

Типове завдання «Визначений інтеграл Рімана»

1. Знайти значення інтегралу.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій.
3. Обчислити довжину дуги кривої
4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ($Ox - Vx$, $Oy - Vy$) фігури, обмеженої графіками функцій.

ВАРІАНТ 1

1. а) $\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx$ б) $\int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}$ в) $\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$
 г) $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$ д) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
2. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.
3. а) $x = a(\operatorname{sht} - t)$, $y = a(\operatorname{cht} - 1)$, $0 \leq y \leq 7a$, $x \geq 0$ б) $\rho = \frac{a}{\cos^4 \frac{\varphi}{4}}$ (довжина петлі)
4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$, $x \geq 1$. Знайти Vx .

ВАРІАНТ 2

1. а) $\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 1 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx$ в) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$
 г) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$ д) $\int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}$
2. $y = \frac{10}{x^2 + 4}$, $y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$.
3. а) $x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi$, $y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi$, $0 \leq t \leq t_0$ (клотоїда) б) $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$
4. $y = x \sqrt{\frac{3+3x}{3-x}}$, $0 \leq x \leq 2$, $y = 6$, $x = 0$. Знайти Vy .

ВАРІАНТ 3

1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx$ б) $\int_{-\operatorname{arctg} \frac{1}{3}}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx$ в) $\int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$

$$\Gamma) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$$

$$\Delta) \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$$

$$2. y = 2x^2 e^x, y = -x^3 e^x.$$

$$3. \quad \text{а)} x = \sin^4 t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{б)} \rho = \frac{a}{\sin^3 \frac{\varphi}{3}} \text{ (ДОВЖИНА ПЕТЛІ)}$$

$$4. y^2(x-a) + x^2(x+a) = 0, 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, x = \frac{a}{2}. \text{Знайти } Vx.$$

ВАРІАНТ 4

$$1. \text{ а)} \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx$$

$$\text{б)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx \quad \text{в)}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$$

$$\Gamma) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 \left(\frac{x}{2} \right) \cos^4 \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

$$\Delta) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$$

$$2. y = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4, y = 0, x = x_1, x = x_2, \text{ де } x_1 \text{ і } x_2 - \text{ точки максимуму функції.}$$

$$3. \quad \text{а)} x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}, a \neq b \quad \text{б)} \rho = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$$

$$4. y = \frac{a^3}{x^2 + a^3}, y = \frac{a}{2}. \text{Знайти } Vy.$$

ВАРІАНТ 5

$$1. \text{ а)} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$\text{в)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$\Gamma) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(7 + 3 \operatorname{tg} x) dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}$$

$$\Delta) \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$$

$$2. x^2 + y^2 = 2, y^2 = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}.$$

$$3. \quad \text{а)} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi \quad \text{б)} \rho = a \varphi^3, 0 \leq \varphi \leq 4$$

$$4. y = e^{\alpha x} \sin \pi x, n-1 \leq x \leq n, y = 0, n \in \mathbb{N}. \text{Знайти } Vx.$$

ВАРІАНТ 6

1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$

б) $\int_{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{(2 \operatorname{tg} x + 5) dx}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}$

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^4 x \cos^8 x dx$

г) $\int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

д) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

2. $y = 4^{-x}$, $y = -\log_4 x$, $y = 0$, $x = 0$.

3. а) $x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}$ (трактриса).

б) $\rho = a(1 - \sin \varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$

4. $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$. Знайти V_y .

ВАРІАНТ 7

1. а) $\int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$

б) $\int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx$ в) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 2x \cos^6 2x dx$

г) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

д) $\int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx$

2. $y = x^2$, $y = x^2 + x - 1$, $y = \frac{\sqrt{5x}}{2}$, $y \leq x^2$.

3. а) $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$, $y = 2 \operatorname{ch} t$, $0 \leq t \leq t_0$ б) $\rho = a \varphi^4$, $0 \leq \varphi \leq 3$.

4. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 3}}$, $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$. Знайти V_x .

ВАРІАНТ 8

1. а) $\int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx$

в) $\int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

г) $\int_0^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$

д) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

2. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

3. а) $x = 2t^2$, $y = t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)$ (довжина петлі)

б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$.

4. $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$. Знайти V_y .

ВАРІАНТ 9

1. а) $\int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx$ б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx$ в) $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx$ д) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

2. $y = 3^x$, $y = \frac{9}{4}(3^{-x} + 1) + \frac{8}{3}$, $y = 9$.

3. а) $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$ (довжина петлі)

б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = e^{a\varphi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$, ($a > 0$).

4. $y = \sqrt{\frac{9+x}{9-3x}}$, $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$, $y = 0$. Знайти V_x .

ВАРІАНТ 10

1. а) $\int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx$ б) $\int_{-\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}}^0 \frac{(11-3 \operatorname{tg} x) dx}{\operatorname{tg} x + 3}$ в) $\int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$

г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx$ д) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$

2. $y = x+1$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$, $0 \leq y \leq 1$.

3. а) $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $c^2 = a^2 - b^2$ (еволюта еліпса)

б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = 5\varphi$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 10\pi$.

4. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$. Знайти V_y .

ВАРІАНТ 11

1. а) $\int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4-7 \operatorname{tg} x}{2+3 \operatorname{tg} x} dx$ в) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}} dx$

г) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx$ д) $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$

2. $x = y^2(y-1), x=0$.

3. а) $x = 2t^3(1-t^2), y = t^4\sqrt[4]{15}$ (довжина петлі) б) $\rho = a \cos^5 \frac{\varphi}{5}$

4. $(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2, x=0, y=0, x \leq R, y \leq R$. Знайти V_x .

ВАРІАНТ 12

1. а) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$

б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2 x dx}{4 + 3 \cos 2x}$

в) $\int_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$

г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$

д) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

2. $y = |\log_a x|, y=0, x = \frac{1}{a}, x=a, a>1$.

3. а) $x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), y = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ (евольвента круга)

б) $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, p > 0$

4. $y = \sin x, y=0, 0 \leq x \leq \pi$. Знайти V_y .

ВАРІАНТ 13

1. а) $\int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx$

б) $\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3tg^2 x - 1}{tg^2 x + 5} dx$

в) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx$

г) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx$

д) $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

2. $y = \sin^2 x, y = x \sin x, 0 \leq x \leq \pi$.

3. а) $x = a(t^2 - 1), y = \frac{2a}{\sqrt{3}} \left(t^3 - \frac{t}{4} \right)$ (довжина петлі) б) $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$

4. $2py = x^2, 2gy = (x-a)^2, y=0$. Знайти V_x .

ВАРІАНТ 14

1. а) $\int_{-2}^0 (x^2 + 3) e^{3x} dx$

б) $\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3tg^2 x + 1}{tg^2 x + 4} dx$

в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^2 \sin^2 x \cos^2 x dx$

г) $\int_0^{\frac{\sqrt{8}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$

д) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{12x - \arctg 3x}{1 + 9x^2} dx$

2. $y = \sin 2x, y = 2x, 0 \leq x \leq \pi$.

3. а) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$

б) $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$

4. $y = 3x - x^2$, $y = 0$. ЗНАЙТИ Vx .

ВАРИАНТ 15

1. а) $\int_{-2}^0 (x^3 + 2)e^x dx$

б) $\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3tg^2 x}{tg^2 x + 5} dx$

в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^6 x dx$

г) $\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(6-x^2)^3}}$

д) $\int_0^1 \frac{x - 4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

2. $y = x^2 \sin x$, $y = x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.

3. а) $x = ch^3 t$, $y = sh^3 t$ ($0 \leq t \leq T$)

б) $\rho = a \sin^5 \frac{\varphi}{5}$

4. $y = 3x - x^2$, $y = 0$. ЗНАЙТИ Vy .