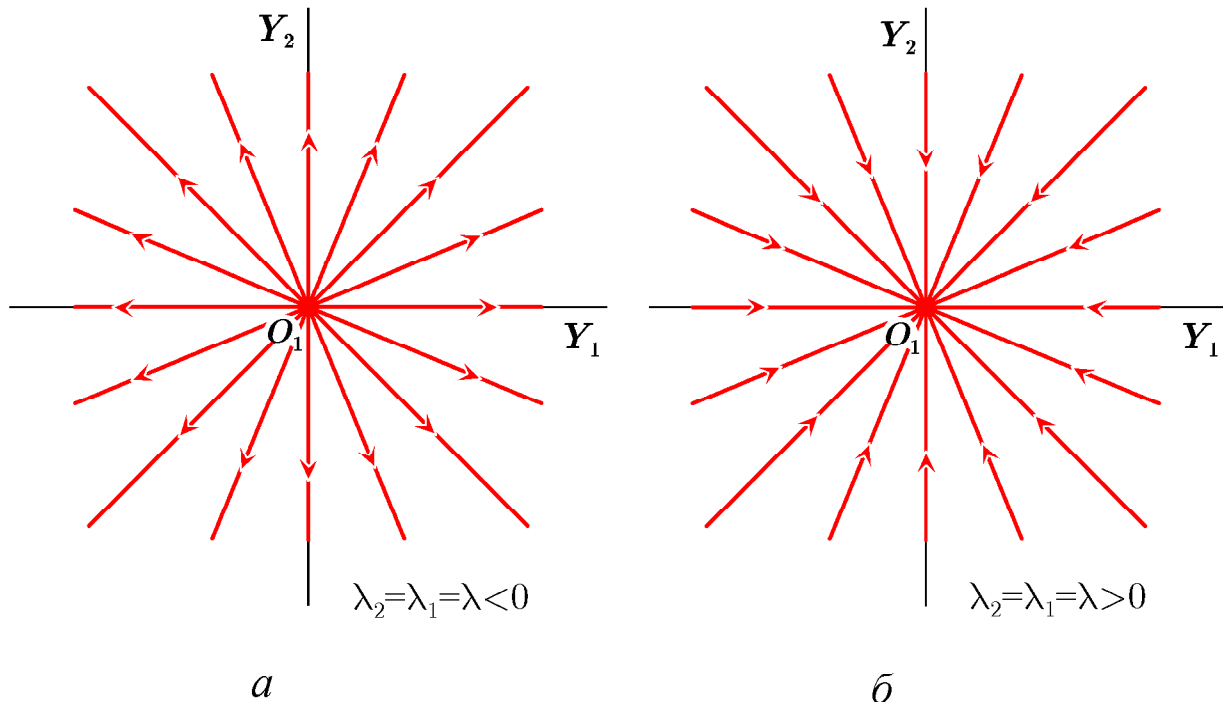


Рис. 5.2

С л у ч а й 3. Характеристические числа недиагональной матрицы A одинаковы, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, а матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Система (5.3) в этом случае записывается следующим образом

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda_1 Y_1 + Y_2; \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda Y_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Решение второго уравнения системы (5.7) аналогично (5.4), тогда первое уравнение системы (5.7)

$$\frac{dY_1}{dt} - \lambda Y_1 = C_2 e^{\lambda t} \quad (5.8)$$

является линейным дифференциальным уравнением 1–го порядка.

Решение уравнения (5.8) ищется по стандартной методике с помощью

замены

$$Y_1(t) = u(t) \cdot v(t),$$

тогда вместо первой производной получается

$$\frac{dY_1}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot v + \frac{dv}{dt} \cdot u,$$

а уравнение (5.8) записывается в виде

$$\frac{du}{dt} \cdot v + \frac{dv}{dt} \cdot u - \lambda \cdot uv = C_2 e^{\lambda t}.$$

Решение этого дифференциального уравнения, как известно, состоит из двух этапов:

1) для нахождения функции $v(t)$ второе и третье слагаемые группируются, а затем выражение в скобках приравнивается нулю, т. е.

$$\frac{du}{dt} \cdot v + u \left(\frac{dv}{dt} - \lambda v \right) = C_2 e^{\lambda t},$$

$$\frac{dv}{dt} - \lambda v = 0,$$

разделяя переменные

$$\int \frac{dv}{v} - \lambda \int dt,$$

получается

$$\ln |v| = \lambda t,$$

откуда

$$v = e^{\lambda t};$$

2) функция $u(t)$ находится из оставшихся частей дифференциального уравнения, после подстановки в него $v = e^{\lambda t}$, тогда

$$\frac{du}{dt} \cdot e^{\lambda t} = C_2 e^{\lambda t},$$

$$\int du = C_2 \int dt,$$

откуда

$$u = C_2 t + C_1.$$

Окончательно решение дифференциального уравнения (5.8) принимает вид

$$Y_1 = u \cdot v = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}. \quad (5.9)$$

Система уравнений (5.7) не изменится при одновременной замене Y_1 на $-Y_1$ и Y_2 на $-Y_2$, поэтому фазовые траектории будут симметричны относительно начала координат. Таким образом достаточно изучить поведение фазовых траекторий только в верхней полуплоскости (при $C_2 \geq 0$) плоскости $Y_1 O_1 Y_2$. В нижней полуплоскости фазовые траектории изображаются, исходя из условия их симметрии относительно начала координат.

Если положить в (5.9) $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, то получим решение $Y_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $Y_2 = 0$. Фазовая траектория, соответствующая этому решению, представляет собой при $C_1 > 0$ положительную полуось $O_1 Y_1$, а при $C_1 < 0$ – отрицательную полуось $O_1 Y_1$.

Если $\lambda < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1 + C_2 t}{e^{-\lambda t}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2}{-\lambda e^{-\lambda t}} = 0,$$

т.е. изображающая точка по любой из фазовых траекторий стремиться к началу координат, а особая точка $O_1(0;0)$ называется в этом случае *устойчивым выраженным узлом* (рис. 5.3 а); если $\lambda > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = C_2 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = \infty,$$

поэтому изображающая точка удаляется от начала координат. Фазовые траектории соответствующие случаю $\lambda > 0$ изображены на рис. 5.3 б, а особая точка $O_1(0;0)$ называется неустойчивым вырожденным узлом.

Уравнения фазовых траекторий могут быть получены непосредственно из системы (5.7) если записать

$$\frac{dY_1/dt}{dY_2/dt} = \frac{\lambda Y_1 + Y_2}{\lambda Y_2} \quad \text{или} \quad \frac{dY_1}{dY_2} = \frac{Y_1}{Y_2} + \frac{1}{\lambda}.$$

Полученное уравнение также является линейным дифференциальным уравнением 1 –го порядка

$$\frac{dY_1}{dY_2} \cdot v + \frac{dv}{dY_2} \cdot u - \frac{1}{Y_2} \cdot uv = \frac{1}{\lambda}.$$

Откуда:

$$1) \frac{dv}{dY_2} \cdot v + \frac{dv}{dY_2} \cdot u - \frac{1}{Y_2} \cdot uv = \frac{1}{\lambda};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dY_2}{Y_2};$$

$$\ln |v| = \ln |Y_2|;$$

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln |Y_2| + C.$$

Окончательно, решение (5.10) имеет вид

$$Y_1 = u \cdot v = \left(\frac{1}{\lambda} \ln |Y_2| + C \right) \cdot Y_2 = CY_2 + \frac{Y_2}{\lambda} \ln |Y_2|. \quad (5.11)$$

При стремлении к началу координат, угловой коэффициент этих кривых равен

$$\begin{aligned} \lim_{Y_1 \rightarrow \infty} \frac{dY_2}{dY_1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_2/dt}{dY_1/dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda C_2 e^{\lambda t}}{C_2 e^{\lambda t} + \lambda(C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2}{C_1 + C_2 t + \frac{C_2}{\lambda}} = 0, \end{aligned}$$

т. е. фазовые траектории в начале координат имеют касательную – ось $O_1 Y_1$.

Каждая фазовая траектория пересекает ось $O_1 Y_2$ в точке, в которой $Y_1 = 0$, а вертикальные координаты находятся из уравнения

$$Y_2 \left(C + \frac{1}{\lambda} \ln |Y_2| \right) = 0$$

Тогда $Y_2 = 0$ – соответствует особой точке $O_1(0;0)$, а координаты $Y_2 = \pm e^{-C\lambda}$ получается приравнивая нулю выражение в скобках.

Из условия $\frac{dY_1}{dY_2} = 0$ находятся экстремумы функции $Y_1 = f(Y_2)$.

Дифференцируя (5.11) и приравнивая полученное выражение нулю

$$\frac{dY_1}{dY_2} = C + \frac{1}{\lambda}(\ln |Y_2| + 1) = 0,$$

находятся координаты $Y_2 = \pm e^{(C\lambda+1)}$. Соответствующие им экстремальные значения функции согласно (5.11) равны

$$Y_1 = Y_2 \left(C + \frac{1}{\lambda} \ln |Y_2| \right) = e^{-(C\lambda+1)} \left(C + \frac{1}{\lambda} [-(C\lambda + 1)] \ln e \right) = \frac{1}{\lambda} e^{-(C\lambda+1)};$$

$$Y_1 = -\frac{1}{\lambda} e^{-(C\lambda+1)}.$$

Таким образом, для качественного построения каждой из фазовых траекторий имеется пять характерных точек кривой (рис. 5.3 а, б).

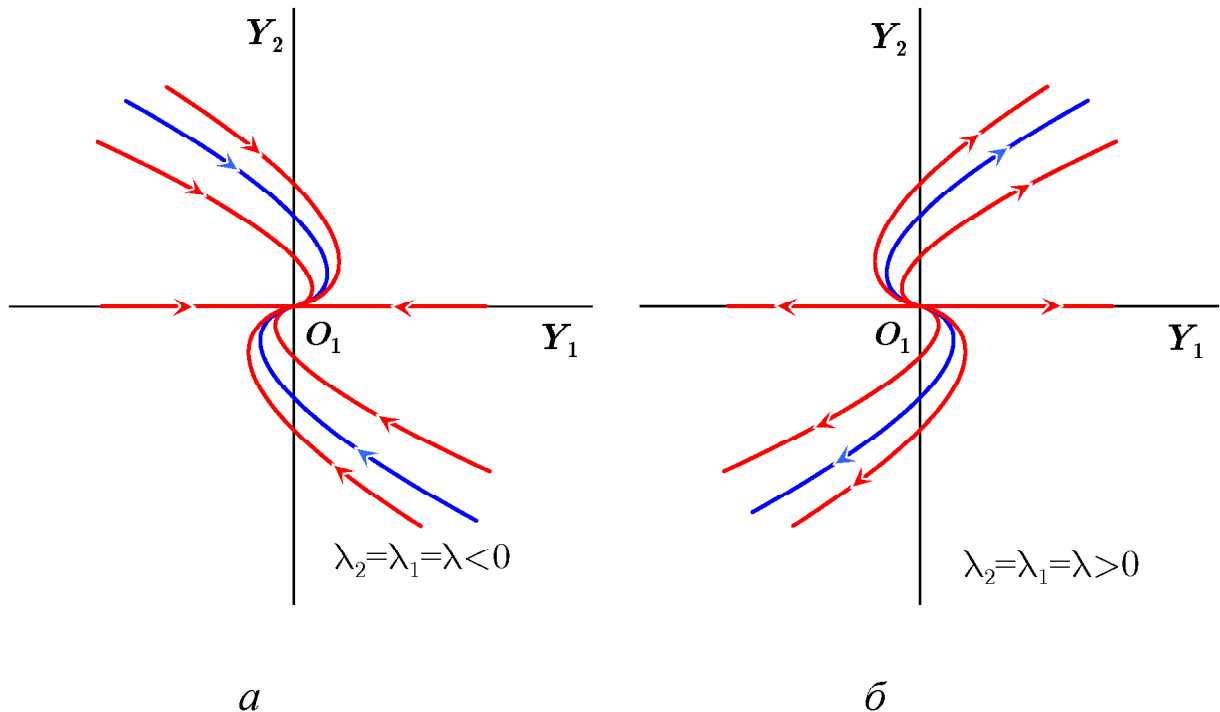


Рис. 5.3

С л у ч а й 4. Характеристические числа матрицы A действительные и разных знаков, примем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Система (5.4) и ее решение (5.5) в этом случае сохраняют смысл, т. е.

$$Y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}; \quad Y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

также сохраняется симметрия фазовых траекторий относительно координатных осей. Поэтому, исследуя фазовые траектории в первом квадрате, произвольные постоянные, как и ранее, должны быть, $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$.

Если положить $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, то получается уравнение положительной полуоси $O_1 Y_2$; если положить $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ – то уравнение положительной полуоси $O_1 Y_1$. Следовательно, положительные полуоси являются фазовыми траекториями. При $t \rightarrow \infty$ $Y_1 \rightarrow 0$, а $Y_2 \rightarrow \infty$.

Если полагать $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, то для траекторий по-прежнему можно записать (5.6)

$$Y_2 = C Y_1^\lambda,$$

где $C = \frac{C_2}{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}}$, но $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2 < 0$.

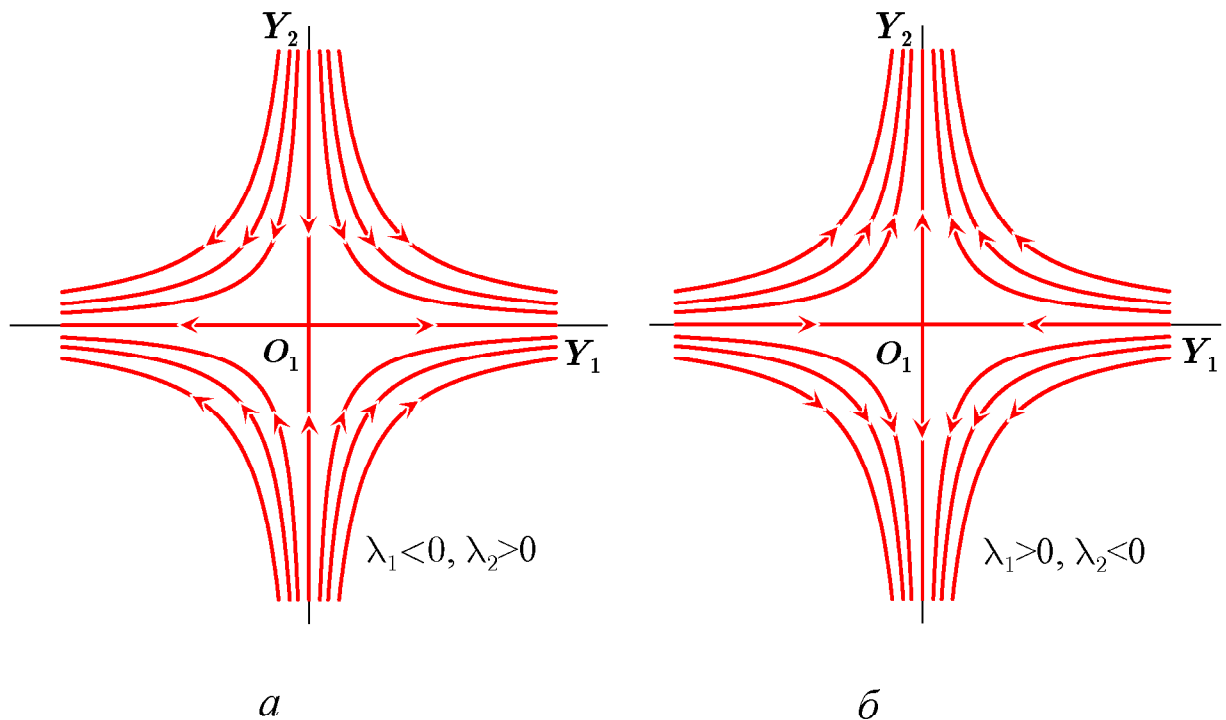


Рис. 5.4

Фазовые траектории при $\lambda < 0$ представляют собой кривые гиперболического типа, в которые они обращаются если $\lambda = -1$. Попад на одну из этих траекторий, изображающая точка будет в итоге удаляться от начала координат, которое представляет собой неустойчивое равновесное состояние (рис. 5.4). Особая точка такого типа называется *седлом*.

С л у ч а й 5. Характеристические числа матрицы A комплексно-сопряжённые $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. При этом матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{pmatrix}.$$

В данном случае система (5.4) будет выглядеть так

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = (\alpha + \beta i)Y_1; \\ \frac{dY_2}{dt} = (\alpha - \beta i)Y_2, \end{cases} \quad (5.12)$$

а её решение можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 e^{(\alpha + \beta i)t} = C_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t}; \\ Y_2 &= C_2 e^{(\alpha - \beta i)t} = C_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Используя формулу Эйлера для показательной функции с мнимым показателем

$$\begin{aligned} e^{i\beta t} &= \cos \beta t + i \sin \beta t; \\ e^{-i\beta t} &= \cos \beta t - i \sin \beta t, \end{aligned}$$

в решении (5.13) выполняется переход к тригонометрическим функциям

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t); \\ Y_2 &= C_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t). \end{aligned}$$

Для получения решения системы в действительной области рассматривается решение

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}; \quad \bar{Y}_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2i}. \quad (5.14)$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= e^{\alpha t} \left(\frac{C_1 + C_2}{2} \cos \beta t + \frac{C_1 - C_2}{2} i \sin \beta t \right); \\ \bar{Y}_2 &= e^{\alpha t} \left(\frac{C_1 - C_2}{2i} \cos \beta t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin \beta t \right),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \cos \beta t - \bar{C}_2 i^2 \sin \beta t) = e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \cos \beta t + \bar{C}_2 \sin \beta t); \\ \bar{Y}_2 &= e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \sin \beta t - \bar{C}_2 \cos \beta t),\end{aligned}$$

где $\bar{C}_1 = \frac{C_1 + C_2}{2}$, $\bar{C}_2 = \frac{C_2 - C_1}{2i}$ – новые произвольные постоянные.

Если обозначить

$$\bar{C} = \sqrt{\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2}, \quad \cos \theta = \frac{\bar{C}_1}{\sqrt{\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2}},$$

то, используя тригонометрические соотношения

$$\begin{aligned}\cos \theta \cdot \cos \beta t + \sin \theta \cdot \sin \beta t &= \cos(\beta t - \theta); \\ \cos \theta \cdot \sin \beta t - \sin \theta \cdot \cos \beta t &= \sin(\beta t - \theta),\end{aligned}$$

решению (5.15) можно придать вид

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= \bar{C} e^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta); \\ \bar{Y}_2 &= \bar{C} e^{\alpha t} \sin(\beta t - \theta).\end{aligned}\tag{5.16}$$

Полученное решение удобно анализировать в полярной системе координат. Для этого вводятся в рассмотрение полярный радиус $\rho(t)$ и полярный угол $\gamma(t)$ – координаты изображающей точки на фазовой траектории.

Тогда

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sqrt{\bar{Y}_1^2 + \bar{Y}_2^2} = \bar{C} e^{\alpha t}, \\ \operatorname{tg} \varphi(t) &= \frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1} = \operatorname{tg}(\beta t - \theta) \quad \text{или} \quad \varphi(t) = \beta t - \theta + \pi k.\end{aligned}$$

С учётом того, что

$$t = \frac{1}{\beta} [\varphi(t) + \theta - \pi k]$$

для уравнения фазовых траекторий в полярных координатах можно запи-

сать

$$\rho(t) = \bar{C} \cdot e^{\frac{\chi}{\beta} \bar{\varphi}(t)}, \quad (5.17)$$

где $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) + \theta - \pi k$.

Уравнение (5.17) представляет собой уравнение логарифмической спирали. При этом, если $\alpha < 0$ (вещественная часть комплексно-сопряжённых корней отрицательна), то при $t \rightarrow \infty$ величина $\rho(t)$ убывает и кривая имеет вид, показанный на рис. 5.5 а. Особая точка $O(0;0)$ называется особой точкой типа устойчивый фокус. Если $\alpha > 0$ то при $t \rightarrow \infty$ величина $\rho(t)$ растёт, а особая точка называется неустойчивым фокусом (рис. 5.5 б). Изображающая точка при $\alpha < 0$ асимптотически приближается к началу координат, а при $\alpha > 0$ – асимптотически удаляется.

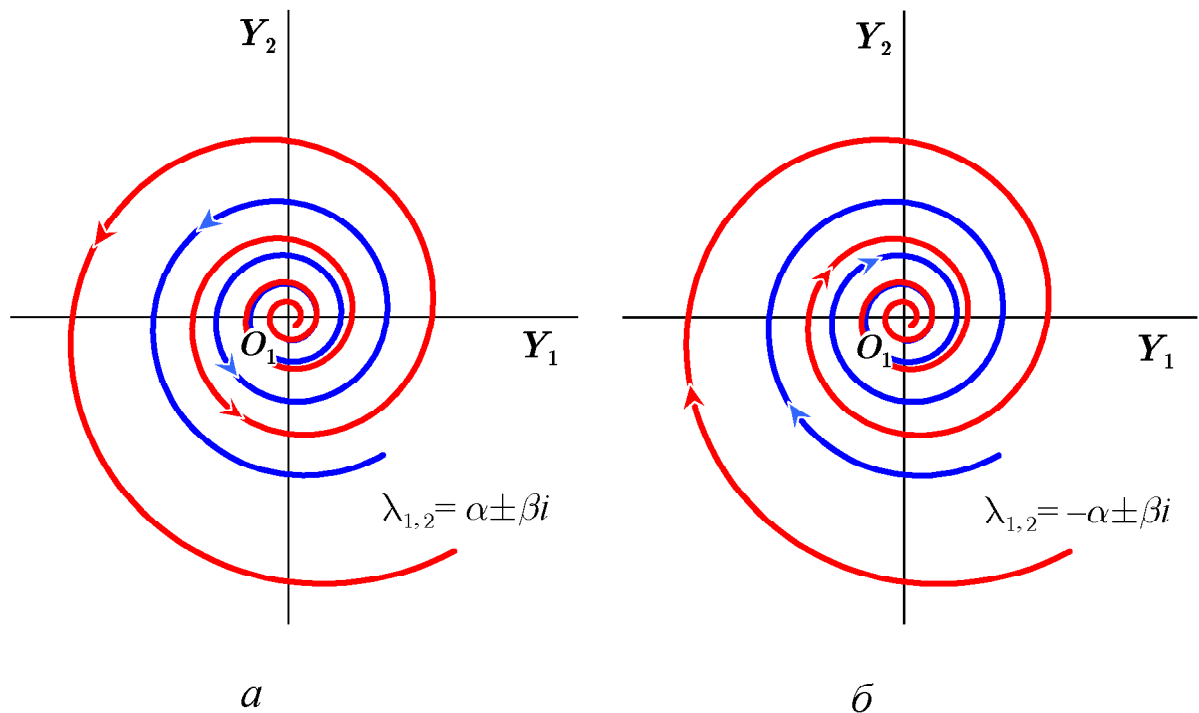


Рис. 5.5

С л у ч а й 6. Характеристические числа матрицы A мнимые $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$. В этом случае матрица

$$J = \begin{pmatrix} \beta i & 0 \\ 0 & -\beta i \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (5.12) упрощается

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = i\beta Y_1; \\ \frac{dY_2}{dt} = -i\beta Y_2, \end{cases} \quad (5.18)$$

а уравнение траекторий в полярных координатах является частным случаем (5.17) при $\alpha = 0$, т. е.

$$\rho(t) = \bar{C}. \quad (5.19)$$

Уравнение (5.19) является уравнением окружности, поэтому фазовые траектории представляют собой семейство concentric окружностей (рис. 5.6). В этом случае особая точка $O(0;0)$ называется особой точкой типа *центр*.

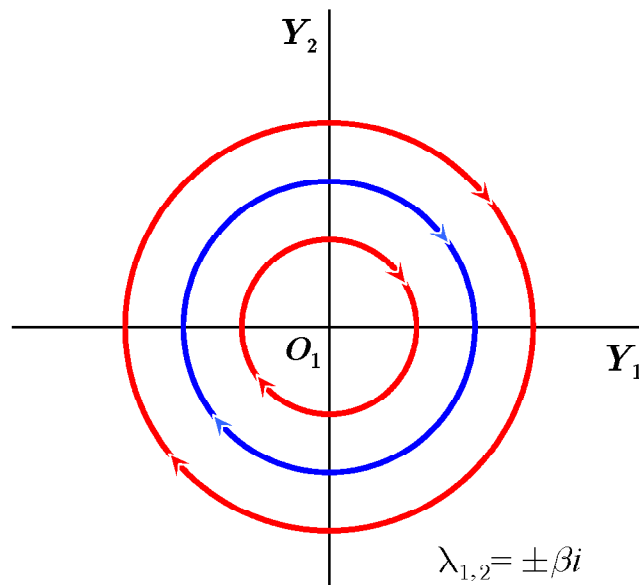


Рис. 5.6

Динамические системы, имеющие особую точку типа центр, называются консервативными.

6. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Решение характеристического уравнения степени n

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (6.1)$$

автономной системы (3.3) содержит n корней, которые могут быть вещественными, комплексными попарно сопряжёнными, мнимыми попарно сопряжёнными, нулевыми. В общем случае

$$\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

На рис. 6.1 показаны возможные положения корней в комплексной плоскости корней λ при

$$\lambda_1 = \alpha_1; \quad \lambda_2 = \alpha_2 + \beta_2 i; \quad \lambda_3 = \alpha_2 - \beta_2 i; \quad \lambda_4 = 0;$$

$$\lambda_5 = -\alpha_5; \quad \lambda_6 = -\alpha_6 + \beta_6 i; \quad \lambda_7 = -\alpha_6 - \beta_6 i.$$

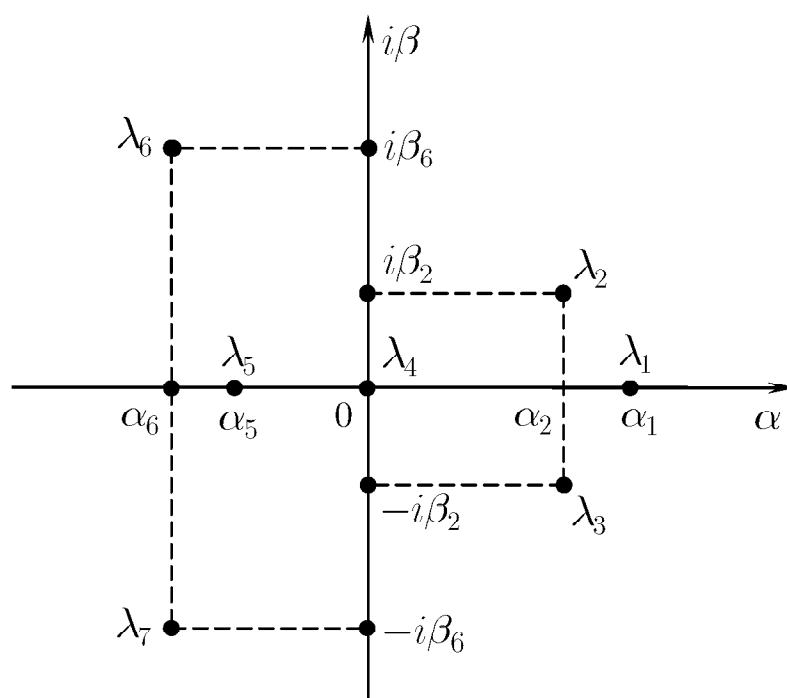


Рис. 6.1

Если все корни различные, то их называют простыми, если среди корней есть одинаковые, то их называют кратными.

Обычно корни с отрицательными вещественными частями принято называть *левыми*, поскольку они в комплексной плоскости корней расположены слева от мнимой оси, а корни с положительными вещественными частями – *правыми* корнями.

Условие устойчивости линейной системы формулируется следующим образом: *для того, чтобы линейная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни её характеристического уравнения были левыми.*

Указанное условие устойчивости легко пояснить, рассматривая решения автономной системы, которые при отсутствии кратных корней имеют вид

$$x_j(t) = C_j e^{\lambda_j t},$$

где λ_j – корни характеристического уравнения (6.1); C_j – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Заметим, что λ_j характеристического уравнения (6.1); зависят только от вида левой части системы (3.3). Постоянные интегрирования зависят и от вида правой её части, поэтому быстрота затухания и форма переходного процесса определяется как левой, так и правой частями исходной системы дифференциальных уравнений. Однако, поскольку в понятие устойчивости входит только факт наличия или отсутствия затухания переходного процесса, устойчивость линейной системы не зависит от вида правой части системы и определяется только характеристическим уравнением (6.1). Так как характер переходного процесса в линейной системе определяют только по виду левой части системы (3.3), то для определения качественной картины переходных процессов практически безразлично, записывать ли исходную систему дифференциальных уравнений или систему относительно возмущений.

Вещественным корням $\lambda_j = \alpha_j$ в (6.1) соответствуют решения, пред-

ставляющие собой экспоненты $C_j e^{\alpha_j t}$. Очевидно, что отрицательным (левым) корням $\alpha_j < 0$ соответствуют затухающие экспоненты (рис. 6.2 а), положительным (правым) корням $\alpha_j > 0$ – возрастающие экспоненты (рис. 6.2 б) и при нулевых корнях $\alpha_j = 0$ слагаемые представляют собой прямые, параллельные оси времени (рис. 6.2 в).

Комплексные корни характеристического уравнения всегда попарно сопряжённые: $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$, $\lambda_{j+1} = \alpha_j - \beta_j i$. Решения, определяемые этими корнями при использовании известной формулы Эйлера $e^{\pm \beta_j i t} = \cos \beta_j t \pm i \sin \beta_j t$ представлены в виде

$$C_j e^{(\alpha_j + \beta_j i)t} + C_{j+1} e^{(\alpha_j - \beta_j i)t} = A_j e^{\alpha_j t} \sin(\omega_j t + \varphi_j),$$

где A_j – амплитуда колебаний, φ_j – начальная фаза. В этом случае при $\alpha_j < 0$ получаются затухающие колебания (рис. 6.2 з), при $\alpha_j > 0$ – расходящиеся колебания (рис. 6.2 д), а при $\alpha_j = 0$ незатухающие колебания (рис. 6.2 е). Для устойчивости и в этом случае необходимо выполнение условия $\alpha_j < 0$. В самом общем случае среди корней характеристического уравнения (6.1) могут оказаться кратные корни. Если имеется r кратных корней λ_j , то появляются слагаемые вида

$$(C_{j,r-1} t^{r-1} + \dots + C_{j,1} t + C_{j,0}) e^{\lambda_j t}.$$

При этом если корень $\lambda_j = \alpha_j \pm \beta_j i$ имеет отрицательную вещественную часть $\alpha_j < 0$, то множитель $e^{\lambda_j t}$ будет с течением времени убывать. Множитель в скобках неограниченно растёт, поэтому мы имеем неопределённость $\infty \cdot 0$. Однако известно, что $e^{-|\alpha_j|t}$ быстрее стремится к нулю, чем выражение $C_{j,r-1} t^{r-1}$, поэтому при $\alpha_j < 0$ эта группа слагаемых с течением времени также стремится к нулю.

Таким образом видно, что в самом общем случае для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (6.1) были левыми.

Вычисление корней просто лишь для корней характеристического уравнения первой и второй степени. Существуют общие выражения для корней уравнений третьей и четвёртой степеней, но эти выражения громоздки и практически малопригодны. Общие выражения для корней уравнений более высоких степеней вообще невозможно написать через коэффициенты характеристического уравнения. Поэтому важное значение приобретают правила, которые позволяют определять устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют *критериями устойчивости*. С помощью критериев устойчивости можно не только установить, устойчива система или нет, но и выяснить, как влияют на устойчивость те или иные параметры и структурные изменения в системе.

Критерии устойчивости могут быть разделены на *алгебраические* и *частотные*. Целесообразный выбор того или иного критерия устойчивости при решении конкретных задач позволяет провести исследование устойчивости наиболее простым путём. Когда все корни характеристического уравнения являются левыми, т. е. имеют отрицательные вещественные части, полином, соответствующий развёрнутому определителю характеристического уравнения, называется *устойчивым полиномом*.

Решить вопрос об устойчивости или неустойчивости полинома можно без предварительного вычисления его корней с помощью специальных *критериев устойчивости*, предложенный Раусом, Гурвицем, Найквистом, Михайловым и др. Некоторые из этих критериев дают возможность не только установить распределение корней полинома на комплексной плоскости, но также и определить необходимые изменения параметров системы, для того, чтобы сделать её движение устойчивым.

Алгебраические критерии устойчивости.

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения (6.1). Прежде чем познакомиться с ними, заметим, что *необходимым условием устойчивости* системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0 > 0; a_1 > 0, \dots, a_n > 0.$$

Действительно, в соответствии с теоремой Безу уравнение (6.1) можно представить в виде произведения множителей, содержащих корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$a_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0. \quad (6.2)$$

Если все корни характеристического уравнения будут отрицательны, то все множители выражения (6.2) будут иметь вид

$$a_0 (\lambda + |\alpha_1|)(\lambda + |\alpha_2|) \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0 \quad (6.3)$$

где $\lambda_j = -|\alpha_j|$ – значения корней.

Производя перемножение в (6.3), получим (6.1), в котором все коэффициенты будут определяться положительными членами $|\alpha_j|$ выражения (6.3), т. е. будут положительны.

Если характеристическое уравнение (6.1) имеет комплексные корни с отрицательными вещественными частями, то оно может быть представлено в виде

$$a_0 (\lambda + |\alpha_1|) \cdot (\lambda + |\alpha_2| - \beta_2 i) \cdot (\lambda + |\alpha_2| + \beta_2 i) \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0$$

или

$$a_0 (\lambda + |\alpha_1|) \cdot [(\lambda + |\alpha_2|)^2 + \beta_2^2] \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) также приводится к виду уравнения (6.1) с положительными коэффициентами.

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным условием устойчивости, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни являются левыми. Однако для систем третьего и высших порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием устойчивости, но не достаточным. В этом случае все вещественные корни характеристического уравнения (если они есть) левые, комплексные корни могут быть и правыми.

Критерий устойчивости Гурвица.

В 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем был разработан алгебраический критерий устойчивости в форме определителей, составляемых из коэффициентов характеристического уравнения системы.

Из коэффициентов характеристического уравнения (6.1) строят сначала *главный определитель Гурвица* по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – коэффициентами с последовательно убывающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n (n – порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули, т. е. записывают

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Отчёркивая в главном определителе Гурвица, как показано пунктиром, диагональные миноры, получаем определители Гурвица низших порядков:

$$\Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots;$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix}; \dots, \quad (6.5)$$

где номер определителя Гурвица определяется номером коэффициента по диагонали, для которого составляют данный определитель.

Критерий устойчивости Гурвица формулируется следующим образом: для того чтобы автономная система дифференциальных уравнений была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки одинаковые со знаком первого коэффициента характеристического уравнения, т. е. при $a_0 > 0$ были положительными.

Таким образом, при $a_0 > 0$ для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Раскрывая, например, определители Гурвица для характеристических уравнений первого, второго, третьего и четвёртого порядков, можно получить следующие условия устойчивости:

1) для уравнения первого порядка ($n = 1$), т. е.

$$a_0 \lambda + a_1 = 0,$$

условия устойчивости $a_0 > 0, a_1 > 0$;

2) для уравнения второго порядка ($n = 2$), т. е.

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

условия устойчивости $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$;

3) для уравнения третьего порядка ($n = 3$), т. е.

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

условия устойчивости

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0; a_3 > 0; a_1a_2 - a_0a_3 > 0; \quad (6.6)$$

4) для уравнения четвёртого порядка ($n = 4$), т. е.

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

условия устойчивости

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0; a_3 > 0; a_4 > 0;$$
$$a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0. \quad (6.7)$$

Таким образом, для систем третьего и четвёртого порядков кроме условия положительности коэффициентов в качестве необходимых и достаточных условий устойчивости необходимо соблюдение дополнительных неравенств (6.6) или (6.7).

При $n \geq 5$ число подобных дополнительных неравенств возрастает, процесс раскрытия определителей становится довольно трудоёмким и громоздким. Поэтому критерий устойчивости Гурвица обычно применяют при $n \leq 4$.

В последнем столбце главного определителя Гурвица отличен от нуля только один коэффициент a_n , поэтому

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Отсюда видно, что при $a_n > 0$ для проверки устойчивости системы достаточно найти только первых $n - 1$ определителей Гурвица. Если все определители Гурвица низшего порядка положительны, то система находится на границе устойчивости, когда главный определитель равен нулю

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Последнее равенство возможно в двух случаях: $a_n = 0$ или $\Delta_{n-1} = 0$. В первом случае система находится на границе апериодической устойчивости (один из корней характеристического уравнения равен нулю); во втором случае – на границе колебательной устойчивости (два комплексно – сопряжённых корня характеристического уравнения находятся на мнимой оси). Используя критерий Гурвица, можно при заданных параметрах системы принять за неизвестный какой-либо один параметр и определить его предельное (критическое) значение, при котором система будет находиться на границе устойчивости.

Следует заметить, что критерий Гурвица может быть получен из критерия устойчивости Рауса, поэтому часто критерий Гурвица называют критерием Рауса – Гурвица.

Критерий устойчивости Лъенара – Шипара.

Для исследования устойчивости систем, имеющих порядок характеристического уравнения $n \geq 5$, удобно применять одну из модификаций алгебраического критерия устойчивости Гурвица, предложенную в 1914 г. П. Лъенаром и Р. Шипаром.

Доказано, что в том случае, когда все коэффициенты характеристического уравнения (6.1) положительны, из того факта, что положительны все определители $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \dots$ с нечётными индексами, следует и положительность определителей А. Гурвица $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots$ с чётными индексами и наоборот.

Поэтому в тех случаях, *когда выполнены необходимые условия устойчивости*, т. е. $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, необходимые и достаточные условия устойчивости сводятся к тому, чтобы среди определителей Гурвица $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ были положительны все определители с чётными (или же все определители с нечётными) индексами.

Таким образом, для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0; \\ \Delta_1 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

или

$$\left. \begin{aligned} a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0; \\ \Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_6 > 0, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Последняя формулировка критерия устойчивости, называемая *критерием устойчивости Лъенара – Шипара*, требует раскрытия меньшего числа определителей, чем обычный критерий Гурвица, а поэтому особенно удобна при исследовании устойчивости динамических систем высокого порядка.

Частотные критерии устойчивости. Принцип аргумента.

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими и получили широкое распространение, так как позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем высокого порядка, а также имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность.

В основе частотных критериев устойчивости лежит следствие из известного в теории функций комплексного переменного *принципа аргумента*, который кратко изложен ниже.

Пусть дан некоторый полином n – й степени (6.1), который в соответствии с теоремой Безу можно представить в виде

$$D(\lambda) = a_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n),$$

где $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ – корни уравнения $D(\lambda) = 0$.

На комплексной плоскости каждый корень геометрически может быть изображён вектором, проведённым из начала координат к точке λ_j (рис. 6.3 а). Длина этого вектора равна модулю комплексного числа λ_j , т. е. $|\lambda_j|$, а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси, – аргументу или фазе комплексного числа λ_j , т. е. $\text{Arg}\lambda_j$.

Величины $(\lambda - \lambda_j)$ геометрически изображаются векторами, проведёнными из точки λ_j к произвольной точке λ (рис. 6.3 б). В частном случае при $\lambda = i\beta$ получим

$$D(i\beta) = a_0 (i\beta - \lambda_1)(i\beta - \lambda_2) \dots (i\beta - \lambda_n). \quad (6.10)$$

Концы элементарных векторов $(i\beta - \lambda_j)$ будут находиться на мнимой оси в точке $\lambda = i\omega$ (рис. 6.3 в), а $D(i\beta)$ в выражении (6.10) представляет собой вектор, равный произведению элементарных векторов $(i\beta - \lambda_j)$ и действительного числа a_0 .

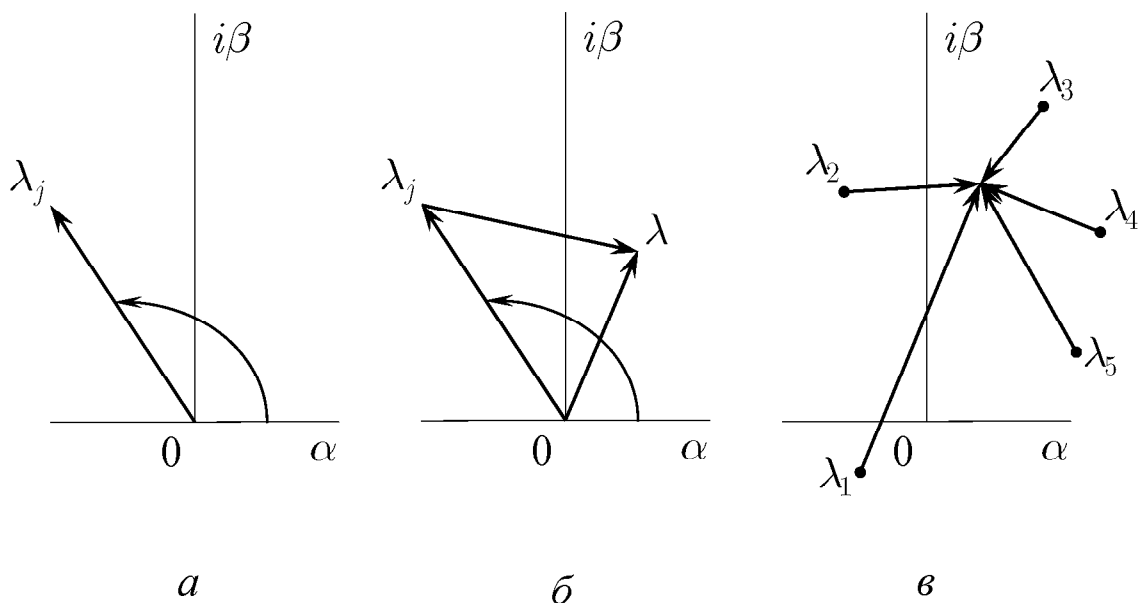


Рис. 6.4

Модуль этого вектора равен произведению модулей элементарных векторов и a_0 :

$$|D(i\beta)| = a_0 |i\beta - \lambda_1| \cdot |i\beta - \lambda_2| \dots |i\beta - \lambda_n|, \quad (6.11)$$

а аргумент или фаза его равна сумме аргументов элементарных векторов

$$\text{Arg}D(i\beta) = \text{Arg}(i\beta - \lambda_1) + \text{Arg}(i\beta - \lambda_2) + \dots + \text{Arg}(i\beta - \lambda_n). \quad (6.12)$$

Примем вращение против часовой стрелки за положительное. Тогда при изменении β от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор повернётся на угол π , если его начало, т. е. корень λ_j , расположено слева от мнимой оси, и на угол $-\pi$, если корень расположен справа от мнимой оси (рис. 6.4).

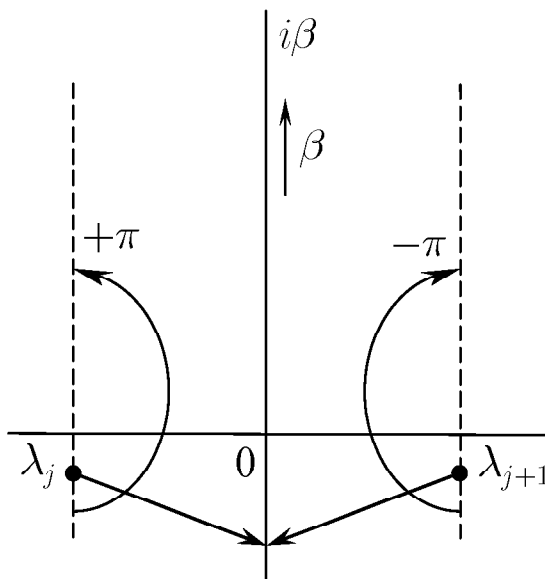


Рис. 6.4

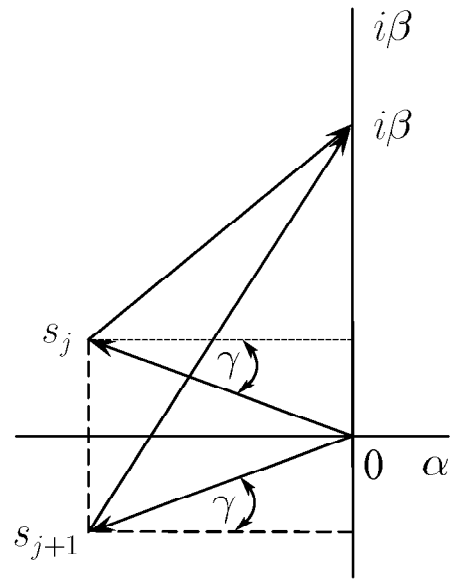


Рис. 6.5

Предположим, что полином $D(\lambda)$ имеет m правых корней и $n - m$ левых. Тогда при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ изменение (приращение) аргумента вектора $D(i\beta)$, равное сумме углов поворота векторов $(i\beta - \lambda_j)$, равно

$$\Delta \text{Arg}D(i\beta) \Big|_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m). \quad (6.13)$$

Отсюда следует, что *изменение (приращение) аргумента $D(i\beta)$ при изменении частоты β от $-\infty$ до $+\infty$ равно разности между числом левых и правых корней уравнения $D(\lambda) = 0$, умноженной на π .*

Очевидно, что при изменении частоты β от 0 до $+\infty$ изменение аргумента вектора $D(i\beta)$ будет вдвое меньше:

$$\Delta \text{Arg} D(i\beta) = \Big|_{\beta=0}^{\beta=+\infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2m). \quad (6.14)$$

Каждый из векторов $(i\beta - \lambda_j)$, соответствующих вещественным корням, повернётся теперь на угол $-\pi/2$ или $\pi/2$. Векторы

$$i\beta - (\alpha_j + i\beta_i), \quad i\beta + (\alpha_j - i\beta_j),$$

которые составляют пару, соответствующую, например, двум комплексно – сопряжённым корням, повернутся: один – на угол $\frac{\pi}{2} + \gamma$, а другой – на $\frac{\pi}{2} - \gamma$, где γ – угол, образовавшийся вектором, проведённым от корня в начало координат, с осью абсцисс (рис. 6.5). Общее приращение аргумента произведения этих векторов при изменении β от 0 до $+\infty$ равно

$$\pi/2 + \gamma + \pi/2 - \gamma = \pi.$$

В основу всех частотных критериев устойчивости положено уравнение (6.13), определяющее приращение аргумента $D(i\beta)$ при изменении β от $-\infty$ до $+\infty$, или (6.14) – при изменении β от 0 до $+\infty$.

Частотный критерий устойчивости Михайлова.

Этот критерий, сформулированный в 1938 г. А.В. Михайловым, является, по существу, геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости системы на основании рассмотрения некоторой кривой, называемой кривой Михайлова.

Пусть дано характеристическое уравнение системы (6.1).

Если подставить в этот полином чисто мнимое значение $\lambda = i\beta$, то получим комплексный полином

$$\begin{aligned} D(i\beta) &= a_0 (i\beta)^n + a_1 (i\beta)^{n-1} + \dots + a_n = \\ &= X(\beta) + iY(\beta) = D(\beta)e^{i\psi(\beta)}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X(\beta) &= a_n - a_{n-2}\beta^2 + a_{n-4}\beta^4 - \dots ; \\ Y(\beta) &= \beta(a_{n-1} - a_{n-3}\beta^2 + a_{n-5}\beta^4 - \dots). \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

называют соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова; функции $D(\beta)$ и $\Psi(\beta)$ представляют собой модуль и фазу (аргумент) вектора $D(i\beta)$.

При изменении частоты β вектор $D(i\beta)$, изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую *кривой (годографом) Михайлова*.

В соответствии с (6.14) угол поворота $D(i\beta)$ вокруг начала координат при изменении частоты β от 0 до $+\infty$ равен

$$\Delta \text{Arg} D(i\beta) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2m).$$

Отсюда число правых корней полинома $D(\lambda)$ равно

$$m = \frac{\pi n/2 - \Delta \text{Arg} D(i\beta) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}}{2}. \quad (6.17)$$

Из (6.17) получается условие, когда число правых корней m будет равно нулю

$$\Delta \text{Arg} D(i\beta) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi n}{2}.$$

Условие (6.18) является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней характеристического уравнения были левыми; иначе говоря,

среди них не должно быть корней, лежащих на мнимой оси и обращающих в нуль комплексный полином $D(i\beta)$, т. е. должно выполняться ещё одно условие

$$D(i\beta) \neq 0. \quad (6.19)$$

Формулы (6.18), (6.19) представляют математическое выражение критерия устойчивости Михайлова.

Заметим, что для устойчивых систем кривая Михайлова начинается при $\beta = 0$ на вещественной положительной полуоси, поскольку при $a_0 > 0$ все коэффициенты характеристического уравнения положительны и $D(0) = a_n > 0$. Кроме того, для устойчивых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, фаза (аргумент) $\Psi(\beta)$ с ростом частоты β должна возрастать монотонно, т. е. вектор $D(i\beta)$ должен поворачиваться только против часовой стрелки, поскольку с ростом частоты монотонно возрастают имеющие одинаковые (положительные) знаки фазы элементарных векторов $(i\beta - \lambda_j)$, являющиеся слагаемыми фазы вектора $D(i\beta)$ (см. формулу (6.12)).

Учитывая сказанное выше, критерий устойчивости Михайлова можно сформулировать так: *для того чтобы динамическая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты β от 0 до $+\infty$, начинаясь при $\beta = 0$ на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n – порядок характеристического уравнения.*

Кривые Михайлова для устойчивых и неустойчивых систем.

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причём конец её уходит в бесконечность в том квадра-

нте координатной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения.

На рис. 6.6 показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем, описываемых уравнениями, начиная от первого ($n = 1$) и заканчивая пятым ($n = 5$) порядком. Для удобства сравнения коэффициенты a_n во всех случаях приняты одинаковыми.

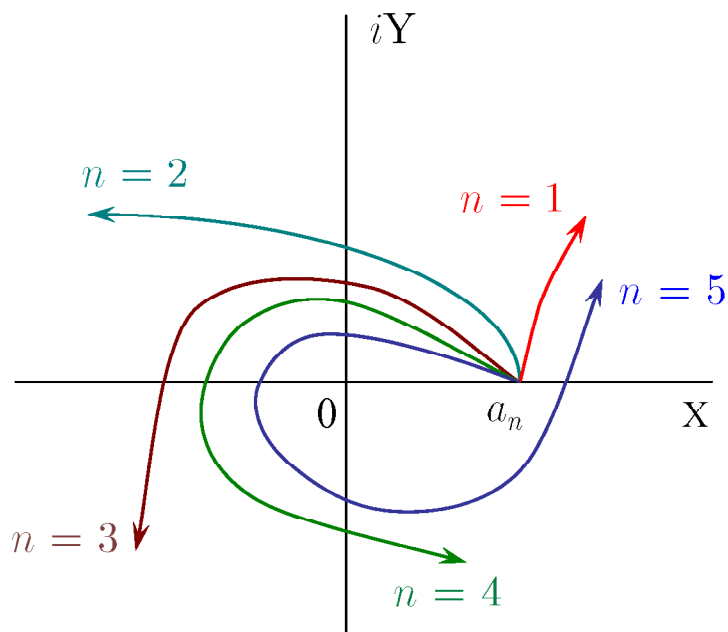


Рис. 6.6

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости, вследствие чего угол поворота вектора $D(i\beta)$ оказывается меньше, чем $\pi n/2$. Число правых корней неустойчивой системы можно определить по (6.17).

На рис. 6.7 показаны кривые Михайлова для неустойчивых и нейтральных систем. Рис. 6.7 а – при $\omega = 0$ кривая Михайлова начинается на отрицательной вещественной полуоси; система неустойчива. Рис. 6.7 б – порядок уравнения $n = 5$, а кривая Михайлова находится вся в одном квадранте (этому соответствует характеристическое уравнение

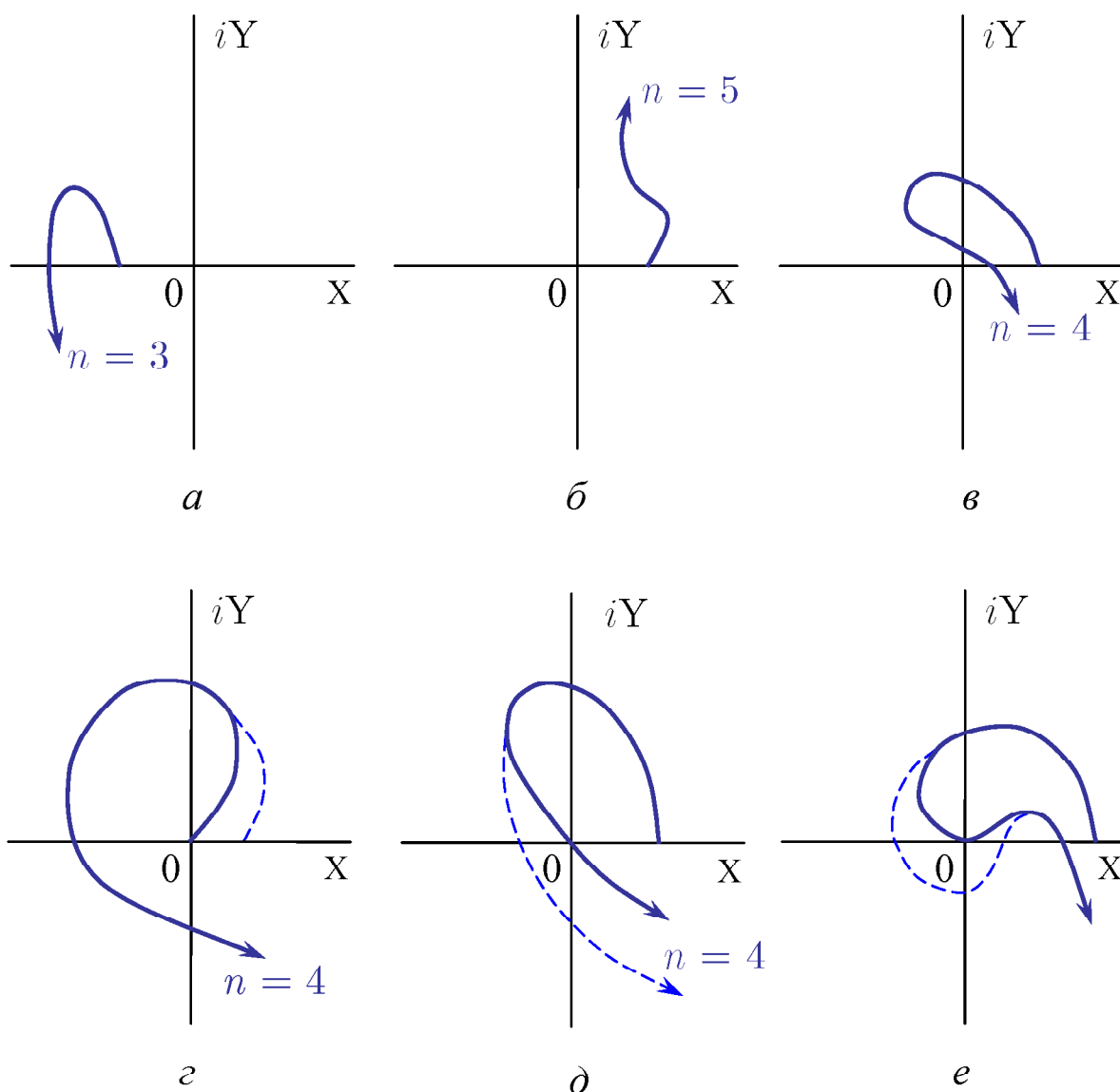


Рис. 6.7

$D(\lambda) = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2 = 0$); система неустойчива. Рис. 6.7 в – нарушена последовательность прохождения квадрантов; система неустойчива. Рис. 6.7 г – кривая Михайлова начинается в начале координат, т. е. в характеристическом уравнении имеется по крайней мере один нулевой корень; система находится на границе апериодической устойчивости; небольшая деформация кривой Михайлова (пунктирная линия) делает систему устойчивой. Рис. 6.7 д – кривая Михайлова проходит при некотором значении частоты β_k через начало координат, т. е. в характеристическом урав-

внении имеются чисто мнимые корни $\pm i\beta_k$; система находится на границе колебательной устойчивости; небольшая деформация кривой Михайлова делает систему устойчивой (пунктирная линия). Рис. 6.7 *e* – кривая Михайлова проходит через начало координат, но небольшой деформацией кривой Михайлова удовлетворить условиям устойчивости нельзя; система неустойчива.

Построение кривой Михайлова практически может быть выполнено методом контрольных точек, когда определяется ряд точек кривой, соответствующих фиксированным значениям частоты β , включая частоты точек пересечения кривой с осями координат, которые находятся как корни уравнений

$$X(\beta); \quad (6.20)$$

$$Y(\beta). \quad (6.21)$$

Следствие из критерия устойчивости Михайлова.

Анализируя годограф Михайлова, можно установить следующее следствие из устойчивости Михайлова. При последовательном прохождении кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости вещественная и мнимая оси пересекаются ею поочерёдно. В точках пересечения кривой с вещественной осью обращается в нуль мнимая функция Михайлова $Y(\beta)$, а в точках пересечения кривой с мнимой осью обращается в нуль вещественная функция $X(\beta)$. Значения частот, при которых происходит пересечение кривой с вещественной или мнимой осью, являются корнями уравнений (6.20), (6.21).

Функции Михайлова $X(\beta)$, $Y(\beta)$ можно представить графически в виде кривых (рис. 6.8). Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс дают значения корней уравнений (6.20), (6.21). Если значения

$\beta_0, \beta_2, \beta_4, \dots$ есть корни уравнения (6.16), а $\beta_1, \beta_3, \beta_5, \dots$ – уравнения (6.17), причём

$$\beta_0 < \beta_2 < \beta_4 < \dots; \beta_1 < \beta_3 < \beta_5 < \dots,$$

то для устойчивой системы обязательно соблюдение неравенства

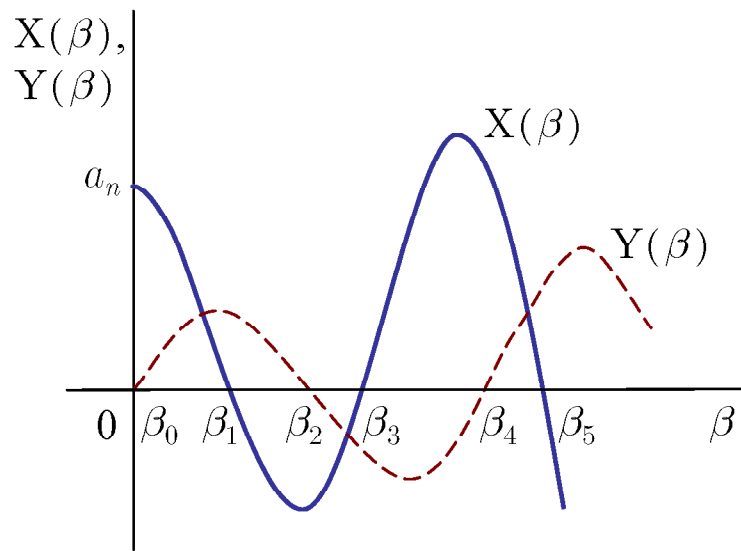
$$\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < \beta_5 < \dots \quad (6.22)$$

В связи с указанным следствием можно привести другую формулировку критерия устойчивости Михайлова: *динамическая система будет устойчива тогда и только тогда, когда вещественная $X(\beta)$ и мнимая $Y(\beta)$ функции Михайлова, приравненные нулю, имеют все действительные и перемежающиеся корни, причём общее число этих корней равно порядку характеристического уравнения n , и при $\beta = 0$ удовлетворяются условия*

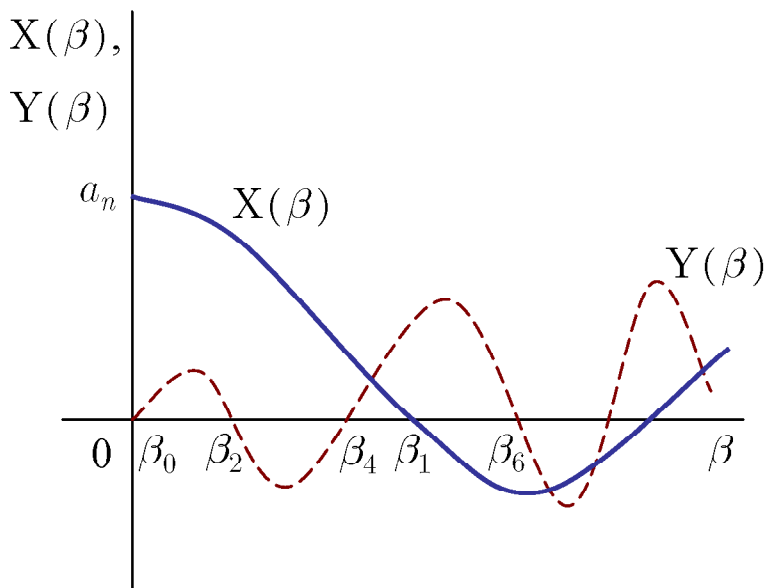
$$X(0) > 0, \quad Y'(0) > 0.$$

На рис. 6.8 *а* приведен пример графиков для устойчивой системы, а на рис. 6.8 *б* – для неустойчивой системы.

Для уравнения до шестого порядка включительно условие перемежаемости корней даёт возможность легко провести аналитическое исследование устойчивости, не вычерчивая кривую Михайлова. При этом достаточно определить только корни уравнения $Y(\beta) = 0$, тогда перемежаемость корней уравнений $X(\beta)$ и $Y(\beta) = 0$ можно проверить подстановкой в $X(\beta)$ найденных корней уравнения $Y(\beta) = 0$. Как видно из рис. 6.8 *а*, знаки $X(\beta)$ при подстановке возрастающих по абсолютной величине корней должны чередоваться.



a



б

Рис. 6.8

Пример. Определить устойчивость системы, характеристическое уравнение которой

$$D(\lambda) = \lambda^6 + 6\lambda^5 + 15\lambda^4 + 20\lambda^3 + 15\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0.$$

Подстановкой $\lambda = i\beta$ находим вещественную и мнимую функции Михайлова:

$$X(\beta) = -\beta^6 + 15\beta^4 - 15\beta^2 + 1 = 0;$$

$$Y(\beta) = \beta(6\beta^4 - 20\beta^2 + 6) = 0.$$

Находятся корни уравнения $Y(\beta)$:

$$\beta_0 = 0, \quad \beta^4 - \frac{10}{3}\beta^2 + 1 = 0, \text{ откуда}$$

$$\beta_{2,4}^2 = \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{10}{6} \pm \frac{8}{6}; \quad \beta_2^2 = \frac{1}{3}; \quad \beta_4^2 = 3.$$

Здесь нахождение β_2 и β_4 не обязательно, так как если перемежаются корни, то перемежаются и их квадраты.

Проверим, чередуются ли знаки $X(\beta)$ при подстановке β_2^2 и β_4^2 .

Имеем

$$X(\beta_2) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 15 \cdot \frac{1}{3} + 1 = -\frac{64}{27} < 0;$$

$$X(\beta_4) = -3^3 + 15 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 + 1 = 64 > 0.$$

Так как корни $Y(\beta)$ вещественны и знаки ординат $X(\beta)$, соответствующие этим корням, чередуются, то система устойчива.