

Індивідуальне практичне завдання «Функціональні ряди»

1. Визначити множини збіжності (абсолютної та умовної) функціональних рядів.

1. а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-2x}{1+2x} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$.
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2x-3}{2x} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^n}$.
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 6x + 12)^n}{4^n (n^2 + 1)}$.
4. а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 4} \left(\frac{x-2}{2x+1} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + x}$.
5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{x+n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{tg} x)^n}{n^2 + 4}$.
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2 - 4x + 6)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2 + 4x + 2)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n + e^x)}$.
8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n+1} \frac{1}{(3x^2 + 8x + 6)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n}$.
9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{xn^x}$.
10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(25x^2 + 1)^n}{2^n (n^2 + 1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 5x + 11)^n}{5^n (n^2 + 5)}$.
11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n+1})^{2x+1}}$.
12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(x+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^{nx} + 2}$.
13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{n^2 + 2} \frac{1}{(3x^2 + 10x + 9)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n-x}}$.
14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.
15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+4)^n}$.
16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+7)^n}$.
17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^n}{n^{n+x}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$.
18. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{(x-3)^{2n}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.
19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)}$.
20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{n+x^3}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$.

2. Дослідити функціональні послідовності на рівномірну збіжність на вказаних множинах X_1, X_2 .

1. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$, $X_1 = [0;1]$; $X_2 = [1;+\infty)$.
2. $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{n}{x}$, $X_1 = (0;a)$; $X_2 = [0;+\infty)$, $a > 0$.
3. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$, $X_1 = [0;1]$; $X_2 = [0;+\infty)$.
4. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$, $X_1 = (0;2)$; $X_2 = [0;+\infty)$.

$$5. f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right), X_1 = (0; +\infty); X_2 = (a; +\infty), a > 0.$$

$$6. f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + 2n + x}, X_1 = [0; 2]; X_2 = [1; +\infty).$$

$$7. f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, X_1 = [-2; 2]; X_2 = (-\infty; +\infty).$$

$$8. f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^x}, X_1 = (1; 2); X_2 = (2; +\infty).$$

$$9. f_n(x) = \frac{x}{n + x}, X_1 = [0; a], 0 < a < +\infty; X_2 = [0; +\infty).$$

$$10. f_n(x) = \frac{(n+x)^2}{x^2 + n^2 - nx}, X_1 = [0; 2]; X_2 = (2; +\infty).$$

$$11. f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right), X_1 = (0; 2); X_2 = (2; +\infty).$$

$$12. f_n(x) = \cos \frac{1}{nx}, X_1 = (0; \pi); X_2 = (\pi; +\infty).$$

$$13. f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, X_1 = (-a; a), a > 0; X_2 = (-\infty; +\infty).$$

$$14. f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), X_1 = (0; +\infty); X_2 = (5; +\infty).$$

$$15. f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{x}, X_1 = \left(0; \frac{\pi}{2}\right); X_2 = [0; +\infty).$$

$$16. f_n(x) = \sin \frac{1}{nx}, X_1 = (0; \pi); X_2 = (\pi; +\infty).$$

$$17. f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}, X_1 = [0; 5]; X_2 = [0; +\infty).$$

$$18. f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right), X_1 = [0; 1]; X_2 = [1; +\infty).$$

$$19. f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + \sqrt[2]{n^5 x^6}}, X_1 = (0; 1); X_2 = (1; +\infty).$$

$$20. f_n(x) = \frac{\sqrt{nx^3}}{x^2 + n^2}, X_1 = (0; 1); X_2 = (1; +\infty).$$

3. Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями x . Вказати область збіжності отриманого ряду.

$$1. f(x) = \frac{9}{20 - x - x^2}.$$

$$2. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}.$$

$$3. f(x) = \ln(1 - x - 6x^2).$$

$$5. f(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{x} - 2.$$

$$7. f(x) = (x-1)\sin 5x.$$

$$9. f(x) = \frac{6}{8 + 2x - x^2}.$$

$$11. f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 - 3x}}.$$

$$13. f(x) = (x+2)\cos 3x.$$

$$15. f(x) = \frac{3}{-6 + 7x - x^2}.$$

$$17. f(x) = \ln(-x^2 - 5x + 14).$$

$$19. f(x) = \frac{x}{\sqrt[5]{9 - 2x}}.$$

$$4. f(x) = 2x \cos^2 \frac{x}{2} - x.$$

$$6. f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{27 - 2x}}.$$

$$8. f(x) = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{x^2}.$$

$$10. f(x) = \frac{6}{6 + x - x^2}.$$

$$12. f(x) = \ln(-x^2 + 20x - 99).$$

$$14. f(x) = 2x \sin^2 \frac{x}{2} - x.$$

$$16. f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{2 + 7x}}.$$

$$18. f(x) = \frac{5}{x^2 + 2x - 35}.$$

$$20. f(x) = \frac{1}{x^2 - 18x + 77}.$$

4. Побудувати розклад функції в ряд Маклорена. Знайти радіус збіжності ряду.

$$1. \text{ а) } f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{3 - 4x^2}{6 + 2x^2}.$$

$$2. \text{ а) } f(x) = \ln(x^3 + \sqrt{x^6 + 9}); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2 - x}{1 + 2x}.$$

$$3. \text{ а) } f(x) = \ln(x^3 + \sqrt{x^6 + 64}); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{x + 6}.$$

$$4. \text{ а) } f(x) = x \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 9}); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2 + x^2}{2 - x^2}.$$

$$5. \text{ а) } f(x) = (x^2 - 1) \arcsin(2x^2); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}}.$$

$$6. \text{ а) } f(x) = x^2 \arccos(2x); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{x + 1}.$$

$$7. \text{ а) } f(x) = \ln(1 - x - 12x^2); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x + 25}{x - 25}.$$

$$8. \text{ а) } f(x) = x^2 \ln(4 + x^2); \text{ б) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 6}{x^2 - 6}.$$

9. а) $f(x) = (x^2 + 1)\arccos(2x)$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2 - \frac{x^3}{2}}{1 + x^3}$.
10. а) $f(x) = x \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 16})$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{3} + 3x^2}{x^2 - 1}$.
11. а) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 - 7})$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{3 - 4x^2}{6 + 2x^2}$.
12. а) $f(x) = (x^2 + 4)\arcsin(x^2)$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{2 - x}{1 + 2x}$.
13. а) $f(x) = \ln(x^4 - \sqrt{x^8 - 4})$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{2x - 3}{x + 6}$.
14. а) $f(x) = x \ln(x^3 - \sqrt{x^6 - 4})$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{2 + x^2}{2 - x^2}$.
15. а) $f(x) = (x^2 - 8)\arccos(4x)$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}}$.
16. а) $f(x) = \ln(x^3 + \sqrt{x^6 + 64})$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1 - x}{x + 1}$.
17. а) $f(x) = x \ln(x - \sqrt{x^2 - 9})$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x + 25}{x - 25}$.
18. а) $f(x) = (x^2 + 2)\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x^2 + 6}{x^2 - 6}$.
19. а) $f(x) = x \ln(x - \sqrt{x^2 + 3})$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{2 - \frac{x^3}{2}}{1 + x^3}$.
20. а) $f(x) = \ln(x^4 + \sqrt{x^8 + 16})$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{\frac{1}{3} + 3x^2}{x^2 - 1}$.

5. Знайти радіус і область збіжності степеневого ряду.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{2n} x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} (x + 1)^{n^2}$.
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15x^n}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (n^3 + 2)(x + 1)^{2n}$.
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n x^n}{n 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 5)^n}{n^3 3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2} x^n$.

4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}} (3+x)^n$.
5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$.
6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n \ln^2(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n} x^{5n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n$.
7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3n^2 x^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3)}{3n^2+4} x^{2n+1}$.
8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n!} x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n$.
9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x+1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n n!$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{4n}}{n^2}$.
10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$.
11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n} (x-3)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n$.
12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$.
14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n 2^n \sqrt{5n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{2n^3} x^n$.
15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-7)^{2n}}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n \ln(n+2)}$.
16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{9^n \sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3 x^n}{9^n}$.
17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1} \sqrt{4n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x+8)^{2n+1}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{5n+4}$.
18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^{2n}}{(n+2) \ln(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1} \sqrt{12n-4}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n x^n$.
19. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n 3^n \sqrt{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(x-8)^n}{6^{n+2}}$.

$$20. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14n+6}{n!} x^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{(n+1)!}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{5^n(n+2)}.$$

6. Розкласти функцію в ряд Фур'є: а) за синусами; б) за косинусами; в) з періодом $T = 4$. Зобразити графіки функцій.

$$1. f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;2]; \\ 2, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0;2]; \\ 4, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0;2]; \\ 6-x, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (0;2]; \\ 4, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0;2]; \\ x-4, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0;2]; \\ -2, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;2]; \\ 4-x, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0;2]; \\ 2x-6, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 2-2x, & x \in (0;2]; \\ -2, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 2-2x, & x \in (0;2]; \\ x-4, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} 2-2x, & x \in (0;2]; \\ 2x-6, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} 2x-2, & x \in (0;2]; \\ 6-2x, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;2]; \\ 6-2x, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 2x-2, & x \in (0;2]; \\ 2, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \in (0;2]; \\ 2, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (0;2]; \\ 8-2x, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} 4-2x, & x \in (0;2]; \\ x-2, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in (0;2]; \\ x-2, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (0;2]; \\ 0, & x \in (2;4). \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (0;2]; \\ 2-x, & x \in (2;4). \end{cases}$$