

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко,  
І.В. Красікова, Є.В. Панасенко**

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ:  
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ  
ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

Навчальний посібник  
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів  
підготовки «Математика», «Прикладна математика»,  
«Програмна інженерія»

Затверджено  
вченою радою ЗНУ  
Протокол №\_\_ від \_\_\_\_\_ 2014 р.

**Запоріжжя  
2014**

УДК: 517.9 (075.8)

ББК: В16я73

Г79

Гребенюк С.М. Математичний аналіз: інтегральне числення функції багатьох змінних: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Математика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія» / С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова, Є.В. Панасенко. – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – 120 с.

Посібник призначений для роботи студентів над одним із розділів математичного аналізу – інтегральним численням функції багатьох змінних. Він охоплює три його теми: «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли», «Елементи теорії поля. Основні інтегральні формули аналізу». Теоретична частина містить конспект лекцій із зазначених тем. Друга частина посібника містить варіанти індивідуальних завдань із прикладами виконання таких завдань.

Посібник укладено відповідно до галузевих стандартів, навчальної та робочої програм дисциплін «Математичний аналіз-2» для напряму підготовки «Математика» і «Математичний аналіз» для напрямів підготовки «Прикладна математика» і «Програмна інженерія», однак його можуть використовувати студенти інших напрямів підготовки, що вивчають курс математичного аналізу чи вищої математики для поглибленого вивчення математичного аналізу. З цією метою всі твердження, що застосовуються при викладені матеріалу, мають повні посилання на джерела, де їх можна знайти.

Рецензент П.Г. Стеганцева

Відповідальний за випуск Н.М. Д'яченко

## ВСТУП

Курс математичного аналізу є необхідною складовою частиною базової теоретичної підготовки студента математичного факультету та основою для подальшого вивчення спеціальних дисциплін. *Метою курсу* є надання систематичних знань студентам з основ класичного аналізу дійсних функцій

Математичний аналіз – фундаментальний курс, на поняттях і фактах якого базується більшість математичних дисциплін, вони також застосовуються в фізиці, механіці, техніці, економіці та ін.

Цей курс дає можливість простежити внутрішню логіку розвитку поняття функції, теорії границь, теорії диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних, а також закладає базу для подальшого вивчення курсів комплексного аналізу, теорії міри та інтеграла, функціонального аналізу, диференціальних рівнянь, диференціальної геометрії, теорії ймовірностей, рівнянь математичної фізики, механіки деформівного твердого тіла та інших.

Посібник охоплює один із найважливіших розділів математичного аналізу – інтегральне числення функції багатьох змінних. Цей розділ вивчається студентами напрямів підготовки «Математика», «Прикладна математика» і «Програмна інженерія» в останньому семестрі курсу математичного аналізу і відповідає останнім контрольним та змістовим модулям.

У результаті вивчення зазначеного розділу курсу студент *повинен знати* основні поняття та факти інтегрального числення функцій багатьох змінних, основні області застосування цих понять та фактів. Студент *повинен вміти* застосовувати кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли до обчислення площ фігур, довжин дуг кривих, об'ємів тіл, площ поверхонь, застосовувати їх у векторному аналізі, механіці, фізиці та ін.

Посібник складається із двох основних розділів. Теоретична частина містить конспект лекцій з трьох тем: «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли», «Елементи теорії поля. Основні інтегральні формули аналізу». Друга частина посібника містить варіанти двох індивідуальних завдань «Кратні інтеграли» і «Криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля» із прикладами виконання таких завдань.

## Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

## §1. Кратні інтеграли

1 Інтеграл Рімана на  $m$ -вимірному проміжку

▮ **Означення 1.1** ( $m$ -вимірний проміжок). Множину

$$I = \left\{ \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m) \in \square^m : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, m \right\}$$

називають  $m$  вимірним проміжком.

**Приклади 1.1** Якщо  $m=1$ , то одновимірним проміжком є відрізок числової прямої  $[a_1, b_1]$ .

**1.2** Якщо  $m=2$ , то двовимірним проміжком є прямокутник на декартовій площині, координати якого задовольняють нерівності:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2,$$

тобто в цьому випадку

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

**1.3** Якщо  $m=3$ , то тривимірним проміжком є прямий паралелепіпед в декартовому просторі, координати якого задовольняють нерівності:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad a_3 \leq x_3 \leq b_3,$$

тобто в цьому випадку

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3].$$

**1.4** Якщо хочуть зазначити, що проміжок визначається точками  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ , то його позначають в такий спосіб:

$$I_{[\bar{a}, \bar{b}]} \text{ або } [\bar{a}, \bar{b}].$$

▮ **Означення 1.2** Мірою або об'ємом проміжку  $I = I_{[\bar{a}, \bar{b}]}$  (тут

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ ) називають значення  $\prod_{j=1}^m (b_j - a_j)$  і записують:

$$|I| = V(I) = \mu(I) = \prod_{j=1}^m (b_j - a_j).$$

**Властивості міри проміжку:**

$$1. \quad I_{[\lambda \bar{a}, \lambda \bar{b}]} = \lambda^m \cdot I_{[\bar{a}, \bar{b}]}.$$

2. Якщо проміжок  $I$  розбито на скінченну кількість проміжків, які попарно не мають спільних внутрішніх точок<sup>1</sup>, тобто

$$I = \bigcup_{j=1}^n I_j, \quad (I_j)^o \cap (I_i)^o = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$

тоді

$$|I| = \sum_{j=1}^n |I_j|.$$

3. Якщо проміжок  $I$  покрито скінченною кількістю проміжків, тобто  $I \subset \bigcup_{j=1}^n I_j$ ,

<sup>1</sup> Внутрішньою точкою множини  $M$  називають таку точку  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m)$ , яка належить цій множині разом із деяким своїм оточенням  $V_\delta(\bar{x}) = \prod_{k=1}^m (x_k - \delta, x_k + \delta)$ , тобто  $V_\delta(\bar{x}_0) \subset M$ . Множину внутрішніх точок множини  $M$  позначається  $M^0$ .

тоді для міри виконується нерівність

$$|I| \leq \sum_{j=1}^n |I_j|.$$

**ПОВТОРЕННЯ.** Розглянемо випадок функції однієї змінної.

Нехай функція  $f(x)$  задана на  $[a, b]$ . Розглянемо розбиття  $R = \{x_k\}$  відрізка  $[a, b]$  скінченною кількістю точок

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Виберемо проміжні точки  $P = \{\alpha_k\}$ , де  $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Розглянемо інтегральну

суму  $\sigma = \sigma(f, R, P) = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta x_k$  для функції  $f(x)$ , що відповідає розбиттю  $R$  та то-

чкам  $P$  (тут  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $d = \max_{k=\overline{1, n}} (x_k - x_{k-1})$  – діаметр розбиття).

**Означення 1.3** (на мові  $\varepsilon - \delta$ ). Число  $J$  називають *границею інтегральних сум*  $\sigma(f, R, P)$  при  $d \rightarrow 0$  і позначають  $J = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, R, P)$ , якщо для кожного  $\varepsilon > 0$

можна знайти таке число  $\delta > 0$ , що для будь-якого розбиття  $R = \{x_k\}$  відрізка  $[a, b]$  з умовою  $d < \delta$  незалежно від вибору проміжних точок  $P = \{\alpha_k\}$  виконується нерівність  $|J - \sigma(f, R, P)| < \varepsilon$ . Тобто

$$J = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, R, P) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall R = \{x_k\} \forall P = \{\alpha_k\} \quad d < \delta \Rightarrow |J - \sigma(f, R, P)| < \varepsilon.$$

Якщо таке число  $J$  існує, то функцію  $f(x)$  називають *інтегрованою за Ріманом* на відріжку  $[a, b]$ , а значення границі  $J$  – *визначеним інтегралом Рімана*.  $\square$

Кратний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла Рімана функції однієї змінної.

Кожен з відрізків  $[a_j, b_j]$  ( $j = \overline{1, m}$ ), що утворює проміжок  $I$ , розбивається на відрізки, а розбиття проміжку  $I$  утворюється із проміжків, кожен з яких є декартовим добутком відрізків утворених розбиттів.


Позначимо через  $R = \{I_j\}_{j=1}^n$  множину проміжків розбиття,  $\bar{\alpha}_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_k^j, \dots, \alpha_m^j) \in I_j$  – проміжні (відмічені) точки,  $P = \{\bar{\alpha}_j\}$  – множина відмічених точок.

Якщо  $A$  – довільна множина в  $\square_2^m$ , то  $d(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$  – діаметр множини  $A$ . Діаметром розбиття  $d = d(R)$  називають максимальний серед усіх діаметрів проміжків розбиття, тобто

$$d = d(R) = \max_j d(I_j).$$

**Означення 1.4** Інтегральною сумою функції  $f(\bar{x})$ , що відповідає розбиттю  $R = \{I_j\}_{j=1}^n$  проміжку  $I$  з відміченими точками  $P = \{\bar{\alpha}_j\}$ , називають значення такої суми

$$\sigma = \sigma(f, R, P) = \sum_{j=1}^n f(\bar{\alpha}_j) \cdot |I_j|.$$

 **Означення 1.5** Число  $J = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma$  називають *границею інтегральних сум* при діаметрі розбиття, що прямує до нуля ( $d \rightarrow 0$ ), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall R \forall P : d < \delta \Rightarrow |\sigma - J| < \varepsilon.$$

Якщо існує  $J = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma$ , тоді функцію  $f(\bar{x})$  називають *інтегрованою за Ріманом на проміжку  $I$* . Позначення:  $f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(I)$ . Число  $J$  називають *інтегралом Рімана на проміжку  $I$* . Позначення:  $J = \int_I f(\bar{x}) d\bar{x}$ .

Ще раз підкреслимо, що значення границі  $J = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma$  (згідно до означення) НЕ ЗАЛЕЖИТЬ від способу розбиття і вибору відмічених точок.

Окремі випадки кратних інтегралів:

$$m=1 \quad J = \int_{I=[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \text{визначений інтеграл Рімана,}$$

$$m=2 \quad J = \iint_I f(x, y) dx dy - \text{подвійний інтеграл,}$$

$$m=3 \quad J = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz - \text{потрійний інтеграл.}$$

**Теорема 1.1** (необхідна умова інтегровності функції на проміжку).  
 $f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(I) \Rightarrow f(\bar{x})$  – обмежена на  $I$ .

**Доведення.** Припустимо супротивне, що  $f(\bar{x})$  – необмежена. Розглянемо розбиття  $R = \{I_j\}_{j=1}^n$  проміжку  $I$  і випишемо інтегральну суму

$$\sigma = \sigma(f, R, P) = \sum_{j=1}^n f(\bar{\alpha}_j) \cdot |I_j|,$$

що відповідає множині відмічених точок  $P = \{\bar{\alpha}_j\}$ , які будемо обирати таким чином, щоб інтегральна сума була як завгодно великою. Оскільки функція  $f(\bar{x})$  – необмежена, то вона необмежена хоча б на одному із проміжків розбиття  $I_{j_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall M > 0 \exists \bar{\alpha}_{j_0} \in I_{j_0} : |f(\bar{\alpha}_{j_0})| \cdot |I_{j_0}| > M + |\sigma^*|,$$

де  $\sigma^* = \sum_{j \neq j_0} f(\bar{\alpha}_j) |I_j|$ . Тоді

$$|\sigma| = |\sigma^* + f(\bar{\alpha}_{j_0}) \cdot |I_{j_0}|| \geq \|f(\bar{\alpha}_{j_0})\| |I_{j_0}| - |\sigma^*| > M + |\sigma^*| - |\sigma^*| = M.$$

**Висновок:** границя інтегральних сум не існує, тому функція  $f(\bar{x})$  неінтегровна на  $I$ .  $\nrightarrow$  ■

## 2 Критерії Дарбу інтегровності функції багатьох змінних на проміжку

Введемо позначення:

$$m_j = \inf_{\bar{x} \in I_j} f(\bar{x}), \quad M_j = \sup_{\bar{x} \in I_j} f(\bar{x}).$$

Тут  $R = \{I_j\}_{j=1}^n$  – розбиття проміжку  $I$ .

Визначимо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу функції  $f(\bar{x})$  на проміжку  $I$ , що відповідає розбиттю  $R$  відповідно:

$$\underline{S} = \underline{S}(f, R) = \sum_{j=1}^n m_j |I_j|,$$

$$\overline{S} = \overline{S}(f, R) = \sum_{j=1}^n M_j |I_j|.$$

Властивості інтегральних сум Дарбу.

**Властивість 1.**  $\underline{S}(f, R) = \inf_P \sigma(f, R, P) \leq \sup_P \sigma(f, R, P) = \overline{S}(f, R)$ .

Ця властивість є наслідком означення сум Дарбу.

**Властивість 2.** Якщо  $R_1$  є подрібненням розбиття  $R$ , то має місце нерівність

$$\underline{S}(f, R) \leq \underline{S}(f, R_1) \leq \overline{S}(f, R_1) \leq \overline{S}(f, R).$$

Доведення здійснюється аналогічно доведенню в одновимірному випадку [1, с. 76].

**Властивість 3.** Будь-яка нижня сума для розбиття  $R_1$  не більша за будь-яку верхню суму Дарбу для іншого розбиття  $R_2$ :

$$\underline{S}(f, R_1) \leq \overline{S}(f, R_2).$$

**Доведення.** Введемо до розгляду розбиття  $R_3$ , яке є подрібненням як розбиття  $R_1$ , так і розбиття  $R_2$ , і інтегральні суми Дарбу, що йому відповідають  $\underline{S}_3$  і  $\overline{S}_3$ . Тоді згідно з властивістю 2, отримаємо

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3 \leq \overline{S}_3 \leq \overline{S}_2. \blacksquare$$

**Властивість 4.**

$$\forall \varepsilon > 0 \forall R \exists P_1 : \overline{S}(f, R) - \sigma(f, R, P_1) < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall R \exists P_2 : \sigma(f, R, P_2) - \underline{S}(f, R) < \varepsilon.$$

Доведення здійснюється аналогічно доведенню в одновимірному випадку [1, с. 75].

Розглянемо множину  $\{\overline{S}(f, R) : R\}$ . Вона обмежена знизу, наприклад, значенням суми  $\underline{S}(f, R^*)$ , де  $R^*$  – фіксоване розбиття. Отже, за основною теоремою теорії дійсних чисел [3, с. 48],

$$\exists \inf \{\overline{S}(f, R) : R\} = \overline{J} - \text{верхній інтеграл Дарбу.}$$

Аналогічно,

$$\exists \sup \{\underline{S}(f, R) : R\} = \underline{J} - \text{нижній інтеграл Дарбу.}$$

**Теорема 1.2** (критерій Дарбу інтегровності функції на проміжку). Обмежена функція  $f(\bar{x})$  є інтегровною на проміжку  $I$  тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{d \rightarrow 0} (\overline{S} - \underline{S}) = 0,$$

тобто

$$\text{обмежена функція } f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(I) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall R \ d < \delta \Rightarrow \overline{S}(f, R) - \underline{S}(f, R) < \varepsilon.$$

Доведення здійснюється аналогічно доведенню в одновимірному випадку [1, с. 80].

**Наслідок 1.1** Обмежена функція  $f(\bar{x})$  є інтегровною на проміжку  $I$  тоді і тільки тоді, коли  $\underline{J} = \overline{J}$ , крім того,  $\underline{J} = \overline{J} = J = \int_I f(\bar{x}) dx$ .

## 3 Класи інтегровних функцій на проміжку

**Теорема 1.3** Неперервна функції на проміжку інтегровна на ньому.

Доведення здійснюється за допомогою наслідку із теореми Кантора [3, с. 559] аналогічно випадку для функції однієї змінної.

**Означення 1.5** Множина  $A$  має лебегову міру нуль (позначення:  $\mu A = 0$ ), якщо її можна покрити не більше, ніж зчисленною кількістю проміжків, сумарним об'ємом меншим наперед заданого  $\varepsilon$ . Тобто

$$\mu A = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \{I_j\}_{j \in M} : \left( \bar{M} \leq a \wedge A \subset \bigcup_{j \in M} I_j \wedge \sum_{j \in M} |I_j| < \varepsilon \right)^1.$$

**Зауваження 1.1** Безпосередньо із означення випливає таке: якщо множина  $A$  має лебегову міру нуль, то будь-яка її підмножина  $B$  матиме теж міру нуль, тобто

$$\forall B \subset A \quad \mu A = 0 \Rightarrow \mu B = 0.$$

Цю властивість міри Лебега називають *повнотою* міри.

**Приклад 1.5** Якщо  $A$  – скінченна множина, тоді  $\mu A = 0$ .

Дійсно,

$$\bar{A} = n \Rightarrow A = \{\bar{a}_j\}_{j=1}^n, \quad \left. \text{нехай } I_j \text{ буде таким, що } \bar{a}_j \in I_j \wedge |I_j| < \frac{\varepsilon}{n} \right\} \Rightarrow A \subset \bigcup_{j=1}^n I_j \wedge \sum_{j=1}^n |I_j| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \blacksquare$$

**Приклад 1.6** Якщо  $A$  – зчисленна ( $\bar{A} = a$ ), тоді  $\mu A = 0$ .

Дійсно,

$$A = \{a_j\}_{j=1}^\infty, \quad \left. \text{нехай } I_j \text{ такий, що } a_j \in I_j \wedge |I_j| < \frac{\varepsilon}{2^j} \right\} \Rightarrow A \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_j \wedge \sum_{j=1}^\infty |I_j| < \sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^j} = \frac{\varepsilon/2}{1 - 1/2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Наприклад, множина  $\square^m$  – зчисленна (доведіть це!), тому  $\mu \square^m = 0$ .

**Приклад 1.7** Якщо  $I^{(m-1)} - (m-1)$ -вимірний проміжок, а функція  $\varphi(\bar{x})$  – неперервна на  $I^{(m-1)}$ , тоді множина  $G = \{(\bar{x}, y) : y = \varphi(\bar{x}) \wedge \bar{x} \in I^{(m-1)}\}$  в  $\square^m$ , яка є графіком функції  $\varphi(\bar{x})$ , має лебегову міру нуль, тобто  $\mu G = 0$ .

**Доведення.** Згідно з наслідком із теореми Кантора [3, с. 559] проміжок  $I^{(m-1)}$  можна розбити на скінченну кількість проміжків  $\{I_j^{(m-1)}\}_{j=1}^n$ , на кожному з яких коливання функції  $\varphi(\bar{x})$  буде меншим за  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2\mu I}$ .

Обираємо довільні точки  $\bar{x}_j$  із проміжку розбиття  $I_j^{(m-1)}$ . Розглянемо множину  $I_j^{(m-1)} \times [\varphi(\bar{x}_j) - \varepsilon^*, \varphi(\bar{x}_j) + \varepsilon^*]$ . Вона гарантовано покриває ділянку графіку функції  $\varphi(\bar{x})$ , що розташовується над проміжком  $I_j^{(m-1)}$ . Множини  $I_j^{(m-1)} \times [\varphi(\bar{x}_j) - \varepsilon^*, \varphi(\bar{x}_j) + \varepsilon^*]$  є проміжками в  $\square^m$  об'єму (міри)

$$\mu_m \left( I_j^{(m-1)} \times [\varphi(\bar{x}_j) - \varepsilon^*, \varphi(\bar{x}_j) + \varepsilon^*] \right) = \mu_{m-1} \left( I_j^{(m-1)} \right) \cdot 2\varepsilon^*.$$

<sup>1</sup>  $\bar{M}$  – це потужність множини  $M$ ;  $a$  – це потужність зчисленної множини; запис  $\bar{M} \leq a$  означає, що множина  $M$  є не більш, ніж зчисленною, тобто скінченною або зчисленною.



(тут  $\mu_{(m-1)}(A)$  – міра множини  $A$  в  $\square^{m-1}$ ). Об'єднання цих проміжків утворює покриття  $A$  графіку  $G$  функції  $\varphi(\bar{x})$  і має об'єм

$$\mu A < 2\varepsilon^* \cdot \sum_j \mu_{m-1}(I_j^{(m-1)}) = 2\varepsilon^* \cdot \mu I = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Зауваження 1.2** Множина із прикладу 1.7 покрита скінченною кількістю проміжків загального об'єму, меншого за  $\varepsilon$ . Це відповідає жордановій мірі нуль<sup>1</sup>.

**Теорема 1.4** (критерій Лебега інтегровності функції на проміжку). Обмежена функція  $f(\bar{x})$  на проміжку  $I$  інтегровна тоді і тільки тоді, коли множина  $A$  її точок розриву має міру Лебега нуль, тобто  $\mu A = 0$ .

Доведення теорема входить в курс «Теорія міри та інтеграла».

Якщо деяка властивість виконується у всіх точках, окрім точок лебегової міри нуль, то кажуть що така властивість виконується майже скрізь. Будемо скорочено це позначати «м.с.» Тому останню теорему можна сформулювати в такий спосіб:

*Обмежена функція інтегровна на проміжку  $I$  тоді і тільки тоді, коли вона на ньому неперервна майже скрізь.*

## 4 Інтеграл по множині

### 4.1 Допустимі множини.

Пригадаємо, що *межовою точкою* множини  $A \subset \square_2^m$  називають точку, в будь-якому околі якої лежать як точки множини  $A$ , так і точки доповнення до неї. Множину всіх межових точок множини  $A$  називають *межею* цієї множини і позначають  $\partial A$ .

▢ **Означення 1.6** Множину  $A$  із  $m$ -вимірному простору  $\square_2^m$  називають *допустимою*, якщо множина її межових точок має лебегову міру нуль. Тобто

$$\clubsuit A \subset \square^m - \text{допустима} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu(\partial A) = 0.$$

**Приклад 1.8** Якщо область  $D$  обмежена графіками функцій  $y = \varphi(\bar{x})$ ,  $y = \psi(\bar{x})$ , неперервними на  $I^{(m-1)}$ , тоді її межа має лебегову міру нуль (згідно з прикладом 1.7), а  $D$  є допустимою множиною в  $\square^m$ .

Зокрема, якщо  $m = 2$ , функції  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  – неперервні на  $[a, b]$ , а також  $f_1(x) \geq f_2(x)$  на  $[a, b]$ , то множина

$$D = \{(x, y) \in \square^2 : a \leq x \leq b \wedge f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\}$$

(рис. 1.1) має межу лебегової міри нуль. Отже, вона є допустимою.

**Приклад 1.9** Тетраedr, куля, призма, куб, паралелепіпед є множинами допустимими, оскільки множина їх межових точок утворюється скінченною кількістю неперервних поверхонь.

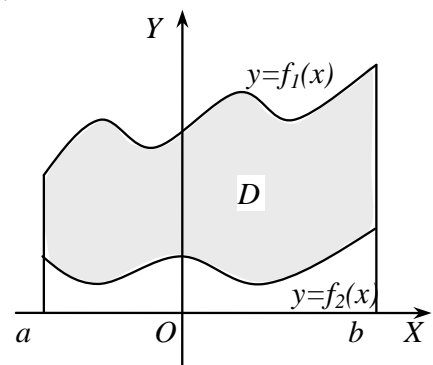


Рис. 1.1

<sup>1</sup> Множина  $A$  має жорданову міру нуль (позначимо:  $\eta A = 0$ ), якщо її можна покрити скінченною кількістю проміжків, сумарним об'ємом меншим наперед заданого  $\varepsilon$ . Тобто

$$\eta A = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \{I_j\}_{j=1}^N : A \subset \bigcup_{j=1}^N I_j \wedge \sum_{j=1}^N |I_j| < \varepsilon$$

**Лема 1.1**  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^m \Rightarrow \begin{cases} 1) \partial E_1, \partial E_2 - \text{замкнені в } \mathbb{R}^m, \\ 2) \partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \\ 3) \partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \\ 4) \partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2. \end{cases}$

**Наслідок 1.2** Якщо  $E_1$  і  $E_2$  – допустимі множини, тоді їх об’єднання, перетин і різниця також будуть множинами допустимими.

**Доведення** отримаємо із такої властивості множин лебегової міри нуль:

$$\mu(\partial E_1) = \mu(\partial E_2) = 0 \Rightarrow \mu(\partial E_1 \cup \partial E_2) = 0,$$

а також із леми 1.1 і властивості повноти міри Лебега. ■

**Означення 1.7** Характеристичною функцією множини  $E$  називають функцію вигляду:

$$\chi_E(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in E, \\ 0, & \bar{x} \notin E. \end{cases}$$

Задамо функцію

$$f\chi_E(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in E, \\ 0, & \bar{x} \notin E. \end{cases}$$

**Означення 1.8** Нехай  $E$  – допустима множина, тоді інтегралом від функції  $f(\bar{x})$  по допустимій множині  $E$  називають інтеграл по проміжку  $I$ , що покриває  $E$ , від функції  $f\chi_E(\bar{x})$ , тобто

$$\int_E f(\bar{x}) d\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{I \supset E} f\chi_E(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Якщо існує інтеграл в правій частині останньої рівності, тобто  $f\chi_E \in \mathfrak{R}(I)$ , тоді функцію  $f(\bar{x})$  називають інтегровною на множині  $E$  і позначають  $f \in \mathfrak{R}(E)$ .

**Лема 1.2** (коректність означення). Нехай  $E$  – допустима множина, тоді

$$\forall I_1, I_2 - \text{проміжків } (I_1 \supset E \wedge I_2 \supset E) \Rightarrow \int_{I_1} f\chi_E(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I_2} f\chi_E(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Це означає, що в означенні інтеграла по множині  $E$  байдуже, який проміжок обирати за той, що покриває множину  $E$ .

**Доведення.** Розглянемо проміжок  $I = I_1 \cap I_2 \supset E$ , тоді

$$\int_I f\chi_E(\bar{x}) d\bar{x} = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k f(\bar{\alpha}_k) |I_k^*|,$$

де  $\{I_k^*\}$  – розбиття проміжку  $I$ . Подовжимо<sup>1</sup> розбиття  $\{I_k^*\}$  на проміжки  $I_1$  і  $I_2$  із збереженням значення діаметра розбиття. Відмічені точки, що не належать  $\{I_k^*\}$ , оберемо довільним чином, а ті, що належать  $\{I_k^*\}$ , збережемо тими ж. Тоді на проміжках, що не належать  $\{I_k^*\}$ , функція  $f\chi_E(\bar{x})$  приймає значення нуль, тому інтегральні суми для проміжків  $I_1$  і  $I_2$  будуть збігатися із значенням інтегральної суми для проміжку  $I$ , а тому і значення границь інтегральних сум будуть рівними. Отримаємо:

$$\int_I f\chi_E(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I_1} f\chi_E(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I_2} f\chi_E(\bar{x}) d\bar{x}. \quad \blacksquare$$

<sup>1</sup> Якщо  $R^* = \{I_k^*\}$  – розбиття проміжку  $I$ , а  $I_1 \subset I$ , то розбиття  $R^{**} = \{I_s^{**}\}$  називають подовженням розбиття  $R^*$ , якщо проміжки із розбиття  $R^{**}$ , які належать  $I$ , збігаються з проміжками розбиття  $R^*$ .

**4.2 Критерій Лебега інтегровності функції на допустимій множині.**

**Теорема 1.5** (критерій Лебега інтегровності функції на допустимій множині). Функція  $f(\bar{x})$ , обмежена на допустимій множині  $E$ , інтегровна на цій множині тоді і тільки тоді, коли множина її точок розриву на множині  $E$  має лебегову міру нуль. Тобто

$$\left. \begin{array}{l} f - \text{обм. на } E, \\ f \in \mathfrak{R}(E), \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mu A = 0, \text{ де } A - \text{множина точок розриву } f(\bar{x}) \text{ на } E.$$

Або можна переформулювати цю теорему в такий спосіб:

*Обмежена функція інтегровна на допустимій множині  $E$  тоді і тільки тоді, коли вона на цій множині неперервна майже скрізь.*

**Доведення.**

$$\left. \begin{array}{l} I - \text{проміжок, що покриває допустиму множину } E, \\ B - \text{множина точок розриву } f(\bar{x}) \text{ на } I, \end{array} \right\} \Rightarrow B = A \cup \partial E, A \subset B \cup \partial E.$$

*Необхідність.*

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ f(\bar{x}) - \text{обм. на } E, \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(I), \\ f(\bar{x}) - \text{обм. на } I, \end{array} \right\} \Rightarrow \mu B = 0,$$

$$E - \text{допустима} \Rightarrow \mu(\partial A) = 0.$$

$$\text{Маємо: } \left. \begin{array}{l} A \subset B \cup \partial E, \\ \mu(\partial A) = 0, \\ \mu B = 0, \end{array} \right\} \Rightarrow \mu A = 0.$$

*Достатність.*

$$\left. \begin{array}{l} \mu A = 0, \\ B = A \cup \partial E, \\ f(\bar{x}) - \text{обм. на } I, \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu B = 0, \\ f(\bar{x}) - \text{обм. на } I, \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(I) \Rightarrow f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E). \quad \blacksquare$$

**4.3 Міра (об'єм) допустимої множини.**

**Означення 1.9** Жордановою мірою (об'ємом) допустимої множини  $E$  називають інтеграл по цій множині від одиничної функції. Позначення:  $\mu E$  або  $V(E)$ . Тобто,

$$\mu E = V(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E 1 d\bar{x}.$$

**ПОВТОРЕННЯ.** Плоску область  $E$  називають *квадровною*, якщо

$$\sup \{S(B) : B \subset E, B - \text{многокутник}\} = \inf \{S(A) : A \supset E, A - \text{многокутник}\} \stackrel{\text{def}}{=} S(E);$$

спільне значення  $\sup$  і  $\inf$  називають *площею плоскої області  $E$* .

Тіло (область у просторі)  $E$  в  $\square^3$  – *кубовне*, якщо

$$\sup \{V(B) : B \subset E, B - \text{многогранник}\} = \inf \{V(A) : A \supset E, A - \text{многогранник}\} \stackrel{\text{def}}{=} V(E);$$

спільне значення  $\sup$  і  $\inf$  – *об'єм тіла (області в просторі)  $E$* .  $\blacksquare$

За означенням 1.9  $\mu E = V(E) = \int_E 1 d\bar{x}$ . Встановимо зв'язок між означенням 1.9 і

відомими раніше означеннями площі квадратної фігури чи об'єму кубового тіла.

Функція  $f(\bar{x}) \equiv 1$  на  $E$  є неперервною, тому множина  $M$  її точок розриву є порожньою, звідки  $\mu M = 0$ . Отже,  $f(\bar{x}) \equiv 1$  – інтегровна на  $E$ , тому за критерієм Дарбу,

$$\int_I \overline{\chi_E(\bar{x})} d\bar{x} = \int_I \chi_E(\bar{x}) d\bar{x} = \int_I \chi_E(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (1.1)$$

З'ясуємо геометричний зміст верхнього інтеграла Дарбу  $\int_I \overline{\chi_E(\bar{x})} d\bar{x}$ . За означенням

$$\int_I \overline{\chi_E(\bar{x})} d\bar{x} = \inf_R \bar{S}(\chi_E, R).$$

Значення верхньої суми Дарбу  $\bar{S}(\chi_E, R) = \sum_{k=1}^n M_k |I_k|$  дорівнює значенню сум площ (об'ємів) тих проміжків, які мають спільні точки з множиною  $E$ . Об'єднання таких проміжків є многокутником (многогранником), що описано навколо  $E$ . Цей многокутник (многогранник) має сторони (ребра), паралельні осям координат. Значення нижньої суми Дарбу дорівнює сумі площ (об'ємів) проміжків розбиття, які цілком лежать всередині множини  $E$ , тобто дорівнює площі (об'єму) вписаного в  $E$  многокутника (многогранника) зі сторонами (ребрами), паралельними осям координат.

Отже,

$$\begin{aligned} \sup \left\{ S(B) : B \subset E, B - \text{многокутник (многогранник) із сторонами (ребрами), паралельними осям координат} \right\} &= \sup_R \underline{S}(\chi_E, R), \\ \inf \left\{ S(A) : A \supset E, A - \text{многокутник (многогранник) із сторонами (ребрами), паралельними осям координат} \right\} &= \inf_R \bar{S}(\chi_E, R), \end{aligned}$$

а, внаслідок (1.1),

$$\int_I \overline{\chi_E(\bar{x})} d\bar{x} = \inf_R \bar{S}(\chi_E, R) = \sup_R \underline{S}(\chi_E, R) = \int_I \chi_E(\bar{x}) d\bar{x} = \int_I \chi_E(\bar{x}) d\bar{x},$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} \sup \left\{ S(B) : B \subset E, B - \text{многокутник (многогранник) із сторонами (ребрами), паралельними осям координат} \right\} &= \\ = \inf \left\{ S(A) : A \supset E, A - \text{многокутник (многогранник) із сторонами (ребрами), паралельними осям координат} \right\} &= \int_I \chi_E(\bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Відомо, що рівність значень  $\sup$  і  $\inf$  в (1.2) забезпечує квадровність (кубовність) області  $E$ , а спільне їх значення відповідає площі (об'єму) цієї області. А із рівності (1.2) випливає, що значення площі (об'єму) області дорівнює значенню інтеграла  $\int_I \chi_E(\bar{x}) d\bar{x}$ .

Отже, відоме раніше означення квадровності (кубовності) області та її площі (об'єму) збігається з новим означенням 1.9 міри допустимої множини через кратний інтеграл.

## 5 Загальні властивості кратних інтегралів

Надалі будемо вважати, що  $E, E_1, E_2$  – допустимі множини.

**Властивість 1** (властивість лінійності).  $f, g \in \mathfrak{R}(E) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathfrak{R}(E)$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ крім того } \int_E (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x})) d\bar{x} = \alpha \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} + \beta \int_E g(\bar{x}) d\bar{x}.$$

**Доведення.** Перевіримо спочатку інтегровність:

$$\left. \begin{aligned} A - \text{множина точок розриву } f(\bar{x}) \text{ на } E, \\ B - \text{множина точок розриву } g(\bar{x}) \text{ на } E, \\ C - \text{множина точок розриву функції } \alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x}) \text{ на } E, \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C \subset A \cup B, \\ \mu A = 0 \left( f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E) \right), \\ \mu B = 0 \left( g(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E) \right), \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(A \cup B) = 0, \left\{ \begin{array}{l} \text{вл.} \\ \text{повноти} \\ \text{міри} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu C = 0 \Rightarrow \alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E). \quad \text{кр. л.}$$

Тепер можна доводити рівність інтегралів:

$$\begin{aligned} \sigma_{(\alpha \cdot f \chi_E + \beta \cdot g \chi_E)} &= \sum_{k=1}^n (\alpha \cdot f \chi_E(\bar{\zeta}_k) + \beta \cdot g \chi_E(\bar{\zeta}_k)) |I_k| = \\ &= \alpha \cdot \sum_{k=1}^n f \chi_E(\bar{\zeta}_k) |I_k| + \beta \cdot \sum_{k=1}^n g \chi_E(\bar{\zeta}_k) |I_k| = \alpha \cdot \sigma_{f \chi_E} + \beta \cdot \sigma_{g \chi_E} \Rightarrow \\ \sigma_{(\alpha \cdot f \chi_E + \beta \cdot g \chi_E)} &= \alpha \cdot \sigma_{f \chi_E} + \beta \cdot \sigma_{g \chi_E}. \end{aligned}$$

Оскільки  $f, g, \alpha f + \beta g \in \mathfrak{R}(E)$ , то існують границі інтегральних сум в останній рівності при  $d \rightarrow 0$ ; здійснимо в ній граничний перехід:

$$\begin{aligned} \int_I (\alpha \cdot f \chi_E(\bar{x}) + \beta \cdot g \chi_E(\bar{x})) d\bar{x} &= \alpha \int_I f \chi_E(\bar{x}) d\bar{x} + \beta \int_I g \chi_E(\bar{x}) d\bar{x}, \\ \parallel & \\ \int_E (\alpha \cdot f(\bar{x}) + \beta \cdot g(\bar{x})) d\bar{x} &= \alpha \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} + \beta \int_E g(\bar{x}) d\bar{x}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{Властивість 2.} \left\{ \begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ f(\bar{x}) \stackrel{\text{м.с.}}{=} 0, \end{array} \right\} \Rightarrow \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = 0.$$

**Доведення.**  $f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E) \Rightarrow f \chi_E(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E)$ .

Тому границя інтегральних сум функції  $f \chi_E(\bar{x})$  не залежить від вибору проміжних точок. Оскільки  $f(\bar{x}) \stackrel{\text{м.с.}}{=} 0 \Rightarrow f \chi_E(\bar{x}) \stackrel{\text{м.с.}}{=} 0$ , то можна обрати за проміжні саме ті точки, значення функції в яких дорівнює нулю. Матимемо:

$$\sigma_{f \chi_E} = \sum_k f \chi_E(\bar{\alpha}_k) |I_k| = 0 \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \int_I f \chi_E(\bar{x}) d\bar{x} = 0 \Rightarrow \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = 0. \quad \blacksquare$$

$$\text{Наслідок 1.3} \left\{ \begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ f(\bar{x}) \stackrel{\text{м.с.}}{=} g(\bar{x}), \end{array} \right\} \Rightarrow \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_E g(\bar{x}) d\bar{x}.$$

**Доведення.** Оскільки  $f, g \in \mathfrak{R}(E) \Rightarrow f - g \in \mathfrak{R}(E)$ , то

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}) = f(\bar{x}) - g(\bar{x}) &\stackrel{\text{м.с.}}{=} 0 \Rightarrow \int_E \varphi(\bar{x}) d\bar{x} = 0 \\ \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} - \int_E g(\bar{x}) d\bar{x} &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Властивість 3 (адитивність інтеграла).** Нехай  $E_1$  і  $E_2$  — допустимі множини, тоді виконуються наступні імплікації:

$$\exists \int_{E_1 \cup E_2} f(\bar{x}) d\bar{x} \stackrel{1}{\Leftrightarrow} \left( \exists \int_{E_1} f(\bar{x}) d\bar{x} \wedge \exists \int_{E_2} f(\bar{x}) d\bar{x} \right) \stackrel{2}{\Rightarrow} \exists \int_{E_1 \cap E_2} f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Крім того

$$\mu(E_1 \cap E_2) = 0 \Rightarrow \int_{E_1 \cup E_2} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{E_1} f(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{E_2} f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

$\exists \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \wedge \quad \exists$

**Доведення.**  $\boxed{\Rightarrow}$  Введемо позначення:

$A_1$  – множина точок розриву  $f(\bar{x})$  на  $E_1$ ,

$A_2$  – множина точок розриву  $f(\bar{x})$  на  $E_2$ ,

$B$  – множина точок розриву  $f(\bar{x})$  на  $E_1 \cup E_2$ ,

$C$  – множина точок розриву  $f(\bar{x})$  на  $E_1 \cap E_2$ .

Тоді отримаємо:

$$\left. \begin{array}{l} \mu(B) = 0, \\ A_1 \subset B, \\ A_2 \subset B, \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{вл. повноти міри}]{} \left\{ \begin{array}{l} \mu A_1 = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E_1), \\ \mu A_2 = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E_2). \end{array} \right.$$

$$\boxed{\Leftarrow} \left\{ \begin{array}{l} \mu A_1 = 0, \\ \mu A_2 = 0, \\ B \subseteq A_1 \cup A_2, \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{вл. повноти міри}]{} \mu B = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E_1 \cup E_2).$$

$$\boxed{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \mu A_1 = 0, \\ \mu A_2 = 0, \\ C \subseteq A_1 \cup A_2, \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{вл. повноти міри}]{} \mu C = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E_1 \cap E_2).$$

Доведемо рівність. Оскільки  $\chi_{E_1 \cup E_2}(\bar{x}) = \chi_{E_1}(\bar{x}) + \chi_{E_2}(\bar{x}) - \chi_{E_1 \cap E_2}(\bar{x})$ , тоді

$$f \chi_{E_1 \cup E_2}(\bar{x}) = f \chi_{E_1}(\bar{x}) + f \chi_{E_2}(\bar{x}) - f \chi_{E_1 \cap E_2}(\bar{x}).$$

Маючи на увазі те, що  $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$ , одержимо  $f \chi_{E_1 \cap E_2}(\bar{x}) \stackrel{\text{м.б.}}{=} 0$ . Звідси, а також із властивості лінійності та наслідку 1.3, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_I f \chi_{E_1 \cup E_2}(\bar{x}) d\bar{x} &= \int_I f \chi_{E_1}(\bar{x}) d\bar{x} + \int_I f \chi_{E_2}(\bar{x}) d\bar{x} - \underbrace{\int_I f \chi_{E_1 \cap E_2}(\bar{x}) d\bar{x}}_{=0}, \\ \int_{E_1 \cup E_2} f(\bar{x}) d\bar{x} &= \int_{E_1} f(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{E_2} f(\bar{x}) d\bar{x}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\textbf{Властивість 4. } f \in \mathfrak{R}(E) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |f| \in \mathfrak{R}(E); \\ \left| \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} \right| \leq \int_E |f(\bar{x})| d\bar{x}. \end{array} \right.$$

**Доведення.** Якщо

$A$  – множина точок розриву  $f(\bar{x})$  на  $E$ ,

$B$  – множина точок розриву  $|f(\bar{x})|$  на  $E$ ,

тоді  $A \supset B$ . Тому

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathfrak{R}(E) \Rightarrow \mu A = 0 \\ A \supset B \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{вл. повноти міри}]{} \mu B = 0 \Rightarrow |f| \in \mathfrak{R}(E).$$

Доведемо нерівність. Оскільки

$$\left| \sigma_{f \chi_E(\bar{x})} \right| = \left| \sum_{k=1}^n f \chi_E(\zeta_k) |I_k| \right| \leq \sum_{k=1}^n |f \chi_E(\zeta_k)| |I_k| = \sigma_{|f| \chi_E(\bar{x})},$$

тоді здійснюючи граничний перехід при  $d \rightarrow 0$  в останній нерівності, отримаємо

$$\left| \int_I f \chi_E(\bar{x}) d\bar{x} \right| \leq \int_I |f \chi_E(\bar{x})| d\bar{x} \Leftrightarrow \left| \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} \right| \leq \int_E |f(\bar{x})| d\bar{x}. \blacksquare$$

**Властивість 5.**  $\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ f(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in E, \end{array} \right\} \Rightarrow \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} \geq 0.$

**Властивість 6.**  $\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ f(\bar{x}) \geq g(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in E, \end{array} \right\} \Rightarrow \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} \geq \int_E g(\bar{x}) d\bar{x}.$

**Властивість 7.**  $\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ E - \text{доп. мн.}, \\ m \leq f(\bar{x}) \leq M \quad \forall \bar{x} \in E, \end{array} \right\} \Rightarrow m \cdot \mu E \leq \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} \leq M \cdot \mu E.$

**Властивість 8.**  $\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ m = \inf_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \\ M = \sup_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \gamma \in [m, M]: \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = \gamma \cdot \mu E.$

Властивості 5–8 доводяться аналогічно доведенню в одновимірному випадку [1, с. 100]. Властивості 7–8 – це різні формулювання *теорему про середнє*.

**Властивість 9** (*неперервний випадок теореми про середнє*).

$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) - \text{непер. на } E, \\ E - \text{доп. зв'язна мн.}, \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in E: \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = f(\xi) \cdot \mu E.$

Доведення здійснюється аналогічно доведенню в одновимірному випадку [1, с. 101] з використанням теореми Коші про проходження неперервної на зв'язній допустимій множині функції через будь-яке проміжне значення [3, с. 557].

**Властивість 10** (*узагальнена теорема про середнє*).

$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ m = \inf_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \\ M = \sup_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \\ g(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in E, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(E), \\ \exists \gamma \in [m, M]: \int_E f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) d\bar{x} = \gamma \cdot \int_E g(\bar{x}) d\bar{x}. \end{array} \right.$

**Властивість 11** (*неперервний випадок узагальненої теореми про середнє*).

$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) - \text{непер. на } E, \\ E - \text{доп. зв'язна мн.}, \\ g(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in E, \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in E: \int_E f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) d\bar{x} = f(\xi) \cdot \int_E g(\bar{x}) d\bar{x}.$

Доведення властивостей 10, 11 аналогічне одновимірному випадку [1, с. 102].

**Властивість 12.**  $\left. \begin{array}{l} \int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = 0, \\ f(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in E, \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) \stackrel{\text{м.с.}}{=} 0.$

**Доведення.** Нехай  $E = I$  і  $\int_I f(\bar{x}) d\bar{x} = 0$ , тоді

$f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(I) \Rightarrow f(\bar{x}) - \text{майже скрізь неперервна на } I.$

Доведення проведемо від супротивного. Нехай  $\exists \bar{\xi} \in I$  – точка неперервності функції  $f(\bar{x})$ , в якій  $f(\bar{\xi}) = \beta > 0$ , тоді  $\exists V_\delta(\bar{\xi}) \subset D(f): \forall \bar{x} \in V_\delta(\bar{\xi}) \quad f(\bar{x}) > \alpha > 0^1$ . Звідси

<sup>1</sup>Якщо  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_m)$ , то  $V_\delta(\bar{\xi}) = \prod_{k=1}^m (\xi_k - \delta, \xi_k + \delta)$ .

$$\int_I f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{V_\delta(\bar{\xi})} f(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{I \setminus V_\delta(\bar{\xi})} f(\bar{x}) d\bar{x} > \alpha \cdot \mu(V_\delta(\bar{\xi})) + 0 = \alpha \cdot 4\delta^2 > 0, \rightarrow \blacksquare$$

## 6 Зведення кратного інтеграла до повторного.

### 6.1 Теорема Фубіні.

Нехай  $X$  – проміжок в  $\square^m$ ,  $Y$  – проміжок в  $\square^n$ ,  $X \times Y$  – проміжок в  $\square^{m+n}$ .

**Теорема 1.6 (теорема Фубіні).**

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{R}(X \times Y), \\ \bar{x} \in X, \bar{y} \in Y, \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{X \times Y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_X d\bar{x} \left( \int_Y f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) = \int_Y d\bar{y} \left( \int_X f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} \right).$$

**Пояснення.** Перший інтеграл – це інтеграл на проміжку  $X \times Y$ . Другий и третій – це повторні інтеграли, які обчислюються таким чином. Нехай  $\bar{x} \in X$  – довільний фіксований елемент проміжку  $X$ . Розглянемо  $F(\bar{x}) = \int_Y f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$ . Значення функції

$F(\bar{x})$  у випадку, коли існує інтеграл  $\int_Y f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$ , обирається як значення цього інтеграла;

а у випадку, коли не існує інтеграл  $\int_Y f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$ , значення функції  $F(\bar{x})$  обирається

будь-яким між  $\int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \underline{J}(\bar{x})$  і  $\int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \bar{J}(\bar{x})$ , тобто

$$F(\bar{x}) \in [\underline{J}(\bar{x}), \bar{J}(\bar{x})].$$

В теоремі доводиться,

по-перше, що  $F(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(X)$ ,

по-друге,  $\mu\{\bar{x} \in X : \underline{J}(\bar{x}) \neq \bar{J}(\bar{x})\} = 0$ .

Після обчислення значення функції  $F(\bar{x})$  у всіх точках  $\bar{x}$  проміжку  $X$ , обчислюємо  $\int_X F(\bar{x}) d\bar{x}$ , який і позначено як  $\int_X d\bar{x} \int_Y f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$ .

**Ідея доведення.** Окрім зазначеного вище, розглядаються також інтегральні суми для усіх 3-х інтегралів. Оскільки  $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{R}(X \times Y)$ , то значення границь інтегральних сум не залежать від способу розбиття і вибору проміжних точок. Отже, цей вибір робимо зручним для нас способом. Розбиття обираємо як декартів добуток розбиттів проміжків  $X$  і  $Y$ . Проміжні точки обираємо теж як «декартів добуток» виборів на проміжках  $X$  і  $Y$ . Будемо мати:

$$\sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) |X_i \times Y_j| = \sum_i |X_i| \sum_j f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) |Y_j| = \sum_j |Y_j| \sum_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) |X_i|.$$

Це дограничний вигляд теореми Фубіні.

**Доведення.** По-перше, доведемо, що  $F(\bar{x}) \in \mathfrak{R}(X)$ . Зауважимо спочатку, що

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{R}(X \times Y) \Rightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{d \rightarrow 0} \bar{S}(f, P) = \int_{X \times Y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}. \quad (*)$$

Розглянемо ланцюг нерівностей:

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i,j} \inf_{(\bar{x}, \bar{y}) \in X_i \times Y_j} f(\bar{x}, \bar{y}) |X_i \times Y_j| \leq \left\| \inf_{(\bar{x}, \bar{y}) \in X_i \times Y_j} f(\bar{x}, \bar{y}) \leq \inf_{\bar{x} \in X_i} \left( \inf_{\bar{y} \in Y_j} f(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right\| \leq$$



$$\begin{aligned}
&\leq \sum_i \inf_{\bar{x} \in X_i} \left( \sum_j \inf_{\bar{y} \in Y_j} f(\bar{x}, \bar{y}) |Y_j| \right) \cdot |X_i| \stackrel{\text{за def ніжнього інт. Дарбу}}{\leq} \sum_i \inf_{\bar{x} \in X_i} \left( \int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) \cdot |X_i| \leq \\
&\stackrel{\text{за def функції } F(\bar{x})}{\leq} \sum_i \inf_{\bar{x} \in X_i} F(\bar{x}) \cdot |X_i| \leq \sum_i \sup_{\bar{x} \in X_i} F(\bar{x}) \cdot |X_i| \stackrel{\text{за def функції } F(\bar{x})}{\leq} \\
&\leq \sum_i \sup_{\bar{x} \in X_i} \int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} |X_i| \stackrel{\text{за def верхнього інт. Дарбу}}{\leq} \sum_i \sup_{\bar{x} \in X_i} \left( \sum_j \sup_{\bar{y} \in Y_j} f(\bar{x}, \bar{y}) |Y_j| \right) \cdot |X_i| \leq \\
&\leq \sum_{i,j} \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in X_i \times Y_j} f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot |X_i \times Y_j| = \bar{S}(f, P).
\end{aligned}$$

Здійснюємо граничний перехід під знаком нерівності. Тоді із (\*) випливає, що значення границь усіх сум вписаного ланцюга однакові при  $d \rightarrow 0$

Тоді, зокрема,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_i \inf_{\bar{x} \in X_i} F(\bar{x}) \cdot |X_i| = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_i \sup_{\bar{x} \in X_i} F(\bar{x}) \cdot |X_i|,$$

тобто  $\int_X F(\bar{x}) d\bar{x} = \int_X F(\bar{x}) d\bar{x}$ . Це означає, що функція  $F(\bar{x})$  інтегровна на  $X$ .

По-друге, доведемо, що  $\mu\{\bar{x} \in X : \underline{J}(\bar{x}) \neq \bar{J}(\bar{x})\} = 0$ . З ланцюга нерівностей також випливає, що

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_i \inf_{\bar{x} \in X_i} \left( \int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) \cdot |X_i| = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_i \sup_{\bar{x} \in X_i} \int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} |X_i|.$$

Це говорить про те, що

$$\begin{aligned}
&\int_X \left( \int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} - \int_{\bar{Y}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = 0 \Rightarrow \int_Y f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \stackrel{м.с.}{=} \int_X f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mu\{\bar{x} \in X : \bar{J}(\bar{x}) \neq \underline{J}(\bar{x})\} = 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

## 6.2 Наслідки із теореми Фубіні.

**Наслідок 1.4** Якщо  $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m] \subset \square^m$ , то

$$\int_X f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_m.$$

**Приклад 1.10** Знайти  $\int_I f(\bar{x}) d\bar{x}$ , якщо

$$f(x, y, z) = z \cdot \sin(x + y), \quad I = [0, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1].$$

**Розв'язання.** Застосуємо наслідок 1.4 із теореми Фубіні:

$$\begin{aligned}
&\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\pi dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 z \sin(x + y) dz = \int_0^\pi dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + y) \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + y) dy = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(x + y) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right) dx = 2. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Наслідок 1.5** Нехай  $D$  – допустима множина в  $\square^{m-1}$ ,  $E$  – допустима множина в  $\square^m$ , яка визначається наступним чином

$$E = \{(\bar{x}, y) \in \square^m : \bar{x} \in D \wedge \varphi(\bar{x}) \leq y \leq \psi(\bar{x})\}.$$

Якщо функція  $f(\bar{x}, y)$  – інтегровна на  $E$  (тобто  $f(\bar{x}, y) \in \mathfrak{R}(E)$ ), тоді

$$\int_E f(\bar{x}, y) d\bar{x} dy = \int_D d\bar{x} \int_{\varphi(\bar{x})}^{\psi(\bar{x})} f(\bar{x}, y) dy.$$

**Доведення.** Нехай  $\bar{x} \in D$  – фіксований, тоді визначимо множину

$$E_{\bar{x}} = \begin{cases} \{(\bar{x}, y) : \varphi(\bar{x}) \leq y \leq \psi(\bar{x})\}, & \text{якщо } \bar{x} \in D, \\ \emptyset, & \text{якщо } \bar{x} \notin D \end{cases}$$

(див. рис. 1.2 і 1.3 – дво- та тривимірний випадки відповідно), тоді  $\chi_E(\bar{x}, y) = \chi_D(\bar{x}) \cdot \chi_{E_{\bar{x}}}(y)$ , звідки

$$\begin{aligned} \int_E f(\bar{x}, y) d\bar{x} dy &= \int_{I_{\bar{x}} \times I_y \supset E} f(\bar{x}, y) d\bar{x} dy = \int_{I_{\bar{x}} \supset D} d\bar{x} \int_{I_y \supset E_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) \chi_E(\bar{x}, y) dy = \\ &= \int_{I_{\bar{x}} \supset D} \chi_D(\bar{x}) d\bar{x} \int_{I_y \supset E_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) \chi_{E_{\bar{x}}}(y) dy = \int_{I_{\bar{x}} \supset D} \chi_D(\bar{x}) d\bar{x} \underbrace{\int_{E_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) dy}_{=F(\bar{x})} = \\ &= \int_{I_{\bar{x}} \supset D} \chi_D(\bar{x}) d\bar{x} \underbrace{\int_{\varphi(\bar{x})}^{\psi(\bar{x})} f(\bar{x}, y) dy}_{=F(\bar{x})} = \int_D d\bar{x} \int_{\varphi(\bar{x})}^{\psi(\bar{x})} f(\bar{x}, y) dy. \end{aligned}$$

Тут значення функції  $F(\bar{x})$  визначається так само, як і в теоремі Фубіні, а саме:

$$F(\bar{x}) \begin{cases} = \int_{E_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) dy, & \text{якщо } \exists \int_{E_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) dy \\ \in \left[ \int_{\underline{E_{\bar{x}}}} f(\bar{x}, y) dy, \int_{\overline{E_{\bar{x}}}} f(\bar{x}, y) dy \right], & \text{якщо } \nexists \int_{E_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) dy. \end{cases}$$

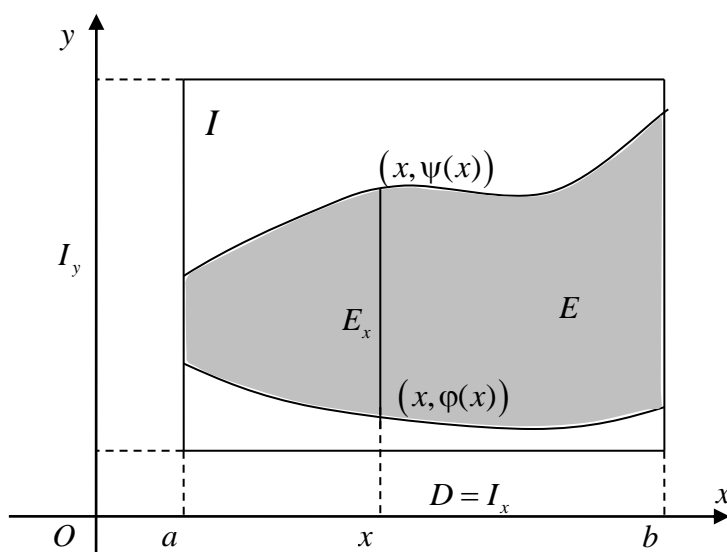


Рис. 1.2

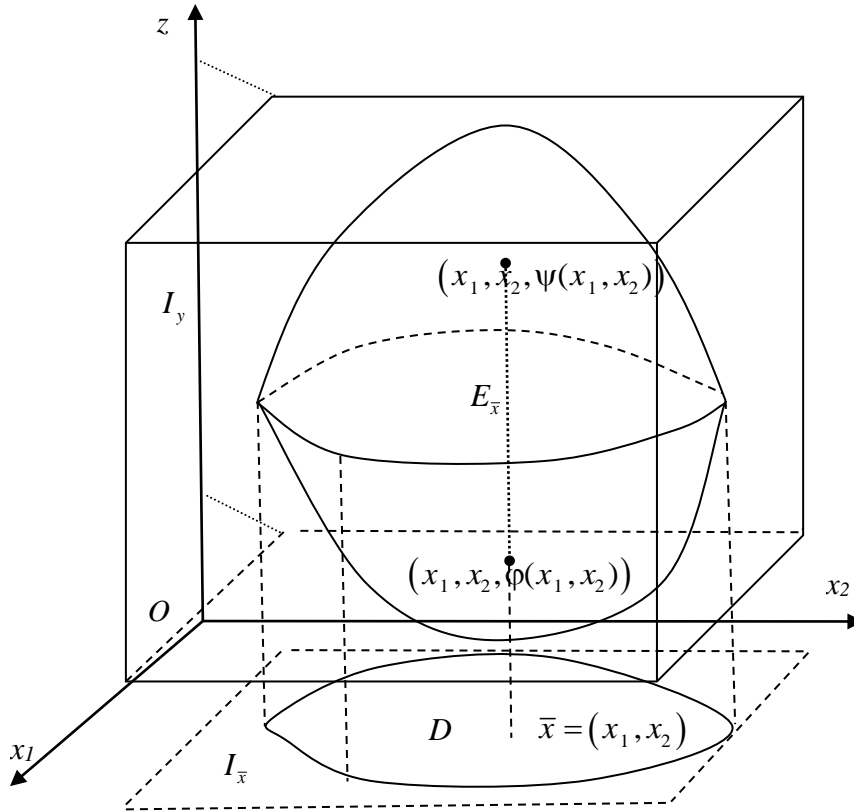


Рис. 1.3

При цьому,  $\mu \left\{ \bar{x} \in D : \int_{\bar{E}_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) dy \neq \int_{E_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y) dy \right\} = 0$ . ■

**Наслідок 1.6** (із наслідку 1.5).

$D$  – доп. мн., що визн. так само, як і в поперед. наслідку,  $(D \subset \square^{m-1})$   $\Rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} 1) E - \text{допустима множина,} \\ 2) \mu(E) = \int_D (\psi(\bar{x}) - \phi(\bar{x})) d\bar{x}. \end{array} \right.$

**Доведення.** Оскільки  $\phi(\bar{x})$  і  $\psi(\bar{x})$  – неперервні на  $D$ , тому множини точок графіків цих функцій в просторі  $\square^m$  мають лебегову міру нуль (див. приклад 1.7). Тоді множина  $E$ , що обмежена графіками цих функцій буде допустима, оскільки має межу лебегової міри нуль. Тому з наслідку 1.5 отримаємо:

$$\mu(E) = \int_E d\bar{x} dy = \int_D d\bar{x} \int_{\phi(\bar{x})}^{\psi(\bar{x})} dy = \int_D d\bar{x} \cdot y \Big|_{\phi(\bar{x})}^{\psi(\bar{x})} = \int_D (\psi(\bar{x}) - \phi(\bar{x})) d\bar{x}. \quad \blacksquare$$

**Приклад 1.11** Знайти площу круга  $x^2 + y^2 \leq r^2$ .

**Розв’язання.** Оскільки функції  $\psi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $\phi(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$  – неперервні на  $D = [-r, r]$ , тоді, згідно з наслідком 1.6,

$$\mu(E) = \int_{-r}^r \left( \sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2}) \right) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \left( \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right) \Big|_{-r}^r =$$

$$= 0 + r^2 \frac{\pi}{2} - \left( 0 + r^2 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \cdot r^2 \frac{\pi}{2} = \pi r^2. \blacksquare$$

**Наслідок 1.7** Нехай  $E$  – допустима множина, що належить проміжку  $I$ , тобто  $E \subset I \subset \square^m$ . Подамо  $I$  у вигляді декартового добутку:  $I = I_x \times I_y$ , де  $I_x \subset \square^{m-1}$ ,  $I_y \subset \square^1$ . Тоді при майже всіх значеннях  $y_0 \in I_y$  переріз

$$E_{y_0} = \{(\bar{x}, y) \in E : y = y_0\}$$

множини  $E$   $(m-1)$ -вимірною гіперплощиною  $y = y_0$  для майже всіх  $y_0 \in I_y$  являє собою допустиму підмножину, причому

$$\mu E = \int_{I_y} \tilde{\mu}(E_y) dy.$$

Тут  $\tilde{\mu}(E_y) - (m-1)$ -вимірна міра множини  $E_y$  у випадку, коли  $E_y$  – допустима. Якщо  $E_y$  – не є допустимою множиною, тоді  $\tilde{\mu}(E_y)$  – це число, що лежить між

$$\int_{E_y} 1 dy \text{ і } \int_{\overline{E_y}} 1 dy.$$

**Доведення.** Застосуємо теорему Фубіні:

$$\chi_E(\bar{x}, y) = \chi_{I_y}(y) \cdot \chi_{E_y}(\bar{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(E) = \int_E 1 d\bar{x} dy = \int_{I_x \times I_y \supset E} \chi_E(\bar{x}, y) d\bar{x} dy = \int_{I_y} \chi_{I_y}(y) dy \int_{E_y} 1 d\bar{x} = \int_{I_y} \tilde{\mu}(E_y) dy. \blacksquare$$

**Приклад 1.12** Застосовуючи формулу із наслідку 1.7, довести, що об'єм  $m$ -вимірної кулі радіуса  $R$  у випадку, коли  $m = 2k + 1$ , дорівнює  $V_{2k+1} = 2 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \cdot R^{2k+1}$ , а у випадку, коли  $m = 2k$ , дорівнює  $V_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} \cdot R^{2k}$ .

Провести доведення самостійно ! Див. [2, с.137].

## 7 Заміна змінних в кратному інтегралі

### 7.1 Постановка задачі і евристичне виведення формули заміни змінних.

#### ПОВТОРЕННЯ.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на } [a, b]; \\ x = \varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на } [\alpha, \beta]; \\ \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \\ \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b] - \text{взаємно однозначна функція;} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt} \quad \text{⌂}$$

Узагальнимо це твердження на випадок функції багатьох змінних.

*Припущення:*

1)  $D_{\bar{t}} \subset \square^m$ ,  $D_{\bar{x}} \subset \square^m$ ;

2)  $\varphi(\bar{t})$  – дифеоморфізм, тобто взаємно однозначне відображення множин  $D_{\bar{t}} \rightarrow D_{\bar{x}}$ , причому таке, що  $x_l = \varphi_l(\bar{t})$  – неперервно диференційовні на  $D_{\bar{t}} \forall l = 1, m$  і  $t_l = \varphi_l^{-1}(\bar{x})$  – неперервно диференційовні на  $D_{\bar{x}} \forall j = 1, m$ ;

3)  $D_{\bar{t}}$  і  $D_{\bar{x}}$  – відкриті множини в  $\square^m_2$ ;

4)  $f(\bar{x})$  – неперервна на  $D_{\bar{x}}$  (або у загальному випадку  $f \in \mathfrak{R}(D_{\bar{x}})$ ).

*Мета:* знайти  $g(\bar{t})$ , яка виражається через  $f(\bar{x})$  і  $\varphi(\bar{t})$  так, щоб виконувалася рівність  $\int_{D_{\bar{x}}} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{D_{\bar{t}}} g(\bar{t}) d\bar{t}$ .

Розглянемо випадок, коли  $D_{\bar{t}} = I$  – проміжок в  $\square^m$ .

Розіб'ємо проміжок  $I$  на проміжки  $I_i$  (утвориться розбиття  $R = \{I_i\}_{i=1}^n$ ). Знайдемо ті множини, на які відобразяться проміжки  $I_i$  за допомогою відображення  $\varphi$ . Позначимо їх через  $\varphi(I_i)$ . Оскільки  $I_i$  – множина допустима, а  $\varphi(\bar{t})$  – дифеоморфізм, тоді  $\varphi(I_i)$  – допустима множина.

Оскільки  $\varphi(\bar{t})$  – дифеоморфізм, то  $\{\varphi(I_i)\}$  утворюють розбиття множини  $D_{\bar{x}}$ , тобто  $\{\varphi(I_i)\}$  не мають спільних внутрішніх точок і  $D_{\bar{x}} = \bigcup_{i=1}^n \varphi(I_i)$ . Отже, за властивістю адитивності кратного інтеграла

$$\int_{D_{\bar{x}}} f(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{i=1}^n \int_{\varphi(I_i)} f(\bar{x}) d\bar{x} = \left| \begin{array}{l} \text{застосуємо неперервний ви-} \\ \text{падок теореми про середнє:} \\ \forall i = \overline{1, n} \quad \exists \bar{\xi}_i \in \varphi(I_i): \\ \int_{\varphi(I_i)} f(\bar{x}) d\bar{x} = f(\bar{\xi}_i) \cdot \mu(\varphi(I_i)) \end{array} \right| = \sum_{i=1}^n f(\bar{\xi}_i) \cdot \mu(\varphi(I_i))$$

Оскільки  $\varphi(\bar{t})$  – бієкція і  $\bar{\xi}_i \in \varphi(I_i) \subset D_{\bar{x}}$ , то  $\exists \bar{\tau}_i \in I_i : \bar{\xi}_i = \varphi(\bar{\tau}_i)$ , тоді

$$\int_{D_{\bar{x}}} f(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\bar{\tau}_i)) \cdot \mu(\varphi(I_i)).$$

Знайдемо  $\mu(\varphi(I_i))$ .

Нехай спочатку  $\varphi(\bar{t})$  – лінійна. Тоді у двовимірному випадку ( $m=2$ ) прямокутники  $I_i$  переводяться відображенням  $\varphi$  в паралелограми та в координатній формі відображення  $\varphi(\bar{t})$  записується у вигляді

$$x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 = \varphi_1(t_1, t_2),$$

$$x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 = \varphi_2(t_1, t_2),$$

а у векторній –

$$e_i^{\bar{x}} = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j^{\bar{t}}, \quad i = 1, 2,$$

де  $\{e_1^{\bar{x}}, e_2^{\bar{x}}\}$  і  $\{e_1^{\bar{t}}, e_2^{\bar{t}}\}$  два базиси одиничних векторів простору  $\square^2$ . У цьому випадку

$$\mu(\varphi(I_i)) = \left[ \begin{array}{c} e_1^{\bar{x}} \\ e_2^{\bar{x}} \end{array} \right] \cdot \mu(I_i) = \text{abs} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \mu(I_i) = \text{abs} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} \cdot \mu(I_i).$$

В тривимірному випадку прямий паралелепіпед в базисі  $\{e_j^{\bar{t}}\}$  перейде в похилий паралелепіпед в базисі  $\{e_i^{\bar{x}}\}$ . Об'єм останнього обчислюється як модуль мішаного добутку, що дорівнює модулю визначника матриці лінійного перетворення  $A$ , який можна також обчислювати через частинні похідні цього перетворення:

$$\text{abs det } A = \text{abs} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_m} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_m} \end{vmatrix} = \det \varphi'(\bar{t}_i),$$

$$\mu(\varphi(I_i)) = \det \varphi'(\bar{t}_i) \cdot \mu(I_i).$$

Остання рівність у випадку лінійного перетворення має значення, що не залежить від точки, в якій обчислюється, а у випадку, коли  $\varphi(t)$  – нелінійний дифеоморфізм, а міра  $\mu(I_i)$  – мала, тоді значення  $\mu(\varphi(I_i))$  мало відрізняється від міри похилого паралелепіпеду і залежить від точки, в якій обчислюється, причому

$$\mu(\varphi(I_i)) \approx \det \varphi'(\bar{t}_i) \mu(I_i).$$

Значення виразу  $\det \varphi'(\bar{t}_i)$  називають *якобіаном*. Зазвичай, якобіан позначається в та-

кий спосіб:  $\det \varphi'(\bar{t}_i) = \text{abs} \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(t_1, \dots, t_m)}(\bar{t}_i)$ .

Отже, в результаті отримаємо:

$$\int_{D_{\bar{x}}} f(\bar{x}) d\bar{x} \approx \sum_{i=1}^n f(\varphi(\bar{t}_i)) \det \varphi'(\bar{t}_i) \mu(I_i).$$

Сума в правій частині відповідає інтегральній сумі для функцій  $f(\varphi(\bar{t})) \cdot \det \varphi'(\bar{t})$  на проміжку  $I$ . Тому після здійснення граничного переходу отримаємо

$$\int_{D_{\bar{x}}} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_I f(\varphi(\bar{t})) \det \varphi'(\bar{t}) d\bar{t}.$$

Чи існує інтеграл в правій частині? Якщо функція  $f(\bar{x})$  неперервна на  $D_{\bar{x}}$ ,  $\varphi(\bar{t})$  – неперервна на  $I = \varphi(D_{\bar{x}})$ , тоді  $f(\varphi(\bar{t}))$  – неперервна на  $I$ . Якобіан утворюється із частинних похідних координатних функцій  $\varphi_i(\bar{t})$ , які за умовою є неперервними на  $I$ , тому якобіан є неперервною на  $I$  функцією. Підінтегральна функція в правій частині, таким чином, є неперервною, тому інтеграл на  $I$  існує.

Отже, функцію  $g(\bar{t})$  знайдено:  $g(\bar{t}) = f(\varphi(\bar{t})) \det \varphi'(\bar{t})$ . Залишається узагальнити множину  $D_{\bar{t}}$ . Для цього потрібно застосувати рівність  $\int_{D_{\bar{t}}} g(\bar{t}) d\bar{t} = \int_{I \supset D_{\bar{t}}} g \chi_{D_{\bar{x}}}(\bar{t}) d\bar{t}$ .

Отже, отримаємо наступну теорему.

**Теорема 1.7** (заміна змінної під знаком кратного інтеграла). Якщо  $f(\bar{x})$  – неперервна на  $D_{\bar{x}}$ ,  $\bar{x} = \varphi(\bar{t})$  – дифеоморфізм  $D_{\bar{t}}$  на  $D_{\bar{x}}$ ,  $D_{\bar{x}} = \varphi(D_{\bar{t}})$ , тоді має місце рівність

$$\int_{D_{\bar{x}} = \varphi(D_{\bar{t}})} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{D_{\bar{t}}} f(\varphi(\bar{t})) \cdot \det \varphi'(\bar{t}) d\bar{t}.$$

Тут

$$\det \varphi'(\bar{t}) = \text{abs} \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(t_1, \dots, t_m)} = \text{abs} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

**Зауваження 1.3**  $D_{\bar{x}}$  і  $D_{\bar{t}}$  – це одна і та сама множина, але виражена через різні змінні.

**Приклад 1.13** Знайти площу області, що обмежена лініями:

$$x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x, \quad 0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

**Розв'язання.** Оскільки область  $D_{x,y}$  обмежена неперервними лініями, графіки яких мають міру 0, тоді ця множина допустима. Із означення міри допустимої множини випливає, що  $S = \iint_D dx dy$ . Функція під знаком інтеграла  $f(x, y) \equiv 1$  – неперервна на

$D_{x,y}$ . Введемо нові змінні  $u = \varphi_1(x, y) = x + y$ ,  $v = \varphi_2(x, y) = \frac{y}{x}$ . Відображення  $\varphi(x, y) = \{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\}$  задає дифеоморфізм області  $D_{x,y}$  на область

$$D_{u,v} : \begin{cases} a \leq u \leq b, \\ \alpha \leq v \leq \beta. \end{cases} \text{ Отже,}$$

$$S = \iint_D dx dy = \left\| \begin{aligned} &u = x + y, \quad v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{v+1}, \\ &a \leq x + y \leq b, \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta \Rightarrow a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta, \\ &\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{u}{x^2} = \frac{(v+1)^2}{u}, \\ &abs \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{u}{(v+1)^2} \end{aligned} \right\| = \int_a^b du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u}{(v+1)^2} dv =$$

$$= \int_a^b u du \left( \frac{-1}{\beta+1} + \frac{1}{\alpha+1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1} \right) (b^2 - a^2). \blacksquare$$

**7.2 ♡ Полярні координати.** Розглянемо відображення, яке задає перехід від декартової до, переходячи до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Розглянемо

$$I = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq R \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

тоді відображення  $I \rightarrow K$  не є дифеоморфізмом, тому що

- 1) відрізок  $\{(\rho, \varphi) : \rho = 0 \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  відображається в точку  $(0, 0)$ ,
- 2) два відрізки  $\{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq R \wedge \varphi = 0\}$  і  $\{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq R \wedge \varphi = 2\pi\}$

відображаються в один  $\{(x, y) : y = 0 \wedge 0 \leq x \leq R\}$ .

**Висновок:** порушується взаємна однозначність. Для того, щоб відображення стало взаємно однозначним, потрібно розглянути відображення  $I \setminus \partial I \leftrightarrow K \setminus E$ , де  $E$  – множина точок кола разом з множиною точок відрізка  $\{(x, y) : y = 0 \wedge 0 \leq x \leq R\}$ . Застосуємо теорему про заміну змінної під знаком кратного інтеграла:

$$\int_{K \setminus E} f(x, y) dx dy = \int_{I \setminus \partial I} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) |I| d\rho d\varphi,$$

$$\mu E = 0 \Rightarrow \int_{K \setminus E} f(x, y) dx dy = \int_K f(x, y) dx dy,$$

$$\mu(\partial I) = 0 \Rightarrow \int_{I \setminus \partial I} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) |I| d\rho d\varphi = \int_I f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) |I| d\rho d\varphi.$$

Знайдемо якобіан  $|I|$ :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$|I| = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

$$\text{Отже, } \iint_K f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Зауважимо, що у полярній системі координат  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$  (див. рис. 1.4)

$\rho$  – відстань від точки  $M$  площини до початку координат  $O$  ( $\rho \geq 0$ !),

$\varphi$  – кут між  $OM$  і віссю  $O\rho$ ,

$\rho=R$  – коло радіусом  $R$  з центром в т.  $O$ ,

$\varphi=\varphi_0$  – промінь, що утворює кут  $\varphi_0$  з віссю  $O\rho$ .

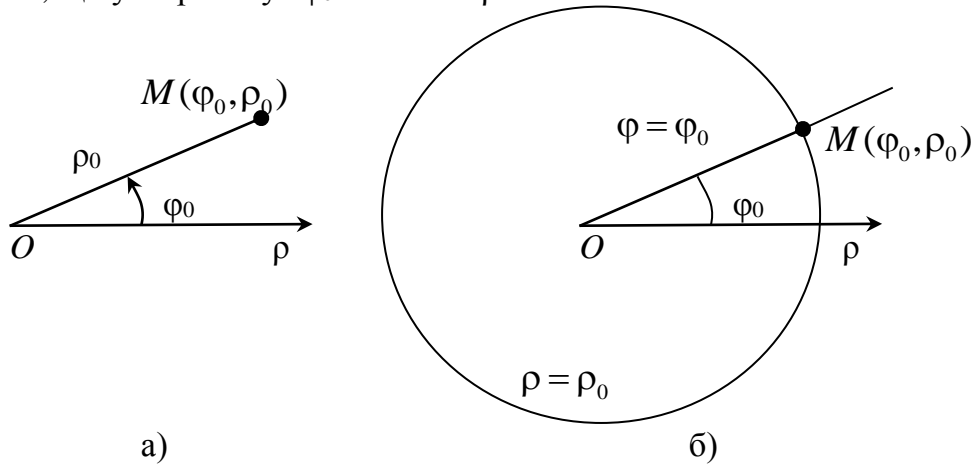


Рис.1.4

Елемент площі в полярній системі координат:  $|I| d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi$ . Тоді площа плоскої області  $D$  обчислюється як

$$S = \iint_D dx dy = \iint_D \rho d\rho d\varphi.$$

**Приклад 1.14** Знайти площу області, що обмежена лінією  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  за умови  $x^2 + y^2 \geq a^2$ .

**Розв'язання.** Введемо полярну систему координат  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$  тоді

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2, \\ (x^2 + y^2)^2 &= 2a^2(x^2 - y^2), \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\rho^2)^2 = 2a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Rightarrow \rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi,$$

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Знайдемо точки перетину лемніскати  $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$  і кола  $\rho = a$ :

$$\begin{cases} \rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \\ \rho = a, \end{cases} \Rightarrow a = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2\varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Дану область  $D$  зображено на рис. 1.5. Зважаючи на її симетрію, отримаємо



$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_D \int \rho d\rho d\varphi = 4 \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/6} d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 4 \int_0^{\pi/6} d\varphi \left( \frac{2a^2 \cos 2\varphi}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \\
 &= 4 \left( \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi - \frac{a^2}{2} \varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} = 2a^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \\
 &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. \blacksquare
 \end{aligned}$$

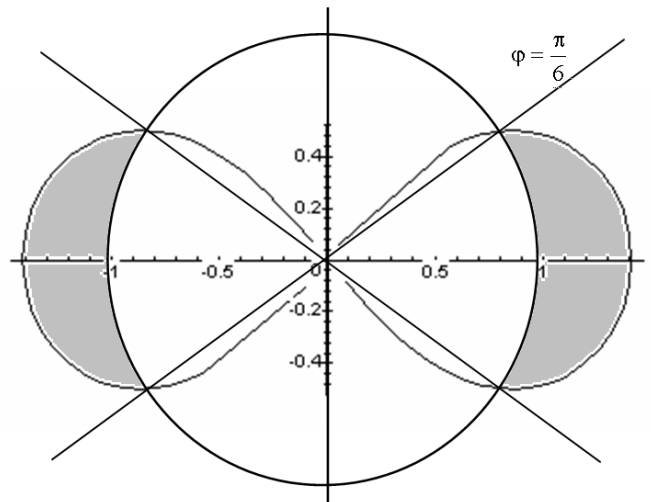


Рис. 1.5

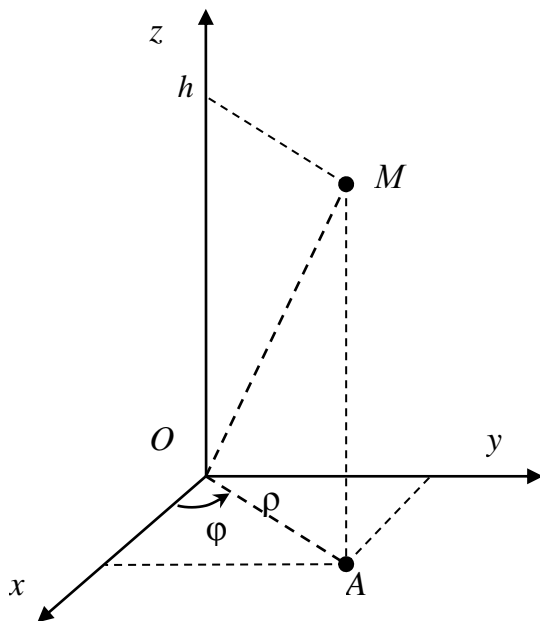
### 7.3 Циліндричні координати.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = h. \end{cases}$$

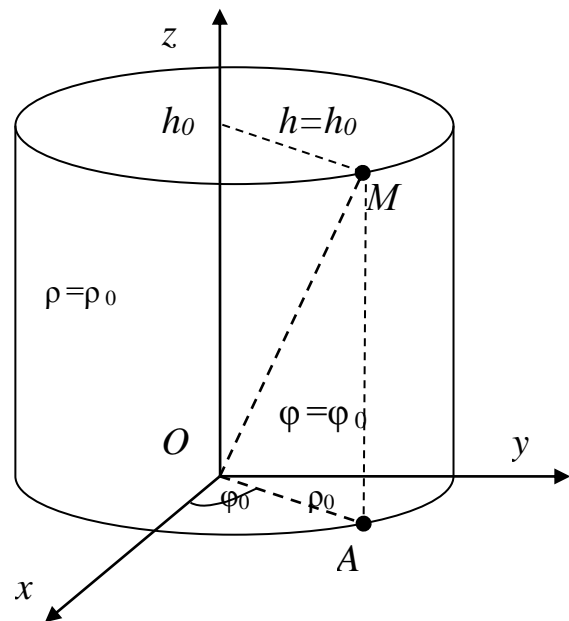
$h$  – визначає аплікату точки  $M$  в просторі,

$\rho$  – відстань від проекції  $A$  точки  $M$  простору на площину  $Oxy$  до початку координат  $O$ , тобто  $\rho = OA$  ( $\rho \geq 0$ !),

$\varphi$  – кут між  $OA$  і додатним напрямком осі  $Ox$  (див. рис. 1.6 а).



а



б

Рис. 1.6

$h = h_0$  – площина, паралельна  $Oxy$ ,

$\rho = \rho_0$  – циліндр, твірною якого паралельна осі  $Oz$  і вісь якого збігається з цією віссю, радіус перерізу циліндру дорівнює  $\rho_0$ ,

$\varphi = \varphi_0$  – півплощина, обмежена віссю аплікат, яка утворює з віссю абсцис кут  $\varphi_0$  (див. рис. 1.6 б).

Знайдемо якобіан:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, h)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Елемент об'єму:  $dx dy dz = |I| d\rho d\varphi dh = \rho d\rho d\varphi dh$ .

**Приклад 1.15** Знайти об'єм тіла Вівіані, яке обмежене поверхнями  $x^2 + y^2 = R|x|$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ( $x^2 + y^2 \geq R|x|$ ).

**Розв'язання.** Розглянемо циліндричну поверхню:

$$x^2 + y^2 = R|x|, \quad x^2 + y^2 - 2R|x| \cdot \frac{1}{2} + \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{4} = 0, \quad \left(|x| - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Вона являє собою два циліндри з осями  $x = -\frac{R}{2}$ ,  $x = \frac{R}{2}$ , радіусом перерізу  $\frac{R}{2}$  кожен.

Дане тіло – це та частина кулі, що лежить зовні циліндричної поверхні. Перейдемо до циліндричної системи координат (рис. 1.7):

$$x^2 + y^2 = R|x| \Rightarrow \rho = R|\cos \varphi|,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Тоді

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{R \cos \varphi}^R \rho d\rho \int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{R \cos \varphi}^R \rho d\rho z \Big|_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{R \cos \varphi}^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{2(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}+1}}{3} \Big|_{R \cos \varphi}^R = \frac{8}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{16}{9} R^3. \quad \blacksquare$$

#### 7.4 ☞ Сферичні координати.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta_1, \\ y = \rho \sin \varphi \cos \theta_1, \\ z = \rho \sin \theta_1 \end{cases}$$

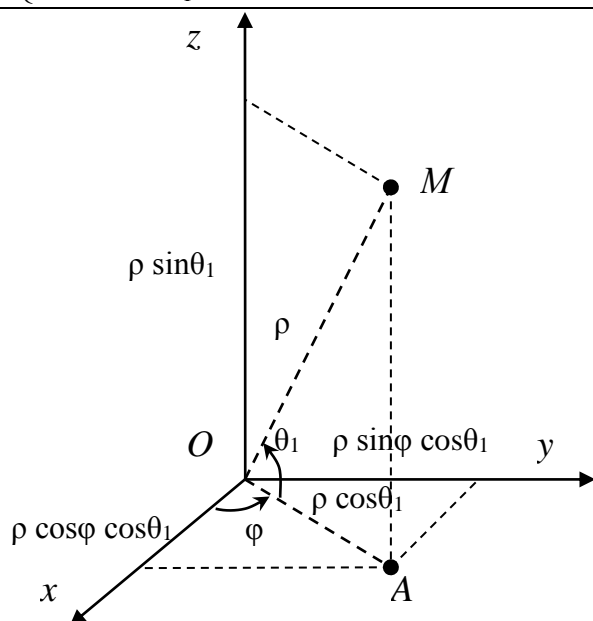


Рис. 1.8

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta_2, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta_2, \\ z = \rho \cos \theta_2 \end{cases}$$

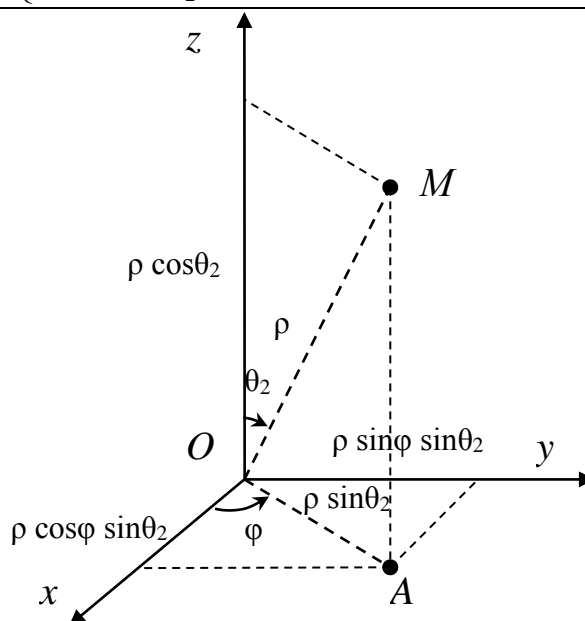


Рис. 1.9

$\theta_1$ – кут між радіус-вектором $OM$ та площиною $Oxy$	$\theta_2$ – кут між радіус-вектором $OM$ і додатнім напрямком осі $Oz$
$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2};  I_1  = \rho^2 \cos \theta_1$	$0 \leq \theta_2 \leq \pi;  I_2  = \rho^2 \sin \theta_2$
$\rho$ – відстань від початку координат до точки $M$ , тобто $\rho = OM$ ( $\rho \geq 0$ !), $\varphi$ – кут між $OA$ і віссю $Ox$ , де $A$ – це проекція точки $M$ простору на площину $Oxy$	
Елемент об'єму: $dxdydz = \rho^2 \cos \theta_1 d\rho d\varphi d\theta_1$	Елемент об'єму: $dxdydz = \rho^2 \sin \theta_2 d\rho d\varphi d\theta_2$

Обчислимо якобіан в першому випадку:

$$|I_1| = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta_1)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta_1 & -\rho \sin \varphi \cos \theta_1 & -\rho \cos \varphi \sin \theta_1 \\ \sin \varphi \cos \theta_1 & \rho \cos \varphi \cos \theta_1 & -\rho \sin \varphi \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & \rho \cos \theta_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \sin \theta_1 \sin^2 \varphi \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \rho^2 \sin \theta_1 \cos^2 \varphi \cos \theta_1 \sin \theta_1 +$$

$$+ \rho^2 \cos \theta_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta_1 + \rho^2 \cos \theta_1 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta_1 = \rho^2 \cos \theta_1.$$

Оскільки

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = \rho^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = \rho^2,$$

тому  $\rho = \rho_0$  – сфера з центром в т.О радіуса  $\rho_0$  (рис. 1.10).

$\theta_1 = \theta_0$  ( $\theta_2 = \theta_0$ ) – частина конуса, твір-на якого з площиною  $Oxy$  (з віссю  $Oz$ ) утворює кут  $\theta_0$ . При перерізі сфери  $\rho = \rho_0$  конусом  $\theta_1 = \theta_0$  ( $\theta_2 = \theta_0$ ) утворюється паралель на сфері.

Оскільки  $\varphi = \angle(OA, Ox)$ , то  $\varphi = \varphi_0$  – півплощина, обмежена віссю апікат, яка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут  $\varphi_0$ . Переріз сфери цією півплощиною утворює меридіан.

**Приклад 1.16** Обчислити інтеграл

$$J = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz \text{ за допомогою сферичних координат.}$$

ричних координат..

**Розв'язання.** Розглянемо сферичну систему координат для першого випадку:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta_1 \\ y = \rho \sin \varphi \cos \theta_1 \\ z = \rho \sin \theta_1 \end{cases}$$

За умовою

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2},$$

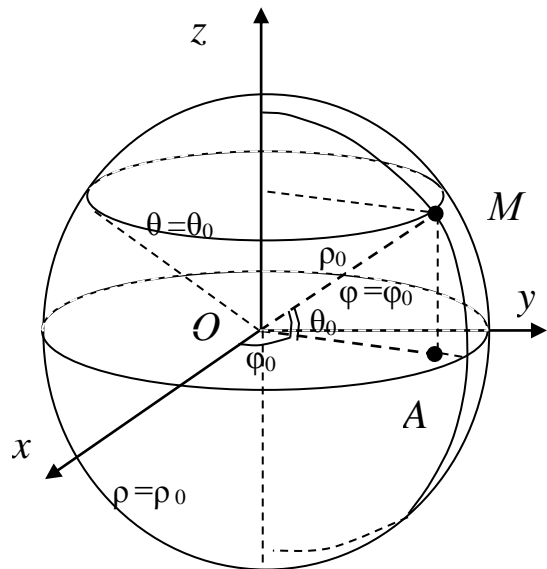


Рис. 1.10

тому тіло обмежене додатними частинами конуса і сфери, що лежать в першому октанті. В даному випадку рівнянням поверхні конуса в сферичній системі координат є  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , а сфери –  $\rho = \sqrt{2}$ . Виходячи із геометричного змісту сферичних координат, отримаємо (див. рис. 1.11):

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos \theta_1 \rho^2 \sin^2 \theta_1 d\rho.$$

Обчислення завершити самостійно ✎!

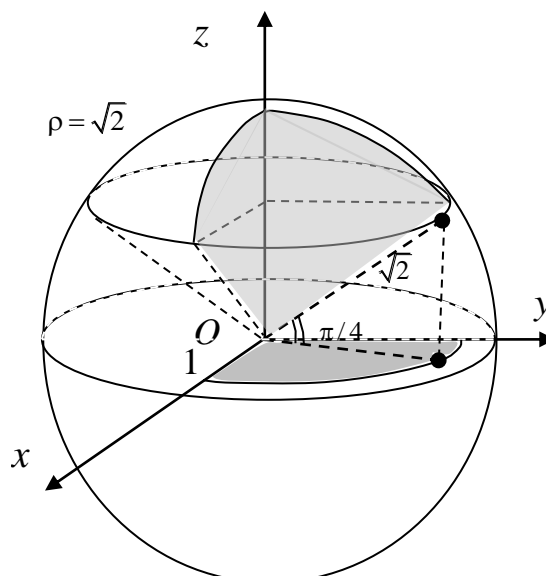


Рис. 1.11

## 7.5 Сферичні координати в $\square^m$ .

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}, \\ \dots \\ x_k = \rho \cos \varphi_{k-1} \prod_{i=k}^{m-1} \sin \varphi_i, k = 2, 3, \dots, m-1, \\ \dots \\ x_m = \rho \cos \varphi_{m-1}, \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_i \leq \pi \quad \forall i = 2, m-1, \quad \rho \geq 0,$$

$$|I| = \rho^{m-1} \prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1} \varphi_k - \text{якобіан.}$$

**Приклад 1.17** Обчислити  $J = \int_D \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} dx_1 \dots dx_m$ , де

$$D: x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2.$$

Оскільки  $x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2$ , то  $D: \rho^2 \leq R^2 \Rightarrow D: \rho \leq R$ . Отже,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_m d\varphi_m \int_0^R \rho^{m-1} \cdot \rho \cdot d\rho = \\ &= \frac{R^{m+1}}{m+1} \cdot 2\pi \cdot 2^{m-2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi_4 d\varphi_4 \dots \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \varphi_{m-1} d\varphi_{m-1} = \\ &= \frac{R^{m+1}}{m+1} \cdot \pi \cdot 2^{m-1} \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2!!}{3!!} \cdot 1 \cdot \dots \cdot \frac{(m-4)!!}{(m-3)!!} \cdot \frac{(m-3)!!}{(m-2)!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m - \text{парне}, \\ 1, & m - \text{непарне} \end{cases} = \\ &= \frac{R^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\pi 2^{m-1}}{(m-2)!!} \cdot \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\left[ \frac{m-2}{2} \right]}, \end{aligned}$$

де  $[a]$  – ціла частина числа  $a$ , тобто найбільше ціле число, що не перевищує  $a$ . ■

## §2 Криволінійні та поверхневі інтеграли

### 1 Криволінійний інтеграл

#### 1.1 Поняття криволінійного інтеграла першого і другого роду.

Нехай  $L$  – спрямлювана крива, тобто така крива, у якої обмеженою є множина всіх довжин ламаних, вписаних в цю криву (див рис. 1.12). Значення супремума такої множини називають довжиною кривої.

Параметризація кривої  $L$ :  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [a, b]$ .

#### Припущення:

1. Крива  $L$  не має самоперетинів і самонакладів.

2.  $L$  – гладка крива, тобто така крива, параметризація якої виражається через неперервно диференційовні на відрізку  $[a, b]$  функції  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$ , тобто:

а) функції  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  – неперервні на відрізку  $[a, b]$ ;

б) функції  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  – диференційовні на інтервалі  $(a, b)$ ;

в)  $\exists \varphi'(a+0) = \lim_{t \rightarrow a+0} \varphi'(t) \quad \wedge \quad \exists \varphi'(b-0) = \lim_{t \rightarrow b-0} \varphi'(t)$ ;

3. крива не має особливих точок, тобто таких точок  $(\varphi(t_0); \psi(t_0)) \in L$ , що  $[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 = 0$ . Іншими словами, усі точки кривої  $L$  є звичайними, і

$$\forall t_0 \in [a, b] \quad [\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 \neq 0.$$

Розіб'ємо відрізок  $[a, b]$  точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Йому відповідає розбиття кривої  $L$  точками  $\{M_k\}$  на дуги  $\{\cup M_{k-1}M_k\}$  (рис. 1.12). Тут

$$M_k(x_k, y_k) = M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k)),$$

$$M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}) = M_{k-1}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})),$$

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1},$$

$$\Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = y_k - y_{k-1}.$$

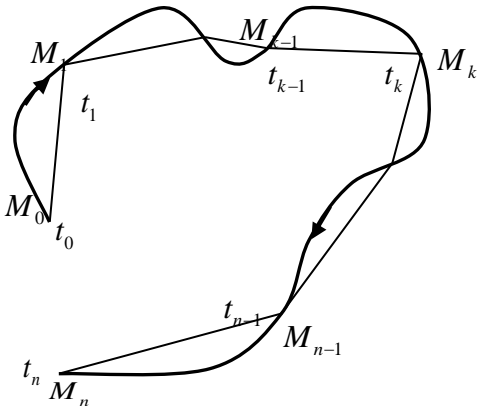


Рис.1.12

Позначимо через  $\Delta l_k$  довжину дуги  $\cup M_{k-1}M_k$ , тобто

$$\Delta l_k = |\cup M_{k-1}M_k| = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Діаметром розбиття кривої  $L$  точками  $\{M_k\}$  називають число  $\Delta = \max_k \Delta l_k$ .

Розглянемо три функції:  $f(x, y)$ ,  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$ , задані на  $L$ . Як правило, передбачається, що ці функції є неперервними вздовж  $L$ . Оскільки  $L$  – замкнена множина і обмежена, то (за теоремою Кантора [3, с. 559])  $f, P, Q$  – рівномірно неперервні на  $L$ , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall M_1, M_2 \in L \quad \rho(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon,$$

Аналогічно, неперервними (рівномірно неперервними) вважаються функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$ .

Нехай  $N_k \in \cup M_{k-1} M_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) – проміжні точки розбиття кривої  $L$  точками  $\{M_k\}$ . Враховуючи параметризацію кривої, матимемо:

$$N_k(\alpha_k, \beta_k) = N_k(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)), \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k], \quad k=1, \dots, n.$$

Розглянемо інтегральні суми

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k, \beta_k) \cdot \Delta l_k,$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\alpha_k, \beta_k) \cdot \Delta x_k, \quad \sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\alpha_k, \beta_k) \cdot \Delta y_k.$$

**Означення 1.10** Число  $I_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) назовемо *границею інтегральних сум*  $\sigma_s$  при діаметрі розбиття, що прямує до нуля ( $I_s = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_s$ ), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \{M_k\} \forall \{N_k\}: \Delta < \delta \Rightarrow |\sigma_s - I_s| < \varepsilon.$$

**Означення 1.11** Границю  $I_1$  називають *криволінійним інтегралом першого роду* та позначають:  $I_1 = \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$ .

**Означення 1.12** Границі  $I_2$  і  $I_3$  називають *криволінійними інтегралами другого роду* та позначають:  $I_2 = \int_L P(x, y) dx$ ,  $I_3 = \int_L Q(x, y) dy$ .

**Означення 1.13** Суму  $\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  називають *загальним інтегралом другого роду*.

Із означення випливає,

по-перше, що криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку оббігу кривої  $L$ , а інтеграл другого роду залежить від напрямку оббігу  $L$  (змінює знак на протилежний при зміні напрямку оббігу);

по-друге, фізичний зміст інтеграла першого роду – це маса кривої  $L$ , що має густину  $f(x, y)$ ;

по-третє, фізичний зміст інтеграла другого роду (загального інтеграла) – робота по переміщенню матеріальної точки із точки  $A$  в точку  $B$  вздовж кривої  $L$  під дією сили  $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ .

**Зауваження 1.4** Аналогічним чином вводяться криволінійні інтеграли в просторі, зокрема,

$$\int_L f(x, y, z) dl - \text{криволінійний інтеграл першого роду.}$$

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz - \text{загальний криволінійний інтеграл}$$

другого роду.

## 1.2 Умови існування криволінійних інтегралів.

**Теорема 1.8** (зведення криволінійного інтеграла до визначеного). Нехай гладка крива  $L$  без особливих точок не має самоперетинів і самонакладів, функції  $f(x, y)$ ,  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  – неперервні вздовж  $L$ . Тоді існують криволінійні інтеграли першого і другого роду, до того ж, має місце формула зв'язку між криволінійними інтегралами і визначеним інтегралом Рімана:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = I_1, \quad (1.3)$$

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = I_2. \quad (1.4)$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = I_3. \quad (1.5)$$

**Доведення.** Внаслідок гладкості кривої  $L$ , функція  $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ . Дійсно,

1)  $u = \varphi'(t)$  – непер. на  $[a, b]$ ,  $f_1(u) = u^2$  – непер. на  $\square$ ,  $\left. \vphantom{\int} \right\} \Rightarrow f_2(t) = f(\varphi'(t)) = [\varphi'(t)]^2$  – непер. на  $[a, b]$  як композиція непер. ф-ій;

2) аналогічно,  $f_3(t) = f(\psi'(t)) = [\psi'(t)]^2$  – непер. на  $[a, b]$ ;

3)  $v = f_4(t) = f_2(t) + f_3(t) = [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2$  – непер. на  $[a, b]$  як сума непер. функцій;

4)  $v = f_4(t)$  – непер. на  $[a, b]$ ;  $\left. \vphantom{\int} \right\} \Rightarrow \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} = h(f_4(t))$  – непер. на  $[a, b]$  як композиц. непер. ф-ій  
 $h(v) = \sqrt{v}$  – непер. на  $[0, +\infty)$

Неперервними на відрізку  $[a, b]$  є також і функції  $f(\varphi(t), \psi(t))$ ,  $P(\varphi(t), \psi(t))$ ,  $Q(\varphi(t), \psi(t))$ . Дійсно,

$\left. \begin{array}{l} \varphi(t), \psi(t) \text{ – неперервні на } [a, b], \\ f(x, y), P(x, y), Q(x, y) \text{ – непер. на } L, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\varphi(t), \psi(t)), \\ P(\varphi(t), \psi(t)), \\ Q(\varphi(t), \psi(t)) \end{array} \right\}$  – непер. на  $[a, b]$  як композиція непер. ф-ій.

Отже, визначені інтеграли в правих частинах рівностей (1.3) – (1.5) існують завдяки неперервності підінтегральних функцій на  $[a, b]$ .

Розглянемо інтегральні суми

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{k=1}^n f(\alpha_k, \beta_k) \Delta l_k = \left\| \begin{array}{l} \alpha_k = \varphi(\tau_k), \quad \beta_k = \psi(\tau_k), \\ \Delta l_k = |M_{k-1} M_k| = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \end{array} \right\| = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt; \\ \sigma_2 &= \sum_{k=1}^n P(\alpha_k, \beta_k) \Delta x_k = \left\| \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt \right\| = \\ &= \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Сума  $\sigma_3$  для функції  $Q(x, y)$  має вигляд, аналогічний вигляду  $\sigma_2$ , тому докладно її розглядати не будемо. Проведемо оцінювання:

$$\begin{aligned} |\sigma_2 - I_2| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| \cdot |P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))| dt; \\ |\sigma_1 - I_1| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \cdot |f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))| dt. \end{aligned}$$

Покажемо що

$$\Delta = \max_k \Delta l_k \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta^* = \max_k \Delta t_k \rightarrow 0.$$

Функція  $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , тому (за другою теоремою Вейерштрасса [3, с. 188]) ця функція має мінімум в деякій точці цього відрізка. Оскільки  $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$ , то цей мінімум додатний, тобто

$$\exists t_0 \in [a, b]: \min_{[a, b]} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} = \sqrt{[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2} = m > 0.$$

Тоді

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k.$$

Звідси  $\Delta t_k \leq \frac{1}{m} \Delta l_k$ . Отже,

$$0 \leq \Delta^* \leq \frac{1}{m} \Delta$$

$$\square \quad \Downarrow \quad \square \quad , \text{ тобто } \Delta = \max_k \Delta l_k \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta^* = \max_k \Delta t_k \rightarrow 0.$$

Оскільки  $f(\varphi(t), \psi(t))$  – неперервна на  $[a, b]$ , тоді (за теоремою Кантора [3, с. 559])  $f(\varphi(t), \psi(t))$  рівномірно неперервна на відрізку  $[a, b]$ . Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0: \forall R = \{t_k\} \forall \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \quad \Delta^* < \delta_1 \Rightarrow |f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{|L|},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: \forall R = \{t_k\} \forall \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \quad \Delta^* < \delta_2 \Rightarrow |P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)},$$

де  $|L|$  – довжина кривої  $L$ ,  $M = \max_{[a, b]} |\varphi'(t)|$ .

Таким чином, маємо:

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\varepsilon}{|L|} \cdot \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \frac{\varepsilon}{|L|} \cdot |L| = \varepsilon,$$

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon.$$

Тоді матимемо:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0: \forall \{M_k\} \quad \Delta < m\delta_1 \Rightarrow \Delta^* < \frac{1}{m} \Delta < \frac{1}{m} \cdot m\delta_1 = \delta_1 \Rightarrow |\sigma_1 - I_1| < \varepsilon.$$

Звідки  $I_1 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_1$ . Аналогічно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: \forall \{M_k\} \quad \Delta < m\delta_2 \Rightarrow \Delta^* < \delta_2 \Rightarrow |\sigma_2 - I_2| < \varepsilon,$$

звідки  $I_2 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_2$ . ■

**Означення 1.14** Криву називають *кусково-гладкою*, якщо вона неперервна і її можна розбити на скінчену кількість дуг  $L_k$ , що не мають спільних внутрішніх точок,

тобто  $(L_k \cap L_i)^0 = \emptyset \quad \forall i \neq k$ ,  $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$  так, що кожна ділянка  $L_k$  є гладкою кривою.

Нагадаємо, що  $\varepsilon$ -околом точки  $M_0$  на кривій  $L$  називають множину точок кривої, що лежить всередині круга  $O_\varepsilon(M_0)$  радіусу  $\varepsilon$  з центром в цій точці. Точку  $M_0$  кри-



вої називають внутрішньою, якщо вона належить цій кривій разом із деяким її  $\varepsilon$ -околом.

**Зауваження 1.5** Якщо крива кусково-гладка, то криволінійні інтеграли вздовж неї можна подати як суму інтегралів вздовж гладких її ділянок, тобто  $\int_L \dots = \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \dots$ . Більш того, формули (1.3), (1.4), (1.5) мають місце і для кусково-гладких кривих. Так само ці ж формули справедливі, якщо функції  $f(x, y)$ ,  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  кусково-неперервні на  $L$ .

**Зауваження 1.6** Формули (1.3), (1.4), (1.5) мають місце для кривих  $L$  у просторі: якщо крива параметризована як

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

то

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y, z) dl &= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2} dt; \\ \int_L P(x, y, z) dx &= \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \cdot \varphi'(t) dt, \\ \int_L Q(x, y, z) dy &= \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \cdot \psi'(t) dy, \\ \int_L R(x, y, z) dz &= \int_a^b R(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \cdot \eta'(t) dt, \end{aligned}$$

якщо  $f(x, y, z)$ ,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – неперервні вздовж кривої, а  $L$  – гладка крива, без самоперетинів і самонакладів. Ці формули справедливі також, якщо  $L$  – кусково-гладка крива, а функції  $f$ ,  $P$ ,  $Q$  – кусково-неперервні вздовж кривої.

**Зауваження 1.7** Аналогічно вводяться криволінійні інтеграли для кривих у просторі  $\square^n$ .

**Зауваження 1.8** Якщо крива зімкнена (тому має точку само перетину), то інтеграл за цією кривою можна обчислювати, розбиваючи цю криву на дві гладкі частини без самоперетинів. А інтеграл подати сумою інтегралів по відповідним частина кривої. Як правило, це робиться теоретично, а на практиці лише перевіряється неперервність  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  на відрізку зміни параметру  $t$ , що відповідає повному оббігу кривої.

Додатнім напрямом оббігу зімкненої кривої при обчисленні інтегралів другого роду будемо вважати такий напрям, рухаючись яким вздовж кривої  $L$ , область, яку обмежує ця крива, залишається ліворуч від точки, що здійснює цей оббіг. Тобто такий оббіг здійснюється проти годинникової стрілки.

Коли хочуть зазначити, що крива зімкнена, то дотримуються позначення:

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

**1.3 Властивості криволінійних інтегралів першого роду.** Отримаємо їх, застосовуючи властивості визначеного інтеграла Рімана і формули зв'язку між криволінійним і визначеним інтегралами Рімана.

1) Якщо  $\exists \int_L f(x, y) dl \wedge \exists \int_L g(x, y) dl$ , тоді

$$\forall \alpha, \beta \in \square \quad \exists \int_L (\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)) dl = \alpha \int_L f(x, y) dl + \beta \int_L g(x, y) dl -$$

це властивість лінійності інтеграла першого роду.

2) Властивість адитивності інтеграла першого роду: якщо  $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$ ,

$$(L_k \cap L_i)^0 = \emptyset \quad \forall i \neq k, \text{ тоді } \int_L f(x, y) dl = \sum_{k=1}^n \int_{L_k} f(x, y) dl.$$

3) Теорема про середнє: якщо  $f(x, y)$  – неперервна на  $L$ , тоді  $\exists M^* \in L: \int_L f(x, y) dl = f(M^*) \cdot |L|$ .

$$4) \text{ Оцінка модуля: } \exists \int_L f(x, y) dl \Rightarrow \begin{cases} 1) \exists \int_L |f(x, y)| dl; \\ 2) \left| \int_L f(x, y) dl \right| \leq \int_L |f(x, y)| dl. \end{cases}$$

Геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду.

$\int_L dl = |L|$ , тобто інтеграл  $\int_L dl$  дорівнює довжині кривої  $L$ .

**Приклад 1.18** Знайти  $|L|$  довжину кривої

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t, \\ z = e^{-t}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

**Розв'язання.** Із умови випливає, що

$$\varphi(t) = e^{-t} \cos t, \quad \psi(t) = e^{-t} \sin t, \quad \eta(t) = e^{-t}, \quad a = 0, b = 2\pi.$$

Застосуємо геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду і формули зв'язку між таким інтегралом і визначенням:

$$\begin{aligned} |L| &= \int_L dl = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-e^{-t} \cos t + e^{-t}(-\sin t)]^2 + [-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t]^2 + [-e^{-t}]^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-t} \cdot \sqrt{\cos^2 t + 2 \cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + 1} dt = \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} e^{-t} dt = \sqrt{3} \cdot (-e^{-t}) \Big|_0^{2\pi} = -\sqrt{3}(e^{-2\pi} - 1) = \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

**Приклад 1.19** Обчислити інтеграл  $\int_{AC} (x+y)dx + (x-y)dy$ , якщо  $AC$  – частина

еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  для випадку  $y > 0$ , де  $A(a, 0)$ ,  $C(0, b)$ .

**Розв'язання.** Параметризуємо еліпс:  $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ . Із умови і парамет-

ризації отримаємо:  $P(x, y) = x + y$ ,  $Q(x, y) = x - y$ ,  $\varphi(t) = a \cos t$ ,  $\psi(t) = b \sin t$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ . Оскільки  $\varphi'(t) = -a \sin t$ ,  $\psi'(t) = b \cos t$ , а точкам  $A(a, 0)$ ,  $C(0, b)$  відповідають значення параметра  $t = 0$  і  $t = \pi/2$ , то за формулами (1.4) і (1.5) одержимо:

$$\int_{AC} \dots = \int_a^b (P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((a \cos t + b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t - b \sin t)b \cos t) dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t - ab \sin^2 t + ab \cos^2 t - b^2 \sin t \cos t) dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{(a^2 + b^2)}{2} \sin 2t + ab(\cos 2t) \right) dt = -\frac{a^2 + b^2}{2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

## 2 Поверхневі інтеграли

### 2.1 Поняття поверхні.

**Означення 1.15** Відображення  $f$  що переводить множину  $G \subset \mathbb{R}^2$  в множину  $G^* \subset \mathbb{R}^3$  називають *гомеоморфізмом*, якщо:

1.  $f$  – взаємно однозначне відображення  $G$  на  $G^*$ ,
2. будь-яка фундаментальна послідовність  $\{N_n\} \subset G$  точок переводиться в фундаментальну послідовність  $\{M_n\} \subset G^*$ ,
3. будь-яка фундаментальна послідовність  $\{M_n\} \subset G^*$  є образом фундаментальної послідовності  $\{N_n\} \subset G$ .

**Означення 1.16** Відображення  $f: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow G^* \subset \mathbb{R}^3$  називають *локальним гомеоморфізмом*, якщо  $\forall x_0 \in G \exists$  окіл  $U_{x_0} \subset G$ , який гомеоморфно відображається на свій образ, тобто на  $f(U_{x_0})$ .

**Означення 1.17** Область  $G$  на площині  $T$  називають *елементарною областю (ЕО)*, якщо вона є гомеоморфним образом відкритого круга  $D \subset \mathbb{R}^2$ , тобто

$$G \subset T - \text{ЕО} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists D \subset \mathbb{R}^2 - \text{відкритий круг: } f: D \rightarrow G - \text{гомеоморфізм.}$$

**Означення 1.18** Зв'язну область  $G$  на площині називають *простою плоскою областю (ППО)*, якщо будь-яка її точка  $x_0$  має окіл, який є елементарною областю, тобто

$$G - \text{ППО} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 1) G - \text{зв'язна; } 2) \forall x_0 \exists \text{окіл } U_{x_0}, \text{ який } \in \text{ЕО.}$$

**Означення 1.19** Множину точок  $\Phi \subset \mathbb{R}^3$  називають *поверхнею*, якщо вона є локально гомеоморфним образом простої плоскої області  $G$ , тобто

$$\Phi \subset \mathbb{R}^3 - \text{поверхня} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists G - \text{ППО: } f: G \rightarrow \Phi - \text{локальний гомеоморфізм.}$$

**Означення 1.20.** Околом т.  $M$  на поверхні  $\Phi$  називають таку множину:  $W(M) \stackrel{\text{def}}{=} U(M) \cap \Phi$ .

**Приклад 1.20** Нехай  $G$  – проста плоска область на площині  $Oxy$  (наприклад,  $G$  – відкритий круг),

$$M(x, y) \in G,$$

$$z = z(x, y) = z(M) - \text{неперервна функція на } G,$$

$$G^* - \text{графік функції } z(M), \text{ тобто } G^* = \{(x, y, z): z = z(x, y)\}.$$

Відображення, що задає локальний гомеоморфізм:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u, v), \end{cases} \Rightarrow \Phi = G^* \text{ є поверхнею! } \blacksquare$$

Розглянемо функцію, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in G, \quad G - \text{ППО.} \quad (1.6)$$

Відображення задає векторну функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ .

**Вимоги А:**

1. Функції (1.6) має неперервні частинні похідні першого порядку в ППО  $G$ .

$$2. \quad \text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \bigg|_{(u,v)} = 2 \quad \forall (u, v) \in G.$$

**Твердження 1.1** При виконанні вимог А множина точок  $\Phi$  в просторі, що визначаються рівнянням (1.6) являє собою поверхню, тобто є образом простої плоскої області  $G$  при локально гомеоморфному відображенні.

**Приклад 1.21** Функція  $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u, v) \end{cases}$  в простій плоскій області  $G$  буде задовольняти

вимоги А, якщо  $z = z(u, v)$  має неперервні частинні похідні першого порядку в  $G$ . Тоді буде мати місце рівність

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{dz}{du} \\ 0 & 1 & \frac{dz}{dv} \end{pmatrix} = 2.$$

Отже, за твердженням 1.1, ця функція визначає поверхню.

**Доведення твердження.** Введемо позначення:

$$N_o(u_o, v_o) \in G,$$

$$M_o(x_o, y_o, z_o) \in \Phi,$$

$$x_o = x(u_o, v_o), \quad y_o = y(u_o, v_o), \quad z_o = z(u_o, v_o),$$

**I)** Доведемо, що відображення (1.6) малий окіл т.  $N_o$  переводить в малий окіл т.  $M_o$ .

Із вимоги А1) випливає, що  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  – неперервна в області  $G$ , зокрема, в т.  $N_o$ , тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall N \in G \quad \rho_2(N, N_o) < \delta \Rightarrow$$

$$\left( |x(N) - x(N_o)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \wedge |y(N) - y(N_o)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \wedge |z(N) - z(N_o)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \right).$$

Тому

$$\rho_3(M, M_o) = \sqrt{|x(N) - x(N_o)|^2 + |y(N) - y(N_o)|^2 + |z(N) - z(N_o)|^2} < \sqrt{3 \cdot \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon.$$

Оскільки  $\rho_2(N, N_o) < \delta$ , то т.  $N$  належить  $\delta$ -околу т.  $N_o$ , тобто  $N \in U_\delta(N_o) = U(N_o)$ .

Аналогічно,  $\rho_3(M, M_o) < \varepsilon \Rightarrow M \in V_\varepsilon(M_o) = V(M_o)$ .

Отже, малий окіл т.  $N_o$  відображається за допомогою (1.6) в малий окіл т.  $M_o$ .

**II)** Оскільки  $G$  – проста область, то точка  $N_o$  має окіл  $U^*(N_o) \subset G$ , який є елементарною областю, тобто є образом відкритого круга  $D$  при гомеоморфному відображенні. Нехай цей окіл міститься в  $U(N_o)$ . Оберемо всередині круга  $D$  таку замкнену множину, яка при гомеоморфізмі відобразиться в замкнену підмножину  $U^{**}(N_o)$  околу  $U^*(N_o)$  (див. рис. 1.13).

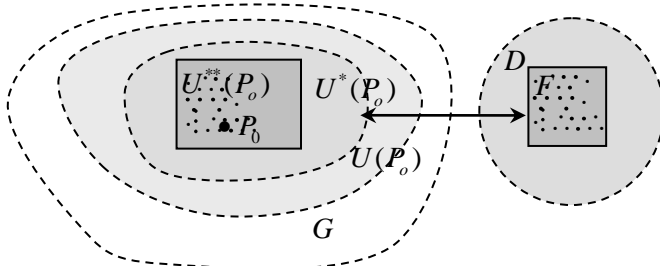


Рис. 1.13

На замкненій, обмеженій множині  $U^{**}(N_o)$  функції  $x, y, z$  – неперервні, а тому (за теоремою Кантора [3, с. 559]) рівномірно неперервні.

Нехай  $\{N_k\} \subset U^{**}(N_o)$  – фундаментальна послідовність, а  $\{M_k\} = \{x(N_k), y(N_k), z(N_k)\}$ . Чи є фундаментальною послідовність  $\{M_k\}$ ? Оскільки  $\{N_k\} \subset U^{**}(N_o)$  – фундамен-

тальна послідовність, то

$$\forall \delta' > 0 \exists n_o \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_o \forall p \in \mathbb{N} \quad \rho(N_n, N_{n+p}) < \delta'.$$

В силу рівномірної неперервності функцій  $x, y, z$  на  $U^{**}(N_o)$  отримаємо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0; \forall n \geq n_o \forall p \in \mathbb{N} \quad \rho(N_n, N_{n+p}) < \delta' \Rightarrow$$

$$\left( |x(N_n) - x(N_{n+p})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \wedge |y(N_n) - y(N_{n+p})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \wedge |z(N_n) - z(N_{n+p})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \right).$$

$$\text{Звідси } \forall n \geq n_o \forall p \in \mathbb{N} \quad \rho(M_n, M_{n+p}) < \sqrt{3 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \right)^2} = \varepsilon.$$

Отже: фундаментальну послідовність  $\{N_k\}$  переведено в фундаментальну послідовність  $\{M_k\}$ .

$$\text{III) Із A2) маємо } \text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \text{ в точках околу } U(N_o), \text{ тому хоча б}$$

один із мінорів не дорівнює нулю. Нехай для визначеності

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall N(u, v) \in U(N_o).$$

Зважаючи на вимогу A1), одержимо за теоремою про неявні функції [3, с. 673], що система  $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$  має єдиний розв'язок  $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$  в деякому околі  $W(P_o)$  точки

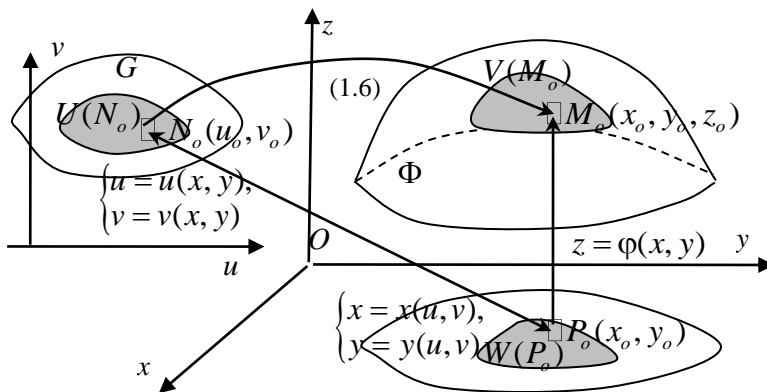


Рис. 1.14

$P_o(x_o, y_o)$ . За тією ж теоремою, крім того, маємо неперервну диференційовність функцій  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  в околі  $W(P_o)$ . Оскільки відображення  $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$  і  $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$  є взаємно оберненими, то відображення малого околу  $W(P_o)$  на малий окіл  $U(N_o)$  є взаємно однозначним (рис. 1.14). Тому малий окіл  $W(P_o)$  буде переводитися в малий окіл  $U(N_o)$ , а фундамен-

тальна послідовність  $\{P_n\}$  переведеться в фундаментальну послідовність  $\{N_n\}$ .

Оскільки функції  $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$  неперервні в  $W(P_0)$ , то, маючи на увазі  $z = z(u, v) =$

$z(u(x, y), v(x, y)) = \varphi(x, y)$ , отримаємо неперервність функції  $\varphi(x, y)$  в  $W(P_0)$ . Тому малий окіл  $W(P_0)$  буде переводитися в малий окіл  $V(M_0)$  (рис. 1.14), а фундаментальна послідовність  $\{P_n\}$  переведеться в фундаментальну послідовність  $\{M_n\}$ .

Відображення  $z = \varphi(x, y)$  здійснює проектування поверхні  $\Phi$  в малому околі т.  $M_0$  на площину  $Oxy$  взаємно однозначно, тому малий окіл  $V(M_0)$  буде переводитися в малий окіл  $W(P_0)$ , а фундаментальна послідовність  $\{M_n\}$  переведеться в фундаментальну послідовність  $\{P_n\}$ .

Отже,

фунд.  $\{M_n\} \leftrightarrow$  фунд.  $\{P_n\} \leftrightarrow$  фунд.  $\{N_n\}$ ;

малий окіл  $V(M_0) \leftrightarrow$  малий окіл  $W(P_0) \leftrightarrow$  малий окіл  $U(N_0)$ .

Тому відображення (1.6) здійснює локальний гомеоморфізм  $G$  на  $\Phi$ .

**Висновок:**  $\Phi$  – поверхня. ■

**Зауваження 1.9** Поверхня  $\Phi$ , що визначена рівнянням (1.6) і задовольняє вимоги А, в достатньо малому околі будь-якої своєї точки однозначно проектується хоча б на одну з трьох координатних площин.

**Зауваження 1.10** Поверхню  $\Phi$ , що задовольняє рівнянням (1.6) і першій з вимог А, тобто частинні похідні першого порядку від координатних функції неперервні в ППО  $G$ , називають *гладкою*, а якщо задовольняє другій вимозі А, тобто  $\text{rang}$  матриці дорівнює двом, то таку поверхню називають *поверхнею без особливих точок*. Тобто, фактично, поверхню  $\Phi$ , що визначається рівнянням (1.6) і задовольняє обом вимогам А називають *гладкою, без особливих точок поверхнею*.

Нехай  $\Phi$  – поверхня, що визначається рівнянням (1.6), гладка, без особливих точок. А

$$\bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k} -$$

її векторне рівняння. Нехай  $v_0$  – фіксоване, таке що  $(u, v_0) \in G$ , тоді

$$\bar{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\bar{i} + y(u, v_0)\bar{j} + z(u, v_0)\bar{k} - \text{крива на поверхні } \Phi,$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u, v_0) - \text{вектори дотичних до кривої } \bar{r}(u, v_0).$$

Аналогічно, якщо  $u_0$  таке, що  $(u_0, v) \in G$ , тоді  $\bar{r}(u_0, v)$  – крива на  $\Phi$ ,

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v) - \text{вектори дотичних до кривої } \bar{r}(u_0, v).$$

Множина кривих  $\bar{r}(u, v_0)$  і  $\bar{r}(u_0, v)$  визначає *множину координатних ліній*.

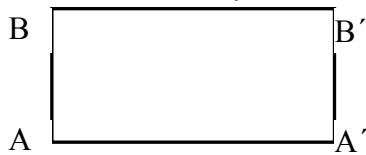
Оскільки  $N_0(u_0, v_0) \rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$ , то  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(N_0)$  і  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(N_0)$  – два вектори, що виходять із однієї точки  $M_0$ . Із вимоги А2), в якій рядки матриці містять координати векторів  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(N_0)$  і  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(N_0)$ , випливає, що ці вектори лінійно незалежні, оскільки ранг утвореної ними матриці дорівнює двом.

Тоді ці два вектори та точка  $M_0$  визначають дотичну площину в т.  $M_0$  на поверхні

$$\text{а } \bar{n}(M_0) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(N_0), \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(N_0) \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(N_0), \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(N_0) \end{bmatrix} \right\|} - \text{одиничний вектор нормалі до дотичної площини}$$

в точці  $M_0$ .

Оскільки поверхня гладка, то усі компоненти дотичних векторів є неперервними функціями, тому  $\vec{n}(M)$  – неперервна функція в околі довільної точки поверхні  $M_0$ . Таким чином, в околі будь-якої точки гладкої, без особливих точок поверхні утворено неперервне векторне поле нормалей. На практиці хотілося б мати справу з поверхнями, що мають цілком у всіх своїх точках неперервне поле нормалей.



Лист М'єбіуса

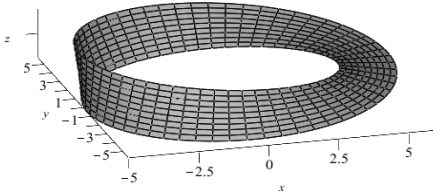


Рис. 1.15

**Означення 1.22** Поверхню  $\Phi$  називають *повною*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність точок цієї поверхні збігається до точки, що лежить на цій поверхні.

**Означення 1.23** Поверхню називають *обмеженою*, якщо її можна помістити в деяку тривимірну кулю.

**Приклади 1.23** Куля, еліпсоїд, еліптичний параболоїд – двосторонні та повні поверхні. Куля та еліпсоїд – обмежені.

Надалі будемо розглядати такі поверхні  $\Phi$ , що є:

- 1) гладкими, 2) без особливих точок, 3) двосторонніми, 4) повними, 5) обмеженими.

## 2.2 Допоміжні леми.

**Лема 1.3** Нехай  $\Phi$  гладка поверхня, а точка  $M_0$  не є особливою, тобто  $\text{rang} A = 2$  в т.  $(u_0, v_0)$ , що відповідає точці  $M_0$ . Тоді існує такий окіл точки  $M_0$ , який однозначно проектується на дотичну площину, що проходить через будь-яку точку цього околу.

Доведення провести самостійно [2, с. 179]

**Означення 1.24** Ділянка  $\Phi^* \subset \Phi$  має *розмір* менший за  $\delta$ , якщо вона лежить всередині кулі радіуса  $\frac{\delta}{2}$ .

Із означення 1.24 випливає, що для точок ділянки  $\Phi^*$  розміру  $\delta$  має місце нерівність:  $\rho(M_1, M_2) < \delta \quad \forall M_1, M_2 \in \Phi^*$ .

Як наслідок із леми 1.3 і твердження 1.1 отримаємо лему 1.4.

**Лема 1.4** Якщо поверхня  $\Phi$  гладка, без особливих точок, обмежена, повна, тоді існує таке  $\delta > 0$ , що будь-яка ділянка  $\Phi^*$  поверхні  $\Phi$ , розмір якої менший за  $\delta$ , однозначно проектується

а) на одну із координатних площин;

б) на будь-яку дотичну площину, що проходить через будь-яку довільну точку цієї ділянки.

Доведення провести самостійно [2, с. 180]

**Лема 1.5** Якщо поверхня  $\Phi$  гладка, без особливих точок, обмежена, повна, двостороння та визначається рівняннями (1.6), тоді  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Phi^* \subset \Phi$  ділянка розміру,

меншого за  $\delta$ , є такою, що кут  $\angle \gamma$  між будь-якими двома нормаллями в точках цієї ділянки задовольняє умову  $\cos \gamma = 1 - \alpha$ , де  $0 < \alpha < \varepsilon$ .

**Доведення.** Оскільки поверхня є двосторонньою, то вона має неперервне поле нормалей. Поверхня  $\Phi$  обмежена і повна. Повнота забезпечує її замкненість. Замкненість і обмеженість множини  $\Phi$  разом із неперервністю поля нормалей дає змогу застосувати теорему Кантора [3, с. 559]. Приходимо до висновку про рівномірну неперервність поля нормалей, а саме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M_1, M_2 \in \Phi \rho(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow |\bar{n}(M_1) - \bar{n}(M_2)| < \sqrt{2\varepsilon}.$$

Поле нормалей є одиничним, тобто  $\|\bar{n}(M)\| = 1, \forall M \in \Phi$ . Оскільки  $\cos \gamma = (\bar{n}(M_1), \bar{n}(M_2))$ , то

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \|\bar{n}(M_1) - \bar{n}(M_2)\|^2 = \frac{1}{2} (\bar{n}(M_1) - \bar{n}(M_2), \bar{n}(M_1) - \bar{n}(M_2)) = \\ &= \frac{1}{2} ((\bar{n}(M_1), \bar{n}(M_1)) + (\bar{n}(M_2), \bar{n}(M_2)) - 2(\bar{n}(M_1), \bar{n}(M_2))) = 1 - \cos \gamma. \end{aligned}$$

Звідси, а також з врахуванням умови рівномірної неперервності, отримаємо

$$\cos \gamma = 1 - \alpha; 0 < \alpha < \frac{1}{2} (\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**2.3 Площа поверхні.** Нехай  $\Phi$  – гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена.

Застосовуємо лему 1.4, згідно з якою, знайдемо таке  $\delta$ , щоб будь-яка ділянка поверхні розміром, меншим за  $\delta$ , однозначно проектувалася б на будь-яку дотичну площину, що проходить через довільну точку цієї ділянки. Розбиваємо цю поверхню за допомогою кусково-гладких кривих на скінченну кількість ділянок  $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$  розміром, меншим за  $\delta$ . Нехай  $M_i \in \Phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – довільні точки на цих ділянках. Позначимо через  $d$  – найбільший серед розмірів ділянок  $\Phi_i$  – це *діаметр розбиття* (за побудовою,  $d < \delta$ ). Проектуємо ділянку  $\Phi_i$  на дотичну площину, що проходить через точку

$M_i$ . Позначаємо площу утвореної проекції  $\sigma_i$ . Розглянемо  $\sum_{i=1}^n \sigma_i$ .

**Означення 1.25** Границею сум  $\sum_{i=1}^n \sigma_i$ , що відповідають розбиттю  $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ , при діаметрі розбиття  $d$ , що прямує до нуля, називають

$$I = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma_i \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \{\Phi_i\}_{i=1}^n \forall \{M_i\} \quad d < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n \sigma_i - I \right| < \varepsilon.$$

**Означення 1.26** Якщо існує скінченне значення границі  $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma_i$ , тоді поверхню  $\Phi$  називають *квадровною*, а значення границі  $I$  – її *площею*. Позначення:  $I = \sigma(\Phi)$ .

**Зауваження 1.11** Не можна отримати площу поверхні, апроксимуючи її площами поверхонь вписаних многогранників при подрібненні розмірів граней, і беручи за площу поверхні  $\sup$  вписаних многогранників (так ми робили при обчисленні довжин кривих, вписуючи в них ламані). Існує класичний приклад Шварца – так званий «чобіт Шварца», – він показує, що у площ, вписаних в циліндричну поверхню многогранників, не існує скінченного  $\sup$ .



**Теорема 1.9** Нехай поверхня  $\Phi$  – гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена і визначається рівнянням

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in G \quad (1.7)$$

(тут  $G$  – проста плоска область). Тоді ця поверхня є квадратною, а для обчислення її площі застосовується формула:

$$\sigma = \iint_G \left\| \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}; \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv,$$

де  $\bar{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$ .

**Доведення.** Оскільки поверхня гладка, то функції  $x, y, z$  мають неперервні частинні похідні першого порядку, через які виражається підінтегральна функція, тому ця функція є неперервною на  $G$ , і інтеграл від неї існує. Домовимося значення цього інтеграла позначати через  $I$ , тобто

$$I = \iint_G \left\| \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}; \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv.$$

Доведемо квадратність поверхні  $\Phi$  і той факт, що значення площі поверхні дорівнює  $I$ . Для цього застосуємо леми 1.4, 1.5:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall \{\Phi_i\}_{i=1}^n$  (розбиття поверхні  $\Phi$  за допомогою кусково-гладких кривих з діаметром  $d < \delta$ ) одержимо, що

1) кожна така ділянка однозначно проектується на дотичну площину, що проходить через будь-яку точку цієї ділянки; нехай  $M_i \in \Phi_i$  (лема 1.4); через  $\sigma_i$  позначимо площу проекції ділянки  $\Phi_i$  на дотичну площину, що проходить через точку  $M_i$ ;

2) кут між будь-якими двома векторами нормалі в точках ділянки  $\Phi_i$  визначається рівністю  $\cos \gamma = 1 - \alpha$ , де  $0 < \alpha < \frac{\varepsilon}{I}$  (лема 1.5).

*Мета:* знайти площу  $\sigma_i$ .

Розглянемо власну систему координат. Початок координат –  $M_i$ , вісь  $Oz$  спрямуємо паралельно до нормалі, що проходить через  $M_i$ , тобто до  $\bar{n}(M_i)$ , площину  $Oxy$  розташуємо в дотичній площині до  $\Phi_i$  що проходить через точку  $M_i$ . В цій системі координат поверхня визначається системою рівнянь (1.7).

Розглянемо нормаль в точці  $M \in \Phi_i$ , де  $M = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,

$$\bar{n}(M) = \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}; \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k},$$

$$\text{де } A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)}.$$

Завдяки вибору системи координат косинус кута між нормаллю  $\bar{n}(M)$  і віссю  $Oz$  дорівнює

$$\cos \gamma_M = \frac{C}{\left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\|_{(u,v)}}, \quad C > 0.$$

Через  $G_i$  позначимо частину області  $G$ , що відповідає ділянці поверхні  $\Phi_i$  на  $\Phi$ , а через  $\overline{\Phi_i}$  – проекцію  $\Phi_i$  на дотичну площину, яка збігається з площиною  $Oxy$ , тоді площа цієї проекції дорівнює  $\sigma_i = \iint_{\overline{\Phi_i}} dx dy$ . Застосуємо формулу заміни змінної під знаком подвійного інтеграла, отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \iint_{\overline{\Phi_i}} dx dy = \\ &= \left\| \begin{matrix} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{matrix} \right\|_{\overline{\Phi_i} \rightarrow G_i} = \iint_{G_i} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv = \iint_{G_i} \underbrace{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|}_{C > 0} du dv = \iint_{G_i} \cos \gamma_M \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv. \end{aligned}$$

Оскільки поверхня двостороння, то вона має неперервне поле нормалей, тому  $\cos \gamma_M$  – неперервна на  $G$ . Отже, можна застосувати теорему про середнє:

$$\forall i \exists M_i^* \in \Phi_i : \sigma_i = \iint_{G_i} \cos \gamma_M \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv = \cos \gamma_{M_i^*} \iint_{G_i} \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv.$$

Тепер обчислимо значення суми

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sigma_i &= \sum_{i=1}^n \cos \gamma_{M_i^*} \iint_{G_i} \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv = \left\| \cos \gamma_{M_i^*} = 1 - \alpha_i^*, \text{ де } 0 < \alpha_i^* < \frac{\varepsilon}{I} \text{ (лема 1.5)} \right\| = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \iint_{G_i} \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv}_{= \iint_G \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv = I} - \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \iint_{G_i} \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv. \end{aligned}$$

Звідси

$$|\sigma - I| = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \underbrace{\iint_{G_i} \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv}_{\leq \frac{\varepsilon}{I}} < \frac{\varepsilon}{I} \sum_{i=1}^n \underbrace{\iint_{G_i} \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv}_{= I} = \frac{\varepsilon}{I} \cdot I = \varepsilon.$$

Маємо:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \{\Phi_i\} \quad d < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$ . Отже, приходимо до висновку:

$$\begin{cases} 1) \exists \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma_i = I; \\ 2) I = \sigma = \iint_G \left\| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\| du dv. \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Зауваження 1.12** В теоремі припускається, що поверхня є гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена і визначається рівняннями (1.7). Якщо поверхню можна розбити на скінчену кількість ділянок без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є гладкою, без особливих точок, повною, обмеженою, двосторонньою, що визначаються рівнянням (1.7), тоді поверхня  $\Phi$  також буде квадратною, а її площа обчислюється як сума площ ділянок, що її утворюють.

**Зауваження 1.13** Площа поверхні задовольняє властивості адитивності, тобто

$$(\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \quad \wedge \quad \Phi_1^o \cap \Phi_2^o = \emptyset) \Rightarrow \sigma_\Phi = \sigma_{\Phi_1} + \sigma_{\Phi_2}.$$

**Зауваження 1.14 1.** Будемо, як і раніше, припускати, що поверхня, задана рівняннями (1.7), гладка, без особливих точок, повна, двостороння, обмежена, а область  $G$ , на якій задані функції із (1.7), проста плоска область.

$$\begin{aligned} \text{Нехай } E &= \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right|^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ G &= \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2, \\ F &= \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Тоді, застосовуючи співвідношення

$$\begin{aligned} |[\bar{a}, \bar{b}]|^2 + |(\bar{a}, \bar{b})|^2 &= |\bar{a}|^2 \cdot |\bar{b}|^2, \\ \bar{a} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \quad \bar{b} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}, \end{aligned}$$

Отримаємо  $\left\| \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| = \sqrt{E G - F^2}$ , тобто

$$\oint \sigma = \iint_G \sqrt{E G - F^2} du dv - \text{площа поверхні, заданої параметрично через (1.7).}$$

**2.** Нехай поверхня визначається функцією, що задана явно  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ . Функція  $f(x, y)$  на плоскій простій області  $G$  неперервна разом із своїми частинними похідними. Графік цієї функції є поверхнею (див приклад 1.21) гладкою, без особливих точок, повною, двосторонньою, обмеженою (перевірте це!). Її параметризація матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in G.$$

Тоді

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = 1 + 0 + [f'_u(u, v)]^2 = 1 + [f'_x(x, y)]^2, \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = 0 + 1 + [f'_v(u, v)]^2 = 1 + [f'_y(x, y)]^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + f'_u(u, v) \cdot f'_v(u, v) = f'_x(x, y) \cdot f'_y(x, y), \\ \sqrt{E G - F^2} &= \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2}. \end{aligned}$$

Звідки

$$\oint \sigma = \iint_G \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} dx dy - \text{площа поверхні, що задана явно.}$$

## 2.4 Поверхневі інтеграли.

Нехай поверхня  $\Phi$  – гладка, без особових точок, двостороння, гладка, повна, обмежена і визначена параметричними рівняннями (1.7) в простій плоскій області  $G$ . Нехай на цій поверхні визначені чотири функції:

$$f(x, y, z), P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z).$$

Надалі будемо вважати, що вони неперервні на  $\Phi$ . Розіб'ємо поверхню  $\Phi$  за допомогою кусково-гладких кривих на ділянки  $\{\Phi_i\}$  так, щоб виконувалися леми 1.4 і 1.5.

Нехай точка  $M_i \in \Phi_i$ ,

$\bar{n}(M_i)$  – вектор одиничної нормалі, тоді

$$\bar{n}(M_i) = (\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i),$$

$$\sigma_i = \sigma(\Phi_i) = \iint_S \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

$d$  – найбільший серед розмірів ділянок  $\Phi_i$ .

Введемо чотири інтегральні суми:

$$\Sigma_1 = \Sigma_1(f, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma_i,$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_2(P, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n P(M_i) \cos X_i \sigma_i,$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_3(Q, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n Q(M_i) \cos Y_i \sigma_i,$$

$$\Sigma_4 = \Sigma_4(R, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n R(M_i) \cos Z_i \sigma_i.$$

**Означення 1.27** Границею інтегральних сум  $\Sigma_s$  при діаметрі розбиття, що прямує до нуля, називають таке число  $I_s$ , для якого

$$I_s = \lim_{d \rightarrow 0} \Sigma_s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \{\Phi_i\} \forall \{M_i\} d < \delta \Rightarrow |I_s - \Sigma_s| < \varepsilon \quad (s = 1, 2, 3, 4).$$

**Означення 1.28** Якщо існує  $I_1 = \lim_{d \rightarrow 0} \Sigma_1$ , тоді  $I_1$  називають *поверхневим інтегралом першого роду*. Позначення:  $I_1 = \iint_{\Phi} f(x, y, z) d\sigma$ .

Якщо існує  $I_s = \lim_{d \rightarrow 0} \Sigma_s$ ,  $s = 2, 3, 4$ , тоді  $I_s$  називають *поверхневим інтегралом другого роду*. Позначення:

$$I_2 = \iint_{\Phi} P(x, y, z) \cos X d\sigma = \iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz,$$

$$I_3 = \iint_{\Phi} Q(x, y, z) \cos Y d\sigma = \iint_{\Phi} Q(x, y, z) dx dz,$$

$$I_4 = \iint_{\Phi} R(x, y, z) \cos Z d\sigma = \iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy.$$

**Означення 1.29** Значення суми

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 + I_4 &= \iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) d\sigma \end{aligned}$$

називають *повним (або загальним) поверхневим інтегралом другого роду*.

**Зауваження 1.15.** Поверхневий інтеграл I роду не залежить від сторони поверхні, по якій він обчислюється, а поверхневий інтеграл II роду залежить від сторони поверх-

ні. Повний поверхневий інтеграл II роду змінює знак на протилежний при зміні сторони поверхні.

**Зауваження 1.16** *Фізичний зміст поверхневих інтегралів.* Поверхневий інтеграл I роду – це маса поверхні з поверхневою густиною  $f(x, y, z)$ .

Розглянемо повний поверхневий інтеграл II роду. Нехай

$$\bar{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

$$\bar{n}(x, y, z) = (\cos X, \cos Y, \cos Z),$$

тоді  $I_2 + I_3 + I_4 = \iint_{\Phi} (\bar{A}, \bar{n}) d\sigma$  – течія векторного поля  $\bar{A}$  через поверхню  $\Phi$ .

**Зауваження 1.17** Поверхневий інтеграл I роду і загальний поверхневий інтеграл II роду не залежать від вибору системи координат і є інваріантними відносно переходу до нових координат.

**Зауваження 1.18** *Зв'язок між поверхневими інтегралами I і II роду.* Для переходу від поверхневого інтеграла II роду до поверхневого інтеграла I роду потрібно відповідно за функцію  $f(x, y, z)$  обрати або  $P(x, y, z) \cos X$ , або  $Q(x, y, z) \cos Y$ , або  $R(x, y, z) \cos Z$ .

**Теорема 1.10** *(зведення поверхневих інтегралів до подвійних).* Якщо поверхня  $\Phi$  – гладка, без особових точок, двостороння, повна, обмежена і визначена параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in G, \quad (1.8)$$

тут  $G$  – проста плоска область. Тоді

$$I_1 = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

$$I_2 = \iint_G P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \cos X du dv,$$

$$I_3 = \iint_G Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \cos Y du dv,$$

$$I_4 = \iint_G R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \cos Z du dv.$$

**Доведення.** Зважаючи на зауваження 1.18, доведемо тільки першу формулу. Але пояснимо існування усіх чотирьох подвійних інтегралів.

- 1) Функції  $F, P, Q, R$  – неперервні на  $\Phi$ ,
- 2) поверхня  $\Phi$  є гладкою, тому функції  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  – неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку на  $G$ , тоді

$$\bar{n} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]} = \underbrace{\frac{A}{\left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]}}_{\cos X} \bar{i} + \underbrace{\frac{B}{\left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]}}_{\cos Y} \bar{j} + \underbrace{\frac{C}{\left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]}}_{\cos Z} \bar{k},$$

$$\text{де } A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Отже,  $\cos X, \cos Y, \cos Z$  виражаються через частинні похідні функцій  $x, y, z$ , тому є неперервними функціями на  $G$ ;

3) функції

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

є також неперервними, як композиції неперервних функцій, тому існують усі чотири подвійні інтеграли.

Нехай

$$\gamma = \iint_G F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Довести:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \{ \Phi_i \} \forall \{ M_i \} \quad d < \delta \Rightarrow |\Sigma_1 - \gamma| < \varepsilon) \Leftrightarrow \exists \lim_{d \rightarrow 0} \Sigma_1 = \gamma = I_1.$$

Розглянемо інтегральну суму

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=1}^n f(M_i) \iint_{G_i} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

де  $G_i \subset G$ , що відповідає ділянці  $\Phi_i \subset \Phi$  при відображенні (1.8).

Застосуємо адитивність подвійного інтеграла:

$$\gamma = \iint_G f(M) \sqrt{EG - F^2} du dv = \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} f(M) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Тоді

$$|\Sigma_1 - \gamma| = \left| \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} (f(M) - f(M_i)) \sqrt{EG - F^2} du dv \right| \leq \\ \leq \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} |f(M) - f(M_i)| \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Оскільки

функція  $f(x, y, z)$  – неперервна на  $\Phi$ ,

поверхня  $\Phi$  – повна, тому замкнена,

поверхня  $\Phi$  – обмежена,

тому можна застосувати теорему Кантора [3, с. 559] і дійти висновку про рівномірну неперервність функції  $f(x, y, z)$  на  $\Phi$ . Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall M_1, M_2 \in \Phi \quad \rho(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

де  $\sigma = \sigma(\Phi)$  – площа поверхні  $\Phi$ .

Якщо розбити поверхню  $\Phi$  на ділянки з діаметром меншим за  $\delta$ , тобто з тах розміром цих ділянок  $< \delta$ , то це буде означати, що відстань між будь-якими двома точками таких ділянок буде  $< \delta$ . Потурбуємося, щоб значення  $\delta$  відповідало також лемам 1.4 і 1.5, щоб задовільними теорему про площу поверхні. Отже,

$$\rho(M, M_i) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M_i)| < \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

Таким чином,

$$|\Sigma_1 - \gamma| \leq \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} |f(M) - f(M_i)| \sqrt{EG - F^2} dudv < \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} \sqrt{EG - F^2} dudv = \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_{i=1}^n \sigma_i = \varepsilon. \blacksquare$$

**Наслідок 1.8** Нехай  $z = f(x, y)$  – неперервна функція на замкненій обмеженій області  $G$ , яка має неперервні частинні похідні першого порядку на  $G$ . Тоді графік цієї функції буде гладкою, без особливих точок, двосторонньою, повною обмеженою поверхнею  $\Phi$ . Поверхневі інтеграли II роду за цією поверхнею обчислюються за формулами:

$$I_2 = - \iint_G P(x, y, f(x, y)) f'_x(x, y) dx dy,$$

$$I_3 = - \iint_G Q(x, y, f(x, y)) f'_y(x, y) dx dy,$$

$$I_4 = \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

у припущенні, що нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю  $Oz$ .

**Доведення.** Графік зазначеної функції є гладкою поверхнею (завдяки неперервності частинних похідних), без особливих точок (rang  $A=2$ , перевірте  $\nabla$ !), двосторонньою (завдяки неперервності частинних похідних), повною (завдяки неперервності функції  $f(x, y)$  на замкненій обмеженій області  $G$  і теоремі Кантора),

обмеженою (теорема Вейерштрасса для неперервної функції на замкненій обмеженій області  $G$  [3, с. 558]).

Тоді (за теоремою 1.10) існують відповідні поверхневі інтеграли другого роду. Маємо:

$$1) \sqrt{EG - F^2} dudv = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy,$$

2) нормаль до поверхні  $\vec{n}(M) = (\cos X, \cos Y, \cos Z)$  перпендикулярна до дотичної площини, яка має рівняння [3, с. 567]

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Тоді вектор одиничної нормалі має координати

$$\vec{n}(M) = \frac{(-f'_x, -f'_y, 1)}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}},$$

тобто,

$$\cos X = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos Y = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.$$

Тоді у випадку інтеграла  $I_2$  отримаємо

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_G (P(x, y), f(x, y)) \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy = \\ &= - \iint_G P(x, y, f(x, y)) f'_x(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Інші формули отримати самостійно  $\nabla$ !

**Зауваження 1.20** Якщо поверхня  $\Phi$  кусково-гладка, то поверхневі інтеграли можна обчислити як суму інтегралів за гладкими, без особливих точок, двосторонніми, обмеженими, повними ділянками.

### §3. Елементи теорії поля. Основні інтегральні формули аналізу

#### 1 Повторення з курсу лінійної алгебри.

В цій темі розглянемо деякі положення з курсу алгебри. Всі пропущені доведення можна знайти в підручниках з цього курсу або в [4]. Пригадаємо деякі позначення. Довомовимося опускати знак підсумовування за тим індексом, який повторюється двічі як верхній та нижній індекс в загальному члені цієї суми. Наприклад, в виразі  $g_{ij}e^i$  підсумовування ведеться за індексом  $i$ , а індекс  $j$  – фіксований, тобто замість  $\sum_{i=1}^3 g_{ij}e^i$  будемо писати  $g_{ij}e^i$ .

Нехай  $\{e^i\}$  – базис в  $\square^3$ , тоді якщо  $a \in \square^3$ , то  $a = a_i e^i = \sum_{i=1}^3 a_i e^i$ .

Через  $\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$  позначають символ Кронекера.

#### 1.1 Біортогональні базиси в евклідовому просторі $\square^3$ .

**Означення 1.30** Базис  $\{e^j\}$  називають біортогональним до базису  $\{e_i\}$ , якщо  $(e^j, e_i) = \delta_i^j$ .

**Твердження 1.2** Для будь-якого базису  $\{e_i\}$  в  $\square^3$  існує єдиний біортогональний базис  $\{e^j\}$ .

#### 1.2 Перетворення базисів.

Розглянемо дві пари біортогональних базисів  $\{e_i\}$ ,  $\{e^j\}$  та  $\{e'_i\}$ ,  $\{e'^j\}$  – відповідно, старих і нових. Тоді

$$\begin{aligned} e'_i &= b_i^j e_j, & e_i &= b_i^j e'_j, \\ e'^j &= \tilde{b}_i^j e^i, & e^i &= \tilde{b}_i^j e'^j. \end{aligned}$$

Відомо, що  $b_i^j, \tilde{b}_i^j, \tilde{b}_i^j, \tilde{b}_i^j$  – взаємно обернені пари матриць. Оскільки  $b_i^j = (e'_i, e^j)$ , то  $b_i^j = \tilde{b}_i^j$ ,  $\tilde{b}_i^j = \tilde{b}_i^j$ .

Отже, для переходу від базисів  $\{e_i\}$ ,  $\{e^i\}$  до базисів  $\{e'_i\}$ ,  $\{e'^i\}$  і навпаки достатньо знати тільки матрицю  $\{b_i^j\}$  переходу від старого базису  $\{e_i\}$  до нового базису  $\{e'_i\}$ .

Нехай  $a = a^i e_i$ ,  $a = a_i e^i$ . Оскільки  $(a, e^i) = a^i (e_i, e^i)$ ,  $(e_i, e^i) = 1$ , то  $a^i = (a, e^i)$ . Отже,

$$a = (a, e_i) e^i, \quad a = (a, e^i) e_i.$$

Знайдемо розклад базисних векторів за біортогональним базисом. Для цього в останні подання підставимо замість вектора  $a$  базисний вектор  $e_j$  і  $e^j$ , відповідно:

$$\begin{aligned} e_j &= (e_j, e_i) e^i = g_{ji} e^i, & g_{ij} &= (e_j, e_i), \\ e^j &= (e^j, e_i) e_i = g^{ji} e_i, & g^{ji} &= (e^j, e^i) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & \text{матриці симетричні, тобто} \\ & g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ji} = g^{ij}. \end{aligned}$$

Висновок:  $\underline{e_j = g_{ji} e^i}, \quad \underline{e^j = g^{ji} e_i}$



Оскільки  $(e^k, e_j) = \delta_j^k = g_{ij}(e^k, e^i) = g_{ji}g^{ki}$  то  $\{g_{ij}\}, \{g^{ij}\}$  – взаємно обернені.

### 1.3 Інваріанти лінійного оператора. Дивергенція. Ротор.

Розглянемо оператор  $A: \square^3 \rightarrow \square^3$ .

▮ **Означення 1.31** Оператор  $A$  називають *лінійним*, якщо

$$\forall x, y \in \square^3 \quad \forall \alpha, \beta \in \square : A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

**Твердження 1.3** Мають місце співвідношення

$$\text{для скалярного добутку } (e_i, Ae^i) = (e^i, Ae_i),$$

$$\text{для векторного добутку } [e_i, Ae^i] = [e^i, Ae_i].$$

$$\text{Доведення. } (e_i, Ae^i) = (g_{ij}e^j, g^{ik}Ae_k) = g_{ij}g^{ik}(e^j, Ae_k) = (e^k, Ae_k) = (e^i, Ae_i).$$

$$= \delta_j^k$$

Для векторного добутку доведення аналогічне. ▀

▮ **Означення 1.32** Значення деякої величини називають *інваріантом*, якщо воно не змінюється при перетворенні базисів простору.

**Твердження 1.4** Величини  $(e_i, Ae^i)$ ,  $[e_i, Ae^i]$  і відповідно рівні їм  $(e^i, Ae_i)$ ,  $[e^i, Ae_i]$  є інваріантами.

$$\text{Доведення. } (e_i, Ae^i) = (b_i^{i'}e_{i'}, Ab_{k'}^i e^{k'}) = b_i^{i'}b_{k'}^i (e_{i'}, Ae^{k'}) = (e_{k'}, Ae^{k'}) = (e_{i'}, Ae^{i'}).$$

Аналогічне доведення і для векторного добутку. ▀

▮ **Означення 1.33** Інваріант  $(e^i, Ae_i)$  або  $(e_i, Ae^i)$  називають *дивергенцією оператора  $A$* , а  $[e^i, Ae_i]$  або  $[e_i, Ae^i]$  – *ротором оператора  $A$* . Тобто

$$\operatorname{div} A \stackrel{\text{def}}{=} (e^i, Ae_i) = (e_i, Ae^i), \quad \operatorname{rot} A \stackrel{\text{def}}{=} [e^i, Ae_i] = [e_i, Ae^i].$$

Розкладемо образ базисного елемента при дії оператора за базисом:  $Ae_i = a_i^k e_k$ .

Скалярно помножимо цю рівність на елемент біортогонального базису і підсумуємо:

$$(e^j, Ae_i) = a_i^k (e^j, e_k) = a_i^k \delta_k^j = a_i^j.$$

Отримуємо висновок щодо представлення елементів матриці оператора:

$$a_i^j = (e^j, Ae_i).$$

Обчислимо дивергенцію оператора  $A$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= (e^i, Ae_i) = (e^1, Ae_1) + (e^2, Ae_2) + (e^3, Ae_3) = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \\ &= \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{aligned}$$

Тут  $\lambda_i, i=1,2,3$  – власні числа оператора  $A$  (з урахуванням їх кратності), а  $\operatorname{tr} A$  – слід оператора  $A$ .

Розглянемо в  $\square^3$  канонічний базис  $i, j, k$ , тоді  $a_1^1 = (i, Ai)$ ,  $a_1^2 = (i, Aj)$ ,

$a_1^3 = (i, Ak), \dots$ , а матриця  $\overset{o}{A}$  оператора  $A$  надбає вигляду

$$\overset{o}{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i, Ai) & (i, Aj) & (i, Ak) \\ (j, Ai) & (j, Aj) & (j, Ak) \\ (k, Ai) & (k, Aj) & (k, Ak) \end{pmatrix},$$

тому

$$\operatorname{div} \overset{o}{A} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = (i, Ai) + (j, Aj) + (k, Ak). \quad (1.9)$$

Розглянемо аналогічно ротор лінійного оператора:

$$\overline{\text{rot}} A = [e^i, Ae_i] = [i, Ai] + [j, Aj] + [k, Ak].$$

Обчислимо його доданки:

$$[i, Ai] = [i, a_1^1 i + a_1^2 j + a_1^3 k] = ka_1^2 + ja_1^3,$$

інші можна отримати аналогічно. Підставивши, отримаємо

$$\overline{\text{rot}} A = (a_2^3 - a_3^2)i + (a_3^1 - a_1^3)j + (a_1^2 - a_2^1)k. \quad (1.10)$$

## 2 Скалярні і векторні поля

Для зручності подальшого розгляду, будемо векторні величини позначати рискою або стрілкою зверху на відміну від скалярних величин.

▢ **Означення 1.34** Будемо говорити, що в області  $D$  задане скалярне (векторне) поле, якщо кожній точці  $M \in D$  відповідає за деяким законом єдине число (вектор).

Якщо  $D \subset \mathbb{R}^3$ , тоді скалярне поле – це скалярна функція трьох змінних; а векторне поле – векторна (координатна) функція трьох змінних.

**Приклад 1.24** 1)  $\overline{E}(M)$  – векторне поле напруженості електричного поля, утвореного від'ємним зарядом, розташованим в точці  $O$ . Тоді

$$\overline{E}(M) \uparrow \uparrow \overline{MO}, \quad |\overline{E}(M)| = \frac{1}{\rho^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \overline{E}(M) = \left\{ -\frac{x}{\rho^3}; -\frac{y}{\rho^3}; -\frac{z}{\rho^3} \right\}.$$

2) Скалярним є поле температур всередині нагрітого тіла;

3) Векторним є поле швидкостей встановленої течії рідини.

▢ **Означення 1.35** Скалярне поле  $U(M)$  називають диференційовним в точці  $M \in D$ , якщо його повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta U(M) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + A_3 \Delta z + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z,$$

де  $A_1, A_2, A_3$  – числа, що не залежать від  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \alpha_i = 0 \wedge \alpha_i \Big|_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y=0 \\ \Delta z=0}} = 0, \quad i=1, 2, 3.$$

Як було доведено в темі «Функції багатьох змінних», еквівалентним є подання повного приросту у вигляді

$$\Delta U(M) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + A_3 \Delta z + o(\rho),$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Нехай

$$\overline{A} = \{A_1, A_2, A_3\},$$

$$\overline{h} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}.$$

Тоді повний приріст матиме вигляд:

$$\Delta U(M) = (\overline{A}, \overline{h}) + o(\rho).$$

Як було доведено в темі «Функції багатьох змінних», градієнт скалярного поля

$$\nabla U(M) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\} = \overline{\nabla} U(M), \quad \overline{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

визначає напрям найшвидшого зростання або спадання цього поля, тому градієнт не залежить від вибору системи координат. Отже, градієнт – це інваріант. Якщо  $\vec{e}$  – одиничний вектор, що задає напрям, тоді, як відомо, похідна скалярної функції за напрямом  $\vec{e}$  обчислюється за формулою

$$\frac{\partial U}{\partial e}(M) = (\overline{\text{grad}} U(M), \vec{e}).$$

✎ **Означення 1.36** Векторне поле  $\vec{a}(M)$  називають диференційовним в точці  $M \in D$ , якщо існує лінійний оператор  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , такий, що

$$\Delta \vec{a}(M) = \vec{a}(M_1) - \vec{a}(M) = A\vec{h} + \bar{o}(\|\vec{h}\|),$$

де  $M_1 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ ,  $\|\vec{h}\| = \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ,

$$\bar{o}(\|\vec{h}\|) - \text{вектор: } \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\bar{o}(\|\vec{h}\|)}{\|\vec{h}\|} = \vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}.$$

**Твердження 1.5** Якщо  $\vec{a}(M)$  – диференційовне векторне поле в точці  $M \in D$ , тоді приріст векторного поля у вигляді  $\Delta \vec{a}(M) = A\vec{h} + \bar{o}(\|\vec{h}\|)$  визначається однозначно.

**Доведення.** Припустимо супротивне, тобто існують два різні лінійні оператори  $A$  і  $B$  в означенні диференційовності векторного поля  $\vec{a}(M)$ :

$$\Delta \vec{a}(M) = A\vec{h} + \bar{o}(\|\vec{h}\|) = B\vec{h} + \bar{o}(\|\vec{h}\|).$$

Тоді  $A\vec{h} - B\vec{h} = (A - B)\vec{h} = \bar{o}(\|\vec{h}\|)$ , тобто  $(A - B)\vec{h} = \bar{o}(\|\vec{h}\|)$ . Поділимо обидві частини

останньої рівності на  $\|\vec{h}\|$ , враховуючи, що  $\vec{e} = \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$  – одиничний вектор:

$$\left. \begin{aligned} (A - B)\vec{e} &= \frac{\bar{o}(\|\vec{h}\|)}{\|\vec{h}\|} \\ \frac{\bar{o}(\|\vec{h}\|)}{\|\vec{h}\|} &\xrightarrow{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A - B)\vec{e} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{e} = B\vec{e}.$$

Образи операторів на одиничних векторах збігаються, а оператори лінійні, тому ці оператори будуть збігатися на усіх елементах із  $\mathbb{R}^3$ . ■

✎ **Означення 1.37** Векторне поле називають диференційовним в області  $D$ , якщо воно диференційовне у всіх точках області  $D$ .

*Мета:* дати означення похідної векторного поля за напрямом.

Нехай  $M, M_1 \in D$ . Одиничний вектор  $\vec{e}$  однаково спрямований з вектором  $\overline{MM_1}$ , тобто  $\vec{e} \uparrow \overline{MM_1}$

✎ **Означення 1.38** Похідною векторного поля  $\vec{a}(M)$  за напрямом  $\vec{e}$  називають

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}}(M) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta \vec{a}(M)}{|\overline{MM_1}|} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\vec{a}(M_1) - \vec{a}(M)}{|\overline{MM_1}|}.$$

**Твердження 1.6** Якщо  $\vec{a}(M)$  – диференційовне векторне поле в точці  $M \in D$ ,  $\vec{e}$  – одиничний вектор, що задає напрям, тоді  $\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}}(M) = A\vec{e}$ , де  $A$  – оператор в означенні диференційовності векторного поля  $\vec{a}(M)$ .

**Доведення.** Оскільки  $\vec{a}(M)$  – диференційовне векторне поле в точці  $M \in D$ , то

$$\Delta \vec{a}(M) = A\vec{h} + \bar{o}(\|\vec{h}\|).$$

Якщо  $\rho = \|\bar{h}\| = |\overline{MM_1}|$ , а  $\bar{e} \uparrow \overline{MM_1}$ , то  $\bar{h} = \bar{e} \|\bar{h}\| = \rho \bar{e}$ . Звідси

$$\Delta \bar{a}(M) = \rho A \bar{e} + o(\rho).$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на  $\rho$ :

$$\frac{\Delta \bar{a}(M)}{|\overline{MM_1}|} = A \bar{e} + \frac{o(\rho)}{\rho}.$$

Здійснимо граничний перехід при  $\rho \rightarrow 0$  або, що те саме, при  $M_1 \rightarrow M$ :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta \bar{a}(M)}{|\overline{MM_1}|} = A \bar{e} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}}(M). \quad \blacksquare$$

**Зауваження 1.21** Оскільки

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{e}}(M) = (\overline{\text{grad}} U(M), \bar{e}),$$

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \bar{A} = \{A_1, A_2, A_3\} = \nabla U,$$

то можна вважати, що похідна за напрямом від скалярної функції також є результатом дії оператора  $\bar{A}$  на напрям  $\bar{e}$ .

**Мета:** знайти матрицю  $\overset{o}{A}$  оператора  $A$ , що визначається умовою диференційовності в ортонормованому базисі  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}} &= A \bar{e}, \\ a(\bar{M}) &= P \bar{i} + Q \bar{j} + R \bar{k}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A \bar{i} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{i}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial x} \bar{j} + \frac{\partial R}{\partial x} \bar{k}, \\ A \bar{j} = \frac{\partial P}{\partial y} \bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial R}{\partial y} \bar{k}, \\ A \bar{k} = \frac{\partial P}{\partial z} \bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial z} \bar{j} + \frac{\partial R}{\partial z} \bar{k}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_1^1 = (\bar{i}, A \bar{i}) = \frac{\partial P}{\partial x}, a_1^3 = (\bar{k}, A \bar{i}) = \frac{\partial R}{\partial x}, \dots$$

**Висновок:**

$$\overset{o}{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

### 3 Дивергенція, ротор, похідна за напрямом векторного поля

**Означення 1.39** Дивергенцією векторного поля, що є диференційовним в точці  $M$  називають дивергенцію оператора  $A$ , що визначається умовою диференційовності цього векторного поля в точці  $M$ . Тобто, якщо  $\Delta \bar{a}(M) = A \bar{h} + o(\|\bar{h}\|)$ , то  $\text{div} \bar{a}(M) = \text{div} A$ .

**Означення 1.40** Ротор означається аналогічно, як  $\overline{\text{rot}} a(M) = \overline{\text{rot}} A$ .

Якщо  $\bar{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ , то формули для обчислення отримаємо як наслідок означень 1.39, 1.40 і формул (1.9), (1.10):

$$\text{div} \bar{a} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \bar{a});$$

$$\overline{\text{rot}} a = (a_2^3 - a_3^2) \bar{i} + (a_3^1 - a_1^3) \bar{j} + (a_1^2 - a_2^1) \bar{k} =$$

$$= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \bar{a}].$$

Нехай напрям задається одиничним вектором

$$\bar{e} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k},$$

де  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  – направляючі косинуси. Отримаємо формули для обчислення похідної за цим напрямом:

$$\begin{aligned} A\bar{e} &= \cos \alpha \cdot A\bar{i} + \cos \beta \cdot A\bar{j} + \cos \gamma \cdot A\bar{k} = \\ &= \bar{i} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial P}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial P}{\partial z} \cos \gamma \right) + \\ &+ \bar{j} \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Q}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \gamma \right) + \\ &+ \bar{k} \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial R}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial R}{\partial z} \cos \gamma \right). \end{aligned}$$

**Зауваження 1.22** Дивергенція і ротор не залежать від вибору базису, тому для диференційовного в точці  $M$  векторного поля ротор і дивергенція – інваріанти. Звідси випливає, що в кожній точці  $M \in D$  вони визначаються однозначно.

**Зауваження 1.23** Якщо  $\bar{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$  – диференційовне векторне поле в області  $D$ , а  $U(M)$  – диференційовне скалярне поле в області  $D$ , другі мішані частинні похідні якого неперервні в  $D$ , тоді мають місце наступні, зручні для розв’язання прикладних задач, тотожності

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{grad}} U) = [\nabla, \nabla U] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \bar{0},$$

$$\text{div}(\overline{\text{grad}} U) = (\nabla, \nabla U) = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad \text{div}(\overline{\text{rot}} a) = (\nabla, [\nabla, \bar{a}]) = 0.$$

♣ *Фізичний зміст дивергенції і ротору.*

Дивергенція векторного поля  $\bar{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$  обчислюється за фо-

рмулою  $\text{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ , а тому визначає швидкість зміни кожного компонента

вектора у своєму власному напрямі. Отже, вона характеризує розбіжність векторного поля. Крім того,

- $\text{div} \bar{a}(M) > 0 \Rightarrow$  із точки  $M$  витікає більше рідини, ніж потрапляє, тоді таку точку  $M$  називають *витоком*;
- $\text{div} \bar{a}(M) < 0 \Rightarrow$  із точки  $M$  витікає менше рідини, ніж потрапляє, тоді таку точку  $M$  називають *стоком*;
- $\text{div} \bar{a}(M) = 0 \Rightarrow$  здійснюється *баланс* між витіканням і потраплянням рідини в точці  $M$ .

Величина  $\overline{\text{rot}} a$  обчислюється за формулою

$$\overrightarrow{\text{rota}} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Ротор векторного поля характеризує *вихор*. Це пов'язано з тим, що він якби «змішує» похідні і компоненти. Він якби слідує як змінюються компоненти векторного поля за чужими напрямками, тобто ротор характеризує обертання векторного поля.

Якщо  $\vec{v}(M)$  – векторне поле швидкостей течії рідини, тоді його кутова швидкість виражається через ротор векторного поля  $\vec{v}(M)$  за формулою:  $\vec{\omega}(M) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} v(M)$ .

#### 4 Формула Гріна

Нехай  $\pi$  – це площина в  $\square^3$ ,

$\vec{k}$  – одиничний вектор нормалі до  $\pi$ ,

$D$  – область на площині  $\pi$ .

$D$  – *однозв'язна плоска область*, тобто така область, яка має властивість: будь-яка кусково-гладка зімкнена крива, що лежить в  $D$ , обмежує область, яка також цілком лежить в  $D$ .

Через  $C$  позначимо межу  $\partial D$  області  $D$ , тобто множину межових точок  $D$  (означення див. в §1, п. 4.1).

Умови на межу  $C = \partial D$  області  $D$ :

1) крива  $C$  – зімкнена, кусково-гладка, без особливих точок;

2) на площині  $\pi$  можна обрати таку декартову прямокутну систему координат, що усі прямі, які паралельні осям координат перетинають  $C$  не більш, ніж у двох точках.

$\vec{t} = \vec{t}(M)$  – векторне поле одиничних векторів дотичних до кривої  $C$ , яке узгоджено з  $\vec{k}$ . Це означає наступне: якщо дивитися з кінця вектора  $\vec{k}$ , то вектори  $\vec{t}$  будуть задавати додатній напрям обігу кривої  $C$ , тобто обіг, що узгоджений з нормаллю за правилом «шторпора».

**Теорема 1.11 (формула Гріна).** Нехай

- ♦  $\vec{a}(M)$  – векторне поле, диференційовне у відкритій області  $D$ ,
- ♦ межа  $C = \partial D$  області  $D$  задовольняє умови 1) і 2),
- ♦ векторне поле  $\vec{a}(M)$  має неперервні похідні за будь-яким напрямом в точках замикання  $D$ , тобто в точках множини  $D \cup C = \bar{D}$ .

Тоді виконується формула:

$$\oint_{\bar{D}} (\vec{k}, \overrightarrow{\text{rota}}) dx dy = \oint_C (\vec{t}, \vec{a}) dl. \quad (\Gamma 1)$$

*Фізична інтерпретація формули Гріна.* Значення інтеграла  $\oint_C (\vec{t}, \vec{a}) dl$  – це циркуляція векторного поля  $\vec{a}(M)$  вздовж контуру  $C$  (або робота векторного поля  $\vec{a}(M)$  по пересуванню матеріальної точки вздовж кривої  $C$ ). Воно дорівнює значенню інтеграла  $\oint_{\bar{D}} (\vec{k}, \overrightarrow{\text{rota}}) dx dy$ , яке характеризує течію векторного поля  $\overrightarrow{\text{rota}}$  через область  $\bar{D}$ .

**Доведення.**

• Дотичні вектори  $\vec{t}$  виражаються через похідні від функцій, що характеризують контур (вони кусково-неперервні за умовою, оскільки  $C$  – кусково-гладка крива), тому  $\vec{t}$  – кусково-неперервне векторне поле на  $C$ .

- Поле  $\vec{a}(M)$  є неперервним на  $C$  в напрямках дотичних в точках кривої  $C$ , оскільки похідні за цими напрямками є неперервними в точках  $C$ .
- З двох останніх фактів випливає, що  $(\vec{t}, \vec{a})$  – скалярна кусково-неперервна на  $C$  функція.
- Поле  $\overline{\text{rota}}$  за кожною координатою є неперервним в  $\bar{D}$ , оскільки його координати утворюється із частинних похідних компонент векторної функції  $\vec{a}(M)$ , які, як похідні за напрямками осей координат, неперервні на  $D \cup C = \bar{D}$ .
- Із останнього випливає, що  $(\vec{k}, \overline{\text{rota}})$  – неперервна скалярна функція в  $\bar{D}$ .
- Область  $\bar{D}$  має за межу кусково-гладку криву  $C$ , тому множина  $C$  має лебегову міру нуль (приклад 1.7), отже, область  $\bar{D}$  є допустимою множиною і на ній коректно визначатиметься кратний інтеграл.
- Крива  $C$  є кусково-гладкою, без особливих точок, тому на ній коректно визначатиметься криволінійний інтеграл.

*Висновок:* обидва інтеграла у формулі (Г1) існують.

Функції, що стоять під знаком інтеграла, є інваріантами, тому вони не залежать від вибору системи координат. Отже, систему координат будемо вибирати спеціальним чином: площину  $Oxy$  оберемо так, щоб задовольнялася умова 2), а вісь  $Oz$  так, щоб  $Oz \uparrow \vec{k}$ . Тоді

$$\begin{aligned}\vec{a} &= P(x, y, 0)\vec{i} + Q(x, y, 0)\vec{j} + 0\vec{k}, \\ \overline{\text{rota}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) + \vec{j}(0-0) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \\ (\vec{k}, \overline{\text{rota}}) &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \left. \begin{aligned} \vec{a} &= \{P, Q, 0\} \\ \vec{t} &= \{\cos \alpha, \cos \beta, 0\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\vec{t}, \vec{a}) &= P \cos \alpha + Q \cos \beta \Rightarrow (\vec{t}, \vec{a}) dl = P \cos \alpha dl + Q \sin \alpha dl.\end{aligned}$$

Тут  $l$  – параметр довжини дуги, який змінюється, зростаючи в тому самому напрямі, в якому здійснюється оббіг кривої  $C$ , тому

$$(\vec{t}, \vec{a}) dl = P \cos \alpha dl + Q \sin \alpha dl = P dx + Q dy.$$

Таким чином, потрібно довести формулу:

$$\iint_{\bar{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy.$$

Для цього доведемо окремо дві рівності:

$$-\iint_{\bar{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx, \quad \iint_{\bar{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy.$$

Доведемо першу, а друга доводиться аналогічно.

Внаслідок умови 2), будь-яка пряма, паралельна осі ординат або абсцис, перетинає контур  $C$  не більше, ніж у двох точках. Тому можна знайти рівно дві прямі, паралельні осі ординат, які будуть перетинати контур  $C$  рівно в одній точці. Позначимо абсциси цих точок через  $x_1$  і  $x_2$ , причому  $x_1 < x_2$ . При цьому, вертикальні прямі, що лежать ліворуч (праворуч) прямої  $x = x_1$  ( $x = x_2$ ) не перетинають контур  $C$  в жодній точці, а поміж ними – у двох точках  $(x, \varphi_1(x))$  і  $(x, \varphi_2(x))$ , де функції  $\varphi_1(x)$  і  $\varphi_2(x)$  визначають нижню і верхню частини контура  $C$  (рис. 1.16). Тоді

$$\begin{aligned}
 -\iint_{\bar{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_{x_1}^{x_2} \left( P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \right) dx = \\
 &= -\int_{x_1}^{x_2} P(x, \varphi_2(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} P(x, \varphi_1(x)) dx.
 \end{aligned}$$

Оскільки функції  $\varphi_1(x)$  і  $\varphi_2(x)$  відповідають кривим  $C_1$  і  $C_2$  відповідно, а ці криві є частинами зімкнутого контура  $C$  з додатним напрямом оббігу, то таким чином визначається напрям оббігу кривих  $C_1$  і  $C_2$  (див. рис. 1.16).

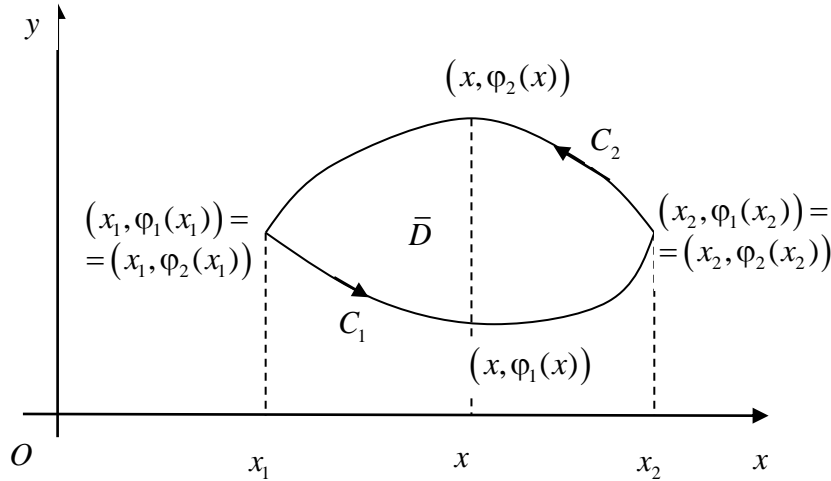


Рис. 1.16

Тому

$$-\int_{x_1}^{x_2} P(x, \varphi_2(x)) dx = \int_{C_2} P dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} P(x, \varphi_1(x)) dx = \int_{C_1} P dx.$$

Отже,  $-\iint_{\bar{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx = \oint_C P dx$ . ■

**Зауваження 1.24** (щодо умови 2). Якщо умова 2) на контур  $C$  не виконується, тоді потрібно розбити область на ділянки, на яких вона виконується. Наприклад, якщо таких ділянок виявиться дві (рис. 1.17), то

$$\begin{aligned}
 \iint_{\bar{D}} &= \iint_{\bar{D}_1} + \iint_{\bar{D}_2}, \\
 \iint_{\bar{D}_2} &= \oint_{C_2 \cup C_3} = \int_{C_2} + \int_{C_3}, \\
 \iint_{\bar{D}_2} &= \oint_{C_1 \cup C_3} = \int_{C_1} - \int_{C_3}.
 \end{aligned}$$

Тепер додамо дві останні рівності, отримаємо

$$\iint_{\bar{D}} = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \oint_C.$$

Таким чином, формула Гріна виконується і без умови 2).

**Зауваження 1.25** (щодо однозв'язності області  $D$ ). Не обов'язково потрібно накладати умову однозв'язності. Аналогічно зауваженню 1.24 область розбивається на ді-

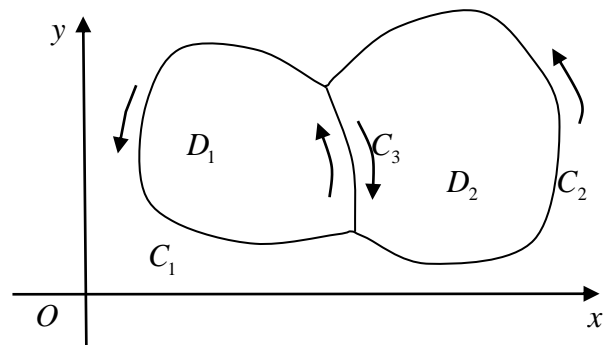


Рис. 1.17



лянки за допомогою кусково-гладких кривих так, щоб кожна ділянка була од-  
нозв'язною. Інтеграли за кривими розділу взаємознищуються при додаванні.

**Зауваження 1.26** (щодо послаблень припущень гладкості векторного поля  $\vec{a}(M)$ ). Умови на гладкість векторного поля  $\vec{a}(M)$  можна послабити, замінивши їх на неперервність поля  $\vec{a}(M)$  в  $\bar{D}$ , його диференційовність в  $D$  і неперервність похідних за будь-яким напрямом в  $D$ . Але ж, доведення при цьому ускладниться.

**Зауваження 1.27** (щодо послаблень припущень на криву  $C$ ). На криву можна на-  
кладати лише припущення про її спрямлюваність. Правда, доведення при цьому ускла-  
дниться.

**Зауваження 1.28** Формула Гріна може бути записана у вигляді:

$$\oint_{\bar{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = \oint_C P dx + Q dy. \quad (\Gamma 2)$$

Такий запис було отримано при виведенні формули. Крім того, формула (Г2), так само,  
як і формула (Г1), залишається інваріантною відносно вибору прямокутної системи ко-  
ординат. Покажемо це.

**Доведення.** Позначимо стару систему координат  $Oxy$ , в ній  $\vec{a} = \{P, Q\}$ , де  
 $P = P(x, y)$ ,  $Q = Q(x, y)$ . Нова система координат –  $Ox'y'$ , в ній  $\vec{a} = \{P', Q'\}$ , де  
 $P' = P'(x', y')$ ,  $Q' = Q'(x', y')$ . Скористаємося інваріантністю скалярного добутку  
 $(\vec{k}, \text{rot } \vec{a})$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left( \vec{k}, \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \right) = (\vec{k}, \text{rot } \vec{a}) = \left( \vec{k}, \left( \frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} \right) \vec{k} \right) = \frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'}.$$

Елемент площі при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої, теж,  
прямокутної системи координат, не змінює свого значення, оскільки якобіан переходу  
дорівнює 1, тобто

$$ds = |J| \cdot ds' = ds'.$$

Отже, подвійні інтеграли мають рівні значення.

Розглянемо тепер вираз під знаком криволінійного інтеграла. Скористаємося ін-  
варіантністю скалярного добутку  $(\vec{a}, \vec{t})$ :

$$P dx + Q dy = (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = (\vec{a}, \vec{t}) = (P' \cos \alpha' + Q' \sin \alpha') dl = P' dx' + Q' dy'.$$

Отже, і криволінійні інтеграли мають рівні значення. ■

## 5 Формула Остроградського-Гаусса

Однозв'язною тривимірною областю  $D \subset \square^3$  називають таку область, що будь-  
яка кусково-гладка зімкнена поверхня  $G$ , яка міститься в  $D$ , обмежує область  $D_1$ , яка  
лежить всередині  $D$ , тобто  $(G \cup D_1) \subset D$ .

$S = \partial D$  – множина межових точок області  $D$ .

$\vec{n} = \vec{n}(M)$  – векторне поле одиничних зовнішніх нормалей до поверхні  $S$ .

Поверхня  $S$  в  $\square^3$  задовольняє умови:

- 1)  $S$  – кусково-гладка, без особливих точок, двозв'язна, повна, обмежена, зімкнена;
- 2)  $\exists Oxuz$  (можна обрати прямокутну систему координат), таку, що будь-яка пряма,  
паралельна координатній осі, перетинає  $S$  не більше, як у двох точках.

**Теорема 1.12** (формула Остроградського-Гаусса). Нехай

- ♦  $\vec{a}(M)$  – диференційовне в  $D$  векторне поле,
- ♦ множина межових точок  $S = \partial D$  області  $D$  задовольняє умови 1) і 2),
- ♦ похідна за будь-яким напрямом неперервна в  $D \cup S = \bar{D}$ .

Тоді виконується формула:

$$\oint\!\!\!\oint_{\bar{D}} \operatorname{div} \vec{a} \, dv = \oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}, \vec{n}) \, ds. \quad (\text{О-Г1})$$

*Фізичний зміст:* потрійний інтеграл від дивергенції векторного поля дорівнює течії векторного поля через поверхню  $S$ .

**Доведення.**

•  $\operatorname{div} \vec{a}$  виражається через частинні похідні, які є неперервними в  $\bar{D}$ ; звідси випливає, що дивергенція також неперервна в області  $\bar{D}$ .

•  $(\vec{a}, \vec{n})$  – неперервна числова функція на  $S$ , оскільки

а) векторне поле  $\vec{a}(M)$  є неперервним в напрямках нормалей в точках  $S$  (оскільки похідні за цими напрямками є неперервними),

б) поле нормалей є неперервним на  $S$ , що випливає із двосторонності поверхні.

• Область  $\bar{D}$  має як межу кусково-гладку поверхню  $S$ , тому вона визначається скінченною кількістю неперервних функцій. Звідси випливає, що множина  $S$  має лебегову міру нуль (див. приклад 1.7). Отже, область  $\bar{D}$  є допустимою множиною і на ній коректно визначатиметься кратний інтеграл.

• Поверхня  $S$  є кусково-гладкою, без особливих точок, двозв'язною, повною, обмеженою, тому на ній коректно визначатиметься поверхневий інтеграл.

*Висновок:* обидва інтеграли формули (О-Г1) існують.

Величини  $\operatorname{div} \vec{a}$  та  $(\vec{a}, \vec{n})$  – інваріантні відносно вибору системи координат, тому оберемо систему координат так, як зазначено в умові 2). Тоді в цій системі координат

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \{P, Q, R\}, \\ \vec{n} &= \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{n}) = P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Формула (О-Г1) надбає вигляду

$$\begin{aligned} \oint\!\!\!\oint_{\bar{D}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \oint\!\!\!\oint_S (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) ds = \left\| \begin{aligned} \cos X \, ds &= dy dz \\ \cos Y \, ds &= dx dz \\ \cos Z \, ds &= dx dy \end{aligned} \right\| = \\ &= \oint\!\!\!\oint_S P \, dy dz + Q \, dx dz + R \, dx dy. \end{aligned}$$

Доведемо окремо кожен із наступних формул:

$$J = \oint\!\!\!\oint_{\bar{D}} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oint\!\!\!\oint_S P \, dy dz, \quad I = \oint\!\!\!\oint_{\bar{D}} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oint\!\!\!\oint_S Q \, dx dz,$$

$$L = \oint\!\!\!\oint_{\bar{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oint\!\!\!\oint_S R \, dx dy.$$

Зупинимося на доведенні третьої, інші дві доводяться аналогічно.

Нехай  $D^*$  – це проекція  $D$  на  $Oxy$ ; через межові точки  $D^*$  проведемо прямі, паралельні  $Oz$ . Із умови 2) випливає, що кожна з цих прямих буде перетинати поверхню  $S$  лише в одній точці. Множина таких точок утворить криву на поверхні  $S$ . Ця крива розбиває  $S$  на дві поверхні  $S_1$  і  $S_2$  (тобто  $S = S_1 \cup S_2$ ). Пряма, паралельна осі  $Oz$ , що проходить через внутрішню точку  $(x, y)$  області  $D^*$ , буде перетинати поверхню  $S$  в

двох точках, одна з яких лежить на  $S_1$ , а інша – на  $S_2$ . Нехай поверхні  $S_1$  і  $S_2$  задаються рівняннями

$$S_1 : z = z_1(x, y), \quad S_2 : z = z_2(x, y).$$

Тоді точки перетину зазначеної вертикальної прямої з цими поверхнями мають координати  $(x, y, z_1(x, y))$  і  $(x, y, z_2(x, y))$  відповідно (рис. 1.18).

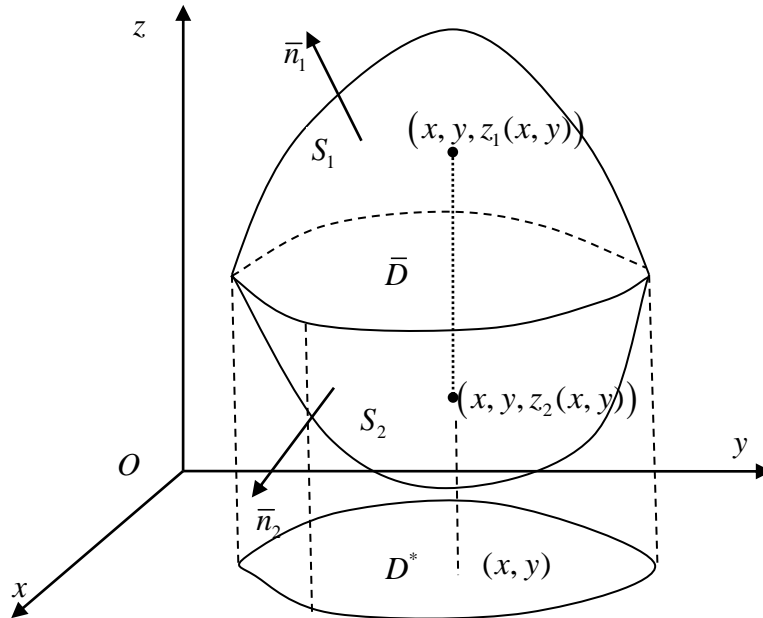


Рис. 1.18

В результаті отримаємо:

$$L = \iiint_{\bar{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{D^*} dx dy \int_{z_2(x, y)}^{z_1(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D^*} [R(x, y, z_1(x, y)) - R(x, y, z_2(x, y))] dx dy.$$

Оскільки нормаль до поверхні  $S_1$  утворює гострий кут з віссю апікат, а до поверхні  $S_2$  – тупий, то

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy &= \iint_{S_1} R dx dy, \\ - \iint_{D^*} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy &= \iint_{S_2} R dx dy. \end{aligned}$$

Отже,

$$L = \iint_{S_1} R dx dy + \iint_{S_2} R dx dy = \iint_S R dx dy. \quad \blacksquare$$

**Зауваження 1.29** (щодо області  $D$ ). Якщо поверхня  $S$  не задовольняє умову 2) або область  $D$ , яку вона обмежує, не є однозв'язною, тоді область  $D$  потрібно розбити на скінчену кількість областей, кожна з яких задовольняє умову 2), і застосувати влас-

тивість адитивності кратного інтеграла:  $\iiint_D = \sum_{i=1}^n \iiint_{D_i}$ . Що стосується поверхневого ін-

теграла, то інтеграли вздовж тих частин поверхні, що будуть спільними у областей  $D_i$ , взаємознищуються, оскільки будуть мати протилежно спрямовані нормалі. Після застосування формули Остроградського-Гаусса для кожної з частин  $D_i$  та підсумовування, ми

отримаємо, що  $\iiint_D = \iint_S$ .

**Зауваження 1.30** Формулу Остроградського-Гаусса можна переписати, як було отримано при її доведенні, у вигляді:

$$\iiint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (\text{О-Г2})$$

Причому, ця формула є інваріантною за формою і значенням відносно переходу до нової системи координат. Доведення аналогічне, як для зауваження 1.28 до формули Гріна.

## 6 Формула Стокса

Повторимо деякі означення і зробимо висновки з метою введення поняття поверхні з краєм.

**А)** Із означень 1.17 та 1.18 випливає, що як елементарна область (ЕО), так і проста плоска область (ППО), повинні бути відкритими множинами на площині з евклідовою метрикою.

**Б)**  $\Phi \subset \mathbb{R}^3$  – *поверхня*  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists G$  – ППО:  $f: G \rightarrow \Phi$  – локальний гомеоморфізм.

**В)** Оскільки проста плоска область  $G$  є відкритою множиною, зокрема, в  $\mathbb{R}^2$ , то можна множину  $\mathbb{R}^2$  локально гомеоморфно відобразити на  $G$ .

**Г)** Композиція локальних гомеоморфізмів  $\mathbb{R}^2 \rightarrow G$  і  $G \rightarrow \Phi$  є локальним гомеоморфізмом  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi$ , тому означення поверхні можна дати в інший спосіб.

$\Phi \subset \mathbb{R}^3$  – *поверхня*  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi$  – локальний гомеоморфізм.

**Д)** Введемо позначення:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

**Е)** Окіл т.  $M$  на поверхні  $\Phi$ :

$$W(M) \stackrel{\text{def}}{=} U(M) \cap \Phi.$$

**Означення 1.41** Поверхнею з краєм називають така множину  $G$ , деякий окіл кожної з точок якої є гомеоморфним образом або множини  $\mathbb{R}^2$ , або  $H^2$ . Множину  $C$  тих точок, околиця яких є гомеоморфними образами множини  $H^2$ , називають *краєм поверхні*  $G$  (див. рис. 1.19).

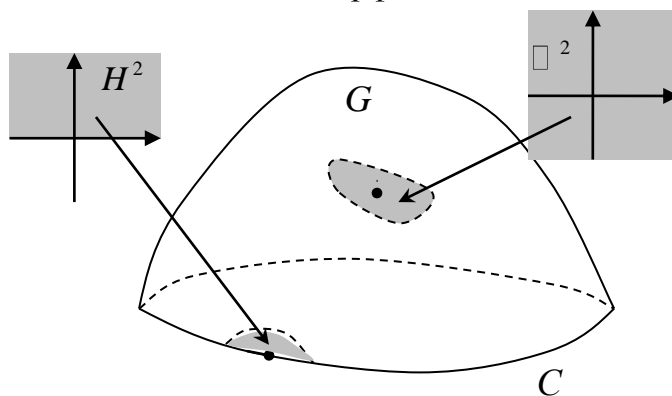


Рис.1.19

**Означення 1.42**  $S \subset \mathbb{R}^3$  – *однозв'язна поверхня*  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall C$  – кусково-гладкої, зімкненої кривої  $C \subset S$   $\exists$  поверхня  $G$ , для якої крива  $C$  є краєм, причому ця поверхня  $G$  разом із краєм  $C$  лежить всередині  $S$ , тобто  $(G \cup C) \subset S$ .

*Умови на поверхню  $S$ :*

- 1)  $S$  – кусково-гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена;
- 2)  $\exists C$  – край поверхні  $S$ , який є кусково-гладкою, без особливих точок просторовою кривою;
- 3)  $\exists$  система координат  $Ox, y, z$  така, що поверхня  $S$  однозначно проектується на кожну з трьох координатних площин.

$\vec{n} = \vec{n}(M)$  – векторне поле одиничних нормалей до  $S$ .

$\vec{t} = \vec{t}(M)$  – векторне поле одиничних векторів дотичних в точках контуру  $C$  з напрямками, які узгоджені з полем  $\vec{n}$ .

За цих умов виконується теорема.

**Теорема 1.13 (формула Стокса).** Нехай

♦  $\vec{a}(M)$  – векторне поле, неперервно диференційовне в околі поверхні  $S$  (у відкритій множині, що містить у собі  $S$ ),

♦ поверхня  $S$  задовольняє зазначені умови 1) – 3).

Тоді виконується формула:

$$\oint_S (\vec{n}, \overrightarrow{\text{r} \otimes \text{a}}) ds = \oint_C (\vec{a}, \vec{\tau}) dl. \quad (C1)$$

*Фізичний зміст:* течія векторного поля  $\overrightarrow{\text{r} \otimes \text{a}}$  через поверхню  $S$  дорівнює циркуляції векторного поля вздовж контура  $C$ , який є краєм поверхні  $S$ .

**Доведення.**

- Поверхня двостороння, тому поле нормалей  $\vec{n}$  – неперервне на  $S$ .
- Векторне поле  $\vec{a}(M)$  – неперервно диференційовне на  $S$ , а компоненти вектора  $\overrightarrow{\text{r} \otimes \text{a}}$  виражаються через частинні похідні координатних функцій  $\vec{a}(M)$ , тому  $\overrightarrow{\text{r} \otimes \text{a}}$  – неперервне векторне поле на  $S$ .
- Дотичні вектори  $\vec{\tau}$  виражаються через частинні похідні координатних функцій, що визначають контур  $C$ . Ці функції є кусково-гладкими, тому векторне поле дотичних  $\vec{\tau}$  є кусково-неперервним на  $C$ .
- Тому кожен із скалярних добутків формули (C1) утворює неперервні або кусково-неперервні функції.
- Поверхня  $S$  є кусково-гладкою, без особливих точок, двосторонньою, повною, обмеженою, тому на ній коректно визначатиметься поверхневий інтеграл.
- Крива  $C$  є кусково-гладкою, без особливих точок, тому на ній коректно визначатиметься криволінійний інтеграл.

*Висновок:* обидва інтеграла формули (C1) існують.

Підінтегральні функції – інваріанти відносно вибору системи координат  $Oxyz$ . Оберемо систему координат так, щоб виконувалася умова 3). Домовимося, що при виборі системи координат напрями осей оберемо так, щоб нормаль  $\vec{n}$  утворювала гострий кут з усіма осями.

В цій системі координат маємо:

$$\vec{a} = \{P, Q, R\}, \quad \vec{n} = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}, \quad \vec{\tau} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

$$(\vec{n}, \overrightarrow{\text{r} \otimes \text{a}}) = \begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \cos X \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) +$$

$$+ \cos Y \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \cos Z \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

$$(\vec{a}, \vec{\tau}) = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma.$$

Формула (C1) набуває вигляду

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy + R dz. \quad (C2)$$

Окремо перевіримо справедливості кожної з формул

$$J = \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) ds = \oint_C P dx,$$

$$I = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos X \right) ds = \oint_C Q dx,$$

$$L = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos X - \frac{\partial R}{\partial x} \cos Y \right) ds = \oint_C R dy.$$

Доведемо першу із них. Спроектуємо поверхню  $S$  на площину  $Oxy$  (див. рис. 1.20). Позначимо цю проекцію  $D^*$ . Вона, за умовою, визначається однозначно. Через  $\Gamma$  позначимо проекцію контура  $C$  на  $Oxy$ .

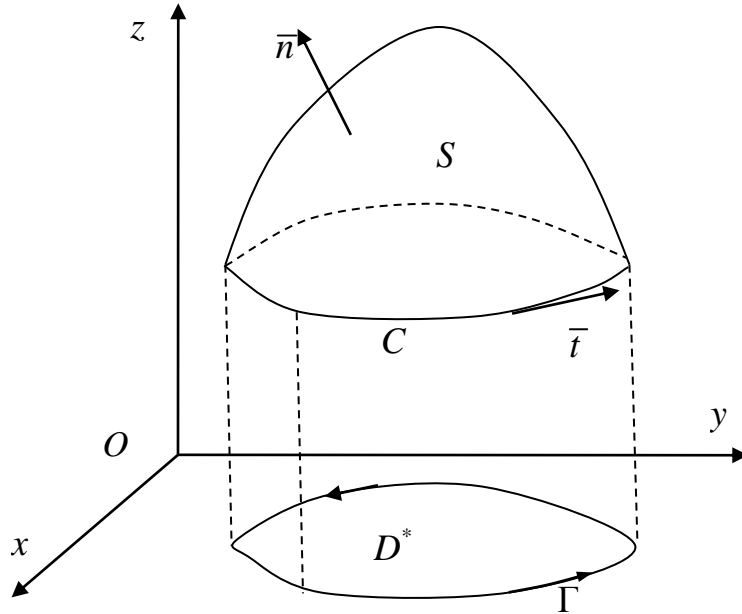


Рис. 1.20

Нехай поверхня задається функцією  $z(x, y)$ . Поверхня кусково-гладка, тому функція  $z(x, y)$  є кусково-диференційовною на  $D$ . Поверхня двостороння, тому поле нормалей є неперервним, а функції

$$\cos X = \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \quad \cos Y = \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \quad \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} -$$

неперервними на  $D$ .

Оскільки  $ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$ , то

$$\begin{aligned} J &= \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) ds = \iint_{D^*} \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial z} \cdot (-z'_y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot 1 \right) \Big|_{z=z(x,y)}}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \\ &= \iint_{D^*} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cdot (-z'_y) - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{z=z(x,y)} dx dy. \end{aligned}$$

Обчислимо похідну від функції  $P(x, y, z(x, y))$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) = \left( \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dy} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{z=z(x,y)} = \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cdot z'_y + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{z=z(x,y)}.$$

Отже,

$$J = - \iint_{D^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Застосуємо формулу Гріна, знаючи, що  $\Gamma$  – контур області  $D^*$ :


$$- \iint_{D^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y, z(x, y)) dx.$$

Оскільки  $\Gamma$  – проекція контуру  $C$ , то

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z(x, y)) dx = \oint_C P(x, y, z) dx.$$

Таким чином,  $J = \oint_C P(x, y, z) dx$ . ■

**Зауваження 1.31** Формула Стокса є вірною для поверхні  $S$ , що задовольняє умови 1) і 2), але не задовольняє умову 3).

Для обґрунтування цього факту спочатку доводиться твердження:  $\exists \delta > 0$  таке, що  $S$  можна розбити на ділянки  $\{S_i\}$ , розмір яких  $< \delta$  і для кожної ділянки  $S_i$  існує така система координат, що поверхня  $S_i$  однозначно проектується на усі координатні площини і задовольняє умовам 1) і 2) (розглянути доведення самостійно [4, с. 216] !).

Після цього, вважаючи, що  $S = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$ , представляємо поверхневий і криволінійний інтеграл сумами

$$\iint_S = \sum \iint_{\Phi_i}, \quad \oint_C = \sum \oint_{\partial \Phi_i}.$$

Для ділянок, що мають спільну межу, криволінійний інтеграл за цією межею взаємно знищиться, оскільки для таких ділянок оббіг буде здійснюватися в протилежних напрямках.


**Зауваження 1.32** Формулу Стокса (C1) можна переписати у вигляді формули (C2), яка у скороченому записі має вигляд

$$\oint_S \begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds = \oint_C P dx + Q dy + R dz, \quad (C2)$$

де інтеграли зліва і справа мають інваріантний характер відносно вибору декартової системи координат. Доведення аналогічне доведенню зауваження 1.28.

## 7 Умови незалежності криволінійного інтеграла на площині від шляху інтегрування. Потенціальні векторні поля

Нехай  $\vec{a}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$  – плоске векторне поле у відкритій області  $D$ .

 **Означення 1.43** Функцію  $U(x, y)$  називають *потенціалом векторного поля*  $\vec{a}(x, y)$ , якщо  $\vec{a}(x, y) = \overline{\text{grad}} U(x, y)$ . Поле  $\vec{a}$ , що має потенціал, називають *потенціальним*.

Із означення потенціала і градієнта випливає:

$$\overline{\text{grad}} U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = \{P, Q\} = \vec{a} \Rightarrow P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

**Теорема 1.14** Нехай функції  $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$  – неперервні у відкритій області  $D$ . Для будь-яких двох точок  $A$  і  $B$  із області  $D$  значення інтеграла  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежать від лінії  $AB$ , що сполучає точки  $A$  і  $B$  та лежить всередині  $D$ , тоді і лише тоді, коли векторне поле  $\vec{a}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$  потенціальне. Крім того, при цьому

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A).$$

**Доведення. Достатність.** Нехай  $\vec{a} = \{P, Q\}$  – потенціальне поле,  $U$  – його потенціал, тоді  $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$ . Зафіксуємо точки  $A$  і  $B$  із області  $D$ . Потрібно довести, що інтеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежить від лінії  $AB \subset D$ , що сполучає точки  $A$  і  $B$ .

Нехай  $AB: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$ , тоді

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_a^b \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} \right] dt = \\ &= \int_a^b \frac{dU}{dt}(x(t), y(t)) dt = U(x(t), y(t)) \Big|_a^b = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(B) - U(A). \end{aligned}$$

**Висновок:** інтеграл не залежить від лінії  $AB$ .

**Необхідність** Нехай для будь-якої пари точок  $A$  і  $B$  із області  $D$  інтеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежить від лінії  $AB \subset D$ .

Довести: поле  $\vec{a} = \{P, Q\}$  – потенціальне. Для цього потрібно знайти функцію

$U(x,y)$  таку, що  $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$ .

Нехай  $M_0(x_0, y_0)$  – фіксована точка області  $M_0 \in D$ .

Розглянемо відповідність  $M \rightarrow \int_{M_0M} Pdx + Qdy$ , де  $M \in D$  – довільна точка. Ця відповідність утворює функцію, оскільки кожній точці відповідає єдине значення інтеграла, який не залежить від лінії  $M_0M$ :

$$U(M) = \int_{M_0M} Pdx + Qdy.$$

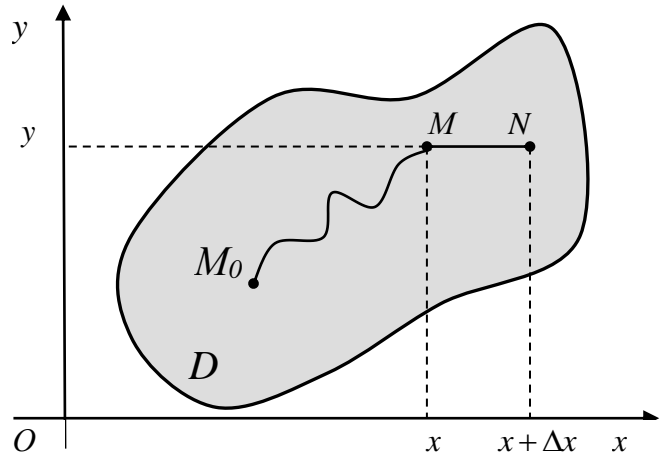


Рис. 1.21

Доведемо, що  $U(M)$  – це шуканий потенціал поля  $\vec{a} = \{P, Q\}$ , тобто доведемо, що

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Перевіримо першу рівність, а друга доводиться аналогічно.

Нехай  $\Delta x: N(x + \Delta x, y) \in D$ . Таку точку знайти можливо (рис. 1.21), оскільки, область  $D$  – відкрита. Маємо:



$$\begin{aligned}\Delta U_x(x, y) &= U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = U(N) - U(M) = \int_{M_0MN} - \int_{M_0M} = \\ &= \int_{MN} Pdx + Qdy = \left\| \begin{array}{l} MN \in D, \\ MN: y = \text{const} \Rightarrow dy = 0dx \end{array} \right\| = \int_{MN} Pdx = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y)dt = \\ &= \left\| \text{th про середнє} \right\| = P(x + \theta\Delta x, y)(x + \Delta x - x) \quad (0 < \theta < 1),\end{aligned}$$

тобто,

$$\Delta U_x(x, y) = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x \quad (0 < \theta < 1),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U_x(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta\Delta x, y) = P(x, y). \quad \blacksquare$$

Нехай в області  $D$  функції  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  неперервні разом із своїми частинними похідними. Якщо векторне поле  $\vec{a} = \{P, Q\}$  потенціальне, тоді

$$\exists U(x, y): \frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Оскільки частинні похідні  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  – неперервні в області  $D$  (за припущенням), тоді за теоремою Шварца в точках області  $D$  має місце рівність  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**Висновок.** Якщо в області  $D$  функції  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  неперервні разом із своїми частинними похідними, а інтеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежить від лінії  $AB \subset D \quad \forall A, B \in D$ , тоді (за теоремою 1.14) векторне поле  $\vec{a} = \{P, Q\}$  – потенціальне, а разом з цим  $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$ .

Доведемо зворотнє твердження для випадку кругової області.

**Твердження 1.7** Нехай

- 1)  $D$  – круг,
- 2) функції  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  – неперервні разом із своїми частинними похідними в  $D$ ;
- 3)  $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$ .

Тоді  $\forall A, B \in D$  значення інтеграла  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежать від лінії  $AB$ , що сполучає точки  $A$  і  $B$  та лежить всередині області  $D$ .

**Доведення.** Нехай для векторного поля  $\vec{a} = \{P, Q\}$  в області  $D$  виконується

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Доведемо, що векторне поле потенціальне, тобто знайдемо функцію  $U(x, y)$

таку, що  $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$ . Для цього розглянемо дві довільні точки  $M_0$  і  $M$  круга  $D$  і

двома способами сполучимо їх ламаними з ланками, паралельними координатним осям, так, як зображено на схемі рис. 1.22. Застосуємо формулу Гріна для прямокутника  $M_0M_1MM_2$ :

$$\int_{M_0M_1MM_2M_0} Pdx + Qdy = \iint_{M_0M_1MM_2} \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)}_{=0} dx dy = 0.$$

Отже,

$$\int_{M_0 M_1 M M_2 M_0} Pdx + Qdy = \int_{M_0 M_1 M} Pdx + Qdy + \int_{M M_2 M_0} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{M_0 M_1 M} Pdx + Qdy = \int_{M_0 M_2 M} Pdx + Qdy.$$

Тому інтеграл  $\int_{M_0 M} Pdx + Qdy$  не залежить від вигляду ламаної  $M_0 M$ , що має ланки, паралельні координатним осям.

Розглянемо функцію

$$U(M) = \int_{M_0 M} Pdx + Qdy,$$

де  $M_0 M$  – ламана з ланками паралельними координатним осям. Доведення того, що це і є шуканий потенціал, здійснюється аналогічно теоремі 1.14. ■

Узагальнимо останню теорему.

**Твердження 1.8** Нехай

- 1)  $D$  – однозв'язна область,
- 2) функції  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  – неперервні разом із своїми частинними похідними в області  $D$ ;
- 3)  $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$ .

Тоді інтеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежить від лінії  $AB \subset D \quad \forall A, B \in D$ .

**Доведення.** Якщо  $L$  – довільна кусково-гладка, зімкнена крива, що розташована в  $D$ , то область  $D^*$  (рис. 1.23), яку вона обмежує, цілком лежить в  $D$ , оскільки  $D$  – однозв'язна. Застосуємо формулу Гріна і умову 3):

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = 0.$$

Нехай  $A$  і  $B$  – довільні точки  $D$ . Сполучимо їх двома кусково-гладкими кривими  $AC_1 B$  і  $AC_2 B$  які лежать в  $D$  (рис. 1.23), тоді

$$\int_{AC_1 B C_2 A} Pdx + Qdy = \int_{AC_1 B} Pdx + Qdy + \int_{BC_2 A} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{AC_1 B} Pdx + Qdy = \int_{AC_2 B} Pdx + Qdy. \quad \blacksquare$$

**Загальний**

**висновок.**

Інтеграл

$\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежить від шляху інтегрування

за дугою  $AB$ , що лежить в області  $D$ , в якій дані функції неперервні разом із своїми частинними похідними, тоді і лише тоді, коли  $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$ . Крім того,

має місце формула  $\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$ , де  $U(M)$  – потенціал векторного поля  $\vec{a}(M)$ .

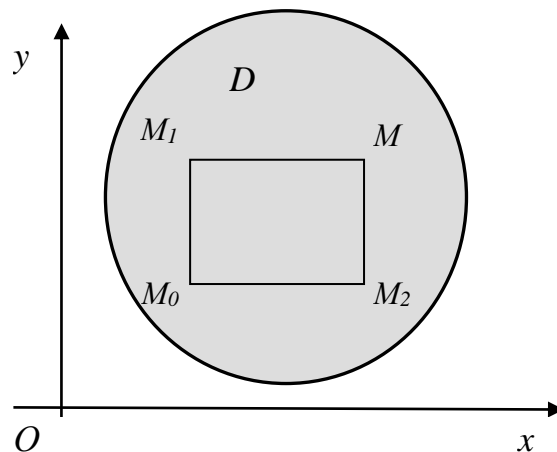


Рис. 1.22

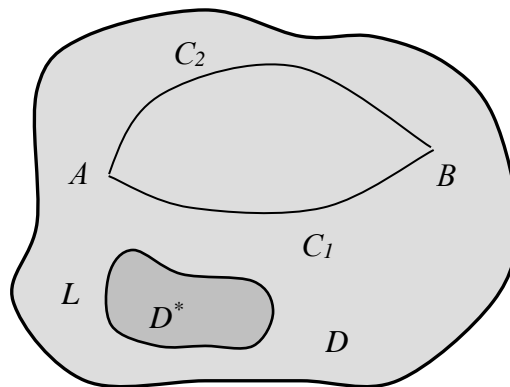


Рис. 1.23

## Розділ 4. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

## §1. Кратні інтеграли

## 1. Варіанти індивідуального завдання

- 1, 2. Змінити порядок інтегрування.
3. Обчислити подвійний інтеграл.
- 4, 5. Обчислити подвійний інтеграл за допомогою нових змінних.
6. Знайти об'єм тіла за допомогою подвійного інтеграла.
7. Використовуючи потрібну заміну, знайти площу області.
8. Знайти координати центра мас пластини.
9. Знайти площу поверхні.
- 10, 11. Обчислити потрійний інтеграл.
- 12, 13. Знайти об'єм тіла, що задається поверхнями, які його обмежують.
14. Тіло задається поверхнями, які його обмежують,  $\gamma(x, y, z)$  – густина. Знайти масу тіла.

**Варіант 1**

$$1. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x, y) dy$$

$$2. \int_0^4 dy \int_{\frac{3y}{4}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx$$

$$3. \iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy;$$

$$D: x=0, y=0, 4x+4y-\pi=0$$

$$4. \iint_D dx dy;$$

$$D: xy=1, xy=2, y=x, y=3x$$

$$5. \iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy;$$

$$D: x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2=R^2$$

6. Тіло обмежене поверхнями

$$6x-9y+5z=0, 3x-2y=0, 4x-y=0, \\ x+y=5, z=0$$

7. Область обмежена еліпсом

$$(x-2y-3)^2 + (3x+4y-1)^2 = 100$$

8. Однорідна пластина обмежена

$$\text{лініями } y^2=x, 3y^2=x, y=\frac{x}{3}$$

$$9. \text{Поверхня } z=\frac{x^2}{2}, \text{ для якої } x \leq 2\sqrt{2}, \\ x \leq 2y \leq 4x$$

**Варіант 2**

$$1. \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$

$$2. \int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x, y) dy$$

$$3. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{ax-x^2}};$$

$$D: x=0, y^2=a^2-ax$$

$$4. \iint_D dx dy; D: y=ax^2, y=bx^2,$$

$$xy=p, xy=q (a < b, p < q)$$

$$5. \iint_D \arctg \frac{x}{y} dx dy; D - \text{ частина круга}$$

$$x^2+y^2 \leq 1, \text{ що лежить в I чверті}$$

6. Тіло обмежене еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

7. Область обмежена кривою

$$(x^2+y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$$

8. Однорідна пластина обмежена лініями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$9. \text{Знайти площу поверхні } x^2+y^2=2ay, \\ \text{якщо } z^2 \leq x^2+y^2$$

$$10. \iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz;$$

$$x=0, y=1, y=x, z=0, z=1$$

$$11. \iiint_V x dx dy dz;$$

$$V: y=10x, y=0, x=1, z=xy, z=0$$

$$12. y=16\sqrt{2x}, y=\sqrt{2x}, z=0, x+z=2$$

$$13. x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{5}{4} - x^2, z=0$$

$$14. 64(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, y=0, z=0 \ (y \geq 0, z \geq 0), \gamma = \frac{5}{4}(x^2 + y^2)$$

### Варіант 3

$$1. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy$$

$$2. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx$$

$$3. \iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}; \quad D: y = x \operatorname{tg}(x), y = x$$

$$4. \iint_D xy dx dy; \quad D: y = ax^3, y = bx^3, y^2 = px, y^2 = qx \ (0 < a < b, 0 < p < q)$$

$$5. \iint_D x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} dx dy;$$

$$D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0 - \text{петля лемніскати}$$

6. (№Б3570) Тіло обмежене круговим циліндром радіуса  $r$ , віссю якого служить вісь ординат, координатними площинами

$$\text{і площиною } \frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$$

$$10. \iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz;$$

$$x=2, y=\pi, z=1, x=0, y=0, z=0$$

$$11. \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4};$$

$$V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1, x=0, y=0, z=0$$

$$12. y=5\sqrt{x}, y=\frac{5x}{3}, z=5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}, z=0$$

$$13. x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 4y, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z=0$$

$$14. x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1 \ (x^2 + y^2 \leq 1), x=0 \ (x \geq 0), \gamma = 4|z|$$

### Варіант 4

$$1. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx$$

$$2. \int_3^7 dx \int_{\frac{9}{x}}^{\frac{3}{x}} f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x, y) dy$$

$$3. \iint_D x \cdot y dx dy; \quad D: x + y = 2, x^2 + y^2 = 2y$$

$$4. \iint_D e^{(x+y)^2} dx dy; \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$$

$$5. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \ (c > 1);$$

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

6. Вивести «шкільну» формулу для обчислення об'єму конуса (висота  $H$ , радіус основи  $R$ ) за допомогою

подвійного інтеграла

7. Область обмежена кривою

$$(x - 2y - 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$$

8. Однорідна пластина обмежена лініями

$$y^2 = x, \quad 3y^2 = x, \quad y = \frac{x}{3}$$

9. Поверхня  $z = \frac{x^2}{2}$ , для якої  $x \leq 2\sqrt{2}$ ,  
 $x \leq 2y \leq 4x$ 

10.  $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) \, dx \, dy \, dz;$

$$x=0, y=-2, y=4x, z=0, z=2$$

11.  $\iiint_V 15(y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz;$

$$V: z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$$

12.  $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0,$   
 $z = 15x$

13.  $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x, z = x^2 + y^2 - 64,$   
 $z = 0 \quad (z \geq 0)$

14.  $x^2 + y^2 = 1, 2z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0,$   
 $z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \gamma = 10x$

**Варіант 5**

1.  $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) \, dy +$

$$+ \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) \, dy$$

2.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx$

3.  $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy;$   $D$  – трикутник з  
вершинами  $(-1; 1), (1; 3), (2; -4)$

4.  $\iint_D (2x - y) \, dx \, dy;$   $D: x + y = 2,$   
 $x + y = 3, 2x - y = 3, 2x - y = 4$

5.  $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy;$   
 $D: x^2 + y^2 \leq ax$

7. Область обмежена кривими

$$y = ax^3, y = bx^3, y^2 = px,$$

$$y^2 = qx \quad (0 < a < b, 0 < p < q)$$

8. Однорідна пластина обмежена

$$\text{лініями } x = \sqrt{2y - y^2}, x = 0$$

9. Поверхня  $x^2 = y^2 + z^2$ , що лежить все-  
редині циліндра  $x^2 + y^2 = a^2$ 

10.  $\iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} \, dx \, dy \, dz;$

$$x=0, y=0, z=0, x=-1, y=2, z=1$$

11.  $\iiint_V (3x + 4y) \, dx \, dy \, dz;$   $V: y = x,$

$$y = 0, x = 1, z = 5(x^2 + y^2), z = 0$$

12.  $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0$

13.  $x^2 + y^2 + 4x = 0, z = 8 - y^2, z = 0$

14.  $x^2 + y^2 = \frac{16}{49} z^2, x^2 + y^2 = \frac{4}{7} z,$   
 $x = 0, y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \gamma = 80 \cdot y \cdot z$

**Варіант 6**

1.  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) \, dy +$

$$+ \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) \, dy$$

2.  $\int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) \, dx$

3.  $\iint_D \frac{x+2y}{2x+y} \, dx \, dy;$

$$D: y \leq 1+x, y \leq 1-x, y \geq 0$$

4.  $\int_0^1 dx \int_x^{2x} dy.$  Заміна:  $\begin{cases} x = u \cdot (1-v), \\ y = u \cdot v \end{cases}$

5.  $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy;$   
 $D: x^2 + (y+2)^2 \leq 4$

6. (№Д4029<sup>1</sup>) Тіло обмежене поверхнями

$$z = xy, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y,$$

$$y^2 = x, \quad y^2 = 2x, \quad z = 0$$

7. Область обмежена кривими

$$\sqrt[n]{\frac{x}{a}} + \sqrt[n]{\frac{y}{b}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0)$$

8. Однорідна пластина обмежена лініями

$$y = x^2, \quad y = 3x^2, \quad y = 3x$$

9. Поверхня  $2az = x^2 + y^2$ , для якої

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2cz$$

$$10. \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) \, dx \, dy \, dz;$$

$$x = 1, \quad y = 2x, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y = 2, \quad z = 36$$

$$11. \iiint_V (1 + 2x^3) \, dx \, dy \, dz; \quad V: y = 9x,$$

$$y = 0, \quad x = 1, \quad z = \sqrt{xy}, \quad z = 0$$

$$12. x = 20\sqrt{2y}, \quad x = 5\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad y + z = \frac{1}{2}$$

$$13. x^2 + y^2 = 6x, \quad x^2 + y^2 = 9x,$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad y = 0 \quad (y \leq 0)$$

$$14. x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4z^2,$$

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0), \quad \gamma = 20z$$

**Варіант 7**

$$1. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) \, dx$$

$$2. \int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy + \\ + \int_2^4 dx \int_0^{10-x} f(x, y) \, dy + \int_4^7 dx \int_{x-4}^{10-x} f(x, y) \, dy$$

$$3. \iint_D (x - y^2) \, dx \, dy; \quad D - \text{трикутник з}$$

вершинами  $(1; 0), (-1; 2), (3; 4)$ 

$$4. \iint_D dx \, dy; \quad D: xy = 1, \quad xy = 2,$$

$$y = x, \quad y = 3x$$

$$6. \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2az$$

7. Область обмежена кривими

$$xy = p, \quad xy = q, \quad y^2 = ax, \quad y^2 = bx \\ (0 < a < b, \quad 0 < p < q)$$

8. Однорідна пластина обмежена лініями

$$y = 4x + 4, \quad y^2 = -2x + 1$$

9. Поверхня  $2ax = y^2 + z^2$ , для якої

$$y^2 \leq ax \leq a^2$$

$$10. \iiint_V y^2 z \cos(xyz) \, dx \, dy \, dz;$$

$$x = 1, \quad y = \pi, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$11. \iiint_V (27 + 54y^3) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V: y = x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = \sqrt{xy}, \quad z = 0$$

$$12. x = \frac{5}{2}\sqrt{y}, \quad x = \frac{5}{6}y, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$$

$$13. x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 36,$$

$$z = 0 \quad (z \geq 0)$$

$$14. 36(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x = 0,$$

$$z = 0 \quad (y \geq 0, \quad z \geq 0), \quad \gamma = \frac{5}{6}(x^2 + y^2)$$

**Варіант 8**

$$1. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) \, dx$$

$$2. \int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) \, dy$$

$$3. \iint_D \sqrt{a^2 + x^2} \, dx \, dy;$$

$$D: y^2 - x^2 = a^2, \quad x = a, \quad x = 0, \quad y \geq 0$$

$$4. \iint_D dx \, dy; \quad D: xy = 3, \quad xy = 5,$$

$$y = 4x, \quad y = 6x$$

<sup>1</sup> Посилання на номери з літерою «Д», означатиме, що цей приклад відповідає збірнику задач Демидовича Б.П. [9].

$$5. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$$

$$D: x^2 + (y+2)^2 \leq 4$$

$$6. x^2 \leq ay \leq bx, x^2 + y^2 \leq hz \leq 2x^2 + 2y^2$$

7. Область обмежена кривою

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$

8. Однорідна пластина обмежена

$$\text{лініями } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x = 0 \quad (x \geq 0)$$

9. (№Б3631) Поверхня  $x^2 = y^2 + z^2$ , що вирізана циліндром  $x^2 - y^2 = a^2$  і площинами  $y = b$  та  $y = -b$

$$10. \iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} yz\right) dx dy dz;$$

$$x = 1, y = -1, y = \frac{x}{2}, z = 0, z = -\pi^2$$

$$11. \iiint_V y dx dy dz;$$

$$V: y = 15x, y = 0, x = 1, z = xy, z = 0$$

$$12. x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x = 0, z = 0, z = 30y$$

$$13. x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{9}{4} - x^2, z = 0$$

$$14. x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 = 4 \\ (x^2 + y^2 \leq 4), \gamma = 2|z|$$

### Варіант 9

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f(x, y) dx$$

$$2. \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$$

$$5. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy;$$

$$D: 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$$

6. (№Б3591<sup>1</sup>) Тіло обмежене сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  і циліндром  $x^2 + y^2 = ax$  (задача Вівіані)

7. (№Д3985) Область обмежена кривими  $y^2 = 2px + p^2$ ,  $y^2 = -2qx + q^2$  ( $p > 0, q > 0$ )

8. Однорідна пластина обмежена

$$\text{лініями } y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2$$

9. Поверхня  $x^2 = y^2 + z^2$ , для якої  $x^2 \leq ay$

$$10. \iiint_V y^2 z \operatorname{ch} \frac{xyz}{2} dx dy dz;$$

$$x = 2, y = -1, z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$11. \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5};$$

$$V: \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$12. x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = \frac{12x}{5}, z = 0$$

$$13. x^2 + y^2 = 2y, x^2 + y^2 = 5y, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$$

$$14. x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \gamma = 5x$$

### Варіант 10

$$1. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

$$2. \int_{-2}^2 dx \int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{10} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy$$

<sup>1</sup> Посилання на номери з літерою «Б», означатиме, що цей приклад відповідає збірнику задач Бермана Г.М. [10].

3.  $\iint_D \sqrt{xy - y^2} dx dy$ ;  $D$  – трапеція з вершинами (1;1), (5;1), (10;2), (2;2)

4.  $\iint_D dx dy$ ;  
 $D: x^2 y = 1, x^2 y = 2, x \cdot y^2 = 3, x \cdot y^2 = 4$

5.  $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

6. (№Б3575) Тіло обмежене гіперболічним параболоїдом  $z = x^2 - y^2$  і площинами  $x = 3, z = 0$

7. Область обмежена кривою

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^2 y^2}{c^4}$$

8. Однорідна пластина обмежена

лініями  $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$

9. Поверхня  $x^2 = y^2 + z^2$ , для якої  $|y| \leq b, x^2 - y^2 \leq a^2$  ( $a > b$ )

10.  $\iiint_V x^2 e^{-xy} dx dy dz$ ;

$x = -2, y = 0, z = 1, y = \frac{x}{4}, z = 0$

11.  $\iiint_V (3x^2 + y^2) dx dy dz$ ;  $V: z = 10y,$

$x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

12.  $y = 17\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, z = 0, x + z = \frac{1}{2}$

13.  $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x = 0, z = x^2 + y^2 - 4, z = 0$  ( $z \geq 0$ )

14.  $x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2, x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z,$   
 $x = 0, y = 0$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ),  $\gamma = 28xz$

### Варіант 11

1.  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx$

3.  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ ;  $D: y = e^x, x = 0, y = 2$

4.  $\iint_D (xy - 2y) dx dy$ ;  $D: x - 2y = 3,$   
 $x - 2y = 5, 3x - 2y = 6, 3x - 2y = 7$

5.  $\iint_D x^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ;  
 $D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2), x \leq 0$  – пелюстка лемніскати

6. Тіло обмежене поверхнями

$z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

7. Область обмежена кривими

$x^2 = 2ry, x^2 = 2sy, y^2 = 2px,$   
 $y^2 = 2qx$  ( $0 < p < q, 0 < r < s$ )

8. (№Д4055) Однорідна пластина обмежена кривою  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$  (петля)

9. Поверхня  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , для якої  $x + y \leq R, x \geq 0, y \geq 0$

10.  $\iiint_V 2x^2 y e^{xyz} dx dy dz$ ;

$x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

11.  $\iiint_V (30z + 15x) dx dy dz$ ;

$V: z = x^2 + 3y^2, z = 0, y = x, y = 0, x = 1$

12.  $y = \frac{5}{3}\sqrt{x}, 9y = 5x, z = 0, 9z = 5(3 + \sqrt{x})$

13.  $x^2 + y^2 = 4x, z = 10 - y^2, z = 0$

14.  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2,$   
 $x = 0, y = 0$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ),  $\gamma = 6z$

### Варіант 12

1.  $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx$



$$2. \int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$3. \iint_D dx dy; D: y = 2 - x, y^2 = 4x + 4$$

$$4. \iint_D \frac{y^2 \cos xy}{x} dx dy;$$

$$D: y^2 = \frac{\pi}{3}x, y^2 = \frac{2\pi}{3}x, x^2 = y, x^2 = 2y$$

$$5. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$$

$$D: x^2 + y^2 = ax, x^2 + y^2 = 2ax, y \geq 0$$

$$6. (\text{№Д4027}) \text{ Тіло обмежене поверхнями } z^2 = xy, x + y = a,$$

$$x + y = b \quad (0 < a < b)$$

$$7. (\text{№Б3608.1}) \text{ Область обмежена кривою}$$

$$\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{xy}{c^2}$$

$$8. \text{ Пластина обмежена лініями}$$

$$y = x, y = -x, x = 1 \text{ з густиною, яка в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до початку координат}$$

$$9. (\text{№Б3629}) \text{ Поверхня } z^2 = x^2 + y^2, \text{ що вирізана циліндром } z^2 = 2py$$

$$10. \iiint_V x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right) dx dy dz;$$

$$x = 2, y = x, y = 0, z = 0, z = \pi$$

$$11. \iiint_V (4 + 8z^3) dx dy dz;$$

$$V: y = x, y = 0, x = 1, z = \sqrt{xy}, z = 0$$

$$12. x^2 + y^2 = 8, y = \sqrt{2x}, y = 0, z = 0, 11z = 15x$$

$$13. x^2 + y^2 = 7x, x^2 + y^2 = 10x, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, y = 0 (y \leq 0)$$

$$14. 25(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, x = 0, z = 0 (x \geq 0, z \geq 0), \gamma = 2(x^2 + y^2)$$

$$2. \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy$$

$$3. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$$

$$4. \iint_D dx dy; D: xy = 1, xy = 2,$$

$$y = 2x, y = 4x$$

$$5. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; D - \text{область, обмежена колом } x^2 + y^2 = a^2 \text{ і кардіоїдою } x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} + x) \text{ (область не містить початку координат)}$$

$$6. (\text{№Д4015}) \text{ Тіло обмежене поверхнями } z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x,$$

$$x^2 + y^2 = 2x, z = 0$$

$$7. \text{ Область обмежена еліпсом } (a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1, \text{ де } \Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \text{ (№Д4001)}$$

$$8. \text{ Однорідна пластина обмежена верхньою половиною еліпса, що опирається на велику вісь}$$

$$9. (\text{№Д4043}) \text{ Поверхня } x^2 - y^2 = 2z^2,$$

$$\text{яка вирізана площинами } x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$$

$$10. \iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz;$$

$$x = 2, y = 0, y = x, z = xy, z = 0$$

$$11. \iiint_V 21xz dx dy dz;$$

$$V: x = 2, y = 0, y = x, z = xy, z = 0$$

$$12. x + y = 4, y = \sqrt{2x}, z = 3y, z = 0$$

$$13. x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y, z = x^2 + y^2 - 64, z = 0 (z \geq 0)$$

$$14. x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 4 (x^2 + y^2 \leq 4), y = 0 (y \geq 0), \gamma = |z|$$

**Варіант 13**

$$1. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy +$$

$$+ \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

$$3. \iint_D (3x + y) dx dy;$$

$$D: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{2}{3}x + 3$$

$$5. \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

7. (№БЗ605) Область обмежена кривою  $x^3 + y^3 = 2xy$ , що лежить в

I чверті (петля)

9. Вивести «шкільну» формулу для обчислення площі бічної поверхні конуса (висота  $H$ , радіус основи  $R$ ) за допомогою подвійного інтеграла

$$11. \iiint_V xyz dx dy dz;$$

$$V: y = x, y = 0, x = 3, z = xy, z = 0$$

$$13. x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{13}{4} - x^2, z = 0$$

$$2. \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx$$

$$4. \iint_D (x^2 - y^2) dx dy; D: xy = e^2,$$

$$xy = e^4, x + y = a, x + y = b \quad (a < b)$$

6. (№Д4016) Тіло обмежене поверхнями  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 \geq a|x|$  ( $a > 0$ )

8. (БЗ649) Однорідна пластина обмежена синусоїдою  $y = \sin x$ , віссю  $Ox$

і прямою  $x = \frac{\pi}{4}$

$$10. \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy) dx dy dz;$$

$$x = 2, y = \frac{x}{2}, y = 0, z = 0, z = 1$$

$$12. 6x = 5\sqrt{y}, 18x = 5y, z = 0,$$

$$18z = 5(3 + \sqrt{y})$$

$$14. x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 6z, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \gamma = 90^\circ$$

## 2 Приклад розв'язання варіанта індивідуального типового завдання

**Приклад 2.1** Змінити порядок інтегрування:

$$I_1 = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{16-8y}}^{-\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^0 f(x, y) dx$$

**Розв'язання.** Перший інтеграл в сумі задає область

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2; \\ -\sqrt{16-y^2} \leq x \leq -\sqrt{16-8y}. \end{cases}$$

Криві, що обмежують цю область, мають рівняння:

$$y = 0, y = 2, x = -\sqrt{16-y^2},$$

$$x = -\sqrt{16-8y}.$$

З'ясуємо типи цих кривих:

1)  $y = 0, y = 2$  – горизонтальні прямі,

2)  $x = -\sqrt{16-y^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x \leq 0, \end{cases}$  , тому  $x = -\sqrt{16-y^2}$  – ліва частина кола з центром в

точці  $(0,0)$  радіуса 4,

$$3) \quad x = -\sqrt{16-8y} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x^2}{8}, \\ x \leq 0, \end{cases} \quad \text{тому}$$

$x = -\sqrt{16-8y}$  – ліва вітка параболи. Зважаючи на означення області  $D_1$ , зобразимо її на координатній площині (див. рис. 2.1).

Тепер розглянемо другий інтеграл і область, яку він визначає:

$$D_2 : \begin{cases} 2 \leq y \leq 4; \\ -\sqrt{16-y^2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Криві, що обмежують цю область:

1)  $y = 2$ ,  $y = 4$  – горизонтальні прямі,

2)  $x = -\sqrt{16-y^2}$  – ліва частина кола з центром в точці  $(0,0)$  радіуса 4.

Область  $D_2$  зображено разом з областю  $D_1$  на рис. 2.1. Об'єднання цих областей позначимо через  $D$ . Область  $D$  є допустимою, оскільки обмежена графіками неперервних функцій (згідно з прикладом 1.8). Отже, даний повторний інтеграл (за наслідком 1.5 із теореми Фубіні) відповідає подвійному інтегралу  $I_1 = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

За наслідком 1.5 із теореми Фубіні подвійний інтеграл можна записати також як повторний із зовнішнім інтегруванням за змінною  $x$ . У цьому випадку потрібно вказати незмінні межі інтегрування за  $x$ , а межі інтегрування за  $y$  виразити неперервними функціями, що залежать від  $x$ . Для цього потрібно зробити такі дії.

1) В рівняннях межі області  $D$  виразити  $y$  через  $x$ :

$$x = -\sqrt{16-8y} \Rightarrow y = 2 - \frac{x^2}{8},$$

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm\sqrt{16-x^2},$$

при цьому необхідно врахувати, що в рівнянні другої кривої перед коренем потрібно обрати знак „+”, тому що у даному випадку область обмежена верхньою частиною кола  $x^2 + y^2 = 16$ .

2) Потрібно провести прямі, паралельні вісі ординат (тобто прямі  $x = \text{const}$ ) з метою виявлення необхідності розбиття області на частини, а саме: незалежно від розташування такої прямої вона спочатку перетинає криву  $y = 2 - \frac{x^2}{8}$ , а потім криву  $y = \sqrt{16-x^2}$ , тому у даному випадку розбивати область на частини не потрібно.

3) Області  $D$  відповідають такі зміни  $x$  і  $y$ :  $-4 \leq x \leq 0$ ,  $2 - \frac{x^2}{8} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}$ .

Розставляємо межі інтегрування із зовнішнім інтегруванням за  $x$ :

$$I_1 = \int_{-4}^0 dx \int_{2-\frac{x^2}{8}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy. \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.2** Змінити порядок інтегрування:  $\int_0^{x_1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-x^2} f(x, y) dy$ ,

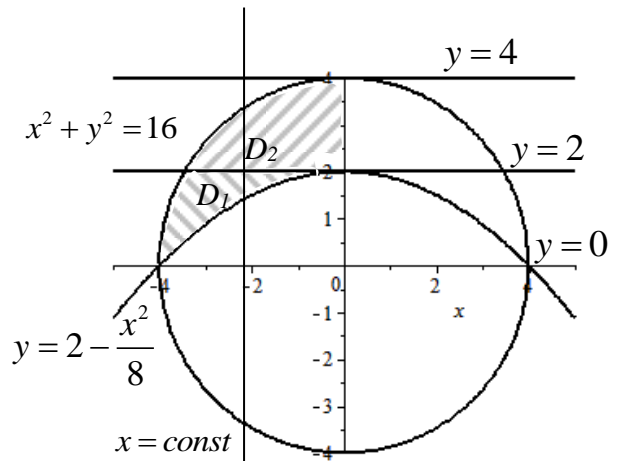


Рис. 2.1

де  $x_1 > 0$  – абсциса точки перетину графіків функцій  $y = -x^2$  і  $y = -\sqrt{1-x^2}$ .

**Розв’язання.** Спочатку знайдемо точку перетину даних кривих, зважаючи на те, що її абсциса додатна ( $x_1 > 0$ ):

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -x^2, \\ y = -\sqrt{1-x^2}, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{-y}, \\ y \leq 0, \\ x = +\sqrt{1-y^2}, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y}, \\ y \leq 0, \\ \sqrt{-y} = \sqrt{1-y^2}, \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y}, \\ y \leq 0, \\ y^2 - y - 1 = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y}, \\ y \leq 0, \\ y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 0,79, \\ y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62. \end{cases} \end{aligned}$$

Даний інтеграл задає область

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq x_1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq -x^2. \end{cases}$$

Криві, що обмежують цю область, мають рівняння:

$$x = 0, \quad x = x_1, \quad y = -\sqrt{1-x^2}, \quad y = -x^2.$$

З’ясуємо типи цих кривих:

1)  $x = 0, x = x_1$  – вертикальні прямі,

$$2) \quad y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \leq 0, \end{cases} \quad \text{тому}$$

$y = -\sqrt{1-x^2}$  – нижня частина кола з центром в точці  $(0,0)$  радіуса 1,

3)  $y = -x^2$  – парабола, вітки якої спрямовані вниз.

Зображення області наведено на рис. 2.2. За наслідком 1.5 із теореми Фубіні  $I_2 = \iint_D f(x, y) dx dy$ , і цей подвійний інтеграл

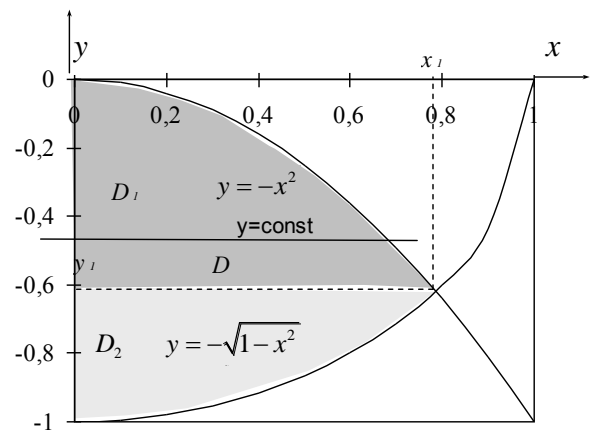


Рис. 2.2

можна також записати повторним із зовнішнім інтегруванням за змінною  $y$ . В цьому випадку потрібно вказати незмінні межі інтегрування за  $y$ , а межі інтегрування за  $x$  виразити неперервними функціями, що залежать від  $y$ . Для цього зробимо такі дії.

1) В рівняннях кривих, що задають межу області, виразити  $x$  через  $y$ :  $x = +\sqrt{-y}, x = +\sqrt{1-y^2}$ , при цьому необхідно врахувати, що в рівняннях кривих перед коренями стоїть знак „+”, тому що область  $D$  обмежена правою віткою параболи і правою частиною кола.

2) Потрібно провести прямі, паралельні осі абсцис (тобто прямі  $y = const$ ) з метою виявлення необхідності розбиття області на частини, а саме:

- якщо така пряма проходить вище прямої  $y = y_1$ , то вона спочатку перетинає вісь ординат, а потім криву  $x = \sqrt{-y}$ ,

- якщо така пряма проходить нижче прямої  $y = y_1$ , то вона спочатку перетинає вісь ординат, а потім криву  $x = \sqrt{1 - y^2}$ ;
- отримане означає, що дану область потрібно розбити на дві частини прямою  $y = y_1$ ;

3) Перша з отриманих областей  $D_1$  визначається нерівностями:  $D_1: \begin{cases} y_1 \leq y \leq 0, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{-y}; \end{cases}$

4) Друга область  $D_2$  – нерівностями:  $D_2: \begin{cases} -1 \leq y \leq y_1, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}. \end{cases}$

Розставляємо межі інтегрування зі зовнішнім інтегруванням за  $y$ :

$$I_2 = \int_{y_1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^{y_1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx, \quad y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \blacksquare$$

**Приклад 2.3** Обчислити подвійний інтеграл:

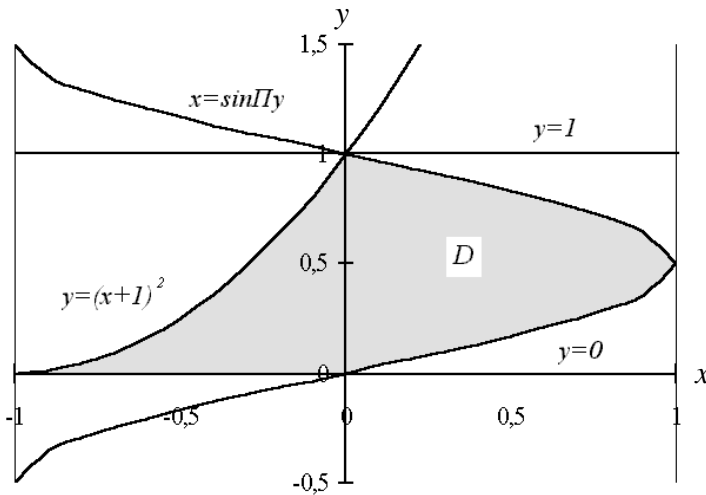


Рис. 2.3

$$I_3 = \iint_D (x + y) dx dy,$$

$$D: y = (x+1)^2, x = \sin \pi y, 0 \leq y \leq 1$$

**Розв'язання.** Зображення області  $D$  наведено на рис. 2.3. У даному випадку зручніше виражати даний інтеграл через повторний із зовнішнім інтегруванням за змінною  $y$ , щоб не розбивати область інтегрування на частини.

Виражаємо  $x$  через  $y$  в рівняннях кривих, отримаємо:

$$x = +\sqrt{y} - 1, x = \sin \pi y.$$

Перед коренем стоїть знак «+»,

оскільки область обмежена правою віткою параболу.

Область  $D$  визначається нерівностями:

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ \sqrt{y} - 1 \leq x \leq \sin \pi y. \end{cases}$$

За наслідком 1.5 із теореми Фубіні, подвійний інтеграл можна виразити повторним:

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}-1}^{\sin \pi y} (x + y) dx = \int_0^1 dy \left( \frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{\sqrt{y}-1}^{\sin \pi y} = \\ &= \int_0^1 dy \left( \frac{\sin^2 \pi y}{2} + y \sin \pi y - \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{2} - y(\sqrt{y}-1) \right) = \\ &= \int_0^1 dy \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\pi y + y \sin \pi y - \frac{y}{2} + \sqrt{y} - \frac{1}{2} - y\sqrt{y} + y \right) = \\ &= \left( -\frac{1}{4} y - \frac{1}{8\pi} \sin 2\pi y + \frac{y^2}{4} + \frac{2\sqrt{y^3}}{3} - \frac{2\sqrt{y^5}}{5} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 y \sin \pi y dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \begin{array}{l} u = y \\ dv = \sin \pi y dy \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dy \\ v = -\frac{1}{\pi} \cos \pi y \end{array} \right\| = \frac{4}{15} - \frac{1}{\pi} \left( y \cos \pi y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi y dy \right) = \\
&= \frac{4}{15} - \frac{1}{\pi} \left( -1 - \frac{1}{\pi} \sin \pi y \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{15} + \frac{1}{\pi}. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Приклад 2.4** Обчислити подвійний інтеграл за допомогою нових змінних:

$$I_4 = \iint_D xy(x+y) dx dy; \quad D: x-y=-1, x-y=1, y=1/x, y=2/x, y>0.$$

**Розв'язання.** Зображення області  $D$  наведено на рис. 2.4.

Введемо нові змінні

$$u = y - x, \quad v = yx.$$

Згідно з означенням області  $D$  отримаємо нерівності, що її характеризують:

$$-1 \leq u \leq 1, \quad 1 \leq v \leq 2.$$

Знайдемо якобіан переходу від старих до нових змінних:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = -x - y;$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{-x-y} \Rightarrow (x+y) \cdot \text{abs} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 1.$$

Відображення

$$\begin{cases} u = y - x, \\ v = yx, \\ x > 0, \end{cases}$$

яке переводить множину  $\{(x,y): -1 \leq x-y \leq 1, 1/x \leq y \leq 2/x\}$  у множину  $\{(u,v): -1 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2\}$ , визначає дифеоморфізм. Функції під знаком інтеграла неперервні на  $D$ , тому можна застосувати теорему 1.7 про заміну змінних під знаком кратного інтеграла:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\{(u,v): -1 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2\}} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \text{abs} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} du dv = \\
&= \left\| \begin{array}{l} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \text{abs} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \\ = \underbrace{xy(x+y)}_{=1} \cdot \text{abs} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = v \end{array} \right\| = \int_1^2 v dv \int_{-1}^1 du = \int_1^2 v dv \cdot 2 = \frac{v^2}{2} \Big|_1^2 \cdot 2 = 3. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Приклад 2.5** Обчислити подвійний інтеграл за допомогою нових змінних:

$$I_5 = \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy; \quad D: (x^2 + y^2)^2 = 32xy, \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

**Розв'язання.** Введемо полярну систему координат  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$  (див. пункт 7.2 те-

оретичної частини), тоді для кривої  $(x^2 + y^2)^2 = 32xy$  матимемо:

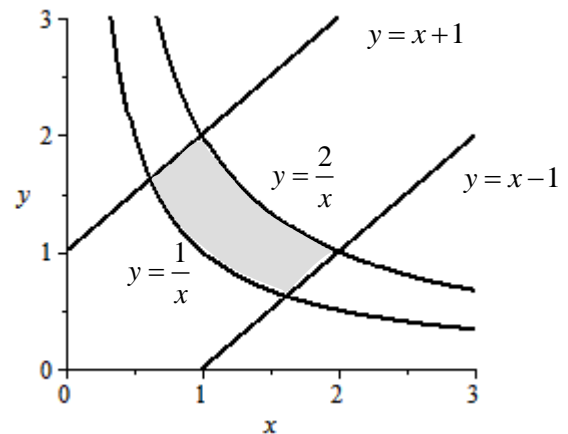


Рис. 2.4

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

$$(\rho^2)^2 = 32 \rho \cos \varphi \rho \sin \varphi \Rightarrow \rho^2 = 16 \sin 2\varphi \Rightarrow \rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi} - \text{лемніската},$$

$$\rho^2 \geq 0 \Rightarrow \sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = 0$  полярний кут задовольняє нерівність  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , що відповідає I чверті. При

$n = 1$  – нерівності  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ , це відповідає III чверті.

За умовою, лемніската лежить всередині круга

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2x + 2y,$$

який в полярній системі координат задається нерівністю

$$\rho \leq 2(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Знайдемо точки перетину лемніскати  $\rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}$  і кола  $\rho = 2(\cos \varphi + \sin \varphi)$ :

$$\begin{cases} \rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}, \\ \rho = 2(\cos \varphi + \sin \varphi), \end{cases} \Rightarrow 4\sin 2\varphi = (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \Rightarrow \sin 2\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}(-1)^m \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо два значення для  $m$  – це 0 і 1. Саме вони будуть відповідати I чверті, а III чверті точки кола не належать. Матимемо:

$$m = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3}, \quad m = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3}.$$

Розглянемо інтеграл по тій області, яку зображено на рис. 2.5. Будемо її позначати через  $D$ . Ту область, яка є доповненням множини  $D$  до круга, пропонуємо розглянути читачеві самостійно.

Щоб з'ясувати, чи потрібно область  $D$  розбивати на ділянки, побудуємо промені  $\varphi = \varphi_0$ .

- Якщо  $0 \leq \varphi_0 < \varphi_1$ , то промінь  $\varphi = \varphi_0$ , виходячи з полярного полюса, проходить через область  $D$  і покидає її, проходячи через лемніскату.
- Те саме трапляється, коли  $\varphi_2 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$ .

- Якщо  $\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2$ , то промінь  $\varphi = \varphi_0$ , виходячи з полярного полюса, проходить через область  $D$  і покидає її, проходячи через коло.
- Отримане означає, що дану область потрібно розбити на три частини променями  $\varphi = \varphi_1$  та  $\varphi = \varphi_2$ .

Кожна з трьох отриманих областей визначається нерівностями:

$$D_1: 0 \leq \varphi \leq \varphi_1, 0 \leq \rho \leq 4\sqrt{\sin 2\varphi},$$

$$D_2: \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, 0 \leq \rho \leq 2(\cos \varphi + \sin \varphi),$$

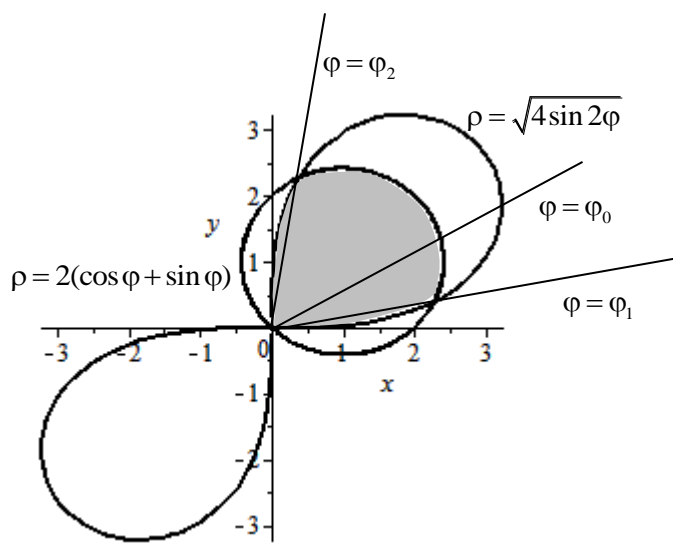


Рис. 2.5

$$D_3: \varphi_2 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 4\sqrt{\sin 2\varphi}.$$

Враховуючи значення якобіана в полярній системі координат  $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$ , обчислимо даний інтеграл:

$$\begin{aligned} I_5 &= \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy = \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}} \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} \rho d\rho + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{2(\cos \varphi + \sin \varphi)} \varphi \rho d\rho + \\ &+ \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}} \varphi \rho d\rho = \int_0^{\varphi_1} \varphi d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{2(\cos \varphi + \sin \varphi)} + \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}} = \\ &= 8 \int_0^{\varphi_1} \varphi \sin 2\varphi d\varphi + 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 d\varphi + 8 \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin 2\varphi d\varphi = \left\| \begin{array}{l} u = \varphi \quad du = d\varphi \\ dv = \sin 2\varphi d\varphi \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2\varphi \end{array} \right\| = \\ &= 4 \left( -\varphi \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\varphi_1} + 4 \left( -\varphi \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (1 + \sin 2\varphi) d\varphi = \\ &= -4\varphi_1 \cos 2\varphi_1 + 2 \sin 2\varphi_1 + 2\pi + 4\varphi_2 \cos 2\varphi_2 - 2 \sin 2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^2 + \\ &+ \left( -\varphi \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 2\pi + \varphi_2^2 - \varphi_1^2 + 3\varphi_2 \cos 2\varphi_2 - 3\varphi_1 \cos 2\varphi_1 - \\ &\quad - \frac{3}{2} \sin 2\varphi_2 + \frac{3}{2} \sin 2\varphi_1. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_1 &= \sin \left( \arcsin \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}, \quad \sin 2\varphi_2 = \sin \left( \pi - \arcsin \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}, \\ \cos 2\varphi_1 &= \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi_1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos 2\varphi_2 = \cos \left( \pi - \arcsin \frac{1}{3} \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

то

$$I_5 = \pi(2 - \sqrt{2}) + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \arcsin \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

В наступному прикладі передбачається застосування наслідку 1.6 із теореми Фубіні. В ньому стверджується, що якщо  $D$  — допустима множина в  $\square^{m-1}$ ,  $E$  — множина в  $\square^m$ , яка визначається наступним чином

$$E = \{(\bar{x}, y) \in \square^m : \bar{x} \in D \wedge \varphi(\bar{x}) \leq y \leq \psi(\bar{x})\},$$

а  $\varphi(\bar{x})$  і  $\psi(\bar{x})$  — неперервні на  $D$ , тоді

$$1) E \text{ — допустима множина, } 2) \left[ \mu(E) = \int_D (\psi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})) d\bar{x} \right].$$

Міра тривимірної допустимої множини (тіла) дорівнює її об'єму, і цей об'єм виражається подвійним інтегралом:

$$V(E) = \iiint_D (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) dx dy.$$

**Приклад 2.6** Знайти об'єм тіла за допомогою подвійного інтеграла, якщо тіло обмежене поверхнями

$$y = 2x, \quad x + y + z = 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$



**Розв'язання.** З'ясуємо вигляд тіла, що задається умовою задачі. В першому октанті площина  $x + y + z = 2$  відсікає піраміду, а на площині  $Oxy$  - трикутник  $OAB$  прямою  $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ z = 0 \end{cases}$ , тобто  $y = 2 - x$ . Площина  $y = 2x$  ділить піраміду на дві піраміди, а

трикутник  $OAB$  - на два трикутники  $OKB$  і  $OKA$ , які є проекціями утворених пірамід (рис. 2.6 – вигляд в просторі, рис. 2.7 – проекція на площину  $Oxy$ ). Оскільки не зазначено, об'єм якої саме піраміди потрібно знайти, знайдемо об'єми обох ( $SOAK$  і  $SOBK$ ).

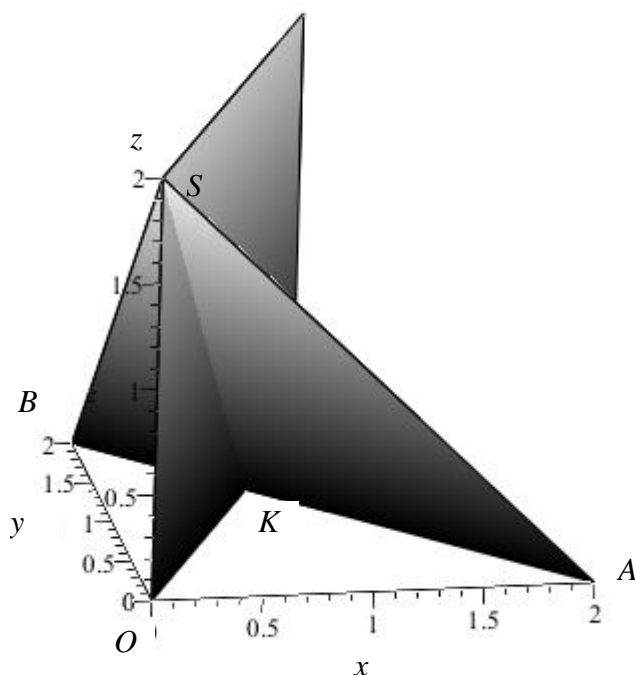


Рис. 2.6

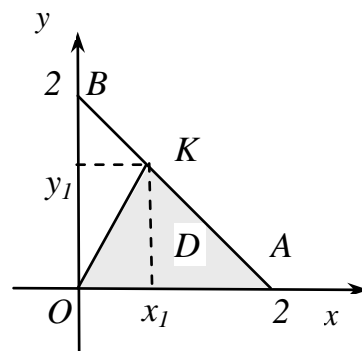


Рис. 2.7

Знайдемо координати точки  $K$ , що є точкою перетину прямих  $y = 2x$  і  $y = 2 - x$  на площині. Для цього розв'яжемо систему  $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 2 - x, \end{cases}$  звідки отримаємо  $\begin{cases} x_1 = 2/3, \\ y_1 = 4/3. \end{cases}$

Застосуємо наслідок 1.6 із теореми Фубіні, обираючи у виписаній вище формулі  $\varphi(x, y) = 0$ ,  $\psi(x, y) = 2 - x - y$ , а за область  $D$  – трикутник  $OKA$ , отримаємо:

$$V_{SOAK} = \iint_D (2 - x - y) dx dy.$$

Виписаний інтеграл простіше обчислити, обравши зовнішньою межею інтегрування  $y$ . В рівняннях прямих  $x$  виразимо через  $y$ , одержимо:  $x = y/2$ ,  $x = 2 - y$ , а інтеграл (за наслідком 1.5 із теореми Фубіні) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_D (2 - x - y) dx dy = \int_0^{4/3} dy \int_{y/2}^{2-y} (2 - x - y) dx = \int_0^{4/3} dy \left( 2x - \frac{x^2}{2} - yx \right) \Bigg|_{y/2}^{2-y} = \\ &= \int_0^{4/3} dy \left[ 2(2 - y) - \frac{(2 - y)^2}{2} - y(2 - y) - \left( y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) \right] = \int_0^{4/3} \left( 2 - 3y + \frac{9}{8} y^2 \right) dy = \\ &= \left( 2y - \frac{3}{2} y^2 + \frac{3}{8} y^3 \right) \Bigg|_0^{4/3} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Об'єм піраміди  $SOKB$  можна знайти за допомогою подвійного інтеграла, а можна і з розуміння аналітичної геометрії. Обчислимо об'єм усієї піраміди  $SOAB$ . Для цього загальне рівняння площини  $x + y + z = 2$  перепишемо як рівняння у відрізках, що відсікаються на координатних осях:  $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ . Тоді об'єм піраміди  $SOAB$  дорівнює

$$V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}, \text{ а шуканий об'єм } - V_{SOBK} = V_{SOAB} - V_{SOAK} = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} = \frac{4}{9}. \blacksquare$$

**Приклад 2.7** Вводячи потрібну заміну, знайти площу області

$$\left( \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^3 = 2ay^3.$$

**Розв'язання.** Уведемо узагальнені полярні координати  $\begin{cases} x = c\rho \cos \varphi, \\ y = b\rho \sin \varphi, \end{cases}$  тоді

$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$ , а рівняння кривої, що обмежує область, набуває вигляду:  $\rho^6 = 2ab^3\rho^3 \sin^3 \varphi$ ,

тобто  $\rho = b \cdot \sqrt[3]{2a} \sin \varphi$ . Межі зміни кута  $\varphi$  знайдемо із нерівності  $\rho \geq 0$ , тобто  $\sin \varphi \geq 0$ . На відрізку  $[0, 2\pi]$  ця нерівність має розв'язок  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Якобіан у цьому випадку дорівнює

$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = bc\rho$ . Зважаючи на означення міри допустимої множини, отримаємо:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} dx dy = \iint_{D_{\rho\varphi}} cb\rho d\rho d\varphi = cb \int_0^\pi d\varphi \int_0^{b\sqrt[3]{2a}\sin\varphi} \rho d\rho = cb \int_0^\pi d\varphi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{b\sqrt[3]{2a}\sin\varphi} = \\ &= cb^3 \int_0^\pi d\varphi \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{2} \sin^2 \varphi = cb^3 \int_0^\pi d\varphi \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{4} (1 - \cos 2\varphi) = \frac{cb^3 \cdot \sqrt[3]{4a^2}}{4} \left( \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi cb^3 \cdot \sqrt[3]{4a^2}}{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Приклад 2.8** Знайти координати центра мас пластини

$$y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

**Розв'язання.** Дану область зображено на рис. 2.8. Координати точок перетину парабол, що обмежують область, є розв'язками системи

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x = 2, \\ y = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = -1, \\ y = 3. \end{cases}$$

У даному випадку за зовнішню межу інтегрування простіше обрати  $x$ . Область  $D$ , таким чином, визначається нерівностями:  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $x^2 - 2x \leq y \leq 4 - x^2$ . Вона є допустимою (оскільки обмежена графіками неперервних функцій, згідно з прикладом 1.8), а її площу можна знайти як значення подвійного інтеграла:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-2x}^{4-x^2} dy = \int_{-1}^2 dx y \Big|_{x^2-2x}^{4-x^2} = \\ &= \int_{-1}^2 dx (4 - x^2 - (x^2 - 2x)) = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \\ &= \left( -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = 9. \end{aligned}$$

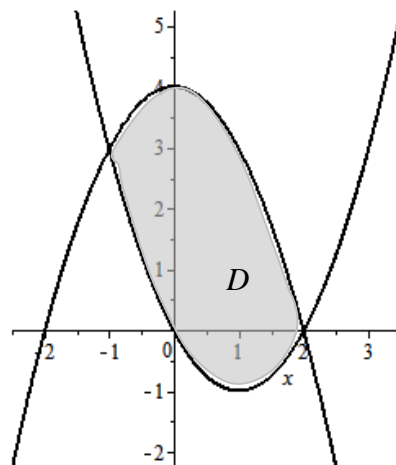


Рис.2.8

Тепер знайдемо координати центра мас однорідної пластини:

$$\begin{aligned}
 x_{ц.м.} &= \frac{1}{S} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{1}{9} \int_{-1}^2 x \, dx \int_{x^2-2x}^{4-x^2} dy = \int_{-1}^2 dx \, y \Big|_{x^2-2x}^{4-x^2} = \\
 &= \frac{1}{9} \int_{-1}^2 x(-2x^2 + 2x + 4) dx = \frac{1}{9} \left( -\frac{2}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{2}; \\
 y_{ц.м.} &= \frac{1}{S} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{1}{9} \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-2x}^{4-x^2} y \, dy = \int_{-1}^2 dx \, \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2-2x}^{4-x^2} = \\
 &= \frac{1}{18} \int_{-1}^2 \left( (4-x^2)^2 - (x^2-2x)^2 \right) dx = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Отже, центр мас даної однорідної пластини знаходиться в точці  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ . ■

В наступному прикладі будемо застосовувати формулу площі поверхні, що задана явно, одержану в другій частині зауваження 1.14:

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} \, dx \, dy,$$

тут  $G$  – проста плоска область, що є проекцією поверхні на площину  $Oxy$ .

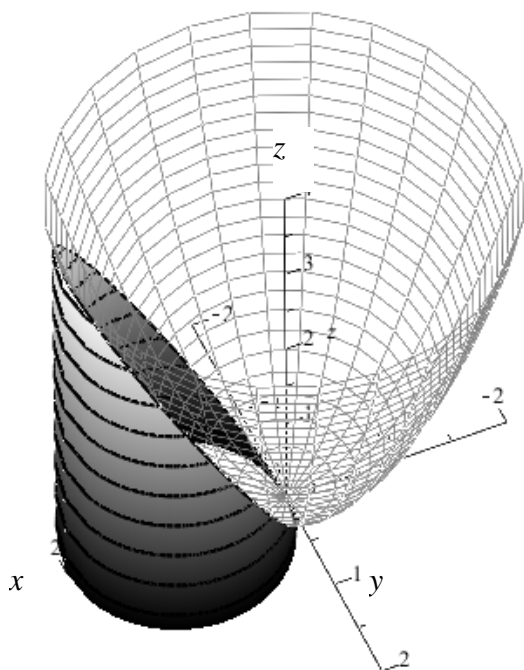


Рис. 2.9

**Приклад 2.9** Знайти площу поверхні:

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2.$$

**Розв'язання.** За умовою, потрібно знайти площу частини циліндричної поверхні  $x^2 + y^2 = 2x$ . Оскільки

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 = 2x &\Leftrightarrow \underline{x^2 - 2x + 1} + y^2 = 1 \Leftrightarrow \\
 (x-1)^2 + y^2 &= 1,
 \end{aligned}$$

то ця поверхня є круговим циліндром, віссю якого є пряма  $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$  а радіус кола в перерізі дорівнює 1.

Частина зазначеного циліндра знизу обмежена площиною  $z=0$  (площина  $Oxy$ ), а зверху – круговим параболоїдом  $z=x^2+y^2$ . (див. рис. 2.9). Знайдемо проекцію лінії перетину циліндра і параболоїда на площину  $Oxz$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = x^2 + y^2, \end{cases} \Rightarrow z = 2x.$$

Тепер можна побудувати проекцію  $G$  даної поверхні на зазначену площину (див. рис. 2.10).

При обчисленні площі поверхні будемо враховувати той факт, що площина  $Oxz$  розбиває цю поверхню на дві рівні частини. Перша із цих поверхонь задається рівнянням  $y = \sqrt{2x - x^2}$ , а друга – рівнянням  $y = -\sqrt{2x - x^2}$ . Отже, згідно із зазначеною вище формулою,

$$\begin{aligned}
S &= 2 \iint_G \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz = \\
&= 2 \iint_G \sqrt{1 + \left( \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \right)^2 + 0^2} dx dz = \\
&= 2 \iint_G \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx dz = 2 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{2x} dz = \\
&= 2 \int_0^2 \frac{2x dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \left\| \frac{d(2x-x^2) = (2-2x)dx}{2x = -(2-2x) + 2} \right\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left( \int_0^2 \frac{-(2-2x) dx}{\sqrt{2x-x^2}} + \int_0^2 \frac{2 dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \right) = 2 \left( - \int_0^2 \frac{d(2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}} + \int_0^2 \frac{2 d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \right) = \\
&= 2 \left( -2\sqrt{2x-x^2} + 2 \arcsin(x-1) \right) \Big|_0^2 = 4 \left( \underbrace{\arcsin 1}_{=\pi/2} - \underbrace{\arcsin(-1)}_{=-\pi/2} \right) = 4\pi. \blacksquare
\end{aligned}$$

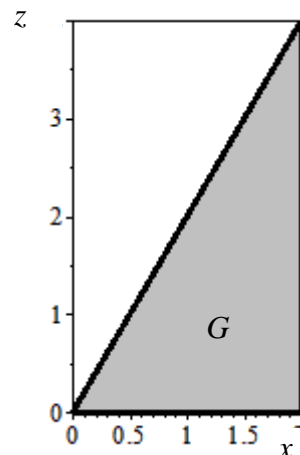


Рис. 2.10

**Приклад 2.10** Обчислити потрійний інтеграл:

$$\iiint_V 2zy^4 \cos(xyz) dx dy dz,$$

де тіло  $V$  обмежене поверхнями  $x=0$ ,  $y=1$ ,  $y=x$ ,  $z=0$ ,  $z=1$ .

**Розв'язання.** Рисунок тіла та його проекції на площину  $Oxz$  зображено на рис. 2.11.

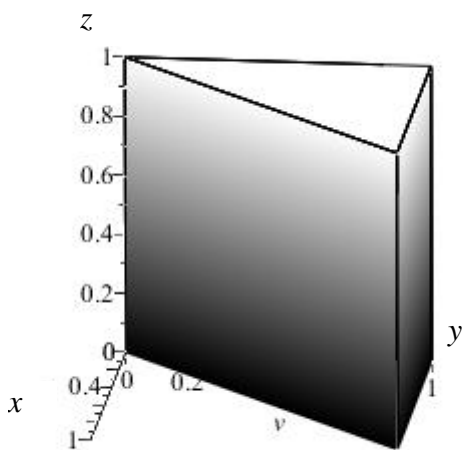


Рис. 2.11

В цьому прикладі важливо правильно обрати порядок інтегрування. Якщо крайнє внутрішнє інтегрування буде проводитися за змінної  $y$ , то потрібно буде чотири рази застосовувати формулу інтегрування частинами. А якщо інтегрування за  $y$  здійснити як зовнішнє, то вже перше внутрішнє інтегрування дасть множник  $1/y$ , в результаті, після скорочення, порядок степеня змінної  $y$  зменшиться на 1. Аналогічно, щодо інтегрування за змінною  $z$ , то його теж не бажано ставити як крайнє внутрішнє з тих же міркувань. Щодо інтегрування за змінною  $x$ , то його

не можна ставити як зовнішнє або середнє внутрішнє, оскільки при інтегруванні за іншими змінними, їх первісна буде мати множник  $1/x$ . Це означатиме, що при наступному інтегруванні за змінною  $x$  інтегрування зведеться до інтеграла типу

$$\int \frac{\cos ax}{x^k} dx \quad (k=1 \text{ або } k=2), \text{ який не виражається в елементарних функціях. Враховуючи}$$

сказане, отримаємо:

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq 1\};$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V 2zy^4 \cos(xyz) \, dx \, dy \, dz &= 2 \int_0^1 y^4 \, dy \int_0^1 z \, dz \int_0^y \cos(xyz) \, dx = \\
&= 2 \int_0^1 y^4 \, dy \int_0^1 z \, dz \left( \frac{1}{yz} \sin(xyz) \right) \Big|_0^y = 2 \int_0^1 y^3 \, dy \int_0^1 \sin(zy^2) \, dz = \\
&= 2 \int_0^1 y^3 \, dy \left( -\frac{1}{y^2} \cos(zy^2) \right) \Big|_0^1 = 2 \int_0^1 (-y \cos y^2 + y) \, dy = \\
&= -\int_0^1 \cos y^2 \, d(y^2) + 1 = -(\sin y^2) \Big|_0^1 + 1 = -\sin 1 + 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Приклад 2.11** Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (4-y) \, dx \, dy \, dz; \quad V: y=x, y=0, z=4-x-y, z=0.$$

**Розв'язання.** Дане тіло  $V$  обмежене площинами  $z=0$  (площина  $Oxy$ ) і  $z=4-x-y$  знизу та зверху відповідно.

На площині  $Oxy$  утворюються три прямі, які є перетином похилої  $z=4-x-y$  та вертикальних площин  $y=x$ ,  $y=0$  з  $Oxy$ . Ці прямі на площині  $Oxy$  мають рівняння  $x+y=4$ ,  $y=x$ ,  $y=0$  відповідно. Вони обмежують область  $D$ , зображену на рис. 2.12. Ця область є проекцією тіла  $V$  на  $Oxy$ .

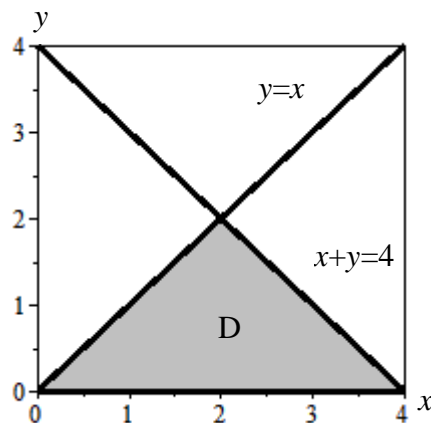


Рис. 2.12

Точка перетину прямих  $x+y=4$  і  $y=x$  на площині  $Oxy$  має координати  $(2;2)$ . Щоб не розбивати область  $D$  на частини, потрібно за зовнішню змінну інтегрування обрати  $y$ . Тоді, в рівняннях прямих необхідно виражати  $x$  через  $y$ , а область  $D$  визначити як  $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4-y\}$ , а тіло  $V$  –

$$V = \{(x, y): 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4-y, 0 \leq z \leq 4-x-y\}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\iiint_V (4-y) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 dy \int_y^{4-y} dx \int_0^{4-x-y} (4-y) \, dz = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} (4-y) \cdot z \Big|_0^{4-x-y} dx = \\
&= \int_0^2 dy \int_y^{4-y} (4-y)(4-y-x) dx = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} ((4-y)^2 - (4-y)x) dx = \\
&= \int_0^2 dy \left( x(4-y)^2 - \frac{x^2}{2}(4-y) \right) \Big|_y^{4-y} = \int_0^2 dy \left( \frac{1}{2}(4-y)^3 - y(4-y)^2 + \frac{y^2}{2}(4-y) \right) = \\
&= \int_0^2 (32 - 40y + 16y^2 - 2y^3) dy = \frac{56}{3}. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Приклад 2.12** Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z^2 = 4-x, x^2 + y^2 = 4x, z \geq 0.$$

**Розв'язання.** Поверхня  $z^2 = 4 - x$  є циліндричною з твірною, що паралельна вісі  $Oy$ . Рівняння поверхні  $x^2 + y^2 = 4x$  можна переписати, виділивши повний квадрат, у вигляді  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ , тому ця поверхня є круговим циліндром. На рис. 2.13 зображено схему утворення даного тіла  $T$ .

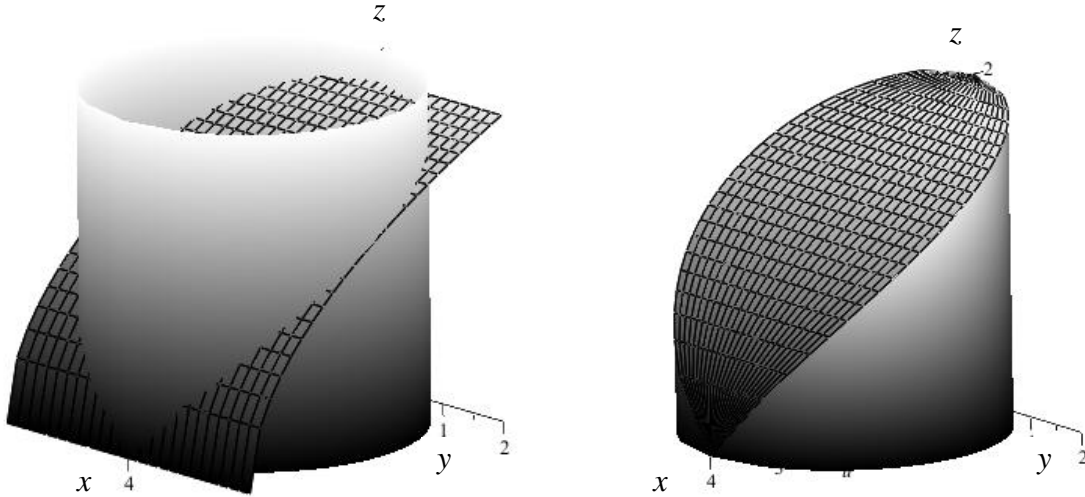


Рис. 2.13

Циліндрична поверхня  $z^2 = 4 - x$  відсікає на площині  $Oxy$  півплощину  $x \leq 4$ . В проекції на  $Oxy$  круговий циліндр  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  утворює коло з центром в точці  $(2; 0)$  радіуса 2, яке цілком міститься в півплощині  $x \leq 4$ . Тому проекцією  $D$  даного тіла на площину  $xOy$  є круг, який обмежується зазначеним колом (рис. 2.14).

Застосуємо означення об'єму допустимої множини  $T$ . Її об'єм обчислюється за формулою  $V = \iiint_T dx dy dz$ .

Дане тіло знизу обмежене площиною  $Oxy$ , а зверху – циліндричною поверхнею  $z = \sqrt{4 - x}$ . Розглянемо проекцію  $D$  тіла  $T$  на площину  $Oxy$ . В рівнянні кола виразимо  $y$  через  $x$ :  $y = \pm\sqrt{4x - x^2}$ , де знак „+” відповідає верхній частині кола, а „-” – нижній. Отже, область  $T$  характеризується такими нерівностями:

$$0 \leq x \leq 4, -\sqrt{4x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x},$$

тому одержуємо:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x}} dz = \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{4-x} dy = \\ &= \int_0^4 dx \left( y\sqrt{4-x} \right) \Big|_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} = \int_0^4 2\sqrt{4x-x^2} \sqrt{4-x} dx = \end{aligned}$$

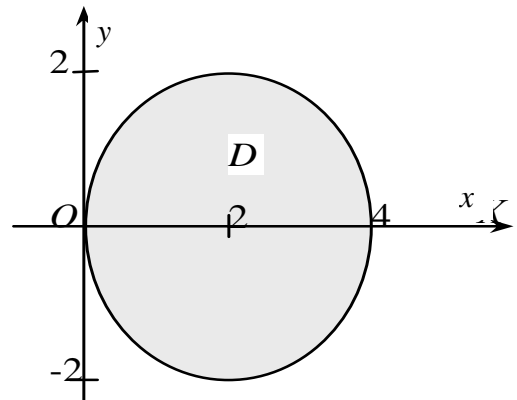


Рис. 2.14

$$= 2 \int_0^4 \sqrt{x}(4-x) dx = 2 \left( 4 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^4 = \frac{256}{15}. \blacksquare$$

**Приклад 2.13** (№Д4106) Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Розв'язання.** Дане тіло  $T$  обмежене поверхнями кругового параболоїда і кругового конуса (див. рис. 2.15). Знайдемо лінію перетину цих поверхонь:

$$\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z = 6 - z^2, \\ z \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z = 2, \\ z = -3, \\ z \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

Отже, проекцією  $D$  тіла  $T$  на площину  $Oxy$  є круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Оскільки як рівняння поверхонь, що обмежують тіло, так і рівняння лінії, що обмежує його проекцію на площину  $Oxy$ , залежать від  $x^2 + y^2$ , то для обчислення об'єму зручніше вводити циліндричну систему координат  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$  (див. пункт 7.3 теоретичної частини). Тоді рівняння поверхонь набувають вигляду

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \rho,$$

$$z = 6 - x^2 - y^2 \Rightarrow z = 6 - \rho^2,$$

а область  $D$  буде визначатися нерівностями

$$D = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2\}.$$

Враховуючи означення міри допустимої множини  $T$  і значення якобіана циліндричної системи координат  $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dx dy dz = \iiint_T \rho d\rho d\varphi dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho (6 - \rho^2 - \rho) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{16}{3} = \frac{32\pi}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

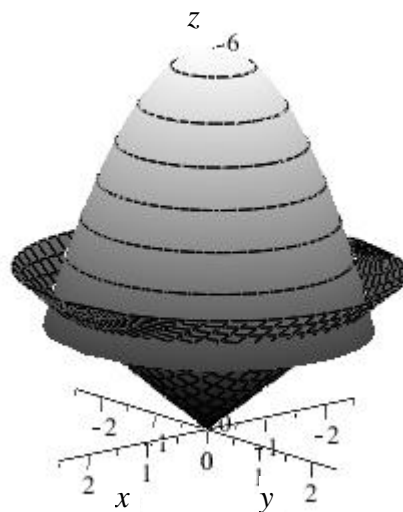


Рис. 2.15

**Приклад 2.14** Тіло задається поверхнями, які його обмежують,  $\gamma(x, y, z)$  – густина. Знайти масу тіла, якщо

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz, \quad z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \operatorname{tg}^2 \beta,$$

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad z = 0, \quad \gamma = 5(x^2 + y^2 + z^2).$$

**Розв'язання.** Дане тіло обмежене:

$$1) \text{ сферою } x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2,$$

2) конусами  $z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = x^2 + y^2$ ,  $z^2 \operatorname{tg}^2 \beta = x^2 + y^2$ , твірні яких з віссю  $Oz$  утворюють кути  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно.

Поверхні, що обмежують дане тіло, зображені на рис. 2.16.

Уведемо сферичні координати (див. пункт 7.4 теоретичної частини):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta_2, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta_2, \\ z = \rho \cos \theta_2. \end{cases}$$

Дана сфера в цій системі координат буде визначатися рівнянням  $\rho = 2R \cos \theta_2$ . Оскільки  $\theta_2 = \theta_0$  – частина конуса, твірна якого з віссю  $Oz$  утворює кут  $\theta_0$ , то для даного тіла



Рис. 2.16

значення кута  $\theta_2$  задовольняє нерівність  $\alpha \leq \theta_2 \leq \beta$ . Якщо провести радіус-вектор через тіло, то він почне свій рух в початку координат і покине тіло через сферу. Це означає, що значення сферичної відстані  $\rho$  задовольняє нерівність  $0 \leq \rho \leq 2R \cos \theta_2$ . При оббігу тіла кут між проекцією зазначеного радіус-вектора, на площину  $Oxy$  та віссю абсцис набуває значення від 0 до  $2\pi$ , тобто  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Для обчислення маси тіла застосуємо формулу

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Знаючи, що значення якобіана сферичної системи координат дорівнює  $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta_2)} = \rho^2 \sin \theta_2$ , отри-

маємо

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \gamma(\rho \cos \varphi \sin \theta_2, \rho \sin \varphi \sin \theta_2, \rho \cos \theta_2) \cdot \rho^2 \sin \theta_2 d\rho d\varphi d\theta_2 = \|\gamma = 5\rho^2\| = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2R \cos \theta_2} 5\rho^2 \cdot \rho^2 d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} \rho^5 \Big|_0^{2R \cos \theta_2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} 32R^5 \cos^5 \theta_2 d\varphi = -32R^5 \cdot 2\pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \cos^5 \theta_2 d(\cos \theta_2) = \\ &= -64R^5 \pi \cdot \frac{\cos^6 \theta_2}{6} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{32}{3} R^5 \pi (\cos^6 \alpha - \cos^6 \beta). \blacksquare \end{aligned}$$



## §2. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля

### 1. Варіанти індивідуальних завдань

- 1, 2, 3. Обчислити криволінійний інтеграл.
4. Розв'язати задачу.
5. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти функцію  $u$ , попередньо впевнившись в тому, що наданий вираз є її повним диференціалом.
6. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл, зімкнувши, якщо це необхідно, криву відрізком прямої.
7. Обчислити поверхневий інтеграл I роду.
8. Обчислити інтеграл за зовнішньою стороною поверхні  $S$  (двома способами: безпосередньо та за допомогою формули Остроградського-Гаусса).
9. Обчислити інтеграл вздовж кривої  $L$ , яка утворюється перетином зазначених поверхонь. Напрямок оббігу обрати таким, щоб спостерігач, якого вісь  $Oz$  пронизує з ніг до голови, бачив його таким, що проходить проти руху годинникової стрілки. Розглянути два способи: безпосередньо та за допомогою формули Стокса.
10. В непарних варіантах знайти похідну скалярного поля  $u(x, y, z)$  в точці  $M$  вздовж напрямку нормалі до поверхні  $S$ , що утворює гострий кут з додатним напрямом осі  $Oz$ . В парних варіантах – похідну скалярного поля  $u(x, y, z)$  в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{l}$ .
11. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $u(x, y, z)$  і  $v(x, y, z)$  в точці  $M$ .
12. Знайти векторні лінії в векторному полі  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ .
13. Знайти течію векторного поля  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  через частину поверхні  $P$ , що міститься в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю  $Oz$ ).
- 14, 15, 16. Знайти течію векторного поля  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  через зімкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня).
17. Знайти роботу сили  $\vec{F}$  при пересуванні точки її прикладання вздовж лінії  $L$  від точки  $M$  до точки  $N$ .
18. Знайти циркуляцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  вздовж контура  $L$  (у напрямі зростання параметра  $t$ ).
19. Знайти модуль циркуляції векторного поля  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  вздовж контура  $L$ .

#### Варіант 1

1.  $\int_L x \, dy$ , де  $L$  – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою  $3x + 2y = 6$  з додатним напрямом оббігу
2.  $\int_{(0,0)}^{(3,6)} 4x \sin^2 y \, dx + y \cos^2 2x \, dy$  вздовж прямої лінії
3.  $\int_L xy \, ds$  вздовж периметра прямокутника, обмеженого прямими  $x = 0, y = 0, x = 4, y = 2$

#### Варіант 2

1.  $\int_L x \, dy$ , де  $L$  – відрізок прямої  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  від точки її перетину з віссю абсцис до точки її перетину з віссю ординат
2.  $\int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$ ,  $L: \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  від точки  $(a, 0)$  до точки  $(0, a)$
3.  $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  вздовж відрізка прямої  $y = \frac{x}{2} - 2$  від точки  $(0, -2)$  до точки  $(4, 0)$

4. Обчислити площу області, що обмежена еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

5.  $du = y^2 z^3 dx + 2xyz^3 dy + 3xy^2 z^2 dz$

6.  $\oint_L e^{-x} \operatorname{sh} y dx + e^{-x} \operatorname{ch} y dy,$

де  $L$  – контур, що обмежує область  $-a \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x + a, a > 0$ , який пробігається у додатному напрямі

7.  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds$ , де  $S$  – поверхня,

утворена обертанням кардіоїди  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$  навколо осі  $Ox$  (декартова та полярна системи координат суміщаються)

8.  $\iiint_S (x + y) dy dz + y dx dy,$

$S: z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$

9.  $\oint_L yz dx - xz dy + xy dz,$

$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

10.  $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz,$

$S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, M(1, 1, 1)$

11.  $u = \frac{yz^2}{x^2}, v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,$

$M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

12.  $\vec{a} = 4y \vec{i} - 9x \vec{j}$

13.  $\vec{a} = 7x \vec{i} + (5\pi y + 2) \vec{j} + 4\pi z \vec{k},$

$P: x + \frac{y}{2} + 4z = 1$

14.  $\vec{a} = (e^z + 2x) \vec{i} + e^x \vec{j} + e^y \vec{k},$

$S: x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

15.  $\vec{a} = (x + z) \vec{i} + (y + z) \vec{k},$

$S: x^2 + y^2 = 9, z = x, z = 0 (z \geq 0)$

4. Обчислити площу області, що обмежена кривою  $\begin{cases} x = 2a \cos t - a \cos 2t, \\ y = 2a \sin t - a \sin 2t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$

5.  $du =$

$= -\frac{dx}{x+1} + \frac{z+1}{(y+1)^2} dy + \left( \frac{1}{z+1} - \frac{1}{y+1} \right) dz$

6.  $\oint_L x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy,$

де  $L$  – еліпс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  з додатним напрямом оббігу

7.  $\iint_S (xy + yz + zx) ds,$

$S = \{(x, y, z): z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2ax\}$

8.  $\iiint_S (x + y) dy dz + (y + z) dz dx + (z + x) dx dy$

$S: y = 2x, y = 4x, x = 1, z = y^2, z = 0$

$\oint_L 4 dx + 3x dy + 3xz dz,$

$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 3 \end{cases}$

10.  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},$

$\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, M(1, 1, 1)$

11.  $u = x^2 y z^3, v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z},$

$M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

12.  $\vec{a} = 2y \vec{i} + 3x \vec{j}$

13.  $\vec{a} = 2\pi x \vec{i} + (7y + 2) \vec{j} + 7\pi z \vec{k},$

$P: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$

14.  $\vec{a} = (3z^2 + x) \vec{i} + (e^x - 2y) \vec{j} +$

$+(2z - xy) \vec{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4$

15.  $\vec{a} = 2x \vec{i} + z \vec{k},$

$S: z = 3x^2 + 2y^2 + 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0$

$$16. \bar{a} = x^2 \bar{i} + x \bar{j} + xz \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 = z, \quad z=1, x=0, y=0$$

(I октант)

$$17. \bar{F} = (x^2 - 2y) \bar{i} + (y^2 - 2x) \bar{j}, \quad L -$$

відрізок  $MN$ , де  $M(-4,0)$ ,  $N(0,2)$

$$18. \bar{a} = y \bar{i} - x \bar{j} + z^2 \bar{k},$$

$$L: x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, z = \sin t$$

$$19. \bar{a} = (x^2 - y) \bar{i} + x \bar{j} + \bar{k},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1, \quad z=1$$

### Варіант 3

$$1. \int_L (x^2 - y^2) dx, \text{ де } L - \text{ дуга параболи } y = x^2 \text{ від точки } (0,0) \text{ до точки } (2,4)$$

$$2. \int_L \frac{x dx}{y} + \frac{y dy}{y-a} \text{ вздовж дуги циклоїди } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ від точки } t = \frac{\pi}{6} \text{ до точки } t = \frac{\pi}{3}$$

$$3. \int_L y ds \text{ вздовж відрізка прямої від точки } (0,0) \text{ до точки } (1,2)$$

4. Обчислити площу області, що обмежена параболою  $(x+y)^2 = ax$  ( $a > 0$ ) і віссю  $Ox$

$$5. du = \left( \frac{z}{xz+1} - \frac{z}{y^2+1} \right) dx + \left( \frac{2xyz}{(y^2+1)^2} - \frac{z}{yz+1} \right) dy + \left( \frac{x}{xz+1} - \frac{x}{y^2+1} - \frac{y}{yz+1} \right) dz$$

$$6. \oint_L y dx - xy dy, \text{ де } L - \text{ контур, що}$$

обмежує область  $0 \leq x \leq 2,$

$0 \leq y \leq -x + \sqrt{2x}$ , яка пробігається у додатному напрямі

$$16. \bar{a} = (x^2 + y^2) \bar{i} + (x^2 + y^2) \bar{j} + (y^2 + z^2) \bar{k}, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad z=0, z=1$$

$$17. \bar{F} = (x^2 + 2y) \bar{i} + (y^2 + 2x) \bar{j}, \quad L:$$

$$2 - \frac{x^2}{8} = y, \quad M(-4,0), \quad N(0,2)$$

$$18. \bar{a} = -x^2 y^3 \bar{i} + \bar{j} + z \bar{k},$$

$$L: x = \sqrt[3]{4} \cos t, y = \sqrt[3]{4} \sin t, z=3$$

$$19. \bar{a} = xz \bar{i} - \bar{j} + y \bar{k},$$

$$L: z = 5(x^2 + y^2), \quad z=4$$

### Варіант 4

$$1. \int_L (x^2 + y^2) dy, \text{ де } L - \text{ контур}$$

чотирикутника з вершинами (вказані в порядку оббігу) в точках  $A(0,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(4,4)$ ,  $D(0,4)$

$$2. \int_L (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy \text{ у}$$

додатному напрямі вздовж еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$3. \int_L x ds \text{ вздовж параболи } y = x^2 \text{ від точки } (2,4) \text{ до точки } (1,1)$$

4. Обчислити площу області, що обмежена кривою  $(x+y)^4 = ax^2 y$  (петля)

$$5. du =$$

$$= \frac{z}{x^2} \sec^2 \frac{z}{x} dx + \frac{dy}{z} - \left( \frac{1}{x} \sec^2 \frac{z}{x} + \frac{y}{z^2} \right) dz$$

$$6. \oint_L e^x (1 - \cos y) dx + e^x (y + \sin y) dy,$$

де  $L$  - квадрат  $|x| + |y| = a$  з від'ємним напрямом оббігу

$$7. \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds, \text{ де } S - \text{межа тіла}$$

$$V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$$

$$8. \iiint_S (3x - y - z) dy dz + 3y dz dx + 2z dx dy,$$

$$S: z = x^2 + y^2, \quad z = 2y$$

$$9. \oint_L (x + y) dx - x dy + 6 dz,$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 2 \end{cases}$$

$$10. u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z},$$

$$S: 4z + 2x^2 - y^2 = 0, \quad M(2, 4, 4)$$

$$11. u = \frac{z^3}{xy^2}, v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}},$$

$$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$12. \vec{a} = 2x\vec{i} + 4y\vec{j}$$

$$13. \vec{a} = 9\pi x\vec{i} + \vec{j} - 3z\vec{k},$$

$$P: \frac{x}{3} + y + z = 1$$

$$14. \vec{a} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k},$$

$$S: 2x + y + z = 2, \quad x = 0, y = 0, z = 0$$

$$15. \vec{a} = (z + y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k},$$

$$S: x^2 + z^2 = 2y, \quad y = 2$$

$$16. \vec{a} = xz\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k},$$

$$S: x^2 + y^2 = 1 - z, \quad z = 0$$

$$17. \vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}, \quad L: y = x^2, \quad M(-1, 1), \quad N(1, 1)$$

$$18. \vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k},$$

$$L: x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 1 - \cos t$$

$$19. \vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1, \quad z = 5$$

$$7. \iint_S (y + z) ds, \text{ де } S - \text{поверхня, що ле-}$$

жить в I октанті, і яка утворена обертанням  
циклоїди  $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$  навко-  
ло осі  $Ox$

$$8. \iiint_S (z + y) dy dz + (x - 2y + z) dz dx + x dx dy,$$

$$S: x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0$$

$$9. \oint_L y dx - 2x dy + z^2 dz,$$

$$L: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6 \end{cases}$$

$$10. u = x + \ln(y^2 + z^2),$$

$$\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad M(2, 1, 1)$$

$$11. u = \frac{z}{x^3 y^2}, v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z\sqrt{6}}, \quad M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$12. \vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j}$$

$$13. \vec{a} = (2x + 1)\vec{i} - y\vec{j} + 3\pi z\vec{k},$$

$$P: \frac{x}{3} + y + 2z = 1$$

$$14. \vec{a} = (\cos z + 3x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (3z + y^2)\vec{k},$$

$$S: 36(x^2 + y^2) = z^2, \quad z = 6$$

$$15. \vec{a} = 3x\vec{i} - z\vec{j},$$

$$S: z = 6 - x^2 - y^2, \quad z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0)$$

$$16. \vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$$

$$17. \vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 4$$

$$(x \geq 0, y \geq 0), \quad M(2, 0), \quad N(0, 2)$$

$$18. \vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k},$$

$$L: x = \cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t$$

$$19. \vec{a} = x\vec{i} + yz\vec{j} - x\vec{k},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1, \quad x + y + z = 1$$

**Варіант 5**

- $\int_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x \cos y \, dx + y \sin x \, dy$  вздовж прямої лінії
- $\int_L (x-y) \, dx + dy$  вздовж верхньої половини кола  $x^2 + y^2 = R^2$  від точки  $(R,0)$  до точки  $(-R,0)$
- $\int_{AB} \frac{y \, ds}{\sqrt{x}}$ , де  $AB$  – дуга півкубічної параболі  $y^2 = \frac{4x^3}{9}$  від точки  $A(3, 2\sqrt{3})$  до точки  $B\left(8, \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$
- Обчислити площу області, що обмежена кривою  $y^2 = x^2 - x^3$
- $du = \left(-\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{1}{z}\right) dx + \left(\frac{z}{y^2} \sin \frac{z}{y} - \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy - \left(\frac{1}{y} \sin \frac{z}{y} + \frac{x}{z^2}\right) dz$
- $\oint_L y^2 \, dx - x^2 \, dy$ , де  $L$  – контур, що обмежує область  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \sin x$ , яка пробігається у додатному напрямі
- $\iint_S \frac{ds}{\sqrt{2-y^2-z^2}}$ , де  $S$  – поверхня, утворена обертанням лінії  $L = \{(x, y) : y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$  навколо осі  $Ox$
- $\iiint_S (2y - 15x) \, dy \, dz + (z - y) \, dz \, dx + (3y - x) \, dx \, dy$ ,  
 $S : z = 3x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = 0$
- $\oint_L 3z \, dx - 2y \, dy + 2y \, dz$ ,

**Варіант 6**

- $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy \, dx + (y-x) \, dy$  вздовж ліній:  
а)  $y = x$ ; б)  $y = x^2$
- $\int_L y \, dx + x \, dy$  вздовж контура трикутника, обмеженого осями координат і прямою  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , який пробігається у від'ємному напрямі
- $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$ ,  
де  $L$  – коло  $x^2 + y^2 = ax$
- Обчислити площу області, що обмежена кривою  $9y^2 = 4x^3 - x^4$
- $du =$   
 $= \frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}} \, dx - \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}} + \frac{2y}{y^2+1}\right) \, dy + \frac{2z}{z^2+1} \, dz$
- $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} \, dx + y \left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right) \, dy$ ,  
де  $L$  – коло  $x^2 + y^2 = R^2$
- $\iint_S (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) \, ds$ , де  $S$  – частина конуса  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ , що лежить між площинами  $y = 0$ ,  $y = b$
- $\iiint_S (-2x) \, dy \, dz + z \, dz \, dx + (x+y) \, dx \, dy$ ,  
 $S : x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0$
- $\oint_L y \, dx - 2x \, dy + z^2 \, dz$ ,

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$10. u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz,$$

$$S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, M(1,1,1)$$

$$11. u = \frac{x^2}{yz^2}, v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,$$

$$M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$12. \bar{a} = x\bar{i} + 4y\bar{j}$$

$$13. \bar{a} = 7x\bar{i} + 9\pi y\bar{j} + \bar{k},$$

$$P: x + \frac{y}{3} + z = 1$$

$$14. \bar{a} = (\ln y + 7x)\bar{i} + (\sin z - 2y)\bar{j} + (e^y - 2z)\bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$$

$$15. \bar{a} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k}, S: y = x^2, y = 4x^2, y = 1 (x \geq 0), z = 0, z = y$$

$$16. \bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0)$$

$$17. \bar{F} = (x + y)\bar{i} + 2x\bar{j}, L: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0), M(2,0), N(-2,0)$$

$$18. \bar{a} = (y - z)\bar{i} + (z - x)\bar{j} + (x - y)\bar{k}, L: x = \cos t, y = \cos t, z = 2(1 - \cos t)$$

$$19. \bar{a} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} + xy\bar{k},$$

$$L: x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 9 (z > 0)$$

### Варіант 7

$$1. \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy dx + (y - x) dy \text{ вздовж ліній:}$$

$$a) y^2 = x; б) y = x^3$$

$$2. \int_L -y dx + x dy \text{ вздовж контура}$$

трикутника  $x = 0, y = 0, 2x + 3y = 6$ , який пробігається у додатному напрямі

$$3. \int_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ де } L - \text{ перший оберн}$$

$$\text{гвинтової лінії} \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt \end{cases}$$

$$L: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6 \end{cases}$$

$$10. u = x^2y - \sqrt{xy + z^2},$$

$$\bar{l} = 2\bar{j} - 2\bar{k}, M(1,5,-2)$$

$$11. u = \frac{z^2}{xy^2}, v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,$$

$$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$12. \bar{a} = 3x\bar{i} + 6z\bar{k}$$

$$13. \bar{a} = \bar{i} + 5y\bar{j} + 11\pi z\bar{k}, P: x + y + \frac{z}{3} = 1$$

$$14. \bar{a} = (\cos y + 6x)\bar{i} - (e^x + z)\bar{j} - (2y + 3z)\bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1$$

$$15. \bar{a} = x\bar{i} - (x + 2y)\bar{j} + y\bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + 2y + 3z = 6$$

$$16. \bar{a} = 3x\bar{i} - 2x\bar{j} + y\bar{k},$$

$$S: x + y + z = 2, x = 1, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$17. \bar{F} = x^2y\bar{i} - y\bar{j}, L - \text{ відрізок } MN, M(-1,0), N(0,1)$$

$$18. \bar{a} = 2y\bar{i} - 3x\bar{j} + x\bar{k}, L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2 - 2\cos t - 2\sin t$$

$$19. \bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k},$$

$$L: z = 3(x^2 + y^2) + 1, z = 4$$

### Варіант 8

$$1. \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \text{ (початок координат не}$$

лежить всередині контура інтегрування)

$$2. \int_L x dy - y dx \text{ вздовж кривої } y = x^3 \text{ від}$$

точки  $(0,0)$  до точки  $(2,8)$

$$3. \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds,$$

де  $L$  - коло  $x^2 + y^2 = 2ay$

4. Знайти масу дуги кола  
 $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) з густиною  
 $\gamma(x, y) = y$

$$5. du = \left( \frac{y}{x} + \ln y + 2x \right) dx + \left( \ln x + \frac{x}{y} + 1 \right) dy$$

$$6. \int_L (e^{-x} \cos y - y^2) dx + (e^{-x} \sin y - x^2) dy,$$

де  $L$  – праве ( $x \geq a$ ) півколо

$x^2 + y^2 = 2ax$  від точки  $(a, 0)$  до точки  $(a, -a)$

$$7. \iiint_S xyz \, ds,$$

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$8. \iiint_S (2x + y) dy dz + (y + 2xy) dx dy,$$

$$S : z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2)$$

$$9. \int_L y \, dx - x \, dy + 2z \, dz,$$

$$L : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2/4, \\ z = 2 \end{cases}$$

$$10. u = \frac{1}{4} x^2 y - \sqrt{x^2 + 5z^2},$$

$$S : z^2 = x^2 + 4y^2 - 4, M(-2, \frac{1}{2}, 1)$$

$$11. u = \frac{xz^2}{y}, v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3,$$

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$$

$$12. \bar{a} = 4z \bar{i} - 9x \bar{k}$$

$$13. \bar{a} = x \bar{i} + (\pi z - 1) \bar{k},$$

$$P : 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$

4. Обчислити площу області, що обмежена однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ та віссю } Ox$$

$$5. du = \left( \frac{1}{y-1} - \frac{y}{(x-1)^2} - 1 \right) dx + \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x}{(y-1)^2} + 2y \right) dy$$

$$6. \int_L x^2 y \, dx - y^2 x \, dy,$$

де  $L$  – верхня ( $y \geq 0$ ) частина правої

петлі ( $x \geq 0$ ) лемніскати

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  від точки  $(0, 0)$  до точки  $(a, 0)$

$$7. \iiint_S z \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \, ds,$$

$$S = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$8. \iiint_S (4y - 3z) dy \, dz + (3x + 2z) dz \, dx + (x + y + z) dx \, dy,$$

$$S : x^2 + y^2 = 1, z = 4 - x - y, z = 0$$

$$9. \int_L y \, dx + x \, dy + 3z^2 \, dz,$$

$$L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 (z > 0) \end{cases}$$

$$10. u = y \ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z,$$

$$\bar{l} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}, M(0, 1, 1)$$

$$11. u = \frac{yz^2}{x}, v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z},$$

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$12. \bar{a} = 2z \bar{i} + 3x \bar{k}$$

$$13. \bar{a} = 5\pi x \bar{i} + (9y + 1) \bar{j} + 4\pi z \bar{k},$$

$$P : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

$$14. \bar{a} = (4x - 2y^2) \bar{i} + (\ln z - 4y) \bar{j} + \left(x + \frac{3z}{4}\right) \bar{k}, \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3$$

$$15. \bar{a} = 2(z - y) \bar{j} + (x - z) \bar{k},$$

$$S: z = x^2 + 3y^2 + 1, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$16. \bar{a} = x^2 \bar{i} + y^2 \bar{j} + z^2 \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$$

$$17. \bar{F} = (2xy - y) \bar{i} + (x^2 + x) \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (y \geq 0), \quad M(3, 0), \quad N(-3, 0)$$

$$18. \bar{a} = 2z \bar{i} - x \bar{j} + y \bar{k},$$

$$L: x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 1$$

$$19. \bar{a} = yz \bar{i} + 2xz \bar{j} + y^2 \bar{k},$$

$$L: x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0)$$

$$14. \bar{a} = (1 + \sqrt{z}) \bar{i} + (4y - \sqrt{x}) \bar{j} + xy \bar{k},$$

$$S: 4(x^2 + y^2) = z^2, \quad z = 3$$

$$15. \bar{a} = x \bar{i} + z \bar{j} - y \bar{k},$$

$$S: z = 4 - 2(x^2 + y^2), \quad z = 2(x^2 + y^2)$$

$$16. \bar{a} = x^3 \bar{i} + y^3 \bar{j} + z^3 \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$17. \bar{F} = (x + y) \bar{i} + (x - y) \bar{j}, \quad L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(x \geq 0, y \geq 0), \quad M(1, 0), \quad N(0, 3)$$

$$18. \bar{a} = y \bar{i} - x \bar{j} + z \bar{k},$$

$$L: x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 3$$

$$19. \bar{a} = xy \bar{i} + yz \bar{j} + xz \bar{k},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9, \quad x + y + z = 1$$

### Варіант 9

$$1. \int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy \text{ вздовж лінії}$$

$$y = x^3$$

$$2. \int_L xy \, dx \text{ вздовж дуги синусоїди}$$

$$y = \sin x \text{ від } x = \pi \text{ до } x = 0$$

$$3. \int_L (x^3 + y^3) \, ds, \text{ де } L - \text{лемніската}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$4. \text{Знайти площу петлі кривої}$$

$$(x + y)^3 = xy$$

$$5. du = \left( \frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x} + \sin x \right) dx + \left( \frac{\sin y}{\sin x} - \cos y \right) dy$$

$$6. \int_L \frac{3x^4}{4a^2} dy - \frac{xy^3}{b^2} dx, \text{ де } L - \text{еліпс}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ з додатним напрямом оббігу}$$

### Варіант 10

$$1. \int_L y \, dx + x \, dy, \text{ де } L - \text{чверть кола}$$

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases} \text{ від } t_1 = 0 \text{ до } t_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \int_L x \, dy \text{ вздовж периметра трикутника,}$$

$$\text{утвореного прямими } y = x, \quad x = 2, \quad y = 0 \text{ (у додатному напрямі)}$$

$$3. \int_L \frac{\sin 2\varphi}{\rho} \, ds, \text{ де } L - \text{коло з центром в}$$

$$\text{точці } A(0, 2) \text{ радіуса } 2$$

$$4. \text{Обчислити площу області, що обмежена лемніскатою } (x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$$

$$5. du = \left( -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{(x + y)^2} \right) dx + \left( \frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x + y)^2} \right) dy$$

$$6. \int_L x^3 y^3 \, dx + (x - y)^3 \, dy, \text{ де } L - \text{ламана}$$

$$ABC, \text{ де } A(2, 1), \quad B(0, 3), \quad C(-2, 1)$$



$$7. \iint_S (xyz)^2 ds,$$

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, a \leq z \leq b\}$$

$$8. \iiint_S x dy dz - 2y dz dx + 3z dx dy,$$

$$S: z = x^2 + y^2, z = 2x$$

$$9. \oint_L (2 - xy) dx - yz dy - xz dz,$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$10. u = xz^2 - \sqrt{x^3 y},$$

$$S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0, M(2, 2, 4)$$

$$11. u = \frac{xy^2}{z^2}, v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{yz}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,$$

$$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$12. \bar{a} = 4y \bar{j} + 8z \bar{k}$$

$$13. \bar{a} = 2\bar{i} + y \bar{j} + \frac{3\pi}{2} z \bar{k},$$

$$P: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{4} = 1$$

$$14. \bar{a} = (\sqrt{z} - x) \bar{i} + (x - y) \bar{j} + (y^2 - z) \bar{k},$$

$$S: 3x - 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$15. \bar{a} = z \bar{i} - 4y \bar{j} + 2x \bar{k},$$

$$S: z = x^2 + y^2, z = 1$$

$$16. \bar{a} = (zx + y) \bar{i} + (zy - x) \bar{j} - (x^2 + y^2) \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0 (z \geq 0)$$

$$17. \bar{F} = (x^2 + y^2) \bar{i} + (x^2 - y^2) \bar{j},$$

$$L: y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} M(2, 0), N(0, 0)$$

$$18. \bar{a} = x \bar{i} + z^2 \bar{j} + y \bar{k},$$

$$L: x = \cos t, y = 2 \sin t,$$

$$z = 2 \cos t - 2 \sin t - 1$$

$$19. \bar{a} = y \bar{i} + (1 - x) \bar{j} - z \bar{k},$$

$$L: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1 (z > 0)$$

$$7. \iint_S x^2 \cdot \sqrt{1 + 4z} ds,$$

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq b^2\}$$

$$8. \iiint_S 7x dy dz + z dz dx + (x - y + 5z) dx dy,$$

$$S: z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1$$

$$9. \oint_L 2yz dx + xz dy + y^2 dz,$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 (z > 0) \end{cases}$$

$$10. u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz},$$

$$\bar{l} = 4\bar{i} + 3\bar{j}, M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$$

$$11. u = \frac{1}{x^2 y z}, v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z},$$

$$M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$12. \bar{a} = y \bar{j} + 3z \bar{k}$$

$$13. \bar{a} = 9\pi x \bar{i} + (5y + 1) \bar{j} + 2\pi z \bar{k},$$

$$P: 3x + y + \frac{z}{9} = 1$$

$$14. \bar{a} = (yz + x) \bar{i} + (x^2 + y) \bar{j} + (xy^2 + z) \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$15. \bar{a} = 4x \bar{i} - 2y \bar{j} - z \bar{k},$$

$$S: 3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = 0, z = 0, x + y + z = 6$$

$$16. \bar{a} = y^2 x \bar{i} + z^2 y \bar{j} + x^2 z \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$17. \bar{F} = y \bar{i} - x \bar{j}, L: 2x^2 + y^2 = 1$$

$$(y \geq 0), M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$18. \bar{a} = 3y \bar{i} - 3x \bar{j} + x \bar{k},$$

$$L: x = 3 \cos t, y = 3 \sin t,$$

$$z = 3 - 3 \cos t - 3 \sin t$$

$$19. \bar{a} = y \bar{i} - x \bar{j} + z^2 \bar{k},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1, z = 4$$

**Варіант 11**

1.  $\int_L y dx - x dy$  де  $L$  – верхня дуга елі-

пса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  від точки  $(a, 0)$  до точки  $(-a, 0)$

2.  $\int_L (x^2 - y) dx$  вздовж периметра пря-

мокутника, утвореного прямими

$x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$  (у додатному напрямі)

3.  $\int_L xy ds$ , де  $L$  – контур

чотирикутника з вершинами

$A(0, 0), B(1, 2), C(2, 3), D(3, 2)$

4. Знайти площу частини циліндричної поверхні  $y^2 = 2x$ , що лежить між площиною  $Oxy$  і поверхнею

$z = \sqrt{-2x - 4x^2}$  (за допомогою криволінійного інтеграла)

5.  $du = (y^2 e^{xy^2} + 3) dx + (2xy e^{xy^2} - 1) dy$

6.  $\int_L y dx - x dy$ , де  $L$  – контур, що об-

межує область  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$0 \leq \rho \leq a \sin 2\varphi$  і пробігається у від'ємному напрямі

7.  $\iint_S xy^2 z ds$ ,

$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, 0 \leq z \leq b\}$

8.  $\iiint_S 17x dy dz + 7y dz dx + 11z dx dy$ ,

$S : z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), y = x^2, y = x$

**Варіант 12**

1.  $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$ , де  $L$  – верхня дуга

кола  $x^2 + y^2 = a^2$ , яка пробігається

проти руху годинникової стрілки

2.  $\int_L (xy - y^2) dx + x dy$  від точки  $(0, 0)$  до

точки  $(1, 2)$  вздовж кривих а)  $y = 2x$ ,

б)  $y = 2x^2$ , в) по сукупності двох відрізків, що виходять із даних точок і зустрічаються

в точці  $(\frac{1}{2}, 3)$

3.  $\int_L \arctg \frac{y}{x} ds$ , де  $L$  – частина спіралі Ар-

хімеда  $\rho = 2\varphi$ , що знаходиться всередині круга радіуса  $R$  ( $R \leq \pi$ ) з центром в початку координат (в полярному полюсі)

4. Знайти координати центра мас дуги однорідної кривої  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

5.  $du = \frac{1-y}{x^2 y} dx + \frac{1-2x}{xy^2} dy$

6.  $\int_L y^{5/3} dx - x^{5/3} dy$ , де  $L$  – додатно

орієнтовна крива  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

7.  $\iint_S z^3 \cdot (x + 2y + 3) ds$ ,

$S = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 4R^2, x^2 + y^2 \leq R^2, z \geq 0\}$

8.  $\iiint_S (x + y + z) dy dz + (2y - x) dz dx +$

$+(3z + y) dx dy$ ,

$S : z = x^2 + y^2, y = x, y = 2x, x = 1, z = 0$

$$9. \int_L -y \, dx + 2dy + dz,$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1 \end{cases}$$

$$10. u = \arctg \frac{y}{x} + xz,$$

$$S: x^2 + y^2 - 2z = 10, \quad M(2, 2, -1)$$

$$11. u = xyz, \quad v = x^2 + 9y^2 + 6z^2,$$

$$M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$12. \bar{a} = 2x \bar{i} + 8z \bar{k}$$

$$13. \bar{a} = 7\pi x \bar{i} + (x - 2y) \bar{j} + (7z + 2) \bar{k},$$

$$P: x + y + \frac{z}{2} = 1$$

$$14. \bar{a} = (e^{2y} + x) \bar{i} + (x - 2y) \bar{j} + (y^2 + 3z) \bar{k},$$

$$S: x - y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$15. \bar{a} = 8x \bar{i} - 2y \bar{j} + x \bar{k},$$

$$S: z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$16. \bar{a} = x^2 \bar{i} + xy \bar{j} + 3z \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 4$$

$$17. \bar{F} = xy \bar{i},$$

$$L: y = \sin x \quad M(\pi, 0), \quad N(0, 0)$$

$$18. \bar{a} = -x^2 y^3 \bar{i} + 2 \bar{j} + xz \bar{k},$$

$$L: x = \sqrt{2} \cos t, \quad y = \sqrt{2} \sin t, \quad z = 1$$

$$19. \bar{a} = 4x \bar{i} + 2 \bar{j} - xy \bar{k},$$

$$L: z = 2(x^2 + y^2) + 1, \quad z = 7$$

$$9. \int_L 4x \, dx - yz \, dy + x \, dz,$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$10. u = x^2 - \arctg(y + z),$$

$$\bar{l} = 3\bar{j} - 4\bar{k}, \quad M(2, 1, 1)$$

$$11. u = \frac{y^3}{x^2 z}, \quad v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z},$$

$$M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

$$12. \bar{a} = x \bar{i} + 3z \bar{k}$$

$$13. \bar{a} = \pi y \bar{j} + (4 - 2z) \bar{k},$$

$$P: 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

$$14. \bar{a} = (\sqrt{z} - 2x) \bar{i} + (e^x + 3y) \bar{j} + (\sqrt{y + x}) \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 2, \quad z = 5$$

$$15. \bar{a} = z \bar{i} + x \bar{j} - z \bar{k},$$

$$S: 4z = x^2 + y^2, \quad z = 4,$$

$$16. \bar{a} = (zx + y) \bar{i} + (xy - z) \bar{j} + (x^2 + yz) \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 = 2, \quad z = 0, \quad z = 1$$

$$17. \bar{F} = x(y - y^2) \bar{i} + x \bar{j}, \quad L: y = 2x^2,$$

$$M(0, 0), \quad N(1, 2)$$

$$18. \bar{a} = 6z \bar{i} - x \bar{j},$$

$$L: x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = 3$$

$$19. \bar{a} = 2y \bar{i} - 3x \bar{j} + z^2 \bar{k},$$

$$L: x^2 + y^2 = z, \quad z = 1$$

### Варіант 13

$$1. \int_L (2a - y) \, dx + (y - a) \, dy, \quad \text{де } L -$$

перша (від початку координат) арка циклоїди  $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

$$3. \int_L xy \, ds, \quad \text{де } L - \text{ контур прямокутника } A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2)$$

$$2. \int_{AB} z \, dx + 2x \, dy - y \, dz, \quad \text{де } AB - \text{ крива}$$

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad az = xy, \quad z \geq 0, \quad A(0, 0, 0), \quad B(2a, 0, 0), \quad a > 0$$

$$4. \text{ Знайти площу області, що обмежена кривою } y^2 = x^2 - x^4$$

$$5. du = (y^2 e^{xy^2} + 3) dx + (2xy y^2 e^{xy^2} - 1) dy$$

$$7. \iint_S (z - R)^3 ds, \\ S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, \\ x \leq 0, y \leq 0, z \geq R\}$$

$$9. \oint_L y dx + 3x dy + z^2 dz, \\ L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3 \end{cases}$$

$$11. u = \frac{y^2 z^3}{x^2}, v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}, \\ M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$13. \bar{a} = (3\pi - 1) \bar{i} + (9\pi y + 1) \bar{j} + 6\pi z \bar{k},$$

$$P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$$

$$15. \bar{a} = 6x \bar{i} - 2y \bar{j} - z \bar{k},$$

$$S: z = 3 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0)$$

$$17. \bar{F} = -y \bar{i} + x \bar{j},$$

$$L: y = x^3, M(0, 0), N(2, 8)$$

$$19. \bar{a} = -3z \bar{i} + y^2 \bar{j} + 2y \bar{k}, L: x^2 + y^2 = 4, x - 3y - 2z = 1$$

$$6. \int_L (xy + x + y) dy - (xy + x - y) dx, \text{ де}$$

$$L - \text{ частина кола } x^2 + y^2 = ax \left(x \leq \frac{a}{2}\right) \text{ від}$$

$$\text{точки } \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) \text{ до точки } \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$8. \iiint_S y dy dz + (x + 2y) dz dx + x dx dy,$$

$$S: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$$

$$10. u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},$$

$$S: 2x^2 - y^2 + z^2 = 7, M(0, -3, 4)$$

$$12. \bar{a} = 4z \bar{j} - 9y \bar{k}$$

$$14. \bar{a} = \left(e^z + \frac{x}{4}\right) \bar{i} + \left(\ln x + \frac{y}{4}\right) \bar{j} + \frac{z}{4} \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2$$

$$16. \bar{a} = xy \bar{i} + yz \bar{j} + zx \bar{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0)$$

$$18. \bar{a} = z \bar{i} + y^2 \bar{j} - x \bar{k},$$

$$L: x = \sqrt{2} \cos t, y = 2 \sin t, z = \sqrt{2} \cos t$$

## 2. Приклад розв'язання варіанта індивідуального типового завдання

В наступних двох прикладах передбачається застосування теореми 1.8 про зведення криволінійного інтеграла до визначеного.

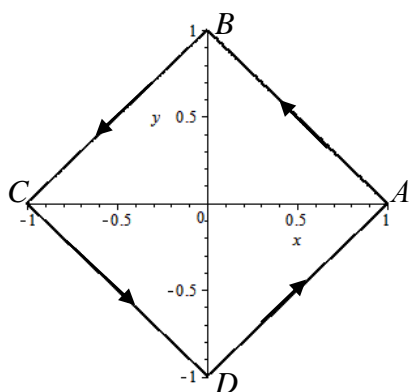


Рис. 2.16.

**Приклад 2.15.** (№Д4255) Обчислити криволінійний інтеграл  $\int_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , де  $ABCD$  – контур квадрата з вершинами  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(-1,0)$ ,  $D(0,-1)$ .

**Розв'язання.** Обчислимо криволінійний інтеграл другого роду окремо вздовж кожної сторони квадрата.

Знайдемо рівняння прямої  $AB$ :

$$AB: \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0} \Rightarrow AB: y = 1 - x.$$

Звідси  $dy = d(1 - x) = -dx$ . Тоді  $dx + dy = 0$ , отже,

$$\int_{AB} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0.$$

Оскільки  $BC$  задається рівняннями  $y = x + 1$ , то  $dy = d(x + 1) = dx$ . Відрізки  $BC$  відповідають недодатні значення  $x$  і невід'ємні значення  $y$ , тому  $|x| + |y| = -x + y$ . При оббігу контура від точки  $B$  до точки  $C$  параметр  $x$  змінюється від 0 до  $-1$ . Отже,

$$\int_{BC} \dots = \int_{BC} \frac{dx+dy}{-x+y} = \int_{BC} \frac{dx+dx}{-x+(x+1)} = \int_0^{-1} \frac{dx+dx}{-x+(x+1)} = \int_0^{-1} 2dx = -2.$$

Аналогічно,

$$CD: y = -x - 1 \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow dx + dy = 0 \Rightarrow \int_{CD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} DA: y = x - 1 \Rightarrow dy = dx, \\ (x \geq 0 \wedge y \leq 0) \Rightarrow |x| + |y| = x - y, \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{DA} \dots = \int_{DA} \frac{dx+dy}{x-y} = \int_0^1 \frac{dx+dx}{x-(x-1)} = 2.$$

$x$  змінюється від 0 до 1,

В результаті одержимо:

$$\int_{ABCD} \dots = \int_{AB} \dots + \int_{BC} \dots + \int_{CD} \dots + \int_{DA} \dots = 0 + (-2) + 0 + 2 = 0. \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.16.** Обчислити криволінійні інтеграли  $\int_L (x+y) dl$  і

$$\int_L (x+y) dx + (y-x) dy \text{ де } L - \text{ частина кола } x^2 + y^2 = ax \left( x \geq \frac{a}{2} \right), \text{ що сполучає точки } A\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \text{ і } B\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right).$$

**Розв'язання.** Оскільки рівняння кола можна переписати у вигляді  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ , то це коло має центр в точці  $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$  і радіус  $\frac{a}{2}$ . Нерівність  $x \geq \frac{a}{2}$  задає праву частину кола  $AMB$  (див. рис. 2.17).

В полярній системі координат  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  рівняння даного кола має вигляд  $\rho = a \cos \varphi$ , тому

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = a \sqrt{\cos^2 \varphi + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = a d\varphi,$$

$$x(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \varphi = a \cos^2 \varphi = \frac{a}{2} (1 + \cos 2\varphi),$$

$$y(\varphi) = \rho(\varphi) \sin \varphi = a \cos \varphi \sin \varphi = \frac{a}{2} \sin 2\varphi,$$

$$dx = -a \sin 2\varphi d\varphi, \quad dy = a \cos 2\varphi d\varphi.$$

Правій частині кола відповідає зміна полярного кута  $\varphi$  від

$-\frac{\pi}{4}$  до  $\frac{\pi}{4}$ . При зведенні криволінійного інтеграла першого

роду до визначеного, в останньому інтегралі межі інтегрування розставляються від меншого значення параметра до біль-

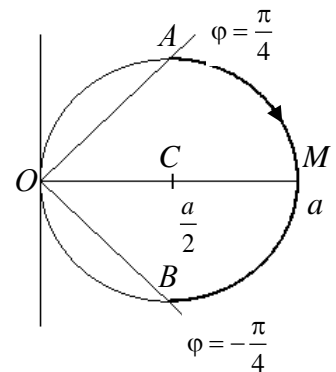


Рис. 2.17.

шого. Щодо криволінійного інтеграла другого роду, то в ньому суттєвим є напрям оббігу кривої. Оскільки крива  $L$  — пробігається від точки  $A$  до точки  $B$ , то у визначеному інтегралі межі інтегрування будуть від  $\frac{\pi}{4}$  до  $-\frac{\pi}{4}$ . Отже, за теоремою 1.8 матимемо:

$$\begin{aligned} \int_L (x+y) dl &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{2} (1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right), \\ \int_L (x+y) dx + (y-x) dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \left( \frac{a}{2} (1 + \cos 2\varphi) + \frac{a}{2} \sin 2\varphi \right) \cdot (-a \sin 2\varphi) d\varphi + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \left( \frac{a}{2} \sin 2\varphi - \frac{a}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right) \cdot a \cos 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} (\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + 1) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

**Приклад 2.17.** Обчислити криволінійний інтеграл  $\int_{AB} (x^2 + y^2) dl$ , вздовж дуги

кривої  $x^2 + y^2 = cz$ ,  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ , що сполучає точки  $A(0,0,0)$ ,  $B(x_0, y_0, z_0)$ .

**Розв'язання.** Потрібно параметризувати дану криву. Нехай спочатку  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , тоді

$$x^2 + y^2 = cz \Rightarrow \rho^2 = cz \Rightarrow \rho = \sqrt{cz},$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{z}{c} \Rightarrow \varphi = \frac{z}{c}.$$

Звідси одержимо параметризацію кривої  $\begin{cases} x = \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c}, \\ y = \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c}, \\ z = z. \end{cases}$  Тоді

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x'_z)^2 + (y'_z)^2 + (z'_z)^2} dz = \\ &= \sqrt{\left( \frac{c}{2\sqrt{cz}} \cos \frac{z}{c} - \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c} \cdot \frac{1}{c} \right)^2 + \left( \frac{c}{2\sqrt{cz}} \sin \frac{z}{c} + \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c} \cdot \frac{1}{c} \right)^2 + (1)^2} dz = \\ &= \sqrt{\frac{c}{4z} + \frac{z}{c} + 1} dz = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{z}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \right) dz. \end{aligned}$$

Оскільки за параметр обрано  $z$ , то, за означенням кривої, він змінюється від 0 до  $z_0$ . Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x^2 + y^2) dl &= \int_0^{z_0} cz \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{z}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \right) dz = \left( \frac{1}{2} c \sqrt{c} \cdot \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3} + \sqrt{c} \cdot \frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Big|_0^{z_0} = \\ &= z_0 \sqrt{cz_0} \cdot \left( \frac{1}{3} c + \frac{2}{5} z_0 \right). \blacksquare \end{aligned}$$

Отримаємо формулу для обчислення площі через криволінійний інтеграл. За означенням міри допустимої множини  $D$ , її міра дорівнює її площі і  $S = \iint_D 1 \cdot dx dy$ . Застосуємо формулу Гріна (Г2):

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = \oint_C P dx + Q dy,$$

обравши  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ,  $C$  – зімкнений контур, який є межею області  $D$  і має додатний напрям оббігу. Розглянемо три можливих випадки.

1) якщо  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , то  $Q(x, y) = x, P(x, y) = 0$  і  $S = \iint_D 1 \cdot dx dy = \oint_C x dy$ ;

2) якщо  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$ , то  $Q(x, y) = 0, P(x, y) = -y$  і  $S = \iint_D 1 \cdot dx dy = -\oint_C y dx$ ;

3) якщо  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}$ , то  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x, P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  і

$$S = \iint_D 1 \cdot dx dy = \frac{1}{2} \oint_C y dx + x dy.$$

**Приклад 2.18.** (№Д4311) Знайти площу області  $D$ , що обмежена петлею декартового листа  $x^3 + y^3 = 3axy$ .

**Розв'язання.** Для обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла потрібно застосувати одну із трьох отриманих вище формул.

Одержимо параметризацію кривої, поклавши  $y = tx$ , тоді

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3axy, \\ y = tx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + t^3 x^3 = 3ax \cdot tx, \\ y = tx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} dx = 3a \cdot \left( \frac{t}{1+t^3} \right)' dt = 3a \cdot \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} dt, \\ dy = 3a \cdot \left( \frac{t^2}{1+t^3} \right)' dt = 3a \cdot \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} dt. \end{cases}$$

Знайдемо значення параметра, які відповідають точці самоперетину кривої. Параметру  $t_1 = 0$  відповідає точка  $O(0,0)$  на площині, а параметру  $t_2 = \infty$  – та ж сама точка, оскільки

$$\begin{cases} x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3at}{1+t^3} = 0, \\ y_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3at^2}{1+t^3} = 0. \end{cases}$$

Розглянемо різницю між  $y$  і  $x$ :

$$\frac{3at^2}{1+t^3} - \frac{3at}{1+t^3} = \frac{3at(t-1)}{(t+1)(t^2-t+1)}.$$

Звідки отримаємо:  $y < x$  при  $t \in (0;1)$ , а  $y > x$  при  $t \in (1;+\infty)$ . Це означає, що всі точки  $M_3(x(t_3); y(t_3))$  кривої, що відповідають значенню параметра  $t_3 \in (0;1)$  знаходяться нижче прямої  $y = x$ , а точки  $M_4(x(t_4); y(t_4))$ , де  $t_4 \in (1;+\infty)$ , знаходяться вище цієї прямої (див. рис. 2.18). Отже, по-перше, інших точок самоперетину крива не має. По-друге, оскільки  $t_1 < t_3 < t_4 < t_2$ , то точки  $O, M_3, M_4, O$ , передують одна одній, тобто  $O \prec M_3 \prec M_4 \prec O$  (рис. 2.18). Таким чином, контур  $C$  пробігається проти годинникової стрілки, що відповідає додатному напрямку оббігу.

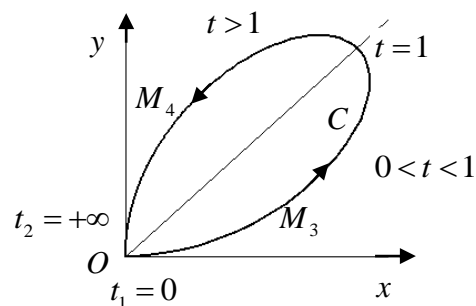


Рис. 2.18.

Тепер застосуємо другу з отриманих формул для обчислення площі:

$$\begin{aligned} S &= -\oint_C y \, dx = -9a^2 \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^3} \cdot \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} dt = -9a^2 \int_0^\infty t \cdot \frac{t}{1+t^3} \cdot d\left(\frac{t}{1+t^3}\right) = \\ &= -\frac{9a^2}{2} \int_0^\infty t \cdot d\left(\frac{t}{1+t^3}\right) = \left\| \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt, \\ dv = d\left(\frac{t}{1+t^3}\right), \quad v = \left(\frac{t}{1+t^3}\right)^2 \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{9a^2}{2} \left( t \left(\frac{t}{1+t^3}\right)^2 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t^3}\right)^2 dt \right) = -\frac{9a^2}{2} \left( 0 - \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2} \right) = -\frac{3a^2}{2} \cdot \frac{1}{1+t^3} \Big|_0^\infty = \frac{3a^2}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Розглянемо висновки, отримані в пункті 7, §3 розділу 1. За твердженням 1.7, якщо

- 1)  $D$  – однозв'язна область,
- 2) функції  $P(x,y), Q(x,y)$  – неперервні разом зі своїми частинними похідними в  $D$ ,
- 3)  $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$ ,

тоді інтеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежить від лінії  $AB \subset D \quad \forall A, B \in D$ . Звідси випливає (за теоремою 1.14), що поле  $\vec{a} = \{P, Q\}$  потенціальне, тобто

$$\exists U(x, y): \frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Окрім того, в цьому випадку  $\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$ . Внаслідок того, що

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \text{ диференціал функції } U(x, y) \text{ дорівнює}$$

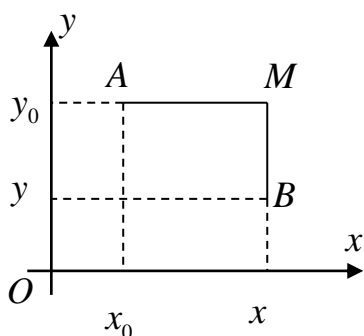


Рис. 2.19.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = Pdx + Qdy.$$

Нехай виконуються припущення 1), 2), 3). Тоді виведемо формулу для обчислення потенціалу  $U(x, y)$ . Внаслідок зазначених припущень і твердження 1.7, інтеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не залежить від лінії  $AB \subset D \quad \forall A, B \in D$ .

Припустимо, що точки  $B(x, y)$  і  $A(x_0, y_0)$  можна сполучити ламаною так, як зображено на рис. 2.19, і ламана цілком лежить всередині області  $D$ . Тоді



$$\int_{AMB} \dots = \int_{AM} \dots + \int_{MB} \dots,$$

$$AM : y = y_0 \Rightarrow dy = 0; \quad \int_{AM} P dx + Q dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx;$$

$$MB : x = x \Rightarrow dx = 0; \quad \int_{MB} P dx + Q dy = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy;$$

$$\int_{AMB} P dx + Q dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Оскільки інтеграл  $\int_{AB} P dx + Q dy$  не залежить від кривої, що сполучає точки  $A$  і  $B$ , а його значення дорівнює  $\int_{AB} P dx + Q dy = U(B) - U(A)$ , то

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{AB} P dx + Q dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy,$$

звідки

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + U(x_0, y_0).$$

Отже,

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \quad (2.1)$$

Можна отримати іншу формулу для пошуку потенціалу векторного поля на площині:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C.$$

Нехай векторне поле  $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$  задане в однов'язній множині  $D \subset \mathbb{R}^3$  простору, його координатні функції  $P, Q, R$  неперервні разом зі своїми частинними похідними в  $D$  і задовольняють умови

$$\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M), \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(M) = \frac{\partial R}{\partial y}(M), \quad \frac{\partial R}{\partial x}(M) = \frac{\partial P}{\partial z}(M) \quad \forall M \in D.$$

Тоді існує потенціал цього векторного поля, який можна визначити за формулою

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + C.$$

**Приклад 2.19.** Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти функцію  $U(x, y)$ , попередньо упевнившись в тому, що наданий вираз є її повним диференціалом:

$$dU = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

**Розв'язання.** В даному випадку

$$P(x, y) = \frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

Ці функції неперервні разом зі своїми частинними похідними на всій декартовій площині, остання є множиною зв'язною. Отже, умови 1) і 2) твердження 1.7 виконуються. Перевіримо умову 3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{3x^2 - 2xy + 3y^2 - y(-2x + 6y)}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \frac{3x^2 - 3y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{3x^2 - 2xy + 3y^2 - x(6x - 2y)}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \frac{3x^2 - 3y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, потенціал  $U(x, y)$  існує, і його можна знайти за формулою (2.1). Точку  $(x_0, y_0)$  в цій формулі можна обирати довільним чином із множини визначення функцій  $P$  і  $Q$ , тобто на площині. Зручніше за все взяти  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Отже, маємо:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x \frac{y_0}{3x^2 - 2xy_0 + 3y_0^2} dx + \int_{y_0}^y \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} dy + C = \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} dy + C = -\frac{x}{3} \int_0^y \frac{dy}{\left(y - \frac{x}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}x^2} + C = \\ &= -\frac{x}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{y - \frac{x}{3}}{\frac{2\sqrt{2}x}{3}} \Big|_0^y + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3y - x}{2\sqrt{2}x} + C. \end{aligned}$$

*Перевірка.* Доведено, що мають місце рівності  $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3y - x}{2\sqrt{2}x} + C \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{3y - x}{2\sqrt{2}x}\right)^2} \times \\ &\times \frac{-2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}(3y - x)}{8x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{8x^2}{8x^2 + 9y^2 - 6xy + x^2} \cdot \frac{-6\sqrt{2}y}{8x^2} = \\ &= \frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = P(x, y); \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3y - x}{2\sqrt{2}x} + C \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{3y - x}{2\sqrt{2}x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}x} \cdot 3 = \\ &= \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = Q(x, y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Приклад 2.20.** (№Д4303) За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл, зімкнувши, якщо це необхідно, криву відрізком прямої. Тут

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

де  $AmO$  — верхнє півколо  $x^2 + y^2 = ax$ , що пробігається від точки  $A(a, 0)$  до точки  $O(0, 0)$

**Розв'язання.** Рівняння кола можна переписати у вигляді  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ .

Звідси випливає, що це коло має центр в точці  $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$  і радіус  $\frac{a}{2}$ .

Зімкнемо криву відрізком  $OA$ . Об'єднання дуг  $AmO$  і  $OA$  позначимо через  $C$ , а область, яку обмежує контур  $C$ , через  $D$ .

Застосуємо формулу Гріна. Нехай

$$P(x, y) = e^x \sin y - my, \quad Q(x, y) = e^x \cos y - m.$$

Тоді

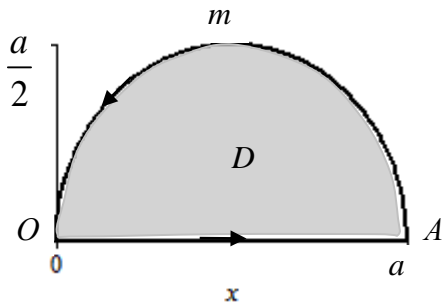


Рис. 2.20.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= e^x \cos y - m, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y, \\ \int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy + \\ &+ \int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \\ &= \iint_D [e^x \cos y - (e^x \cos y - m)] dx dy = \iint_D m dx dy, \end{aligned}$$

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \iint_D m dx dy - \int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy.$$

Зважаючи на означення міри допустимої множини  $D$ , одержимо значення подвійного інтеграла:

$$\iint_D m dx dy = mS(D) = m \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

Обчислимо криволінійний інтеграл вздовж  $OA$ . Оскільки

$$OA: y = 0 \Rightarrow (dy = 0 \wedge P(x, 0) = 0),$$

то вираз під знаком криволінійного інтеграла дорівнює 0. Отже,  $\int_{OA} \dots = 0$ . Таким чином,

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{\pi m a^2}{8}. \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.21.** Обчислити поверхневий інтеграл I роду  $\iint_S (xy + yz + xz) ds$ , де

$S$  – частина конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z \geq 0$ , яка лежить всередині циліндра  $x^2 + y^2 = 2ax$ .

**Розв'язання.** Схема утворення поверхні та її проекції  $D$  на площину  $Oxy$  зображено на рис. 2.21.

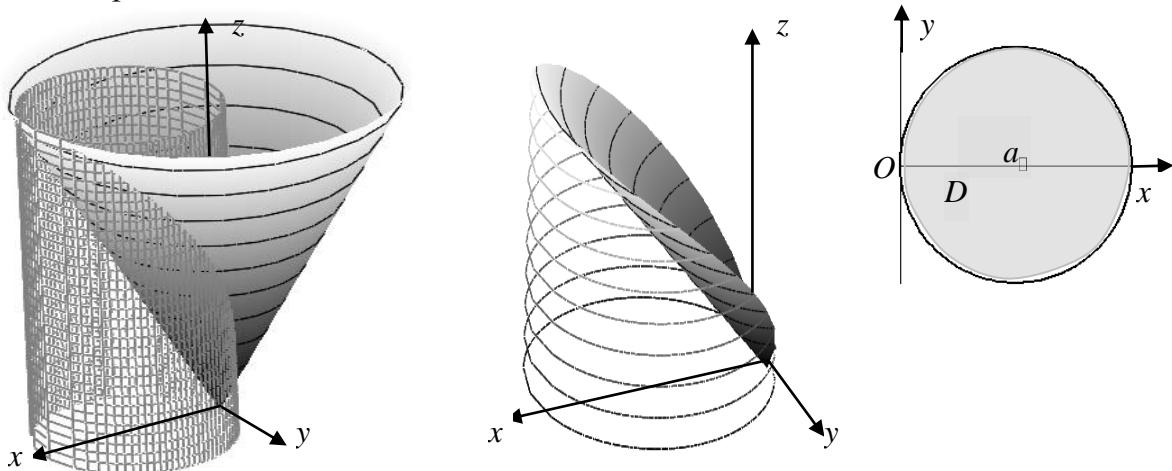


Рис. 2.21.

Виразимо із рівняння поверхні  $z$  через  $x$  і  $y$ :

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Знайдемо диференціал поверхні, застосовуючи зауваження 1.14.2:

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Для зведення поверхневого інтеграла до кратного застосуємо теорему 1.10:

$$I_{20} = \iint_S (xy + yz + xz) ds = \iint_D (xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{2} dx dy.$$

Для обчислення подвійного інтеграла введемо полярну систему координат. Охарактеризуємо область  $D$

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow \rho = 2a \cos \varphi,$$

$$D: -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi.$$

Отже,

$$\begin{aligned} I_{20} &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 (\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) \rho d\rho = \\ &= 4a^4 \cdot \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) \cdot \cos^4 \varphi. \\ &= 4a^4 \cdot \sqrt{2} \left( \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi) \cdot \cos^4 \varphi d\varphi}_{\substack{\text{непарна} \\ =0}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi \right). \end{aligned}$$

Оскільки має місце формула

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \frac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{4!!}{5!!} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{16}{15}.$$

Таким чином,  $I_{20} = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4$ . ■

**Приклад 2.22.** Обчислити інтеграл  $I_{21} = \iint_S yz^2 dy dz + zy^2 dz dx + yx^2 dx dy$ , де  $S$  –

зовнішній бік поверхні тіла  $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , двома способами: безпосередньо та за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

**Розв'язання.** Дане тіло  $T$  зображено на рис. 2.22. Воно обмежене знизу площиною  $z = 0$  (поверхня  $S_1$ ), зверху – круговим параболоїдом  $z = x^2 + y^2$  (поверхня  $S_2$ ). Його бічна поверхня утворюється із двох площин  $x = 0$ ,  $y = 0$  і кругового циліндра  $x^2 + y^2 = 1$  (поверхні  $S_3, S_4, S_5$  відповідно).

Спочатку проведемо обчислення за формулою Остроградського-Гаусса (О-Г2). В

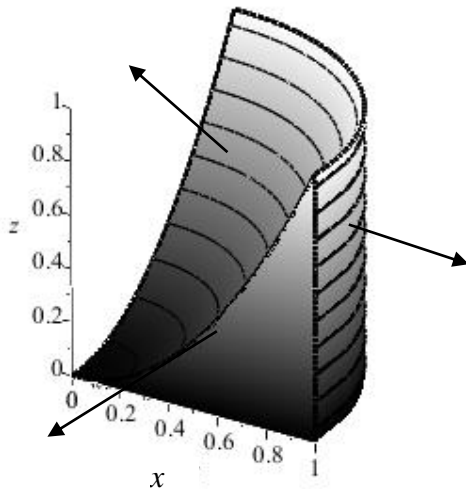


Рис. 2.22.

даному прикладі  $P = yz^2$ ,  $Q = zy^2$ ,  $R = yx^2$ ,  
тому  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2yz$ ,  $I_{21} = \iiint_T 2yz \, dx \, dy \, dz$ .

Оскільки проекцією  $D$  тіла на площину  $Oxy$  є сектор круга  $x^2 + y^2 \leq 1$ , що лежить в I чверті, а поверхня, що обмежує поверхню, виражається через  $x^2 + y^2$ , то для обчислення потрійного інтеграла зручно вводити циліндричні координати

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \text{ Матимемо:}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 &\Rightarrow \rho = 1, \\ z = x^2 + y^2 &= \rho^2, \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$T: 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq \rho^2$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= \iiint_T 2yz \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{\rho^2} 2\rho \sin \varphi \cdot z \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \cdot z^2 \Big|_0^{\rho^2} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^6 \, d\rho = \frac{1}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Тепер перейдемо до безпосереднього обчислення. Знайдемо поверхневі інтеграли II роду за п'ятьма поверхнями. Розглянемо спочатку інтеграл за поверхнею параболоїда  $S_2$ . Нормаль до неї утворює гострий кут з віссю аплікату, тому можна застосувати наслідок 1.8, звідки

$$\begin{aligned} &\iint_{S_2} P(x, y, z) \, dy \, dz + Q(x, y, z) \, dz \, dx + R(x, y, z) \, dx \, dy = \\ &= \iint_D \left( -P(x, y, f(x, y)) f'_x(x, y) - Q(x, y, f(x, y)) f'_y(x, y) + R(x, y, f(x, y)) \right) dx \, dy. \end{aligned}$$

Отже,

$$z = x^2 + y^2 = f(x, y) \Rightarrow f'_x(x, y) = 2x, \quad f'_y(x, y) = 2y,$$

$$\iint_{S_2} \dots = \iint_D \left( -y(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - (x^2 + y^2) y^2 \cdot 2y + yx^2 \right) dx \, dy.$$

Введемо полярні координати, матимемо:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \dots &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left( -2\rho^6 \cos \varphi \sin \varphi - 2\rho^5 \sin^3 \varphi + \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \right) \rho \, d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{1}{8} \sin 2\varphi - \frac{2}{7} \sin^3 \varphi + \frac{1}{5} \cos^2 \varphi \sin \varphi \right) d\varphi = -\frac{209}{840}. \end{aligned}$$

Далі обчислимо інтеграл за площиною  $z = 0$ . За означенням поверхневого інтеграла другого роду

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_S (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) \, ds, \quad (2.2)$$

де  $\cos X, \cos Y, \cos Z$  – направляючі косинуси нормалі до поверхні. Для даної площини  $\cos X = 0, \cos Y = 0, \cos Z = -1$ , де знак « $-$ » обрано внаслідок того, що нормаль до площини утворює кут  $180^\circ$  з віссю апікат. Крім того, оскільки  $z = 0$ , то

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = dx dy.$$

Проекцією на  $Oxy$  частини даної поверхні, що лежить на площині  $z = 0$ , є область  $D$ . Отже,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (yz^2 \cos X + zy^2 \cos Y + ux^2 \cos Z) ds &= \iint_{S_1} (y \cdot 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot y^2 \cdot 0 + ux^2 \cdot (-1)) ds = \\ &= - \iint_D ux^2 dx dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cdot \rho d\rho = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Для площини  $x = 0$ :

$$\cos X = -1, \cos Y = 0, \cos Z = 0, ds = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz = dy dz.$$

Проекцією на  $Oyz$  частини даної поверхні, що лежить на площині  $x = 0$ , є область  $D_3: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y^2$ . Отже,

$$\iint_{S_3} \dots = - \iint_{D_3} yz^2 dy dz = - \int_0^1 y dy \int_0^{y^2} z^2 dz = - \frac{1}{3} \int_0^1 y^7 dy = -\frac{1}{24}.$$

Для площини  $y = 0$  функція під знаком поверхневого інтеграла  $yz^2 \cos X + zy^2 \cos Y + ux^2 \cos Z = 0$ , тому  $\iint_{S_4} \dots = 0$ .

Розглянемо циліндричну поверхню  $y = \sqrt{1 - x^2} = g(y, z)$ . Нормаль до неї утворює гострий кут з віссю ординат. Проекція відповідної частини поверхні на площину  $Oxz$  являє собою квадрат  $D_4: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ . Таким чином,

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\ &= \iint_{D_4} \left( -P(x, g(y, z), z) \cdot g'_x(x, y) + Q(x, g(y, z), z) - R(x, g(y, z), z) \cdot g'_z(x, y) \right) dx dz = \\ &= \iint_{D_4} \left( -z^2 \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} + z(1 - x^2) - x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot 0 \right) dx dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left( x z^2 + z(1 - x^2) \right) dz = \int_0^1 \left( \frac{x}{3} + \frac{1}{2}(1 - x^2) \right) dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В результаті отримуємо:

$$\iint_S \dots = \sum_{k=1}^5 \iint_{S_k} \dots = -\frac{209}{840} - \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{7}. \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.23.** Обчислити інтеграл вздовж кривої  $L$ , яка утворюється перетином зазначених поверхонь. Напрямок оббігу обрати таким, щоб спостерігач, якого вісь  $Oz$  пронизує з ніг до голови, бачив його таким, що проходить проти руху годинникової стрілки. Розглянути два способи: безпосередньо та за формулою Стокса. Тут

$$\text{а) } I_a = \oint_L (5 - 2xy) dx - 2yz dy - 2xz dz, L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } I_{\vec{\sigma}} = \oint_L 3yz \, dx - xz \, dy + x^2 dz, \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, \quad z > 0. \end{cases}$$

**Розв'язання. а)** Застосуємо формулу Стокса (С3)

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds = \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

У даному прикладі за поверхню  $S$  будемо розглядати частину площини  $x + y + z = -1$ , яка лежить всередині циліндра  $x^2 + y^2 = 9$ . Згідно з умовою щодо орієнтації контура, з якою також узгоджено орієнтацію поверхні, нормаль до площини потрібно обрати  $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Ця нормаль має довжину  $|\vec{n}| = \sqrt{3}$ , тому  $\cos X = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos Y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos Z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Маємо:

$$I_a = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5 - 2xy & -2yz & -2xz \end{vmatrix} ds = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) ds.$$

Для площини  $z = 1 - x - y$  диференціал поверхні дорівнює

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx \, dy = \sqrt{3} \, dx \, dy.$$

Проекцією  $D$  поверхні  $S$  на площину  $Oxy$  є круг  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Отже,

$$I_a = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_D 1 \cdot \sqrt{3} \, dx \, dy = 2 \cdot S(D) = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18\pi.$$

Для безпосереднього обчислення криволінійного інтеграла криву потрібно параметризувати. Якщо  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ , то  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 1 - 3 \cos t - 3 \sin t$ . Тобто

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \\ z = 1 - 3 \cos t - 3 \sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -3 \sin t \, dt, \\ dy = 3 \cos t \, dt, \\ dz = 3 (\sin t - \cos t) \, dt, \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^{2\pi} [(5 - 9 \sin 2t) (-3 \sin t) - 18 \sin t (1 - 3 \cos t - 3 \sin t) \cos t - \\ &\quad - 18 \cos t (1 - 3 \cos t - 3 \sin t) (\sin t - \cos t)] \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [108 \sin^2 t \cos t - 54 \cos^3 t + 18 \cos^2 t - 18 \sin 2t - 15 \sin t] \, dt = 18\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**б)** Лінія перетину поверхонь  $x^2 + y^2 = 4$  і  $x^2 + y^2 = z^2$  при  $z > 0$  лежить на площині  $z = 2$ . За поверхню, за якою обчислюється поверхневий інтеграл в формулі Стокса, оберемо саме площину  $z = 2$ , яка лежить всередині циліндра  $x^2 + y^2 = 4$ . Тоді нормаль до неї  $\vec{n} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$ , а направляючі косинуси  $\cos X = 0, \cos Y = 0, \cos Z = 1$ . Отже, за формулою Стокса

$$I_6 = \iint_S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz & -xz & x^2 \end{vmatrix} ds = -4 \iint_S z \, ds.$$

Для площини  $z = 2$  диференціал поверхні дорівнює  $ds = dx \, dy$ . Проекцією  $D$  поверхні  $S$  на площину  $Oxy$  є круг радіуса 2. Отже,

$$I_6 = -4 \iint_D 2 \, dx \, dy = -8 \cdot S(D) = -8 \cdot \pi \cdot 2^2 = -32\pi.$$

Обчислимо інтеграл безпосередньо. Оскільки контур можна параметризувати

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ z = 2, \end{cases} \quad \text{то} \quad \begin{cases} dx = -2 \sin t \, dt, \\ dy = 2 \cos t \, dt, \\ dz = 0. \end{cases} \quad \text{Тоді}$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} (-24 \sin^2 t - 8 \cos^2 t) \, dt = -32\pi. \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.24.** Знайти похідну скалярного поля  $u(x, y, z) = y \cdot \operatorname{arctg}^2 xz$  в точці  $M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

а) вздовж напрямку нормалі до поверхні  $S: x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 1$ , що утворює гострий кут з додатним напрямом осі  $Oz$ ,

б) за напрямом вектора  $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

**Розв'язання.** Знайдемо градієнт скалярного поля в зазначеній точці:

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{grad}} u(M) &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) \Big|_M = \\ &= \left( y \cdot 2 \operatorname{arctg} xz \cdot \frac{1}{1+(xz)^2} \cdot z \cdot \vec{i} + \operatorname{arctg}^2 xz \cdot \vec{j} + y \cdot 2 \operatorname{arctg} xz \cdot \frac{1}{1+(xz)^2} \cdot x \cdot \vec{k} \right) \Big|_M = \\ &= \frac{\pi\sqrt{6}}{24} \cdot \vec{i} + \frac{\pi^2}{36} \cdot \vec{j} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

а) Знайдемо вектор нормалі до поверхні  $F(x, y, z) = 0$ , що задана неявно. Тут  $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 1$  Маємо:

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} \right) \Big|_M = (2x \vec{i} - 4y \vec{j} + 8z \vec{k}) \Big|_M = 2 \vec{i} - \frac{4}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{8}{\sqrt{3}} \vec{k}.$$

Оскільки апліката отриманого вектора додатна, то цей вектор утворює гострий кут з додатним напрямом осі  $Oz$ . Знайдемо направляючі косинуси цього вектора. Для цього

знайдемо його довжину:  $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ . Тоді

$$\cos \alpha = 2 : \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{5} \cdot \sqrt{3}, \quad \cos \gamma = \frac{8}{\sqrt{3}} : \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{4}{5}.$$

Тому одиничний вектор нормалі матиме вигляд  $\vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \vec{i} - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \vec{j} + \frac{4}{5} \cdot \vec{k}$ .

Шукана похідна за напрямом нормалі дорівнює

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M) = (\overline{\operatorname{grad}} u(M), \vec{e}) = \frac{\pi\sqrt{6}}{24} \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\pi^2}{36} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi^2\sqrt{6}}{180}. \quad \blacksquare$$



б) Довжина вектора  $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$  дорівнює  $|\bar{l}| = \sqrt{3}$ , тому його направляючі косинуси  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , а одиничний напрям  $\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \bar{i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \bar{k}$ . Отже, похідна за напрямом дорівнюватиме

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{e}}(M) = (\overline{\text{grad}} u(M), \bar{e}) = \frac{\pi\sqrt{6}}{24} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{36} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{24}(1 + \sqrt{3}) - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{108}. \blacksquare$$

**Приклад 2.25.** Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $u(x, y, z) = \frac{yz}{x^2}$  і

$$v(x, y, z) = \frac{4}{x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} + 2z^3 \text{ в точці } M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

**Розв'язання.** Знайдемо градієнти скалярних полів в точці  $M$ :

$$\overline{\text{grad}} u(M) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \right) \Big|_M = \left( -\frac{2yz}{x^3} \bar{i} + \frac{z}{x^2} \bar{j} + \frac{y}{x^2} \bar{k} \right) \Big|_M = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \bar{i} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \bar{j} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{k},$$

$$\overline{\text{grad}} v(M) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \bar{k} \right) \Big|_M = \left( -\frac{4}{x^2} \bar{i} - \frac{\sqrt{6}}{2y^2} \bar{j} + 6z^2 \bar{k} \right) \Big|_M = -2\bar{i} - \sqrt{6}\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Тепер знайдемо косинус кута  $\phi$  між цими векторами:

$$(\overline{\text{grad}} u(M), \overline{\text{grad}} v(M)) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (-2) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (-\sqrt{6}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$|\overline{\text{grad}} u(M)| = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}, \quad |\overline{\text{grad}} v(M)| = \sqrt{14}, \quad \cos \phi = \frac{(\overline{\text{grad}} u(M), \overline{\text{grad}} v(M))}{|\overline{\text{grad}} u(M)| \cdot |\overline{\text{grad}} v(M)|} = \frac{\sqrt{2}}{7}.$$

Шуканий кут:  $\phi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{7}$ .  $\blacksquare$

**Приклад 2.26.** Знайти векторні лінії в векторному полі

а)  $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$ , б)  $\bar{a} = 2z\bar{j} + 3y\bar{k}$ .

**Розв'язання.** Векторною лінією векторного поля  $\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$  називають криву, в кожній точці якої вектор  $\bar{a}(M)$  направлений вздовж дотичної до кривої. Через кожну точку  $M$  векторного поля  $\bar{a}(M)$  проходить по одній векторній лінії. Сім'я векторних ліній визначається диференціальними рівняннями  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ .

а) Диференціальні рівняння векторних ліній поля  $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$  мають вигляд

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-z} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}, \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{-z}. \end{cases}$$

Проінтегруємо їх:

$$\begin{cases} \ln x = \frac{1}{2} \ln(C_1 y), \\ \ln x = -\ln(C_2 z), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = C_1 y, \\ x = \frac{1}{C_2 z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = \frac{t^2}{C_1}, \\ z = \frac{1}{C_2 t}. \end{cases}$$

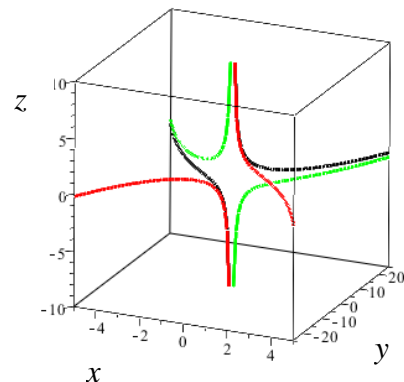


Рис. 2.23.

Деякі лінії із отриманої сім'ї зображено на рис. 2.23. ■

б) Знайдемо векторні лінії поля  $\vec{a} = 2z \vec{j} + 3y \vec{k}$ :

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{2z} = \frac{dz}{3y} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ \frac{dy}{2z} = \frac{dz}{3y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ 3y dy = 2z dz, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = C_1, \\ \frac{3}{2} y^2 = z^2 + C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ \frac{y^2}{2C_2/3} - \frac{z^2}{C_2} = 1. \end{cases}$$

Деякі лінії із отриманої сім'ї зображено на рис. 2.24. Кожна з цих ліній визначає гіперболу (в загальному розумінні), розташовану на площині, яка паралельна площині  $Oyz$ . ■

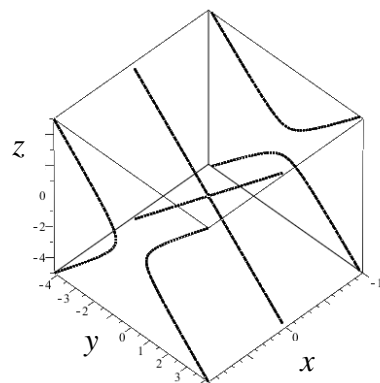


Рис. 2.24.

**Приклад 2.27.** Знайти течію векторного поля  $\vec{a} = 8x \vec{i} + 11y \vec{j} + 17z \vec{k}$  через частину поверхні  $\alpha: x + 2y + 3z = 1$ , що міститься в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю  $Oz$ ).

**Розв'язання.** Згідно з фізичним змістом загального поверхневого інтеграла II роду (див. зауваження 1.16), течія  $\Pi$  векторного поля  $\vec{a}$  через поверхню  $S$  обчислюється за формулою  $\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds$ , де  $\vec{n}(x, y, z) = (\cos X, \cos Y, \cos Z)$  – одиничний вектор нормалі до поверхні  $S$ . Тобто

$$\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iint_S (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) ds.$$

Для даної площини  $\alpha: x + 2y + 3z = 1$  (або  $\alpha: z = \frac{1}{3}(1 - x - 2y)$ ) одиничним вектором нормалі, яка утворює гострий кут з віссю  $Oz$ , є вектор  $\vec{n}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ , диференціалом поверхні –

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy,$$

а проекцією на площину  $Oxy$  – область  $D$ , обмежена прямими  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + 2y = 1$  (рис. 2.25). Тоді течія поля через поверхню дорівнює

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_D \left( \frac{8x}{\sqrt{14}} + \frac{22y}{\sqrt{14}} + \frac{17(1-x-2y)}{\sqrt{14}} \right) \cdot \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{1/2} dy \int_0^{1-2y} (8x + 22y + 17(1-x-2y)) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \left( -\frac{9}{2}(1-2y)^2 - 12y(1-2y) + 17 - 34y \right) dy = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

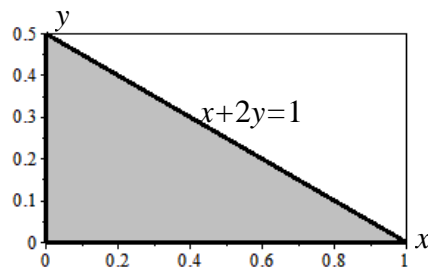


Рис. 2.25.

**Приклад 2.28.** Знайти течію векторного поля

$$\vec{a} = (x + xy) \vec{i} + (y - x^2) \vec{j} + (z - 1) \vec{k}$$

через зімкнену поверхню  $S: z = x^2 + y^2$ ,  $z = 8 - x^2 - y^2$  (нормаль зовнішня).

**Розв'язання.** При обчисленні потоку через зімкнену поверхню  $S$  зручніше застосовувати формулу Остроградського-Гаусса (О-Г1):

$$\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iiint_{\bar{D}} \operatorname{div} \vec{a} dv,$$

де  $\bar{D}$  – тіло, яке обмежує поверхню  $S$ . Оскільки  $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ , то

$$\Pi = \iiint_{\bar{D}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

В даному прикладі

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_{\bar{D}} \left( \frac{\partial(x+xy)}{\partial x} + \frac{\partial(y-x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z-1)}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \iiint_{\bar{D}} (3+y) dx dy dz. \end{aligned}$$

Задана поверхня обмежена параболоїдами  $z = x^2 + y^2$  і  $z = 8 - x^2 - y^2$  знизу та зверху, відповідно. Знайдемо лінію перетину параболоїдів:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 8 - x^2 - y^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 4. \end{cases}$$

Отже, проекцією тіла  $\bar{D}$  на площину  $Oxy$  є круг  $x^2 + y^2 \leq 4$  (рис. 2.26).

Для обчислення потрійного інтеграла, до якого зведено обчислення потоку, введемо циліндричні координати  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ , одержимо

$$\begin{aligned} z = x^2 + y^2 = \rho^2, \quad z = 8 - x^2 - y^2 = 8 - \rho^2, \\ \Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{8-\rho^2} (3 + \rho \sin \varphi) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho (3 + \rho \sin \varphi) (8 - 2\rho^2) d\rho = \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \left( 12\rho^2 - \frac{3}{2}\rho^4 + \left( \frac{8}{3}\rho^3 - \frac{2}{5}\rho^5 \right) \sin \varphi \right) \Big|_0^2 = \int_0^{2\pi} \left( \frac{128}{15} \sin \varphi + 24 \right) d\varphi = 48\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Приклад 2.29.** Знайти роботу сили  $\vec{F} = y \vec{i} - x \vec{j}$  при пересуванні точки її прикладання вздовж лінії  $L: 2x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$  від точки  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  до точки  $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ .

**Розв'язання.** В п.1, §2 розділу 1 було зазначено, що фізичним змістом криволінійного інтеграла  $\Pi$  роду є робота  $A$  по переміщенню матеріальної точки із точки  $M$  в точку  $N$  вздовж кривої  $L$  під дією сили  $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ . Тобто

$$A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Задану криву параметризуємо в такий спосіб:  $L: \begin{cases} x = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \\ y = \sin t. \end{cases}$  Пересування із точки

$M$  в точку  $N$  відповідає зростанню параметра  $t$  від 0 до  $\pi$ . Тоді для даної сили  $\vec{F} = y \vec{i} - x \vec{j}$  робота дорівнюватиме

$$A = \int_L y dx - x dy = \int_0^\pi \left( \sin t \cdot \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \cdot \cos t \right) dt = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

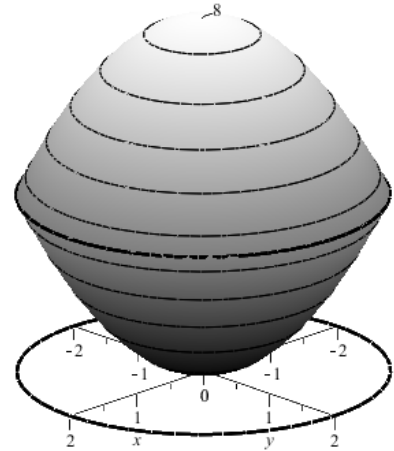


Рис. 2.26

**Приклад 2.30.** Знайти циркуляцію векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{3} \vec{i} - 3x \vec{j} + x \vec{k}$  вздовж кривої  $L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 1 - 2\cos t - 2\sin t$  (у напрямі зростання параметра  $t$ ).

**Розв'язання.** За означенням, циркуляція обчислюється за формулою  $\Pi = \oint_L (\vec{t}, \vec{a}) dl$ , де  $\{\vec{t} = \vec{t}(M)\}$  – вектори дотичних до кривої  $L$ . Оскільки

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \{P, Q, R\} \\ \vec{t} &= \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\vec{t}, \vec{a}) dl = P \cos \alpha dl + Q \sin \alpha dl + R \cos \gamma dl = P dx + Q dy + R dz,$$

то  $\Pi = \oint_L P dx + Q dy + R dz$ .

З'ясуємо вигляд заданої кривої. Оскільки  $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ , то  $x^2 + y^2 = 4, z = 1 - 2x - 2y$ . Результатом перетину отриманих поверхонь – кругового циліндра і площини – є еліпс в просторі. Йому відповідає зростання параметра  $t$  від 0 до  $2\pi$ . Таким чином,

$$\begin{aligned} \Pi &= \oint_L \frac{y}{3} dx - 3x dy + x dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{4}{3} \sin t \cdot (-\sin t) - 12 \cos t \cdot \cos t + 4 \cos t \cdot (\sin t - \cos t) \right) dt = -\frac{52}{3} \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

**Приклад 2.31.** Знайти модуль циркуляції векторного поля  $\vec{a} = 2yz \vec{i} + xz \vec{j} + y^2 \vec{k}$  вздовж кривої  $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16, z > 0. \end{cases}$

**Розв'язання.** Лінія перетину поверхонь  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  і  $x^2 + y^2 = 16$  при  $z > 0$  лежить на площині  $z = 3$ . За поверхню, вздовж якої обчислюється поверхневий інтеграл в формулі Стокса (С3), оберемо саме площину  $z = 3$ , яка лежить всередині циліндра  $x^2 + y^2 = 16$ . Тоді нормаль до неї  $\vec{n} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$ . Отже, за формулою Стокса

$$\Pi = \iint_S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & xz & y^2 \end{vmatrix} ds = - \iint_S z ds.$$

Для площини  $z = 3$  диференціал поверхні дорівнює  $ds = dx dy$ . Проекцією  $D$  поверхні  $S$  на площину  $Oxy$  є круг радіуса 3. Отже,

$$\Pi = - \iint_D 3 dx dy = -3 \cdot S(D) = -3 \cdot \pi \cdot 3^2 = -27\pi \Rightarrow |\Pi| = 27\pi. \blacksquare$$

**Формальні вимоги щодо виконання кожного індивідуального завдання.** Номер варіанта індивідуального завдання обчислюється як залишок ділення номера прізвища студента в списку академічної групи на 13. Кожне індивідуальне завдання оформлюється в зошиті обсягом 12 – 18 аркушів і здається на передостанньому тижні відповідного змістового модуля навчального семестру, протягом якого вивчається відповідна тема. Розв'язки повинні містити усі необхідні обґрунтування з посиланням на відповідні формули, теореми і властивості. У разі незарахування індивідуального завдання студент повинен його доопрацювати до останнього тижня модуля. Захист індивідуального завдання проводиться на останньому тижні модуля. Студент, у якого індивідуальне завдання незараховано, не допускається до екзамену.

## Розділ 3. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

**Навести означення або сформулювати теорему:**

1. Поняття кратного інтеграла по  $m$ –вимірному проміжку та інтегровності.
2. Критерій Дарбу інтегровності на  $m$ –вимірному проміжку.
3. Класи функцій, інтегровних на  $m$ –вимірному проміжку. Критерій Лебега інтегрованості функції на проміжку.
4. Допустима множина, приклади. Об'єм допустимої множини.
5. Означення інтеграла по множині та його коректність.
6. Критерій Лебега інтегрованості функції на допустимій множині.
7. Полярні, сферичні і циліндричні координати.
8. Поняття криволінійних інтегралів першого і другого роду, загального криволінійного інтеграла другого роду, фізичний зміст криволінійних інтегралів.
9. Зведення криволінійних інтегралів до визначеного інтеграла Рімана.
10. Поняття гомеоморфізму множин, локального гомеоморфізму. Поняття елементарної області, простої плоскої області. Поняття поверхні. Поняття околу точки на поверхні. Приклад поверхні.
11. Поняття двосторонньої поверхні. Повні та обмежені поверхні.
12. Поняття площі поверхні. Формули площі поверхні, що задана параметрично, явно.
13. Поняття поверхневих інтегралів першого і другого роду, загального криволінійного інтеграла другого роду. Фізичний зміст поверхневих інтегралів.
14. Зведення поверхневих інтегралів до кратних інтегралів Рімана: загальні формули і частковий випадок декартової системи координат.
15. Дивергенція і ротор векторного поля. Їх фізичний зміст. Формули для обчислення.
16. Формули Гріна, Остроградського-Гаусса, Стокса.
17. Потенціальне поле. Умови незалежності криволінійного інтеграла на площині від шляху інтегрування.

**Надати відповідь на теоретичні питання з обґрунтуванням:**

1. Поняття  $m$ –вимірного проміжку. Міра проміжку та її властивості. Розбиття проміжку. Поняття кратного інтеграла по  $m$ –вимірному проміжку та інтегровності. Необхідна умова інтегровності.
2. Критерій Дарбу інтегровності на  $m$ –вимірному проміжку.
3. Класи функцій, інтегровних на  $m$ –вимірному проміжку.
4. Допустимі множини, приклади. Означення інтеграла по множині та його коректність. Критерій Лебега інтегрованості функції на множині.
5. Об'єм допустимої множини.
6. Властивості кратних інтегралів по множині, пов'язані із знаком рівності.
7. Властивості кратних інтегралів по множині, пов'язані із знаком нерівності.
8. Теорема Фубіні.
9. Наслідки з теореми Фубіні.
10. Заміна змінної під знаком кратного інтеграла. Евристичний підхід до доведення.
11. Полярні, сферичні і циліндричні координати.
12. Поняття криволінійних інтегралів першого і другого роду, загального криволінійного інтеграла другого роду, наслідки з означення, фізичний зміст криволінійних інтегралів.
13. Поняття гладкої на відріжку кривої, поняття особливої і звичайної точок. Зведення криволінійних інтегралів до визначеного інтеграла Рімана. Криволінійні інтеграли за кусково гладкою кривою і від кусково гладких функцій.
14. Властивості криволінійних інтегралів першого роду.
15. Поняття гомеоморфізму множин, локального гомеоморфізму. Поняття елементарної області, простої плоскої області. Поняття поверхні. Поняття околу точки на поверхні. Приклад поверхні.

16. Довести, що множина точок, що задовольняє рівнянням,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , має в простій плоскій області неперервні часткові похідні першого порядку, а матриця

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ має ранг 2 являє собою поверхню.}$$

17. Поняття координатних ліній на поверхні, дотичних площин і нормалей в точках поверхні. Поняття двосторонньої поверхні. Повні та обмежені поверхні. Леми про однозначне проєктування малих околіть точок на координатні площини, дотичні площини, про кут між нормальними в точках таких околіть.
18. Поняття площі поверхні. Виведення загальної формули для обчислення площі поверхні, що виражається через подвійний інтеграл від векторного добутку дотичних векторів.
19. Формули площі поверхні, що задана параметрично, явно.
20. Поняття поверхневих інтегралів першого і другого роду, загального криволінійного інтеграла другого роду, наслідки з означення, фізичний зміст поверхневих інтегралів.
21. Зведення поверхневих інтегралів до кратних інтегралів Рімана (загальні формули і частковий випадок декартової системи координат).
22. Біортогональні базиси. Перетворення базисів. Матриці переходу від старого базису до нового, від базису до біортогонального до нього базису.
23. Дивергенція і ротор лінійного оператора. Дивергенція і ротор в ортонормованному базисі.
24. Скалярне і векторне поле, їх диференційовність, похідні за напрямом.
25. Дивергенція і ротор векторного поля. Їх фізичний зміст. Формули для обчислення.
26. Формула Гріна.
27. Формула Остроградського-Гаусса.
28. Формула Стокса.
29. Потенціальне поле. Умови незалежності криволінійного інтеграла на площині від шляху інтегрування.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Основна:

1. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина 2: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Укл. С.М. Гребенюк, М.І. Клименко, Н.М.Д'яченко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В.Леонтьєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2013. – 499 с.
2. Зорич В.А. Математический анализ: В 2 ч. / В.А. Зорич – Ч.1.–М.: Фазис. – 1997. – 554 с.; Ч. 2. – 1984. – 640 с.
3. Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х. Сендов. – М.: Наука, 1979. – 720 с.
4. Ильин В.А. Математический анализ. Продолжение курса анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х. Сендов. – М.:Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц –Т.1. – М.:Физматлит, 1969. – 607 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц –Т.2. – М.: Наука, 1966. – 800с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц –Т.3. – М.: Наука, 1966. – 656с.
8. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; под общ. ред. В.А. Садовниченко.– М.: Факториал, 1996. – 477 с.
9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу/ Б.П. Демидович – М.:Наука, 1990. – 624 с.

### Додаткова:

10. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман – М.:Наука, 1985. – 383 с.

11. *Виноградова И.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях / *И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий.* – М.: изд-во Моск. ун-та, 1991. – 352 с.
12. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах / *Л.І.Дюженкова, Т.В.Колесник, М.Я.Лященко, Г.О.Михалін, М.І.Шкіль.* – Ч. 1. – К.: Вища школа, 2002. – 462 с.
13. *Ильин В.А.* Основы математического анализа: В 2 ч. / *В.А.Ильин, Э.Г. Позняк.* – М.: Наука. – Ч.1. – 1982. – 616 с.; Ч.2. – 1980. – 447 с.
14. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / *С.М. Никольский.* – Т.1. – 1990. – 528 с.; Т.2. – 1991. – 543 с.
15. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике: В 5 ч. / *И.А. Каплан.* Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1967. – Ч. 1. – 947 с.; 1974. – Ч. 2. – 368 с.; Ч. 3 – 374 с.; Ч. 4 – 500 с.
16. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 2 т. / *Л.Д. Кудрявцев.* – М.:Высш.шк. – Т. 1. – 1981. – 687 с.; Т. 2. – 1981. – 584 с.
17. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. В. 2 т. / *Л. Д. Кудрявцев.* – Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – М.: Физматлит, 2005. – 400 с; Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ переменной. – М.: Физматлит, 2005. – 424 с.
18. *Кудрявцев Л.Д.* Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды / *Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др.* – М.: Физматлит, 2003. – 504 с.; Т.3. Функции нескольких переменных. – М.: Физматлит, 2003. – 472 с.
19. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз: У 2 ч. / *І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук.* – Ч.1. – К.:Вища шк. – 1992. – 494 с.; Ч.2. – 1993. – 375 с.
20. Математический анализ в примерах и задачах / *И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головчак.* – К.:Вища шк. – Ч.1. Введение в анализ, производная, интеграл. – 1974. – 679 с.; Ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. – 1977. – 671 с.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	<b>3</b>
<b>Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ</b> .....	<b>4</b>
§1. Кратні інтеграли .....	<b>4</b>
1 Інтеграл Рімана на $m$ -вимірному проміжку (4). 2 Критерії Дарбу інтегровності функції багатьох змінних на проміжку (6). 3 Класи інтегровних функцій на проміжку (8). 4 Інтеграл по множині (9). 5 Загальні властивості кратних інтегралів (12). 6 Зведення кратного інтеграла до повторного (17). 7 Заміна змінних в кратному інтегралі (20).	
§2. Криволінійні та поверхневі інтеграли.....	<b>29</b>
1 Криволінійний інтеграл (29). 2 Поверхневі інтеграли (35).	
§3. Елементи теорії поля. Основні інтегральні формули аналізу.....	<b>48</b>
1 Повторення з курсу лінійної алгебри (48). 2 Скалярні і векторні поля (50). 3 Дивергенція, ротор, похідна за напрямом векторного поля (52). 4 Формула Гріна (54). 5 Формула Остроградського-Гаусса (57). 6 Формула Стокса (60). 7 Умови незалежності криволінійного інтеграла на площині від шляху інтегрування. Потенціальні векторні поля (63).	
<b>Розділ 2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ</b> .....	<b>67</b>
§1. Кратні інтеграли.....	<b>67</b>
1 Варіанти індивідуального завдання (67).	
2 Приклад розв'язання варіанта індивідуального типового завдання (74).	
§2. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля .....	<b>89</b>
1 Варіанти індивідуального завдання (89)	
2 Приклад розв'язання варіанта індивідуального типового завдання (100)	
<b>Розділ 3. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ</b> .....	<b>117</b>
<b>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА</b> .....	<b>119</b>
<b>ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК</b> .....	<b>120</b>

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Аддитивність кратного інтеграла 13  
– криволінійного інтеграла першого роду 34
- Базис біортогональний 48
- Властивості інтегральних сум Дарбу 7  
– кратних інтегралів 12
- Геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду 34
- Гомеоморфізм 35  
– локальний 35
- Гradient скалярного поля 50
- Границя інтегральних сум на кривій 30  
– – – на поверхні 44  
– – – на проміжку 5
- Дивергенція векторного поля 52, 58  
– оператора 49
- Дифеоморфізм 20
- Діаметр розбиття кривої 30  
– – – поверхні 40  
– – – проміжку 5
- Заміна змінних в кратному інтегралі 20, 78, 82
- Зведення криволінійного інтеграла до визначеного 30, 100  
– поверхневих інтегралів до подвійних 45
- Інваріанти лінійного оператора 49
- Інтеграл Дарбу (нижній та верхній) по проміжку 7  
– криволінійний першого роду 30, 100  
– – – другого роду 30, 101  
– – – – повний (або загальний) 30  
– по допустимій множині 10  
– поверхневий другого роду 44, 109  
– – – повний (або загальний) 44, 114  
– – – першого роду 44, 107  
– Рімана (кратний) по проміжку 6  
– – – подвійний 6, 75  
– – – потрійний 6, 84
- Класи інтегровних функцій на проміжку 8
- Координати полярні 23, 78  
– сферичні в  $\square^m$  28  
– – в просторі 26, 87  
– циліндричні 25, 87
- Край поверхні 60
- Крива кусково-гладка 32  
– спрямлювана 29
- Критерії Дарбу інтегровності функції на проміжку 7  
– Лебега інтегровності функції на допустимій множині 11  
– – інтегровності функції на проміжку 9
- Лінійність інтеграла кратного 12  
– – криволінійного першого роду 34
- Лінія координатна 38
- Міра (об'єм) допустимої множини 11, 80, 82, 86, 87  
– – – проміжку 5
- Множина допустима 9, 75, 80  
– лебегової міру нуль 8
- Необхідна умова інтегровності функції на проміжку 6
- Напрямок оббігу зімкнутої кривої 33, 54, 60, 89, 102
- Область елементарна 35  
– квадровна плоска 11  
– однозв'язна плоска 54  
– – – тривимірна 57  
– проста плоска 35
- Окіл точки на поверхні 35  
– – – на кривій 32
- Оператор лінійний 49
- Площа поверхні (означення) 40  
– – – заданої параметрично 43  
– – – заданої явно 43
- Поверхня (означення) 35
- Поверхня без особливих точок 38  
– гладка 38  
– двостороння 39  
– з краєм 60  
– квадровна 40  
– обмежена 39  
– однозв'язна 60  
– повна 39
- Поле векторне 50  
– – – диференційовне 51  
– – – потенціальне 63  
– скалярне 50  
– – – диференційовне 50
- Потенціал векторного поля 63
- Похідна за напрямом векторного поля 51, 54, 58  
– – – скалярної функції 50
- Проміжок  $m$ -вимірний 5
- Робота сили 30, 54, 115
- Розмір ділянки на поверхні 39, 44
- Ротор векторного поля 52-54, 61  
– лінійного оператора 49
- Суми інтегральні Дарбу (нижня та верхня) на проміжку 6  
– – – Рімана на проміжку 5
- Теорема Фубіні 16, 75  
– про середнє для кратного інтеграла 15  
– – – для криволінійного інтеграла 34
- Течія векторного поля 45, 50, 54, 58, 61, 114
- Тіло Вівані 26  
– кубовне 11
- Точка відмічена 5  
– особлива на кривій 29  
– проміжна 5
- Фізичний зміст дивергенції 53  
– – – криволінійного інтеграла (загального) другого роду 30  
– – – криволінійного інтеграла першого роду 30  
– – – поверхневих інтегралів 45  
– – – ротору 53
- Формула Гріна 53, 103, 106  
– Остроградського-Гаусса 58, 108, 114  
– Стокса 61, 110, 116
- Функція, інтегровна на допустимій множині 10  
– – – за Ріманом на проміжку 6  
– характеристична множини 10
- Циркуляція векторного поля 54, 61, 116



---

Навчальне видання  
(українською мовою)

**ГРЕБЕНЮК СЕРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ  
Д'ЯЧЕНКО НАТАЛІЯ МИКОЛАЇВНА  
КРАСІКОВА ІРИНА ВОЛОДИМИРІВНА  
ПАНАСЕНКО ЄВГЕН ВАЛЕРІЙОВИЧ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ:  
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ  
ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

Навчальний посібник  
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки  
«Математика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія»

Рецензент П.Г. Стеганцева  
Відповідальний за випуск Н.М. Д'яченко  
Коректор Н.М. Д'яченко