

КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Криволінійні інтеграли

Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай L – відрізок кусочно-гладкої кривої з початком в точці A і кінцем в точці B , $z = f(x, y)$ – обмежена функція, задана в деякій області, в якій розташовано криву L . Розіб'ємо криву L точками на n елементарних дуг, довжини яких Δl_i . На кожній дузі виберемо точку P_i . Тоді, якщо існує границя:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(P_i) \Delta l_i$$

яка не залежить ні від вибору точок, ні від розбиття, то її називають криволінійним інтегралом 1-го роду і позначають:

$$\int_L f(x, y) dl, \text{ або } \int_{\cup AB} f(x, y) dl.$$

Криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від напрямку руху вздовж кривої AB , тобто $\int_{\cup AB} f(x, y) dl = \int_{\cup BA} f(x, y) dl$.

Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x)$, $x \in [a, b]$:
$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (2.1)$$

2. Параметричне задання кривої:
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]:$$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt \quad (2.2)$$

Криволінійний інтеграл другого роду

Нехай L – відрізок кусочно-гладкої кривої з початком в точці A і кінцем в точці B , $z = f(x, y)$ – обмежена функція, яку задано в деякій області, в якій розташовано криву L . Розіб'ємо криву L точками на n елементарних дуг, довжини яких Δl_i . На кожній дузі виберемо точку P_i . Тоді, якщо існує границя:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(P_i) \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \text{ (проекція } \Delta l_i \text{ на вісь } x),$$

яка не залежить ні від вибору точок ні від розбиття, то її називають криволінійним інтегралом 2-го роду і позначають: $\int_L f(x, y) dx$. Цілком аналогічно

можна ввести інтеграл $\int_L f(x, y) dy$.

Якщо на кривій $\cup AB$ визначено функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, то можна розглянути криволінійний інтеграл „загального” вигляду:

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

або аналогічно для просторової кривої:

$$\int_{\cup AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz ,$$

Зауважимо, що для криволінійного інтегралу 2-го роду важливий напрямок інтегрування, тобто

$$\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{\cup BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x)$, $x \in [a, b]$:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx . \quad (2.3)$$

2. Параметричне задання кривої: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) , \quad t \in [a, b] : \\ z = \chi(t) \end{cases}$

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (P\varphi'(t) + Q\psi'(t) + R\chi'(t))dt . \quad (2.4)$$

Зв'язок між криволінійними інтегралами:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)dl ,$$

де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляючі косинуси дотичної, в припущенні, що її напрямок відповідає напрямку шляху інтегрування.

Формула Гріна (зв'язок криволінійного та подвійного інтегралів):

Нехай замкнутий контур L обмежує область D . Тоді справедлива формула:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy . \quad (2.5)$$

Умови незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування

Нехай функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ разом із похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D , тоді інтеграл $\int_L Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування $L \subset D$,

якщо вираз $Pdx + Qdy$ є диференціалом деякої функції u , тобто $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

Інтеграл знаходять за формулою: $\int_L Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$, де $L = \cup AB$.

Для того, щоб вираз $Pdx + Qdy$ був диференціалом \Leftrightarrow щоб $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Для знаходження функції u можна використовувати формулу:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta . \quad (2.6)$$

В просторовому випадку відповідні умови мають вигляд:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

а функцію можна одержати за формулою:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta, z_0) d\eta + \int_{z_0}^z R(x, y, \zeta) d\zeta. \quad (2.7)$$

Застосування криволінійних інтегралів:

1. Знаходження довжин кривих: $l = \int_L dl$.

2. Знаходження площ фігур: $S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$.

3. Застосування в механіці: маса кривої: $m = \int_L \gamma(x, y, z) dl$,

координати центра мас: $x_c = \frac{1}{m} \int_L x\gamma(x, y, z) dl$, $y_c = \frac{1}{m} \int_L y\gamma(x, y, z) dl$, $z_c = \frac{1}{m} \int_L z\gamma(x, y, z) dl$.

4. Робота сили \vec{F} вздовж кривої L : $A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$, де P , Q , R – координати \vec{F} .

2.2. Поверхневі інтеграли

Поверхневий інтеграл першого роду

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і обмежена на гладкій поверхні S . Розіб'ємо поверхню S на „елементарні” поверхні S_i , площі яких ΔS_i . Нехай λ – найбільший з діаметрів S_i і M_i – довільна точка поверхні S_i . Тоді, якщо існує границя: $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta S_i$, яка не залежить ні від вибору точок ні від розбиття, то її називають поверхневим інтегралом 1-го роду функції $f(x, y, z)$ по поверхні S і позначають: $\iint_S f(x, y, z) dS$.

Методи обчислення:

1. Нехай поверхню задано параметрично $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$, тоді:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv. \quad (2.8)$$

де D – область в системі координат (u, v) , яка відповідає поверхні,

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} = A^2 + B^2 + C^2.$$

В диференціальній геометрії прийнято позначати вираз I через E , Π – через F , III – через G . Числа E , F , G називають *гаусовими коефіцієнтами поверхні*. $A^2 + B^2 + C^2 = E \cdot G - F^2$. Тоді, поверхневий інтеграл має вигляд:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv.$$

2. Нехай поверхню задано явно $z = z(x, y)$. Нехай область D – це область у площині xy , яка відповідає нашій поверхні, тоді:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2.9)$$

Застосування поверхневих інтегралів першого роду:

1. Обчислення площі поверхні. $S_{\text{нов}} = \iint_S dS$. Якщо поверхню задано

параметрично: $S_{\text{нов}} = \iint_D \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv$; якщо явно: $S_{\text{нов}} = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$.

2. Застосування в механіці. Нехай вздовж поверхні розподілено масу, тобто, в кожній точці поверхні відома густина. Тоді справедливі формули:

маса поверхні: $m = \iint_S \gamma(x, y, z) dS$,

статичні моменти: $M_{xy} = \iint_S z \gamma dS$, $M_{zy} = \iint_S x \gamma dS$, $M_{xz} = \iint_S y \gamma dS$,

моменти інерції: $I_{xy} = \iint_S z^2 \gamma dS$, $I_{xz} = \iint_S y^2 \gamma dS$, $I_{yz} = \iint_S x^2 \gamma dS$,

координати центра мас: $z_u = \frac{M_{xy}}{m}$, $x_u = \frac{M_{yz}}{m}$, $y_u = \frac{M_{xz}}{m}$.

3. Тяжіння простого шару. Нехай на поверхні S неперервним чином розподілено маси з заданою в будь-якій точці M на поверхні густиною $\gamma(x, y, z)$. Нехай в точці $A(\xi, \eta, \varphi)$, яка розташована поза поверхнею, знаходиться одиниця маси. Потрібно визначити, з якою по величині і напрямку силою \vec{F} точка A притягується поверхнею S . Проекції цієї сили визначається формулами:

$$F_x = \iint_S \gamma \frac{x - \xi}{r} dS, \quad F_y = \iint_S \gamma \frac{y - \eta}{r} dS, \quad F_z = \iint_S \gamma \frac{z - \varphi}{r} dS, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \varphi)^2}.$$

Якщо точка A лежить на поверхні, то проекції сили на вісі координат є невласними інтегралами, оскільки підінтегральні функції необмежені.

Поверхневий інтеграл другого роду

Розглянемо деяку поверхню S в тривимірному просторі. Нехай D – проекція S на площину HOY . Тобто, будь-якій точці $P \in D$ відповідає точка $M \in S$. Тоді, розбиваючи область D на елементарні області, розіб'ємо і поверхню S на елементарні поверхні. Розглянемо елементарну поверхню S_i , їй відповідає область D_i . Розглянемо точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$, знайдемо значення функції f у цій точці, тобто: $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$. Помножимо значення цієї функції на площу D_i і складемо суму $\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot D_i$. Якщо існує границя цієї

інтегральної суми при прямуванні найбільшого діаметру S_i до нуля, то її називають *поверхневим інтегралом другого роду*, розповсюдженим на вибрану сторону поверхні S і позначають: $\iint_S f(x, y, z) dx dy$.

Будемо вважати, що на поверхні S визначені і неперервні функції $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ і також обрано орієнтацію S^+ , тоді можна розглянути інтеграли: $\iint_{S^+} P(M) dy dz$, $\iint_{S^+} Q(M) dx dz$, $\iint_{S^+} R(M) dx dy$, і суму цих інтегралів: $\iint_{S^+} P(M) dy dz + Q(M) dx dz + R(M) dx dy$, останній інтеграл називають *поверхневим інтегралом другого роду*.

Цей інтеграл можна записати через поверхневий інтеграл першого роду: $\iint_{S^+} (P(M) \cos \alpha + Q(M) \cos \beta + R(M) \cos \gamma) dS$, де α, β, γ – кути, які утворюють нормалі до поверхонь з вісями координат при обраній орієнтації, тобто можна вважати, що $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$.

Якщо поверхню задано параметрично, то вірна формула:

$$\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_{D'} (PA + QB + RC) du dv. \quad \text{Таким}$$

чином ми можемо звести поверхневий інтеграл другого роду до поверхневого інтегралу першого роду і до подвійного.

Поверхневі інтеграли можна використовувати також для обчислення об'ємів тіл: $V = \frac{1}{3} \iint_S (z dx dy + x dy dz + y dx dz)$.

Зв'язок між потрійним та поверхневим інтегралами.

Формула Остроградського-Гауса

Нехай тіло V обмежене гладкою поверхнею S , функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – неперервні в цій області разом зі своїми похідними. Тоді вірна формула Остроградського-Гауса:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (2.10)$$

Зв'язок між криволінійним та поверхневим інтегралами. Формула Стокса

Нехай в деякій області, в якій розташовано поверхню S , яка натягнута на контур L , задано функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$, які неперервні в цій області разом зі своїми похідними. Тоді вірна формула Стокса:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz \right). \quad (2.11)$$

Формула Гріна буде частинним випадком формули Стокса.

Якщо поверхневий інтеграл другого типу замінити інтегралом першого типу, то одержимо формулу:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right) dS.$$

Формулу Стокса зручно записувати за допомогою визначника:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \quad (2.12)$$

2.3. Теорія поля

Якщо в кожній точці $M(x, y, z)$ просторової області задано скалярну або векторну величину, то кажуть, що задано поле цієї величини, скалярне $u(x, y, z)$ або векторне $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$.

Основні характеристики полів:

1. Поверхні (лінії) рівня: $u = \text{const}$.

2. Векторні лінії: $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$.

3. Градієнт: $\overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$.

4. Потік векторного поля через поверхню:

$$\Pi = \iint_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) dS = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

5. Дивергенція векторного поля: $\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

6. Циркуляція векторного поля вздовж кривої: $\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz$.

7. Ротор: $\overrightarrow{\text{rot}} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$. Вірна формула Стокса:

$$\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} A \cdot \vec{n} dS.$$

Основні види полів

Векторне поле \vec{A} називають *потенціальним*, якщо існує скалярне поле u , що $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} u$. Для того щоб поле було потенціальним \Leftrightarrow щоб $\overrightarrow{\text{rot}} A = \vec{0}$.

Векторне поле \vec{A} називають *соленоїдальним*, якщо існує векторне поле \vec{B} , що $\vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}} B$. Для того щоб поле було соленоїдальним \Leftrightarrow щоб $\text{div} \vec{A} = 0$.

Довільне векторне поле може бути представлене в вигляді суми потенціального та соленоїдального полів.

2.4. Індивідуальні завдання

- 1, 2. Обчислити криволінійний інтеграл.
3. Довести, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Знайти функцію $u(x, y)$.
4. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл.
5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S , де S – частина площини P , яка розташована між координатними площинами.
6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду.
7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського).
8. Знайти циркуляцію векторного поля через контур трикутника L , утвореного в результаті перетину площин, двома способами (безпосередньо і за формулою Стокса).
9. З'ясувати, чи є векторне поле соленоїдальним, потенціальним?

ВАРІАНТ 1

1. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від $(-1, 1)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L \sqrt{2 - z^2} (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, L : дуга кривої $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t, t \in [0, 2\pi] \\ z = t \end{cases}$.
3. $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$.
4. $\oint_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 4$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint_S (2x + 3y + 2z)dS$, P : $x + 3y + z = 3$.
6. $\iint_S z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.
7. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x + 3y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 30x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + 6(x - z)\vec{k}$, $-6x + 3y + z = -30$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = x^2 y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.

ВАРІАНТ 2

1. $\int_L (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, L : дуга $y = x^3$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, L : дуга кривої $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $\left(\frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} - 5\right)dy$.
4. $\oint_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 9$, яке пробігається за ходом годинникової стрілки.

5. $\iint_S (2 + y - 7x + 9z) dS$, $P: 2x - y - 2z = -2$.
6. $\iint_S (z + 1) dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.
7. $\vec{A} = 30x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + 6(x - z)\vec{k}$, $S: -6x + 3y + z = -30$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 12x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (7x - z)\vec{k}$, $x + 3y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xz\vec{k}$.

ВАРІАНТ 3

1. $\int_L (x^2 - y^2) dx + xy dy$, L : відрізок прямої від $(1, 1)$ до $(3, 4)$.
2. $\int_L y dl$, L : дуга кривої $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, між точками $(1, 0)$ і $(0, 1)$.
3. $-(0,5 \cos 2y + y \sin 2x) dx + (x \sin 2y + \cos^2 x + 1) dy$.
4. $\oint_L (-x^2 y) y dx + xy^2 dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 4$, яке пробігається проти ходу

годинникової стрілки.

5. $\iint_S (2x + 3y + 2z + 3) dS$, $P: x + 3y + z = 1$.
6. $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.
7. $\vec{A} = 12x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (7x - z)\vec{k}$, $S: x + 3y + z = -1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 3x\vec{i} - 4(y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $x + 3y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = (x^2 - z^2)\vec{i} - 3xy\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$.

ВАРІАНТ 4

1. $\int_L \cos y dx - \sin x dy$, L : відрізок прямої від $(2\pi, -2\pi)$ до $(-2\pi, 2\pi)$.
2. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, L : дуга кривої $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in [0, 2\pi] \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}$.
3. $(y^2 e^{xy^2} + 3) dx + (2xy e^{xy^2} - 1) dy$.
4. $\oint_L (-x^2 y) y dx + xy^2 dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 9$, яке пробігається за ходом годинникової стрілки.

5. $\iint_S (4 - 2x + 3y + 2z) dS$, $P: 3x + 3y + z = 3$.
6. $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
7. $\vec{A} = 3x\vec{i} - 4(y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $S: x + 3y + z = 30$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (y + z)\vec{j} - 4(x - z)\vec{k}$, $x + 3y + z = -3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = 2xyz\vec{i} - y(yz + 1)\vec{j} + z\vec{k}$.

ВАРІАНТ 5

1. $\int_L xy dx + (y - x) dy$, L : дуга параболи $y = x^3$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.

2. $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$, L : дуга кривої $\rho = 1 + \cos \varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $\left(\frac{1}{x+y} + \cos x \cos y - 3x^2\right) dx + \left(\frac{1}{x+y} - \sin x \sin y + 4y\right) dy$.
4. $\oint_L (-x^2 y) y dx + xy^2 dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 25$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iiint_S (2x + 3y + 2z - 5) dS$, P : $x + 3y + 6z = 3$.
6. $\iint_S (x^2 + y^2) z dx dy$, S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
7. $\bar{A} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} - 4(x-z)\bar{k}$, S : $x + 3y + z = -3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\bar{A} = 2x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (3x-z)\bar{k}$, $x + 3y + z = 3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\bar{A} = (2x-3y)\bar{i} + 2xy\bar{j} - z^2\bar{k}$.

ВАРІАНТ 6

1. $\int_L xy dx + (y-x) dy$, L : дуга параболи $y^2 = x$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L \sqrt{2y} dl$, L : перша арка циклоїди $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.
3. $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right) dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right) dy$.
4. $\oint_L (-x^2 y) y dx + xy^2 dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iiint_S (12x + 3y + 2z + 2) dS$, P : $x + 3y + z = 30$.
6. $\iint_S (x+y) dy dz + 3y dx dz + 4z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розташована в першому октанті.
7. $\bar{A} = 2x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (3x-z)\bar{k}$, S : $-2x + 3y + z = 6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\bar{A} = 3x\bar{i} + (3y+z)\bar{j} + (x-5z)\bar{k}$, $x + 3y + z = 3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\bar{A} = yz\bar{i} + (x-y)\bar{j} + z^2\bar{k}$.

ВАРІАНТ 7

1. $\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy$, L : дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ від $(1, 0)$ до $(0, 2)$.
2. $\int_L (x^2 + y^2) dl$, L : коло $x^2 + y^2 = 4$.
3. $(e^{x+y} - \cos x) dx + (e^{x+y} + \sin y) dy$.
4. $\oint_L (-x^2 y) y dx + xy^2 dy$, L : еліпс $x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iiint_S (2x + 5y - 2z) dS$, P : $x + 2y + z = 10$.
6. $\iint_S 4x dy dz + 2y dx dz - z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7. $\bar{A} = 3x\bar{i} + (3y+z)\bar{j} + (x-5z)\bar{k}$, $S: -3x+3y+z=9$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\bar{A} = -3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\bar{A} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$.

ВАРІАНТ 8

1. $\int_L xy dx + (y-x)dy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl$, L : перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 2t \end{cases}$.
3. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y \right) dy$.
4. $\oint_L (-x^2y)dx + xy^2dy$, L : еліпс $9x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint_S (2x+3y+2z-8)dS$, $P: x+3y-z=3$.
6. $\iint_S z^2 dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.
7. $\bar{A} = -3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $S: x+5y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\bar{A} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-6z)\bar{k}$, $x+3y-6z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\bar{A} = (x+y)\bar{i} - 2(y+z)\bar{j} - (x-z)\bar{k}$.

ВАРІАНТ 9

1. $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, L : відрізок прямої від $(0, 0)$ до $(2, 2)$.
3. $(e^{xy} + xye^{xy} + 2)dx + (x^2e^{xy} + 1)dy$.
4. $\oint_L (2-x^2y)udx + 3xy^2dy$, L : еліпс $x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint_S (2x-9y+2z)dS$, $P: x+7y+z=7$.
6. $\iint_S 3z^2 dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$.
7. $\bar{A} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-6z)\bar{k}$, $S: x+3y-6z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\bar{A} = 3x\bar{i} - (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $x-y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\bar{A} = (yz-2x)\bar{i} + (xz+zy)\bar{j} + xy\bar{k}$.

ВАРІАНТ 10

1. $\int_L (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$, L : дуга параболи $y^2 = 4x$ від $(0, 0)$ до $(1, 2)$.
2. $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})dl$, L : відрізок прямої від $(-1, 0)$ до $(0, 1)$.
3. $(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$.

4. $\oint_L (-x^2 y) y dx + 4xy^2 dy$, L : еліпс $x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається за ходом годинникової стрілки.

5. $\iiint_S (2x + 3y + 2z + 5) dS$, P : $5x + 3y + z = 15$.

6. $\iiint_S 4x dy dz + 2y dx dz + 4z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

7. $\vec{A} = 3x\vec{i} - (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x - y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

8. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (2y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $x - 3y + z = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

9. $\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

ВАРІАНТ 11

1. $\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy$, L : відрізок прямої від $(1, 0)$ до $(0, 2)$.

2. $\int_L y^2 dl$, L : перша арка циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

3. $(y \cos(xy) + 2x - 3y) dx + (x \cos(xy) - 3x + 4y) dy$.

4. $\oint_L (4 - x^2 y) y dx + (x + y^2) dy$, L : еліпс $25x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iiint_S (2x + 3y + 2z) dS$, P : $x + 3y - 5z = 30$.

6. $\iiint_S y dx dz$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

7. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (2y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x - 3y + z = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

8. $\vec{A} = 8x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $x + 3y - z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

9. $\vec{A} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + z\vec{k}$.

ВАРІАНТ 12

1. $\int_L \frac{y}{x} dx + x dy$, L : дуга лінії $y = \ln x$ від $(1, 0)$ до $(e, 1)$.

2. $\int_L (x^2 + y^2)^2 dl$, L : перша чверть кола $\rho = 2$.

3. $(y \sin(x + y) + xy \cos(x + y) - 9x^2) dx + (x \sin(x + y) + xy \cos(x + y) + 2y) dy$.

4. $\oint_L (4 - x^2 y) y dx + (x + y^2) dy$, L : еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iiint_S (2x - 3y + 2z) dS$, P : $x + 3y + z = 9$.

6. $\iiint_S x dy dz + y dx dz - z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

7. $\vec{A} = 8x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x + 3y - z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

8. $\vec{A} = 3x\vec{i} + 2(y + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, $3x + 3y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

9. $\vec{A} = (2x - yz)\vec{i} + (2x - xy)\vec{j} + yz\vec{k}$.

ВАРІАНТ 13

1. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, L : дуга параболи $y = 0,25x^2$ від $(0, 0)$ до $(2, 1)$.

2. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$, L : перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2t \end{cases}$.
3. $(5y + \cos x + 6xy^2)dx + (5x + 6x^2y)dy$.
4. $\oint_L (4 - x^2 + y) y dx + (x + 5y^2) dy$, L : еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint_S (2x + 3y + 2z) dS$, P : $x + 3y - z = -6$.
6. $\iint_S z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$.
7. $\vec{A} = 3x\vec{i} + 2(y + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, S : $3x + 3y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $x + 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = (x + y)\vec{i} - 2xz\vec{j} - 3(y + z)\vec{k}$.

ВАРІАНТ 14

1. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 + 2xy)dy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від $(-1, 1)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x - y)}$, L : відрізок прямої від $(0, 4)$ до $(4, 0)$.
3. $(y^2 e^{xy} - 3)dx + e^{xy}(1 + xy)dy$.
4. $\oint_L (-x^2 + 5y) y dx + (x - y^2) dy$, L : еліпс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint_S (2x + 13y + 2z) dS$, P : $x - 2y + z = 6$.
6. $\iint_S 4x dy dz + y dx dz + 6z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
7. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x + 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = (3x + 1)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $x + 3y + 3z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = z^2\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

ВАРІАНТ 15

1. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + xy dy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від $(-1, 1)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L y dl$, L : дуга параболи $y^2 = \frac{2}{3}x$ від $(0, 0)$ до $\left(\frac{35}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.
3. $(1 + \cos(xy)) y dx + (1 + \cos(xy)) x dy$.
4. $\oint_L (4 - x^2 y) y dx + (x - 6y^2) x dy$, L : еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint_S (2x + 3y + 2z - 10) dS$, P : $6x + 3y - z = -12$.
6. $\iint_S 4x dy dz - 3y dx dz + 5z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

7. $\bar{A} = (3x+1)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $S: x+3y+3z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\bar{A} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\bar{A} = xy(3x-4y)\bar{i} + x^2(x-4y)\bar{j} + 3z^2\bar{k}$.

ВАРІАНТ 16

1. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, L : дуга $y = x^3$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.

2. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, L : відрізок прямої від $(0, 0)$ до $(1, 2)$.

3. $(y - \sin x)dx + (x - 2y \cos y^2)dy$.

4. $\oint_L (4 - x^2y)ydx + (x + y^2)x dy$, L : еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, який пробігається проти ходу

годинникової стрілки.

5. $\iiint_S (2x + 3y - z + 10)dS$, $P: 2x + 3y - z = -12$.

6. $\iiint_S 4xdydz - (3+y)dxdz + 5zdx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

7. $\bar{A} = (3x+1)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x+z)\bar{k}$, $S: x+7y-z=7$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\bar{A} = 3x\bar{i} + (y-z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $x+5y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\bar{A} = xy(3x+4y)\bar{i} + x^2(x+4y)\bar{j} + 3z^2\bar{k}$.

ВАРІАНТ 17

1. $\int_L (x^3 + y^2)dx + 3xydy$, L : дуга $y = x^3$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.

2. $\int_L xydl$, L : відрізок прямої від $(0, 3)$ до $(3, 0)$.

3. $\left(\sin 2x - \frac{1}{x^2 y} \right) dx - \frac{1}{xy^2} dy$.

4. $\oint_L (4 + x^2y)ydx + 6y^2dy$, L : еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$, який пробігається проти ходу

годинникової стрілки.

5. $\iiint_S (2x - 3y + 2z - 10)dS$, $P: 6x + 3y + 2z = -12$.

6. $\iiint_S 4xdydz - 3ydx dz + (5-z)dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$.

7. $\bar{A} = (4x+1)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-2z)\bar{k}$, $S: x-y+5z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\bar{A} = 6x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x+2z)\bar{k}$, $x+y+4z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\bar{A} = xy(3x^2 - 4y)\bar{i} + x^3(x-4y)\bar{j} + 3z^3\bar{k}$.

ВАРІАНТ 18

1. $\int_L (x^2 - y^2)dx + xydy$, L : відрізок прямої від $(0, 0)$ до $(3, 4)$.

2. $\int_L zdl$, L : перший виток кінчної гвинтової лінії $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t \end{cases}$.

$$3. \frac{x+y}{xy} dx + \frac{y-x}{y^2} dy.$$

$$4. \oint_L y dx + (2x - 6y^2) x dy, \quad L: \text{еліпс } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1, \text{ який пробігається проти ходу годинникової стрілки.}$$

$$5. \iint_S (x + 3y + z - 1) dS, \quad P: 6x + 3y - z = 24.$$

$$6. \iint_S (4 + x) dy dz - 3y dx dz + 5z dx dy, \quad S - \text{зовнішня сторона поверхні } 4x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

$$7. \vec{A} = (3x + 1)\vec{i} + (2y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}, \quad S: x + 3y + 3z = -6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$8. \vec{A} = 3x\vec{i} + (2y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}, \quad x - 5y + z = 5, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$9. \vec{A} = x(3x - 4y)\vec{i} + x(x - 4y)\vec{j} + 3z^2\vec{k}.$$

ВАРІАНТ 19

$$1. \int_L (x^2 - 2xy) dx + 4xy dy, \quad L: \text{дуга параболи } y = x^2 \text{ від } (-1, 1) \text{ до } (2, 4).$$

$$2. \int_L (x + y) dl, \quad L: \text{коло } x^2 + y^2 = 16.$$

$$3. (20x^3 - 21x^2y + 2y) dx + (3 + 2x - 7x^3) dy.$$

$$4. \oint_L (4 - x^2y) y dx + (x - 6y^2) x dy, \quad L: \text{коло } x^2 + y^2 = 1, \text{ яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.}$$

$$5. \iint_S (2x - 5y + 2z - 10) dS, \quad P: 6x - 4y - z = -12.$$

$$6. \iint_S 4x dy dz - (3x + 2y) dx dz + 5z dx dy, \quad S - \text{зовнішня сторона поверхні } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

$$7. \vec{A} = (3x + 1)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}, \quad S: x + 3y - 4z = 12, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$8. \vec{A} = 3x\vec{i} + (y + 3z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}, \quad x + 2y + 2z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$9. \vec{A} = xy(3x - 3y)\vec{i} + x^2(x - 3y)\vec{j} + 4z^2\vec{k}.$$

ВАРІАНТ 20

$$1. \int_L \sin y dx - \cos x dy, \quad L: \text{відрізок прямої від } (0, 0) \text{ до } (\pi, \pi).$$

$$2. \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl, \quad L: \text{коло } x^2 + y^2 = 2y.$$

$$3. (ye^{xy} - 2\sin x) dx + (xe^{xy} + \cos y) dy.$$

$$4. \oint_L (4 - x^2y) y dx + (4x - 6y^2) dy, \quad L: \text{коло } x^2 + y^2 = 100, \text{ яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.}$$

$$5. \iint_S (2x + 3y + 2z - 5) dS, \quad P: 6x + 3y + 2z = 6.$$

$$6. \iint_S 4x dy dz - 3y dx dz + (5x + z) dx dy, \quad S - \text{зовнішня сторона поверхні } x^2 + y^2 + 4z^2 = 16.$$

$$7. \vec{A} = (3x + y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}, \quad S: x + 3y + 4z = 12, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$8. \vec{A} = 3x\vec{i} + (2y + 3z)\vec{j} + (2x - 3z)\vec{k}, \quad x + 3y + 2z = -6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$9. \vec{A} = y(3x - 4y)\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + 3z\vec{k}.$$

ВАРІАНТ 21

1. $\int_L xy dx + (y - x) dy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L xy dl$, L : відрізок прямої від $(0, 5)$ до $(5, 0)$.
3. $y(e^{xy} + 5)dx + x(e^{xy} + 5)dy$.
4. $\oint_L (4 - x^2 y)dx + (x - 6y^2)xdy$, L : еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{100} = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iiint_S (2x + 3y + 6z - 10)dS$, P : $6x + 3y - z = 36$.
6. $\iiint_S 4xdydz - 3ydx dz + (5y + z)dxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 25z^2 = 25$.
7. $\vec{A} = (3x + 1)\vec{i} + (3y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x + 2y + 4z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 5x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $x + 5y - z = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = xy(3x + y)\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + 3z^4\vec{k}$.

ВАРІАНТ 22

1. $\int_L xy dx + (x + y)dy$, L : дуга параболи $y^2 = x$ від $(0, 0)$ до $(1, 1)$.
2. $\int_L (x^2 + y^2)dl$, L : коло $x^2 + y^2 = 4x$.
3. $\left(x - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2 - y^2} - y\right)dy$.
4. $\oint_L (4 - x^2 y)dx + (x - 6y^2)dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 16$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iiint_S (2x + 3y + 2z + 2)dS$, P : $6x + 4y - z = 12$.
6. $\iiint_S (4x + y)dydz - 3ydx dz + 5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + 16y^2 + z^2 = 16$.
7. $\vec{A} = (3x + 1)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x + 3y - 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2x - z)\vec{k}$, $x - y + 7z = 7$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = y(3x - 4y)\vec{i} + x(x - 4y)\vec{j} + 3z^2\vec{k}$.

ВАРІАНТ 23

1. $\int_L (xy - 1)dx + xy^2 dy$, L : дуга параболи $y^2 = 2 - 2x$ від $(1, 0)$ до $(-1, 2)$.
2. $\int_L \sqrt{3y} dl$, L : перша арка циклоїди $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$
3. $\frac{x \ln y + y}{x} dx + \frac{y \ln x + x}{y} dy$.
4. $\oint_L (4 + x^2 y)dx + (4x - 6y^2)dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 25$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iiint_S (3x + 3y + 2z + 9)dS$, P : $2x + 3y - z = 6$.

6. $\iint_S 4x dy dz - (3x + y) dx dz + 5z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
7. $\vec{A} = (3x + 1)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, S : $x + 3y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 5x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $5x + y - z = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = xy(5x - 4y)\vec{i} + x^2(x - 5y)\vec{j} + 5z^2\vec{k}$.

ВАРІАНТ 24

1. $\int_L xy dx + (y + x) dy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від $(0, 0)$ до $(2, 4)$.
2. $\int_L (x^2 + y^2 + z) dl$, L : перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 3t \end{cases}$
3. $e^{x-y}(1 + x + y) dx + e^{x-y}(1 - x - y) dy$.
4. $\oint_L xy dx + (x - 6y^2) dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 1$, яке пробігається проти ходу

годинникової стрілки.

5. $\iint_S (2x + 6y + 2z - 10) dS$, P : $2x + 3y - 2z = 12$.
6. $\iint_S 4x dy dz - 12y dx dz + 5z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + 16y^2 + 4z^2 = 16$.
7. $\vec{A} = (2x + 1)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, S : $x - 3y + 3z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 3x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $-x + 7y + z = 7$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = xy(x - 4y)\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + z^2\vec{k}$.

ВАРІАНТ 25

1. $\int_L (x + xy) dx + x^2 dy$, L : дуга параболи $y^2 = 4x$ від $(0, 0)$ до $(1, -2)$.
2. $\int_L (x^2 + y^2 + 5z^2) dl$, L : перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \\ z = 2t \end{cases}$
3. $(3x^2 - 2xy + y) dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y) dy$.
4. $\oint_L (9 - x^2 y) dx + (3x - 6y^2) dy$, L : коло $x^2 + y^2 = 4$, яке пробігається проти ходу

годинникової стрілки.

5. $\iint_S (2x + 3y + 2z) dS$, P : $6x + 3y - z = 12$.
6. $\iint_S (4x + 2y) dy dz - 3y dx dz + 5z dx dy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.
7. $\vec{A} = (3x + 1)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2x - z)\vec{k}$, S : $x + 3y - 3z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. $\vec{A} = 4x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, $x + 7y - 2z = 14$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $\vec{A} = 2xy(3x - 4y)\vec{i} + 2x^2(x - 4y)\vec{j} + 6z^2\vec{k}$.

2.5. Зразок виконання індивідуального завдання

Приклад 2.1. а) Знайти $\int_L xydx + (y-x)dy$, L : дуга параболи $y = x^2$ від точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$.

б) Знайти $\int_L xydx + (y-x)dy$, L : дуга параболи $y^3 = x$ від точки $(0, 0)$ до точки $(8, 2)$.

в) Знайти $\int_L xydx + yzdy + zxdz$, L : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, t \in [0, 2\pi] \\ z = bt \end{cases}$.

Розв'язання. а) Зведемо криволінійний інтеграл до визначеного інтегралу за формулою (2.3). Одержимо наступне:

$$\int_L xydx + (y-x)dy = \int_0^1 (x^3 + (x^2 - x) \cdot 2x)dx = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2)dx = \frac{1}{12}.$$

б) Вважаючи x функцією від змінної y одержимо $dx = 3y^2 dy$, і за формулою, аналогічною до формули (2.3), одержимо наступне:

$$\int_L xydx + (y-x)dy = \int_0^2 (y^3 y \cdot 3y^2 + (y - y^3))dy = \int_0^2 (3y^6 - y^3 + y)dy = \frac{370}{7}.$$

в) Обчислимо диференціали: $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$, $dz = b dt$. Тоді для інтеграла за формулою (2.4) одержимо:

$$\int_L xydx + yzdy + zxdz = \int_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t \cos t + a^2 b t \cos t \sin t + ab^2 t \cos t)dt = -\frac{\pi}{2} a^2 b.$$

Приклад 2.2. а) Обчислити $\int_L xdl$, L : відрізок прямої від точки $(0, 0)$ до точки $(1, 2)$.

б) Обчислити $\int_L ydl$, L : дуга кривої $y^2 = x$ від точки $(0, 0)$ до точки $(4, 2)$.

в) Знайти довжину просторової кривої L : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2 \\ z = 2t^3 \end{cases}$ від точки $(0, 0, 0)$ до

точки $(3, 3, 2)$.

Розв'язання. а) Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через задані точки $(0, 0)$ і $(1, 2)$. Одержимо рівняння $y = 2x$. Далі за формулою (2.1) маємо наступне: $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{5} dx$. Тоді одержимо:

$$\int_L xdl = \int_0^1 x\sqrt{5}dx = \sqrt{5} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

б) Вважаючи x функцією від змінної y за формулою, аналогічною до формули (2.1), маємо наступне: $dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = \sqrt{1 + 4y^2} dy$. Тоді одержимо:

$$\int_L ydl = \int_0^2 y\sqrt{1 + 4y^2} dy = \frac{(1 + 4y^2)\sqrt{1 + 4y^2}}{12} \Big|_0^2 = \frac{17\sqrt{17} - 1}{12}.$$

в) Обчислимо похідні $x' = 3$, $y' = 6t$, $z' = 6t^2$. Далі за формулою довжини дуги $l = \int_L dl$ і за формулою (2.2) маємо наступне:

$$l = \int_L dl = \int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} dt = 3 \int_0^1 (1 + 2t^2) dt = 5 \text{ (од.)}.$$

Приклад 2.3. Довести, що вираз $du = 2xydx + x^2dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Знайти функцію $u(x, y)$.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, тобто

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ і вираз є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Тоді за формулою (2.6)

маємо наступний вираз для функції $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta = \int_{x_0}^x 2\xi y_0 d\xi + \int_{y_0}^y x^2 d\eta = y_0 \xi^2 \Big|_{x_0}^x + x^2 (\eta - y_0) = x^2 y + \text{const}.$$

Приклад 2.4. Обчислити за допомогою формули Гріна $\oint_L 5ydx + xdy$, де контур L : коло $x^2 + y^2 = 1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = 5$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Контур інтегрування є замкнутим і пробігається проти хода годинникової стрілки, тоді за формулою Гріна маємо наступне (в якості області D вибираємо круг $x^2 + y^2 \leq 1$):

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (1 - 5) dxdy = -4 \iint_D dxdy = -4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = -4\pi.$$

Приклад 2.5. а) Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S (x + 3y + z + 2) dS$, де S – частина площини $P: x + 2y + z = 4$, яка розташована між координатними площинами.

б) Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S z dS$, де S : частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, розташована між площинами $z = 1$, $z = 2$.

Розв'язання. а) Побудуємо дану поверхню (рис. 2.1). Одержимо, що відповідна частина поверхні проектується на площину xOy в трикутник AOB (область D). Враховуючи, що $z = 4 - x - 2y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2$, одержимо за

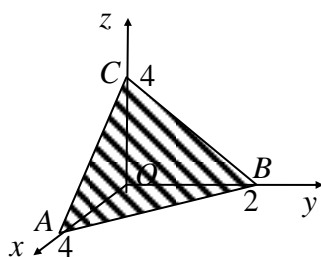


Рис. 2.1.

$$\begin{aligned} \text{формулою (2.9): } \iint_S (x + 3y + z + 2) dS &= \\ &= \iint_D (x + 3y + 4 - x - 2y + 2) \cdot \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2} dxdy = \\ &= \iint_D (y + 6) \cdot \sqrt{6} dxdy = \sqrt{6} \int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} (y + 6) dy = \frac{80\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

б) Побудуємо дану поверхню (рис. 2.2). Одержимо, що відповідна частина поверхні проектується на площину xOy в кільце D , розташоване між колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$.

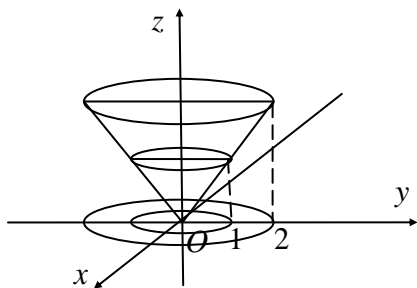


Рис. 2.2.

Враховуючи, що $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, одержимо за формулою (2.9):

$$\iint_S z dS = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy =$$

$$= \sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = \left| \begin{matrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{matrix} \right| = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \frac{14\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Приклад 2.6. а) Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S – зовнішня поверхня площини $x + 2z - 2 = 0$, розташована в 1 октанті та відсічена площиною $y = 4$.

б) Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S (2x + y)dydz - 4ydx dz + 5zdx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 144$.

Розв'язання. а) Побудуємо дану поверхню (рис. 2.3). Розіб'ємо даний інтеграл на 3 інтеграли: $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_S xdydz + \iint_S ydxdz + \iint_S zdxdy = I_1 + I_2 + I_3$.

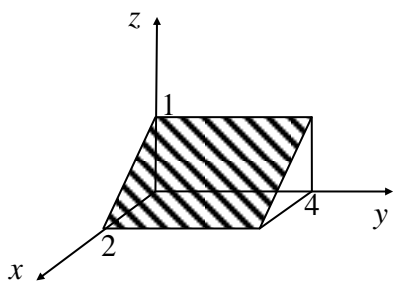


Рис.2.3.

Обчислимо перший інтеграл, тобто $I_1 = \iint_S xdydz$. Із рівняння поверхні маємо: $x = 2 - 2z$.

Проекція площини на yOz – прямокутник: $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$. Тоді:

$$I_1 = \iint_S xdydz = 2 \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - z) dz = 4.$$

Обчислимо другий інтеграл. $I_2 = \iint_S ydxdz = 0$, оскільки площина (поверхня S) паралельна вісі Ox .

Обчислимо третій інтеграл, тобто $I_3 = \iint_S zdxdy$. Із рівняння поверхні: $z = \frac{1}{2}(2 - x)$. Проекція площини на xOy – прямокутник: $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq x \leq 2$. Тоді:

$$I_3 = \iint_S zdxdy = \frac{1}{2} \int_0^4 dy \int_0^2 (2 - x) dx = 4.$$

Тоді одержимо: $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = I_1 + I_2 + I_3 = 4 + 0 + 4 = 8$.

б) Дана поверхня є замкнутою поверхнею (сфера з центром у початку координат і радіусом 12), нормаль до якої зовнішня. Застосуємо до обчислення

інтегралу формулу Остроградського-Гауса, тобто зведемо даний інтеграл до потрібного інтегралу по кулі $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 144$. За формулою (2.10) маємо:

$$\begin{aligned} \iint_S (2x+y)dydz - 4ydx dz + 5zdx dy &= \iiint_V (2-4+5)dx dy dz = \\ &= 3 \iiint_V dx dy dz = 3V_{\text{кулі}} = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 12^3 = 6912\pi. \end{aligned}$$

Приклад 2.7. а) Знайти потік векторного поля $\vec{A} = (x+z)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, утворену площиною $x-2y+2z=4$ і координатними площинами, двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського).

б) Знайти потік векторного поля $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1-z)\vec{k}$ через повну поверхню конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $z = H$ двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського).

Розв'язання. а) Обчислимо потік безпосередньо. Повна поверхня піраміди складається з чотирьох поверхонь: ΔAOC , ΔAOB , ΔBOC і ΔABC (рис. 2.4). Тому

$$\Pi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Delta AOC} \vec{A} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Delta AOB} \vec{A} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Delta BOC} \vec{A} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Delta ABC} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4.$$

Обчислимо перший інтеграл. Розглянемо ΔAOC . На цій поверхні: $y=0$, тобто рівняння AC матиме вигляд: $x+2z=4$, або $z = \frac{4-x}{2}$, вектор нормалі до поверхні $\vec{n} = \vec{j}$, $dS = dx dz$. Тоді одержимо наступне:

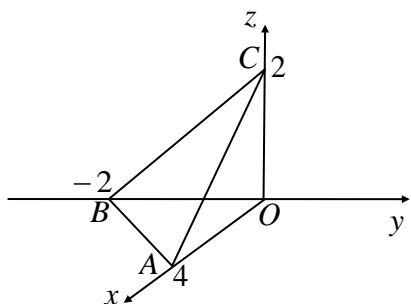


Рис. 2.4.

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = 2y - x = -x,$$

$$\Pi_1 = \iint_{\Delta AOC} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{\Delta AOC} x dx dz = - \int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} x dz = -\frac{16}{3}.$$

Обчислимо другий інтеграл. Розглянемо ΔAOB . На цій поверхні: $z=0$, вектор нормалі до поверхні $\vec{n} = -\vec{k}$, $dS = dx dy$. Тоді одержимо наступне:

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = 0 \cdot (-1) = 0, \quad \Pi_2 = \iint_{\Delta AOB} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Обчислимо третій інтеграл. Розглянемо ΔBOC . На цій поверхні: $x=0$, тобто рівняння BC матиме вигляд: $-2y+2z=4$, або $y = z-2$, вектор нормалі до поверхні $\vec{n} = -\vec{i}$, $dS = dy dz$. Тоді одержимо наступне:

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = -z,$$

$$\Pi_3 = \iint_{\Delta BOC} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{\Delta BOC} z dy dz = - \int_0^2 dz \int_{z-2}^0 z dy = -\frac{4}{3}.$$

Обчислимо четвертий інтеграл. Розглянемо ΔABC . Рівняння поверхні: $x-2y+2z-4=0$, вектор нормалі до поверхні матиме вигляд:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \bar{i} + \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \bar{j} + \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \bar{k} = \frac{1}{3} \bar{i} - \frac{2}{3} \bar{j} + \frac{2}{3} \bar{k},$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy, \quad z = -\frac{1}{2}x + y + 2, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad dS = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dxdy = \frac{3}{2} dxdy.$$

Тоді одержимо наступне:

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \iint_{\Delta ABC} \bar{A} \cdot \bar{n} dS = \frac{3}{2} \iint_{\Delta ABC} \left((x+z) \cdot \frac{1}{3} dxdy + (2y-x) \left(-\frac{2}{3} \right) dxdy + z \cdot \frac{2}{3} dxdy \right) = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (x+z-4y+2x+2z) dxdy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (3x-4y+3z) dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta AOB} \left(3x-4y-\frac{3}{2}x+3y+6 \right) dxdy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta AOB} \left(\frac{3}{2}x-y+6 \right) dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \int_0^{2y+4} \left(\frac{3}{2}x-y+6 \right) dx = \frac{52}{3}. \end{aligned}$$

Тоді одержимо, що потік буде наступним: $\Pi = -\frac{16}{3} + 0 - \frac{4}{3} + \frac{52}{3} = \frac{32}{3}$.

2 спосіб. Обчислимо потік за формулою Остроградського-Гауса.

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint_V (1+2+1) dxdydz = 4 \iiint_V dxdydz = 4V_{\text{піраміди}} = 4 \cdot \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

б) 1 спосіб. Обчислимо потік безпосередньо. Повна поверхня складається з бічної поверхні S_1 : $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ та поверхні основи S_2 : $z = H$ (рис. 2.5). Тому $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$.

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} \frac{A_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}} dS = \iint_{S_1} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

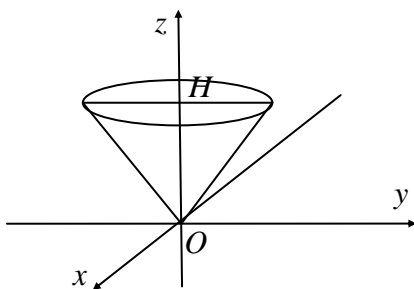


Рис 2.5.

Із рівняння поверхні маємо: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy, \quad \text{поверхня}$$

проектується на круг D : $x^2 + y^2 \leq H^2$.

Тоді $\Pi_1 = \iint_D \frac{2(x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \sqrt{2} dxdy = \iint_D \left(2\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) dxdy$. Переходячи до полярних координат, одержимо $\Pi_1 = 2\pi H^2 \left(\frac{2}{3} H - \frac{1}{2} \right)$.

Аналогічно, $\Pi_2 = \iint_{S_2} (1-z) dS = (1-H) \iint_D dx dy = (1-H)\pi H^2$. Тоді одержимо:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 2\pi H^2 \left(\frac{2}{3}H - \frac{1}{2} \right) + (1-H)\pi H^2 = \frac{\pi H^3}{3}.$$

2 спосіб. Обчислимо потік за формулою Остроградського-Гауса.

$$\Pi = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (1+1-1) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi H^2 \cdot H = \frac{\pi H^3}{3}.$$

Приклад 2.8.

Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{A} = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$ через контур трикутника L , утвореного в результаті перетину площин $-x+7y+z=7$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, при додатньому обході відносно нормального вектора $\vec{n}(1;1;1)$ двома способами (безпосередньо і за формулою Стокса).

Розв'язання. 1 спосіб. Побудуємо в системі координат контур L , тобто контур $\triangle ABC$ (рис. 2.6). Циркуляцію будемо обчислювати за наступною формулою, розбивши контур трикутника на три окремі відрізки:

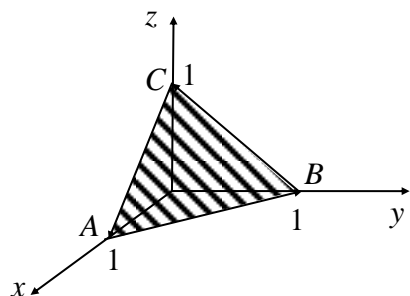


Рис. 2.6.

$$\mathcal{C} = \oint_{ABCA} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\cup AB} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{\cup BC} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{\cup CA} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Обчислимо перший інтеграл. Розглянемо відрізок AB . На цьому відрізку: $z=0$, тобто рівняння AB матиме вигляд: $x+y=1$, або $y=1-x$, тобто $dy=-dx$. Тоді одержимо наступне:

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}, \quad \vec{A} = x\vec{i} + (x+3y)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}, \\ \vec{A} \cdot d\vec{l} = xdx + (x+3y)dy,$$

$$\int_{\cup AB} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\cup AB} xdx + (x+3y)dy = \int_1^0 xdx + (x+3(1-x))(-dx) = \int_1^0 (3x-3)dx = \frac{3}{2}.$$

Обчислимо другий інтеграл. Розглянемо відрізок BC . На цьому відрізку: $x=0$, тобто рівняння BC матиме вигляд: $z+y=1$, або $z=1-y$, тобто $dz=-dy$. Тоді одержимо наступне:

$$d\vec{l} = dy\vec{j} + dz\vec{k}, \quad \vec{A} = (-2z)\vec{i} + (z+3y)\vec{j} + y\vec{k}, \quad \vec{A} \cdot d\vec{l} = (z+3y)dy + ydz,$$

$$\int_{\cup BC} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\cup BC} (z+3y)dy + ydz = \int_1^0 (3y+1-y-y)dy = -\frac{3}{2}.$$

Обчислимо третій інтеграл. Розглянемо відрізок CA . На цьому відрізку: $y=0$, тобто рівняння CA матиме вигляд: $x+z=1$, або $z=1-x$, тобто $dz=-dx$. Тоді одержимо наступне:

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} = (x-2z)dx + 5xdz,$$

$$\int_{\cup CA} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\cup CA} (x-2z)dx + 5xdz = \int_0^1 (x-2+2x-5x)dx = \int_0^1 (-2x-2)dx = -3.$$

Тоді одержимо, що циркуляція буде наступною: $\mathcal{C} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3$.

2 спосіб. Застосуємо формулу Стокса. Обчислимо спочатку ротор векторного поля. Маємо наступне:

$$\overline{rotA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -7\bar{j} + \bar{k}.$$

В якості поверхні S виберемо $\triangle ABC$. Тоді вектор нормалі буде мати вигляд: $\bar{n} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Обчислимо циркуляцію:

$$\mathcal{I} = \iint_S \overline{rotA} \cdot \bar{n} dS = \iint_S dx dy - 7 dx dz = S_{\triangle AOB} - 7 S_{\triangle COA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -3.$$

Приклад 2.9. а) Знайти дивергенцію векторного поля $\bar{A} = 2x^2\bar{i} - 3xy\bar{j} + (z^2 + xz)\bar{k}$ в точці $M(1, -1, 2)$.

б) З'ясувати, чи є векторне поле $\bar{A} = (x^2 - y^2 + z)\bar{i} + (-2xy + z)\bar{j} + (x + y)\bar{k}$ соленоїдальним, потенціальним?

Розв'язання. а) Обчислимо частинні похідні і одержимо наступне:

$$\operatorname{div} \bar{A} \Big|_M = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_M = (4x - 3x + 2z + x) \Big|_M = (2x + 2z) \Big|_M = 6.$$

б) Перевіримо умови соленоїдальності та потенціальності поля. Знайдемо дивергенцію та ротор векторного поля.

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2x - 2x + 0 = 0,$$

$$\overline{rotA} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = (1 - 1, 1 - 1, -2y + 2y) = (0, 0, 0).$$

Оскільки $\operatorname{div} \bar{A} = 0$, то поле соленоїдальне, оскільки $\overline{rotA} = (0, 0, 0)$, то поле потенціальне.