

Лабораторная работа №4.
Программирование рекурсивных процедур.

Вариант №1

1. Вычислить значение функции

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots$$

2. Дано арифметическое выражение, содержащее три вида скобок "(", "[", "{"
Проверить правильность расстановки скобок; если какая-то скобка не имеет парной, напечатать, какая именно.

Вариант №2

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{i!!}$$

2. Студенты двух групп имеют порядковые номера от 1 до N в каждой группе. В процедуре P_1 функцией Random определяются два числа «a» и «b» от 1 до N. Если числа разные, то два участника с номерами «a» и «b» выбывают, оставшиеся ученики перенумеровываются от 1 до (N-1) и играют дальше (процедура P_1 повторяется с новыми значениями «a» и «b»), иначе выводится значение совпавшего номера, ученики получают приз и процедура P_2 предлагает играть снова.

Вариант №3

1. Вычислить значение

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2. На карте местности имеется N населенных пунктов, пронумерованных от 1 до N ($N \times 10$). Некоторые из пунктов соединены между собой дорогами. Информация о дорогах задается в виде последовательности пар чисел i, j ($i < j$), указывающих, что i -й и j -й пункты соединены дорогой, признак конца этой последовательности — пара нулей. Определить, можно ли попасть по этим дорогам из первого пункта в n -й.

Вариант №4

1. Извлечь корень m -ой степени из числа y с помощью разложения

$$y = (x + \Delta x)^m \approx x^m + mx^{m-1} \Delta x$$

2. Организовать рекурсивный алгоритм так называемой "быстрой сортировки" Хоара: имеются два указателя i и j , причем вначале $i = 1$, а $j = N$ (номер последнего элемента). Сравним $a[i]$ и $a[j]$, и если обмен не требуется, то уменьшим j на 1 и повторим этот процесс. После первого обмена увеличим i на 1 и будем продолжать сравнения, увеличивая i , пока не произойдет еще один обмен. Тогда снова уменьшим j и т.д., то есть будем "сжигать свечку с обоих концов", пока не станет $i = j$. В результате получим, что слева от $a[i]$ оказались только меньшие элементы, а справа — только большие (тем самым элемент $a[i]$ окажется на своем окончательном месте), после чего рекурсивно применить этот же метод для левой и правой частей массива до тех пор, пока в подмассиве не останется только один элемент.

Вариант №5

1. Вычислить $\sin(nA)$

$$\sin(nA) = \begin{cases} n \cos A \left[\sin A - \frac{(n^2-2^2)}{3!} \sin^3 A + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!} \sin^5 A - \dots \right], & \text{если } n \text{ чётное} \\ n \sin A - \frac{(n^2-1^2)}{3!} \sin^3 A + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!} \sin^5 A - \dots, & \text{если } n \text{ нечётное} \end{cases}$$

2. Даны целые неотрицательные числа m, n . Вычислить так называемую "функцию Аккермана":

$$A(n, m) = \begin{cases} m+1, & n=0, \\ A(n-1, m), & n \neq 0, m=0, \\ A(n-1, A(n, m-1)), & n > 0, m > 0. \end{cases}$$

Вариант №6

1. Вычислить элементы последовательности, используя рекурсию.

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_m(x) = \frac{m(m-1)}{2!} P_{m-2}(x) + m P_{m-1}(x)$$

2. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Вариант №7

1. Вычислить $\tan(nA)$ на основе формулы

$$\tan(A+B) = \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A) \cdot \tan(B)}.$$

2. Напишите рекурсивную процедуру для вычисления значения полинома Лежандра порядка n в точке x . Полиномы Лежандра определяются следующим образом:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)}{n}$$

Вариант №8

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\ln(N+1) = \ln N + \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \dots \right]$$

2. Дана строка текста, оканчивающаяся точкой. Напечатать этот текст в обратном порядке, используя рекурсию.

Вариант №9

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\arctg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

2. Составить рекурсивную программу вычисления определителя N -го порядка ($N < 5$), пользуясь формулой разложения определителя по i -й строке и зная формулу вычисления определителя 2-го порядка.

Вариант №10

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

2. Организовать вычисление $N!$ с помощью рекурсивной функции. Какой алгоритм работает быстрее: рекурсивный или нерекурсивный? Почему?

Вариант №11

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]$$

С помощью этого ряда найти $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$.

2. Составить рекурсивную программу нахождения корня заданной функции $F(x)$ в интервале $[a, b]$ методом деления отрезка пополам с заданной точностью E .

Вариант №12

1. Вычислить элементы последовательности, используя рекурсию.

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x,$$

$$T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x) \quad \text{для } k \geq 2.$$

2. Рассчитать число зёрен, выращенных крестьянином за N лет, если он посадил 10 зёрен, а годовой урожай составляет 22 зерна на каждое посаженное зерно.

Вариант №13

1. Вычислить элементы последовательности, используя рекурсию.

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x,$$

$$P_k(x)=[(2k-1)xT_{k-1}(x)-(k-1)T_{k-2}(x)]/2 \quad \text{для } k \geq 2.$$

2. Рассчитать число золотых монет, принесённых в дань господину, если $N+1$ подданных последовательно передают монеты от первого к последнему. Причём, первый отдаёт одну монету, второй увеличивает число монет вдвое, третий – в три раза и т.д.

Вариант №14

1. Вычислить элементы последовательности, используя рекурсию.

$$L_0(x)=1, L_1(x)=\beta+1-x,$$

$$kL_k(x)=(-x+2k+\beta-1)L_{k-1}(x)-(k+\beta-1)L_{k-2}(x)$$

$$\text{для } k=2,3,\dots$$

2. Рассчитать функцию $y=\sin(\sin(\sin(\dots(\sin(x)))))$, в которой имя функции «sin» повторяется n раз.

Вариант №15

1. Рассчитать число рыб, выращенных в аквариуме за N лет, если вначале было две рыбы, а число рыб увеличивается пропорционально числу лет, т.е. 4, 12, 48 и т.д.

2. Функция Аккермана определяется следующим образом:

$$A(0, y) = y + 1,$$

$$A(x, 0) = A(x - 1, 1),$$

$$A(x, y) = A(x - 1, A(x, y - 1)).$$

Здесь x, y – целые неотрицательные числа. Функция возрастает настолько быстро, что вскоре «выбивает» из работы любой компьютер. Определим «модулярную функцию Аккермана» как $A \bmod m$, где значение параметра m вводится. Постройте таблицу значений этой функции.

Вариант №16

1. Вычислить числовую последовательность

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad n \geq 1,$$

$$J_0(x) = 1 - (x/2)^2 + \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \dots,$$

$$J_1(x) = x/2 - \frac{(x/2)^3}{2!3!} - \dots$$

2. Рассчитать функцию $y = a/(b+(a/(b+(a/(b+(\dots+a/b))))))$, в которой знак деления «/» повторяется N раз.

Вариант №17

1. Вычислить числовую последовательность, используя рекурсию.

$$xJ_{n+1/2}(x) + xJ_{n-3/2}(x) = 2(n-1/2)J_{n-1/2}(x), \quad n \geq 1,$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

(π определить как константу, заменой переменных перейти к целому представлению индексов).

2. Составить рекурсивный алгоритм нахождения N-го числа Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., то есть каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.

Вариант №18

1. Возведение в степень числа (без использования указателей), с использованием рекурсии.
2. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$$

Вариант №19

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n!!$$

2. Рассчитать количество студентов, выпущенных университетом за N лет, если в среднем на первый курс поступает 2000 абитуриентов, а до пятого курса доходит каждый третий.

Вариант №20

1. Вычислить $\sin nA$ и $\cos nA$ на основе равенств

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B, \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B.\end{aligned}$$

2. Даны действительное число A , целое число n . Организовать вычисление A^n с помощью рекурсивной функции. Показатель степени n может быть любым целым числом.

Вариант №21

1. Создать программу, в которой рекурсивная функция используется для суммирования целых чисел от 1 до n , где n введенное пользователем число, большее или равное 1.

2. Найти значение функции, используя рекурсию.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Вариант №22

1. Вычислить элементы последовательности, используя рекурсию.

$$H_0(x)=1, H_1(x)=2x,$$

$$H_{k+1}(x)=2xH_k(x)-2kH_{k-1}(x) \quad \text{для } k \geq 2.$$

2. Описать рекурсивную функцию $pow(x, n)$ от вещественного x ($x \neq 0$) и целого n , которая вычисляет величину x^n согласно формуле

$$x^n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \frac{1}{x^{|n|}}, & n < 0; \\ x \cdot x^{n-1}, & n > 0. \end{cases}$$

Вариант №23

1. Программа вычисления значения функции целочисленного аргумента, рекурсивное определение которой имеет вид:

$$F(N) = \begin{cases} N-3, & \text{если } N > 23, \\ F(F(N+4)), & \text{если } N \leq 23. \end{cases}$$

2. Составить рекурсивную программу вычисления НОД (наибольшего общего делителя), основанную на соотношении $\text{НОД}(n, m) = \text{НОД}(m, r)$, где r — остаток от деления n на m .

Вариант №24

1. Напишите рекурсивную процедуру для решения уравнений вида $F(x) = x$ методом простых итераций. Проверьте её работу на функциях $\text{Cos}(x)$ и $\text{Sqrt}(x+1)$.
2. Вычислить элементы последовательности

$$N_0(x) = 1,$$

$$N_1(x) = x,$$

$$N_k(x) = x^3 + \frac{1}{1 + N_{k-1}(x)} + \frac{1}{(1 + N_{k-2}(x))^2}$$

Вариант №25

1. Вычислить элементы последовательности

$$R_0(x) = 1,$$

$$R_1(x) = x,$$

$$R_{n+1}(x) = x + x(1 - R_n(x)) + (1 - R_{n-1}(x))^2 \quad \text{для } n \geq 2$$

2. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Вариант №26

1. Вычислить элементы последовательности

$$N_0(x)=1,$$

$$N_1(x)=x,$$

$$N_a(x)=\frac{a!N_{a-1}(x)}{(a+1)^2} + N_{a-2}(x)$$

2. Требуется рассчитать число осколков, полученных в результате деления за n миллисекунд, если каждый осколок делится на два за одну миллисекунду.

Вариант №27

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\ln(K+1) = \ln K + \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{2K^2} + \frac{1}{3K^3} - \dots \right]$$

2. Определить максимальный элемент в массиве, используя рекурсивную процедуру для поиска максимума.

Вариант №28

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$$

2. Разложить заданное число на всевозможные слагаемые, использованием рекурсии.

Вариант №29

1. Вычислить значение функции, используя рекурсию.

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(n+1)^n}$$

2. Запрограммируйте с использованием рекурсии вычисление функции $F(x) = x^n$.

Вариант №30

1. Вычислить элементы числовой последовательности, используя рекурсию.

$$A_0(x) = 1$$

$$A_1(x) = x$$

$$A_{b+1}(x) = A_b(x) + \frac{A_{b-1}(x)}{6!}(x-6)$$

2. Рассчитать значение последовательности, заданной следующим образом:

$$a(1) = 1,$$

$$a(n) = n - a(a(n-1)), n > 1.$$