ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко,
М.І. Клименко, І.В. Красікова,
О.О. Тітова, В.В. Леонтьєва

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ І:
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практикум з розв'язання задач
для студентів напрямів підготовки «Математика»,
«Прикладна математика», «Інформатика»,
«Програмна інженерія»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №9 від 31 травня 2011 р.

Запоріжжя
2011

УДК: 517(075.8)
ББК: 22.161 я73
Г 79

Г 79 Гребенюк С.М., Д'яченко Н.М., Клименко М.І., Красікова І.В., Тітова О.О., Леонтьєва В.В. Математичний аналіз І: диференціальне числення функції однієї змінної: Практикум з розв'язання задач для студентів напрямів підготовки «Математика», «Прикладна математика», «Інформатика», «Програмна інженерія». – Запоріжжя: ЗНУ, 2011. – 120 с.

Посібник призначений для самостійної роботи студентів першого курсу денної та заочної форм навчання при вивченні одного з найважливіших розділів математичного аналізу – диференціального числення функцій однієї змінної. Він має на меті сприяти студентам у оволодінні практичними навичками при розв'язанні відповідних задач.

Видання містить задачі, варіанти індивідуальних типових завдань із прикладами виконання індивідуального завдання, завдання для самоконтролю і список рекомендованої літератури. Зміст практикуму відповідає навчальним програмам із курсу математичного аналізу для вказаних вище напрямів підготовки.

Рецензент Стєганцева П.Г.

Відповідальний за випуск Гребенюк С.М.

ЗМІСТ

ВСТУП…….…….……..…..... **4**
Розділ 1. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ……..….. **5**
1.1. Означення похідної……..……..... **5**
1.2. Техніка диференціювання…….…..…. **5**
1.3. Диференційовність і диференціал……..……..… **11**
1.4. Геометричний зміст похідної……..……..…… **22**
1.5. Похідні та диференціали вищих порядків……..…... **26**
1.6. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші…….. **38**
1.7. Монотонність функції на інтервалі. Локальний екстремум. Найбільше й найменше значення функції на відрізку……..… **45**
1.8. Знаходження сум за допомогою похідної…… **51**
1.9. Доведення нерівностей…….…….…..... **52**
1.10. Доведення тотожностей…….…….. **56**
1.11. Правило Лопіталя……..…….…..... **58**
1.12.Формула Тейлора……..……..……..… **60**
1.13. Побудова графіків функцій за характерними точками…..... **66**
Розділ 2. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ…… **83**
2.1. Варіанти індивідуальних типових завдань..…...……..…….. **83**
2.2. Приклад виконання індивідуального завдання……... **91**
Розділ 3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ…….. **103**
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ…….……..... **116**
Додаток А…….…….. **118**

ВСТУП

Сучасні фахівці повинні добре володіти математичним апаратом, який має надзвичайно велике значення для розвитку сучасної промисловості, економіки, бізнесу, фінансової справи та ін. Фундаментом математики є математичний аналіз. Основу математичного аналізу становлять взаємопов'язані за змістом розділи – диференціальне та інтегральне числення.

«Головним поштовхом для зародження диференціального числення стало введення в математику змінних величин (Р.Дедекінд, R.Descartes). У загальних рисах побудову диференціального й інтегрального числень було завершено в роботах І.Ньютона (I.Newton) і Г.Лейбніца (G.Leibniz) наприкінці 17 ст., однак питання обґрунтування за допомогою поняття границі були розроблені О.Коші (A.Couchi) лише на початку 19 ст. Створення диференціального та інтегрального числення стало початком інтенсивного розвитку математики та пов'язаних з нею прикладних наук…

Диференціальне числення ґрунтується на поняттях *дійсного числа, функції, границі й неперервності* – найважливіших поняттях математики, які були сформульовані й отримали сучасний зміст у процесі розвитку математичного аналізу»[1].

Засновники диференціального числення:

Ісаак НЬЮТОН (4.1.1643–31.03.1727) – англійський фізик, механік, астроном і математик, що заклав основи природознавства. Член Лондонського Королівського товариства (1672) та його президент (1703).

Готфрід Вільгельм ЛЕЙБНІЦ (1.7.1646–14.11.1716) – німецький математик, фізик і філософ. Організатор і перший президент Берлінської Академії Наук (1700).

Мішель РОЛЛЬ (21.4.1652–8.11.1719) – французький математик. Член Паризької АН (1685).

Колін МАКЛОРЕН (1698–14.6.1746) – шотландський математик. Член Лондонського королівського товариства (1719). Учень і послідовник І.Ньютона.

Брук ТЕЙЛОР (18.8.1685 – 29.12.1731) – англійський математик і філософ. Член Лондонського королівського товариства (1712) та його вчений секретар (з1724).

Огюстен Луї КОШІ (21.8.1789 – 23.5.1857) – французький математик. Член Паризької АН (1816)

Жозеф Луї ЛАГРАНЖ (25.1.1736 – 10.4.1813) – французький математик, механік і астроном. Член Берлінської Академії Наук (1759) та її президент (1766 – 1787), член Паризької АН (1787).

[1] Г.П.Толстов Дифференциальное исчисление // Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М.Виноградов, т.2 Д – Коо. – М.: Советская Энциклопедия, 1979. - С.269-277.

Розділ 1. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1.1. Означення похідної

В теоретичній частині були вже розглянуті приклади на обчислення похідної за означенням для деяких основних елементарних функцій. Наведемо в цьому підрозділі два приклади як зразок для виконання індивідуальних завдань. Детальніше застосування означення похідної для дослідження функцій на диференційовність буде розглянуто у 1.3.

Приклад 1.1. а) (№Д831[1]) Знайти $y'(1)$, якщо

$$y(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ ;$$

б) знайти $y'(5)$, якщо $y = (x-4)^4(x-2)^3(x-5)\sin(x-4)$.

Розв'язання. а) Знайдемо похідну функції в точці $x_0 = 1$ за означенням:

$$y'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x+\Delta x\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}-1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right) = 1+\frac{\pi}{4}. \ \blacksquare$$

б) Знайдемо похідну за означенням:

$$y'(5) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(5+\Delta x)-y(5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^4(3+\Delta x)^3\Delta x\sin(1+\Delta x)-0}{\Delta x} = 27\sin 1\ . \ \blacksquare$$

1.2. Техніка диференціювання

Приклад 1.2. Знайти похідну y' функцій:

а) $y = \ln tg\frac{x}{2} - ctgx\cdot\ln(1+\sin x) - x$; **б)** $y = \sqrt[\sin x]{\cos x^2}$;

в) $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ (№Д984б); **г)** $y = e^x\left((\sin x)^{\cos x} - (\cos x)^{\sin x}\right)$;

[1] Посилання на номери, в яких фігурує літера «Д», означатимуть, що цей приклад відповідає збірнику задач Демидовича Б.П. [3].

д) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ (№Д985 а);

е) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)\neq 1,\ \varphi(x)>0,\ \psi(x)>0)$ (№Д985 г),

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовні функції;

є) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$ (№Д986 в); **ж)** $y=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ (№Д986 г),

де $f(u)$ – диференційовна функція.

Розв'язання. а) $y'=\left(\ln tg\dfrac{x}{2}\right)'-\left(ctgx\cdot\ln\left(1+\sin x\right)\right)'-x'=\dfrac{\left(tg\dfrac{x}{2}\right)'}{tg\dfrac{x}{2}}-$

$$-\left(ctgx\right)'\cdot\ln\left(1+\sin x\right)-ctgx\cdot\left(\ln\left(1+\sin x\right)\right)'-1=\frac{1}{2tg\dfrac{x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}}+$$

$$+\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln\left(1+\sin x\right)-ctgx\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}-1=$$

$$=\frac{1}{\sin x}+\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x\left(1+\sin x\right)}-1=\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x}.\quad\blacksquare$$

б) Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$y=\sqrt[\sin x]{\cos x^2}$, $\ln y=\ln\sqrt[\sin x]{\cos x^2}$,

$\ln y=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\ln\cos x^2$, $\left(\ln y\right)'=\left(\dfrac{\ln\cos x^2}{\sin x}\right)'$,

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{\left(\ln\cos x^2\right)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}=\frac{\dfrac{\left(\cos x^2\right)'}{\cos x^2}\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\dfrac{\sin x^2\cdot(x^2)'}{\cos x^2}\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}=\frac{-\dfrac{\sin x^2\cdot 2x}{\cos x^2}\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}.$$

Отримали:

$$\frac{y'}{y}=\frac{-2x\sin x^2\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x^2\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x\cdot\cos x^2}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на y:

$$y'=y\cdot\frac{-2x\sin x^2\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x^2\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x\cdot\cos x^2}.$$

Оскільки $y = \sqrt[\sin x]{\cos x^2}$, то в результаті одержимо

$$y' = -\sqrt[\sin x]{\cos x^2} \cdot \frac{2x \sin x^2 \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x^2 \cdot \ln \cos x^2}{\sin^2 x \cdot \cos x^2}. \qquad \blacksquare$$

в) Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\right);$$

$$\ln y = 2\ln x - \ln(1-x) + \frac{1}{3}\ln(3-x) - \frac{2}{3}\ln(3+x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - \frac{(1-x)'}{1-x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(3-x)'}{3-x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{(3+x)'}{3+x};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3-x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3+x} \quad \Big|\times y; \quad y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$

$$y' = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3-x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3+x}\right). \quad \blacksquare$$

г) Спочатку знайдемо похідні від функцій $(\sin x)^{\cos x}$ *і* $(\cos x)^{\sin x}$. Першу знайдемо логарифмічним диференціюванням

$$z = (\sin x)^{\cos x},$$

$$(\ln z)' = (\cos x \ln(\sin x))',$$

$$\frac{z'}{z} = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$z' = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

Другу знайдемо, застосувавши тотожність $a = e^{\ln a}$, у такий спосіб:

$$\left((\cos x)^{\sin x}\right)' = \left(e^{\ln(\cos x)^{\sin x}}\right)' = \left(e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}\right)' =$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

В результаті отримаємо

$$y' = \left(e^x\left((\sin x)^{\cos x} - (\cos x)^{\sin x}\right)\right)' = e^x\left((\sin x)^{\cos x} - (\cos x)^{\sin x}\right) +$$

$$+e^x \cdot \left[(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) +\right.$$

$$\left. +(\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\right]. \quad \blacksquare$$

д) Якщо $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$, то

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}} \cdot \left(\varphi^2(x) + \psi^2(x)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}} \cdot \left(2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) + 2\psi(x) \cdot \psi'(x)\right) =$$

$$= \frac{\varphi(x) \cdot \varphi'(x) + \psi(x) \cdot \psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}. \quad \blacksquare$$

е) Якщо $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$ $(\varphi(x) \neq 1, \varphi(x) > 0, \psi(x) > 0)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – диференційовні функції, то

$$y' = \left(\log_{\varphi(x)} \psi(x)\right)' = \left(\frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}\right)' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \ln \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} =$$

$$= \frac{\varphi(x) \cdot \psi'(x) \cdot \ln \varphi(x) - \psi(x) \cdot \varphi'(x) \cdot \ln \psi(x)}{\varphi(x) \cdot \psi(x) \cdot \ln^2 \varphi(x)}. \quad \blacksquare$$

є) Якщо $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$, то

$$y' = \left(f(e^x) \cdot e^{f(x)}\right)' = \left(f(e^x)\right)' \cdot e^{f(x)} + f(e^x) \cdot \left(e^{f(x)}\right)' =$$

$$= f'(e^x) \cdot e^x \cdot e^{f(x)} + f(e^x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot \left(f'(e^x) \cdot e^x + f(e^x) \cdot f'(x)\right). \quad \blacksquare$$

ж) Для функції $y = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ маємо:

$$y' = f'\left(f\left(f(x)\right)\right) \cdot f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x). \quad \blacksquare$$

Приклад 1.3. Показати, що існує однозначна функція $y = y(x)$, що визначена таким рівнянням, та знайти її похідну y'_x:

а) $y^3 + 3y = x$ (№Д1034); **б)** $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (№Д1035).

Розв'язання. а) Знайдемо похідну x'_y:

$$x'_y = 3y^2 + 3 > 0 \ \forall y \in \mathbb{R},$$

тому функція $x = x(y)$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$ та її похідна в жодній точці з $\mathbb{R}$ не дорівнює нулю. Звідси випливає існування однозначної оберненої функції $y = y(x)$, похідна якої дорівнює *(теорема 1.4 про похідну оберненої функції)*

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2+1)}.$$

Існування однозначної функції $y = y(x)$ можна обґрунтувати в <u>інший спосіб</u>. Припустимо супротивне, тобто що існують дві нерівні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що визначені рівнянням $y^3 + 3y = x$, тоді

$$(y_1)^3 + 3y_1 = x \text{ і } (y_2)^3 + 3y_2 = x,$$

Звідки

$$(y_1)^3 + 3y_1 = (y_2)^3 + 3y_2,$$

$$(y_1 - y_2)\left((y_1)^2 + y_1 y_2 + (y_2)^2 + 3\right) = 0.$$

Неповний квадрат суми $(y_1)^2 + y_1 y_2 + (y_2)^2$ приймає строго додатні значення, тому значення виразу $(y_1)^2 + y_1 y_2 + (y_2)^2 + 3$ ніколи не може дорівнювати нулю. Тому виписана рівність буде вірною лише при $y_1 - y_2 = 0$, тобто при $y_1(x) \equiv y_2(x)$. Це суперечить припущенню. Отже, існує єдина функція $y = y(x)$, що визначена даним рівнянням.■

б) Розв'яжемо поставлену задачу за допомогою похідної. Другий спосіб пропонуємо читачеві реалізувати самостійно. Знайдемо похідну x'_y і пригадаємо, що $0 < \varepsilon < 1$:

$$x'_y = 1 - \varepsilon \cos y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Тому функція $x = x(y)$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$ і її похідна в жодній точці із $\mathbb{R}$ не дорівнює нулю. Звідси випливає існування однозначної оберненої функції $y = y(x)$, похідна якої дорівнює

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}. \quad ■$$

Приклад 1.4 (№Д,1036). Визначити області існування обернених функцій $x = x(y)$ та знайти їх похідні, якщо

а) $y = x + \ln x$; **б)** $y = x + e^x$; **в)** $y = \operatorname{sh} x$; **г)** $y = \operatorname{th} x$.

Розв'язання. а) ОДЗ (область допустимих значень або область визначення функції): $x > 0$; множина значень – $\mathbb{R}$. Знайдемо похідну y'_x при $x > 0$:

$$y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \ \forall x > 0 .$$

Тому функція строго зростає і має ненульову похідну для всіх $x > 0$. Таким чином, існує обернена функція $x = x(y)$ на $\mathbb{R}$ (на множині значень даної функції), похідна якої дорівнює (*теорема про похідну оберненої функції*)

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{x}{x+1} . \ \blacksquare$$

б) ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$; множина значень – $\mathbb{R}$. Знайдемо похідну y'_x:

$$y'_x = 1 + e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} .$$

Дана функція строго зростає і має ненульову похідну на $\mathbb{R}$. Отже, існує обернена функція $x = x(y)$ на $\mathbb{R}$, похідна якої дорівнює

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+y-x} . \qquad \blacksquare$$

в) ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$; множина значень – $\mathbb{R}$, похідна:

$$y'_x = \operatorname{ch} x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} .$$

Функція строго зростає і має ненульову похідну на $\mathbb{R}$, тому існує обернена функція на $\mathbb{R}$, похідна якої дорівнює

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} . \qquad \blacksquare$$

г) ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$; множина значень – $|y| < 1$, похідна:

$$y'_x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} .$$

Отже, існує обернена функція при $|y| < 1$, похідна якої дорівнює

$$x'_y = \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{1-y^2} \quad (|y| < 1) . \quad \blacksquare$$

Приклад 1.5 (№Д,1037 а). Виділити однозначні неперервні гілки обернених функцій $x = x(y)$, знайти її похідні, побудувати графіки, якщо $y = 2x^2 - x^4$.

Розв'язання. Похідна даної функції $y'_x = 4x - 4x^3$ дорівнює нулю в точках $x = 0$, $x = \pm 1$. Тому на кожному із проміжків $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ функція строго монотонна і має ненульову похідну. Отже, на кожному із цих проміжків вона має однозначну гілку обернених функцій.

В рівнянні $y = 2x^2 - x^4$ покладемо $t = x^2$, отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 2t + y = 0$, для якого

$$D/4 = 1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty;1],$$

$t_1 = 1 + \sqrt{1-y} \geq 0$ при $y \in (-\infty;1]$, $\qquad t_2 = 1 - \sqrt{1-y} \geq 0$ при $y \in [0;1]$.

В результаті одержимо рівняння однозначних гілок обернених функцій

$$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in (-\infty;1],$$

$$x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in (-\infty;1],$$

$$x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in [0;1],$$

$$x_4 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in [0;1].$$

Графіки цих гілок зображені на рис. 1.1. Окрім того, похідна від будь-якої з таких гілок має вигляд:

$$x_i' = \frac{1}{4x\left(1-x^2\right)} \quad \forall i = 1, 2, 3, 4. \ \blacksquare$$

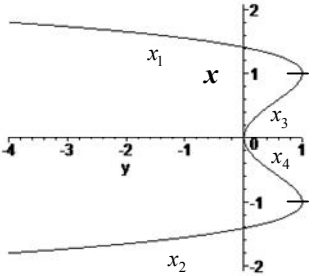


Рис. 1.1.

1.3. Диференційовність і диференціал

Приклад 1.6 Дослідити функції на диференційовність

а) $y = |x|$; **б)** $y = |\sin^3 x|$ (№Д977б).

Розв'язання. а) В прикладі 1.3 було доведено, що для функції $f(x) = |x|$ в точці $x = 0$ $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, тому

$$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow \nexists f'(0).$$

Отже, у точці $x = 0$ функція $y = |x|$ недиференційовна.

Нехай тепер $x \neq 0$, тоді для $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow |x| = x; \\ (\Delta x \to 0 \wedge x > 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow x + \Delta x > 0 \Rightarrow |x+\Delta x| = x + \Delta x \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1;$$

для $x < 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x<0 \Rightarrow |x| = -x; \\ (\Delta x \to 0 \wedge x<0) \Rightarrow \\ \Rightarrow x+\Delta x<0 \Rightarrow |x+\Delta x| = -x-\Delta x \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x-\Delta x+x}{\Delta x} = -1.$$

Отже, приходимо до висновку: функція $y=|x|$ диференційовна при $x \neq 0$, окрім того, отримано формулу

$$\boxed{(|x|)' = \operatorname{sgn} x \quad \text{при} \quad x \neq 0}. \ \blacksquare$$

б) Для функції $y=|\sin^3 x|$ окремо розглянемо точки, де $\sin^3 x = 0$, тобто

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

В цих точках за означенням матимемо

$$y'(\pi n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(\pi n+\Delta x)-y(\pi n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|\sin^3(\pi n+\Delta x)\right| - \left|\sin^3(\pi n)\right|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|\sin^3(\Delta x)\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|(\Delta x)^3\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3 \cdot \operatorname{sgn} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 \cdot \operatorname{sgn} \Delta x = 0.$$

В точках, де $\sin^3 x \neq 0$, тобто $x \neq \pi n\ \forall n \in \mathbb{Z}$ одержимо

$$y' = |\sin^3 x|' = \operatorname{sgn}\left(\sin^3 x\right) \cdot \left(\sin^3 x\right)' = \operatorname{sgn}\left(\sin^3 x\right) \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Приходимо до висновку, що дана функція диференційовна на $\mathbb{R}$. ■

Приклад 1.7. Знайти похідні й побудувати графіки функцій та їх похідних, якщо

а) $y=|\sin x|$; **б)** $y=\ln|x|$ (№Д977в);

в) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x|<1 \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \dfrac{|x|-1}{2} & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}$.

Розв'язання. **а)** Для функції $y=|\sin x|$ розглянемо точки, де $\sin x = 0$, тобто $x = \pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$. Знайдемо праву та ліву похідні:

$$y'_+(\pi n) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{y(\pi n+\Delta x)-y(\pi n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\left|\sin(\pi n+\Delta x)\right| - \left|\sin(\pi n)\right|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\left|\sin(\Delta x)\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$y'_-(\pi n) = = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\left|\sin(\pi n+\Delta x)\right| - \left|\sin(\pi n)\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\left|\sin(\Delta x)\right|}{\Delta x} =$$

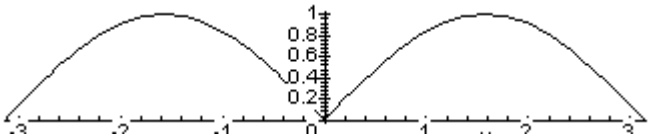
$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Оскільки $y'_{-}(\pi n) \neq y'_{+}(\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, то в точках $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ функція не є диференційовною.

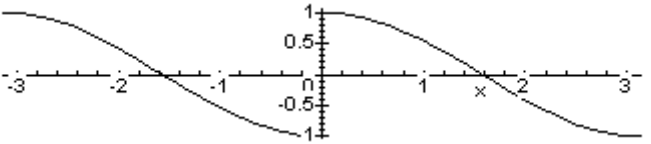
В точках $x \neq \pi n$ одержимо

$$y' = |\sin x|' = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot (\sin x)' = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x = \begin{cases} \cos x, & 2\pi n < x < \pi + 2\pi n; \\ -\cos x, & -\pi + 2\pi n < x < 2\pi n. \end{cases}$$

Отримана похідна існує у всіх точках, де $x \neq \pi n$, тому приходимо до висновку, що дана функція диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$, а похідна в цих точках дорівнює $y' = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x$. Графіки функції та її похідної зображені відповідно на рис. 1.2 а і на рис. 1.2 б. ■



а



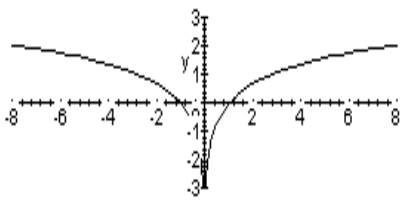
б

Рис. 1.2.

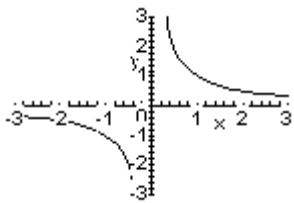
б) Для функції $y = \ln|x|$ точка, в якій вираз під модулем дорівнює 0 (тобто $x = 0$), не входить в область визначення, тому знайдемо спочатку похідну в точках, де $x \neq 0$:

$$y' = \frac{1}{|x|} \cdot |x|' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Графіки функції та її похідної зображені відповідно на рис. 1.3 а і на рис. 1.3 б. ■



а



б

Рис. 1.3.

в) Для функції $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x|<1 \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\dfrac{|x|-1}{2} & \text{при } |x|\ge 1 \end{cases}$, якщо $|x|<1$, то

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Якщо $x>1$, то

$$y'(x)=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}\right)'=\frac{1}{2}.$$

Якщо $x<-1$, то

$$y'(x)=\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{-x-1}{2}\right)'=-\frac{1}{2}.$$

В точках $x=\pm 1$ обчислимо праву та ліву похідні. Так, для точки $x=1$ матимемо:

$$y'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1+\Delta x-1}{2}-\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=\frac{1}{2},$$

$$y'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\operatorname{arctg}(1+\Delta x)-\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\operatorname{arctg}(1+\Delta x)-\operatorname{arctg}1}{\Delta x}=\left|\begin{array}{l} a=1+\Delta x,\ b=1,\ \ a\cdot b>-1, \\ \operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg}\dfrac{a-b}{1+a\cdot b}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{2+\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{2+\Delta x}=\frac{1}{2}.$$

Оскільки $y'_+(1)=y'_-(1)$ то в точці $x=1$ функція є диференційовною і $y'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Для точки $x=-1$ маємо:

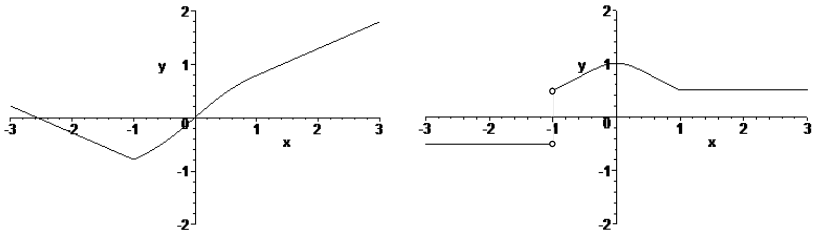
$$y'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{y(-1+\Delta x)-y(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\operatorname{arctg}(-1+\Delta x)-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\left(\operatorname{arctg}(1-\Delta x)-\operatorname{arctg}1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-1}{\Delta x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}=\frac{1}{2},$$

$$y'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{y(-1+\Delta x)-y(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\frac{\pi}{4}+\frac{1-\Delta x-1}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x}=-\frac{1}{2}.$$

Оскільки $y'_+(-1)\neq y'_-(-1)$, то в точці $x=-1$ функція не є диференційовною.

Графіки функції та її похідної зображені відповідно на рис. 1.4 а, б. ■



а б

Рис. 1.4.

Приклад 1.8 (№Д991)**.** Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0;\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

має розривну похідну.

Розв'язання. Якщо $x\neq 0$, то

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Отримана функція є неперервною при $x\neq 0$. Дійсно, функції $\sin\frac{1}{x}$ та $\cos\frac{1}{x}$ неперервні як складені при $x\neq 0$, а $f'(x)$ неперервна при $x\neq 0$ як добуток і різниця неперервних при $x\neq 0$ функцій.

Якщо $x=0$, то

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=[\text{н.м.ф.}\times\text{обм.}]=0.$$

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0+0}y'(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$. Тут

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_{x\to 0+0} 2x\sin\dfrac{1}{x} = [\text{н.м.ф.}\times\text{обм.}] = 0\,, \\ 2)\ \nexists \lim\limits_{x\to 0+0} \cos\dfrac{1}{x}\,, \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x\to 0+0} y'(x)\,.$$

Таким чином, похідна в точці $x=0$ має розрив II роду, а в усіх інших точках – неперервна. ■

Приклад 1.9 (№Д992)**.** За яких умов функція

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

а) неперервна при $x=0$; б) диференційовна при $x=0$; в) має неперервну похідну при $x=0$?

Розв'язання.

а) Оскільки $f(0)=0$, то для того, щоб функція була неперервною, потрібно задовольнити вимогу:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0\,.$$

Для даної функції границя

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x)^n \cdot \sin\frac{1}{x}$$

існує і дорівнює нулю, якщо $n>0$. Отже, за цієї ж умови дана функція неперервна в точці $x=0$.

б) В точці $x=0$ маємо

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^n \sin\dfrac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}\,.$$

Остання границя існує і дорівнює нулю за умови, коли $n-1>0$, тобто $n>1$. За цієї ж умови функція диференційовна в точці $x=0$.

в) Якщо $x\neq 0$, то

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\,.$$

Отримана функція являється неперервною при $x\neq 0$ (доведення аналогічне прикладу 1.8). Для того, щоб $f'(x)$ в точці $x=0$ була неперервною, потрібно задовольнити при $n>1$ вимогу:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0\,.$$

Для функції $f'(x)$ границя

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right)$$

дорівнює нулю, якщо $n-2>0$, тобто $n>2$. Отже, за цієї ж умови $f'(x)$ неперервна в точці $x=0$. ■

Приклад 1.10 (№Д998)**.** Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x\in\mathbb{Q}; \\ 0, \text{ якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$$

має похідну лише при $x=0$.

Розв'язання. Якщо $x\neq 0$ і $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, то для послідовності $\{h_n\}\subset\mathbb{Q}$ і $h_n\to 0$ одержимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(x+h_n)^2-0}{h_n} = \left| \begin{matrix} (x+h_n)^2 \to x^2 \neq 0 \\ h_n \to 0 \end{matrix} \right| = \infty,$$

тому в точці $x\neq 0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ похідна не існує.

Якщо $x\neq 0$ і $x\in\mathbb{Q}$, то для послідовності $\{h_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $h_n\to 0$ отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{0-x^2}{h_n} = \infty,$$

тому в точці $x\neq 0$, $x\in\mathbb{Q}$ похідна не існує.

Розглянемо тепер точку $x=0$. У випадку, коли $\{h_n\}\subset\mathbb{Q}$ і $h_n\to 0$, будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(h_n)^2-0}{h_n} = \lim_{n\to\infty} h_n = 0.$$

У випадку, коли $\{h_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $h_n\to 0$, матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{h_n} = 0.$$

Нехай тепер послідовність $h_n\to 0$, $\{h_n\}$ – довільна. Припустимо, що для послідовності $\left\{z_n = \dfrac{f(h_n)-f(0)}{h_n}\right\}$ границя або не існує, або $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$. У випадку, коли границя послідовності $\{z_n\}$ не існує, виберемо з неї підпослідовність $\left\{z_{k_n}\right\}$, яка буде мати границю, що не

дорівнює нулю (можливо, нескінченну)[2]. Отже, без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$. Тоді оберемо підпослідовність $\left\{h_{k_n}\right\}$, яка цілком утворена або з раціональних, або з ірраціональних чисел. В результаті ми опинимося в умовах випадку 1 або 2 відповідно й прийдемо до висновку, що $z_{k_n} \to 0$, що неможливо для послідовності, яка є підпослідовністю збіжної не до 0 послідовності $\{z_n\}$. Отримане буде суперечити припущенню.

Таким чином, згідно з означенням за Гейне границі функції, маємо:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0 .$$

Тобто, надана функція в точці $x = 0$ має похідну, що дорівнює 0, а у всіх інших точках не має похідної. ■

Приклад 1.11. Знайти односторонні похідні та дослідити функції на диференційовність:

а) $y = [x]\sin \pi x$, де $[x]$ – ціла частина числа x, (№Д1001);

б) $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ (№Д1005); **в)** $y = \left|\ln|x|\right|$ $(x \neq 0)$ (№Д1006).

Розв'язання. а) При обчисленні будемо застосовувати формули

$$\boxed{[n+0] = n, \quad [n-0] = n-1, \quad n \in \mathbb{Z} .}$$

Окремо розглядаємо ті значення аргументу, при яких вираз під знаком цілої частини є цілим. У даному випадку – це $x = n, \quad n \in \mathbb{Z}$. В цих точках односторонні похідні знайдемо за означенням:

$$y'_+(n) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{y(n+\Delta x) - y(n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{[n+\Delta x]\sin(\pi n + \pi\Delta x) - [n]\sin(\pi n)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to +0} \frac{[n+\Delta x](-1)^n \sin(\pi\Delta x)}{\Delta x} = (-1)^n \lim_{\Delta x\to +0} \frac{[n+\Delta x]\pi\Delta x}{\Delta x} = (-1)^n \pi[n+0] = (-1)^n \pi n ,$$

$$y'_-(n) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{[n+\Delta x](-1)^n \sin(\pi\Delta x)}{\Delta x} = (-1)^n \pi[n-0] = (-1)^n \pi(n-1) .$$

---

[2] Згідно з теоремою Больцано-Вейєрштрасса [1, с.110], із будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність. А згідно з аналогом теореми Больцано-Вейєрштрасса [1, с.111], із будь-якої необмеженої послідовності можна виділити нескінченно велику послідовність.

Оскільки права та ліва похідні в кожній із розглянутих точок набувають різних значень, то в цих точках функція не є диференційовною.

Нехай тепер $x \neq n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, тоді $[x] = const$ на кожному із інтервалів $(k, k+1), k \in \mathbb{Z}$, тому

$$y'_+(x) = y'_-(x) = y'(x) = [x]\left(\sin \pi x\right)' = [x]\pi \cos \pi x ,$$

і функція в цих точках диференційовна. ■

б) Область визначення функції $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$:

$$1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} .$$

Формально обчислимо похідну за правилами диференціювання:

$$y' = \left(\sqrt{1 - e^{-x^2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}}\left(1 - e^{-x^2}\right)' = \frac{2xe^{-x^2}}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} .$$

Отримана похідна не визначена в точках, де $1 - e^{-x^2} = 0$, тобто в точці $x = 0$. У цій точці знайдемо односторонні похідні за означенням:

$$y'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \left| \begin{matrix} \Delta x \to \pm 0 \Rightarrow \\ 1 - e^{-\Delta x^2} \sim \Delta x^2 \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \pm 1 .$$

Вони не співпадають, тому в точці $x = 0$ функція не є диференційовною. У всіх інших точках функція диференційовна і значення односторонніх похідних співпадають із значенням похідної, тобто

$$y'_+(x) = y'_-(x) = y'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \quad (x \neq 0) . \qquad ■$$

в) Для функції $y = \left|\ln |x|\right| \quad (x \neq 0)$ окремо розглянемо точки, де вираз під модулем дорівнює 0, тобто $\ln |x| = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Отримаємо

$$y'_\pm(1) == \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{y(1 + \Delta x) - y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left|\ln |1 + \Delta x|\right|}{\Delta x} = \left| \begin{matrix} \Delta x \to 0 \Rightarrow \\ 1 + \Delta x > 0 \Rightarrow \\ |1 + \Delta x| = 1 + \Delta x \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left|\ln(1 + \Delta x)\right|}{\Delta x} = \left| \begin{matrix} \Delta x \to \pm 0 \Rightarrow \\ 1 + \Delta x \gtrless 1 \Rightarrow \\ \ln(1 + \Delta x) \gtrless 0 \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\pm \ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \pm 1,$$

$$y'_\pm(-1) == \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{y(-1 + \Delta x) - y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left|\ln |-1 + \Delta x|\right|}{\Delta x} = \left| \begin{matrix} \Delta x \to 0 \Rightarrow \\ -1 + \Delta x < 0 \Rightarrow \\ |-1 + \Delta x| = 1 - \Delta x \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\ln(1-\Delta x)|}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \Delta x \to \pm 0 \Rightarrow \\ 1-\Delta x \lesseqgtr 1 \Rightarrow \\ \ln(1-\Delta x) \lesseqgtr 0 \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\mp \ln(1-\Delta x)}{\Delta x} = \pm 1,$$

односторонні похідні нерівні, як у точці $x = 1$, так і в $x = -1$, тому в точках $x = \pm 1$ функція не є диференційовною.

Розглянемо $x \neq \pm 1$. В прикладі 1.7 б) було знайдено $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, тому при $x \neq \pm 1$ і $x \neq 0$ одержимо

$y'_+(x) = y'_-(x) = y'(x) =$

$$= \operatorname{sgn}(\ln|x|) \cdot (\ln|x|)' = \frac{\operatorname{sgn}(\ln|x|)}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{якщо } |x| > 1 \\ -\frac{1}{x}, \text{якщо } 0 < |x| < 1 \end{cases}.$$

Отримана похідна в усіх точках $x \neq \pm 1$ і $x \neq 0$ існує, тому в цих точках функція диференційовна. ■

Приклад 1.12. Обчислити

а) $d\left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} + \ln(\cos x)\right)$; **б)** $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (№Д1096 б);

в) $d\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$ (№Д1093), **г)** $d\left(arctg\frac{u}{v}\right)$ (№Д1094),

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні функції, x – незалежна змінна.

Розв'язання. а) Диференціал обчислюється за формулою

$df(x) = f'(x) \cdot dx$, тому для функції $f(x) = e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} + \ln(\cos x)$:

$$df(x) = \left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)\right)' + \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right) dx =$$

$$= \left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} \cdot \cos\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x} + x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos\frac{2}{x} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)\right) - tgx \right) dx =$$

$$= \left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} \cdot \cos\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot \sin\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \cos\frac{2}{x}\right) - tgx \right) dx. \quad ■$$

б) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'dx}{(x^2)'dx}=\dfrac{\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx}{2xdx}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$. ■

в) $d\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)=d\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(u^2+v^2\right)=$

$$=-\frac{du^2+dv^2}{2\left(u^2+v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}=-\frac{2udu+2vdv}{2\left(u^2+v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}=-\frac{udu+vdv}{\left(u^2+v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}.$$ ■

г) $d\left(arctg\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v^2}{u^2+v^2}\cdot\dfrac{vdu-udv}{v^2}=\dfrac{vdu-udv}{u^2+v^2}$. ■

Приклад 1.13. Замінюючи приріст функції диференціалом, знайти наближено такі значення:

а) $\sqrt[3]{1,02}$ (№Д1099); **б)** $\sqrt[7]{100}$ (№Д1105 в);

в) $\sin 29^o$ (№Д1100); **г)** $\operatorname{arctg}1,05$ (№Д1102).

Розв'язання. а) Знайдемо наближене значення $\sqrt[3]{1,02}$. Оскільки $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)$, то для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ оберемо $x_0=1$, $\Delta x=0,02$, тоді

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x_0\right)^2}}\cdot\Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f(1)\approx\dfrac{0,02}{3}=0,0067,\\ \Delta f(1)=f(1,03)-f(1),\quad f(1)=1,\end{array}\right\}\Rightarrow f(1,03)\approx 1+0,0067=1,0067.$$

Отже, $\sqrt[3]{1,02}\approx 1,0067$. Зауважимо, що полегшити обчислення можна було, застосувавши формули для таких обчислень, отримані в теоретичній частині. ■

б) Наближено обчислимо $\sqrt[7]{100}$. Оскільки

$$\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{128-28}=2\cdot\sqrt[7]{1-\frac{28}{128}}=2\cdot\sqrt[7]{1-\frac{7}{32}},$$

то обравши $f(x)=\sqrt[7]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=-\dfrac{7}{32}$, отримаємо

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{\left(x_0\right)^6}}\cdot\Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f(1)\approx-\dfrac{1}{32}=-0,03125,\\ \Delta f(1)=f\left(1-\dfrac{7}{32}\right)-f(1),\quad f(1)=1,\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(1-\frac{7}{32}\right)\approx 1-0,03125=0,96875.$$

Отже, $\sqrt[7]{100}\approx 2\cdot 0,96875=1,9375$. ■

в) Для наближеного обчислення $\sin 29^o$ зробимо попередні перетворення:

$$\sin 29^o=\sin(30^o-1^o)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right).$$

Оберемо $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x=-\dfrac{\pi}{180}$, тоді

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=\cos x_0\cdot\Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\approx-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{360}\approx-0,0151,\\ \Delta f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\\ f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}=0,5,\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0,5-0,0151=0,4849.$$

Отже, $\sin 29^o\approx 0,4849$. ■

г) Для наближеного обчислення $\operatorname{arctg}1,05$ оберемо $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $x_0=1$, $\Delta x=0,05$, тоді

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=\frac{1}{1+(x_0)^2}\cdot\Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f(1)\approx\dfrac{0,05}{2}\approx 0,025,\ f(1)=\dfrac{\pi}{4}\approx 0,7854,\\ \Delta f(1)=f(1,05)-f(1),\end{array}\right\}\Rightarrow f(1,05)\approx 0,8104.$$

Отже, $\operatorname{arctg}1,05\approx 0,8104$. ■

1.4. Геометричний зміст похідної

Приклад 1.14 (№Д1070). Довести, що у астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ довжина відрізка дотичної, що обмежена осями координат, є сталою величиною.

Розв'язання. В теоретичній частині було обчислено похідну від даної функції (див. приклад 1.8):

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\ .$$

Знайдемо рівняння дотичної в точці $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0)\ .$$

Знайдемо координати точок перетину дотичної з осями. Розглянемо перетин з віссю ординат:

$$x = 0 \Rightarrow y - y_0 = \sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}x_0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{(x_0)^2 y_0} + y_0 = \sqrt[3]{y_0}\cdot\left(\sqrt[3]{(x_0)^2} + \sqrt[3]{(y_0)^2}\right).$$

Оскільки точка $M(x_0, y_0)$ належить астроїді, то $\sqrt[3]{(x_0)^2} + \sqrt[3]{(y_0)^2} = \sqrt[3]{a^2}$, тому шукана точка має координати $\left(0; \sqrt[3]{y_0}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)$. Аналогічно, точка перетину з віссю абсцис має координати $\left(\sqrt[3]{x_0}\cdot\sqrt[3]{a^2}; 0\right)$. Знайдемо відстань між знайденими точками

$$d = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x_0}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y_0}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)^2} = \sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y_0}\right)^2} = \sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a\ .$$

Знайдена відстань є сталою величиною, що й треба було довести.

Приклад 1.15 (№Д1062). Визначити кут, під яким перетинаються криві

$$y = \sin x \ \text{ і } \ y = \cos x\ .$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривих:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ y = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n \\ y = (-1)^n \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},\quad n \in \mathbb{Z}\ .$$

Кут φ між прямими $y = k_1 x + b_1$ *і* $y = k_2 x + b_2$ визначається із формули

$$tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Дотичні до графіків даних функцій в точках $\frac{\pi}{4} + \pi n$ мають кутові коефіцієнти відповідно

$$k_1 = (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n} = (\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k_2 = (\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n} = (-\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тому

$$tg\varphi = \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| = \left|\frac{(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \varphi = arctg\left(2\sqrt{2}\right). \blacksquare$$

Приклад 1.16 (№Д1062). За якої умови кубічна парабола

$$y = x^3 + px + q$$

дотикається вісі Ox?

Розв'язання. Точки перетину кубічної параболи з віссю абсцис задовольняють рівнянню:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Точки, в яких дана лінія дотикається до осі Ox, мають похідну, що дорівнює 0, тобто:

$$3x^2 + p = 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ 3x^2 + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pm\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0 \\ x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4p^3}{27} = q^2 \\ x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}} \end{cases}.$$

Таким чином, коефіцієнти кубічної параболи повинні задовольняти вимозі: $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$. $\blacksquare$

Приклад 1.17. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої

а) $y = (x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$ у точках $A(-1,0), B(2,3), C(3,0)$ (№Д1055);

б) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ в точках $t = 0, t = 1$ (№Д1077);

в) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M(6;6,4)$ (№Д1081);

г) $xy + \ln y = 1, \quad M(1;1)$ (№Д1082).

Розв'язання. а) Для функції $f(x)=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$, що задана явно, знайдемо похідну:

$$f'(x)=\sqrt[3]{3-x}+(x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}} \text{ при } x\neq 3,\quad f'(3)=\infty.$$

Рівняння дотичної і нормалі можна побудувати за формулами:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0);$$
$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Для точки $A(-1,0)$ маємо: $x_0=-1$, $f(-1)=0$, $f'(-1)=\sqrt[3]{4}$, тому рівняння дотичної і нормалі до кривої в цій точці мають, відповідно, вигляд:

$$y=\sqrt[3]{4}(x+1);\quad y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

Для точки $B(2,3)$ маємо: $x_1=2$, $f(2)=3$, $f'(2)=0$, тому дотична з рівнянням $y-3=0$ паралельна вісі абсцис, а нормаль – вісі ординат – $x-2=0$.

Для точки $C(3,0)$ маємо: $x_2=3$, $f(3)=0$, $f'(3)=\infty$, тому дотична перпендикулярна вісі абсцис і має рівняння $x-3=0$, а нормаль $y=0$ паралельна цій вісі. ■

б) Для функції $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$, що задана параметрично, похідна обчислюється за формулою $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, тому маємо

$$y'_x=\frac{\left(3t-t^3\right)'}{\left(2t-t^2\right)'}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t).$$

Значенню параметра $t=0$ відповідає точка $x_0=0, y_0=0$ на декартовій площині й похідна $y'_x=\dfrac{3}{2}$, а рівняння дотичної і нормалі набувають відповідно вигляду:

$$y=\frac{3}{2}x;\quad y=-\frac{2}{3}x.$$

Для параметра $t=1$ маємо: $x_1=1, y_1=2$, $y'_x=3$, тому рівняння дотичної і нормалі набувають відповідно вигляду:

$$y-2=3(x-1), \quad y-2=-\frac{1}{3}(x-1),$$

тобто

$$3x-y-1=0, \quad x+3y-7=0. \ \blacksquare$$

в) За правилом диференціювання неявних функцій обчислюємо похідну від обох частин даного рівняння $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, вважаючи, що y – це функція, що залежить від x (тобто $y=y(x)$), а x – незалежна змінна:

$$\frac{2x}{100}+\frac{2y\cdot y'}{64}=0 \Rightarrow y'=-\frac{16x}{25y}.$$

Точка $M(6;6,4)$ задовольняє рівнянню даного еліпса, тому $x_0=6;\ y_0=6,4$. Похідна в цій точці дорівнює $y'=-\frac{3}{5}$. Отже, рівняння дотичної і нормалі в цій точці –

$$y-6,4=-\frac{3}{5}(x-6); \quad y-6,4=\frac{5}{3}(x-6),$$

тобто

$$3x+5y-50=0; \quad 5x-3y-10,8=0. \ \blacksquare$$

г) Для функції $xy+\ln y=1$ маємо область визначення $y>0$;

$$y+xy'+\frac{y'}{y}=0 \Rightarrow y'=-\frac{y^2}{1+xy},$$

$$M(1;1) \Rightarrow x_0=1;\ y_0=1;\ y'(x_0)=-\frac{1}{2};$$

дотична в точці M: $y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \Rightarrow \quad x+2y-3=0$;

нормаль у точці M: $y-1=2(x-1) \quad \Rightarrow \quad 2x-y-1=0$. $\blacksquare$

1.5. Похідні та диференціали вищих порядків

Приклад 1.18. Знайти другі похідні від функцій:

а) $y=(x+5)\cdot\ln(x+5)$; **б)** $\begin{cases} x=e^{2t}\cos^2 t \\ y=e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$ (№Д1045);

в) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (логарифмічна спіраль) (№Д1053);

г) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда) (№1054б).

Розв'язання. а) Для явно заданої функції $y=(x+5)\cdot\ln(x+5)$ маємо область визначення $x>-5$;

$$y' = \ln(x+5)+\frac{x+5}{x+5} = \ln(x+5)+1,$$

$$y'' = \left(\ln(x+5)+1\right)' = \frac{1}{x+5}. \quad \blacksquare$$

б) Для функції $\begin{cases} x = e^{2t}\cos^2 t \\ y = e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$, що задана параметрично, похідна обчислюється за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, тому маємо:

$$x'_t(t) = 2e^{2t}\cos^2 t - e^{2t}2\cos t\sin t = 2\cos t\cdot e^{2t}(\cos t-\sin t);$$
$$y'_t(t) = 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}2\sin t\cos t = 2\sin t\cdot e^{2t}(\sin t+\cos t);$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sin t\cdot e^{2t}(\sin t+\cos t)}{2\cos t\cdot e^{2t}(\cos t-\sin t)} = tg\,t\cdot\frac{tg\,t+1}{1-tg\,t} = tg\,t\cdot\frac{tg\,t+tg\frac{\pi}{4}}{1-tg\,t\cdot tg\frac{\pi}{4}} = tg\,t\cdot tg\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

Похідна є визначеною при $t\neq\pi/4+\pi n, n\in\mathbb{Z}, t\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}$. Другу похідну знаходимо за формулою $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$:

$$y''_{xx} = \frac{\left(tg\,t\cdot tg\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)'_t}{2\cos t\cdot e^{2t}(\cos t-\sin t)} = \frac{\dfrac{tg\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2 t}+\dfrac{tg\,t}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2\cos t\cdot e^{2t}(\cos t-\sin t)} =$$

$$= \frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos t\cdot\sin t}{2\cos^3 t\cdot\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{2t}(\cos t-\sin t)} = \frac{\cos 2t+\sin 2t}{4\cos^3 t\cdot\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{2t}(\cos t-\sin t)}. \quad \blacksquare$$

в) Для обчислення похідної від функції $arctg\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, що задана неявно, обчислимо спочатку похідну за змінною x від наведених нижче виразів, вважаючи, що $y=y(x)$:

$$\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{y'x-x'y}{x^2} = \frac{y'x-y}{x^2};$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x+2yy'\right) = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тепер продиференціюємо задану рівність $arctg\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x$$

і підставимо знайдені похідні

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Після перетворень отримаємо

$$y'x-y = x+yy';$$
$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Обчислимо другу похідну як похідну від першої, пам'ятаючи, що $y = y(x)$:

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}.$$

Підставимо в отриманий вираз для другої похідної замість y' знайдене вище значення $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$, одержимо

$$y'' = \frac{2x\dfrac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2} = \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}. \quad \blacksquare$$

г) Розглянемо функцію $\rho = a(1+\cos\varphi)$ в полярній системі координат. Графік зображено на рис. 1.5 при $a=1$. Знаючи, що

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi\in[-\pi;\pi),$$

отримаємо за формулою похідної від функції, що задана параметрично:

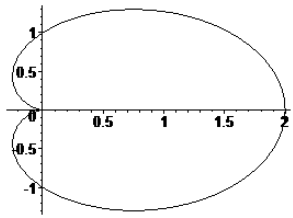


Рис. 1.5.

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi}.$$

Застосовуючи знайдену формулу, обчислюємо:

$$\rho' = a(1+\cos\varphi)' = -a\sin\varphi\ ;$$

$$y'_x = \frac{-a\sin\varphi\sin\varphi + a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi} =$$

$$= -\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -ctg\,\frac{3\varphi}{2}.$$

Знайдена похідна є невизначеною в точках, де $\begin{cases}\sin\frac{3\varphi}{2} = 0\\ \cos\frac{\varphi}{2} = 0\end{cases}$. З урахуванням проміжку зміни полярного кута отримаємо $\varphi \neq \pm\frac{2\pi}{3}, 0, \pi$.

Точка $\varphi = \pi$ є розв'язком рівняння $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ і в ній маємо

$$\lim_{\varphi\to 0} y'_x = -\lim_{\varphi\to 0}\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -\lim_{\varphi\to 0} ctg\,\frac{3\varphi}{2} = 0,$$

тому в цій точці похідна існує.

Знайдемо тепер другу похідну. Знайдено першу похідну, яка є функцією, заданою параметрично (від параметра φ):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,\\ z = y'_x = ctg\,\frac{3\varphi}{2}.\end{cases}$$

Похідна від неї і буде дорівнювати другій похідній від даної функції, а саме:

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{3\varphi}{2}}\cdot\frac{3}{2}}{-a\sin\varphi\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = \frac{3}{2\sin^2\frac{3\varphi}{2}\,2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4\sin^3\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}.\ \blacksquare$$

Приклад 1.19. Знайти d^2y, якщо

а) $y=\dfrac{u}{v}$ (№Д1135), **б)** $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$ (№Д1138),

де $u=u(x)$, $v=v(x)$ двічі диференційовні функції, x – незалежна змінна.

Розв'язання. а) $y=\dfrac{u}{v} \Rightarrow dy=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$;

$$d^2y=\frac{v^2\cdot d(vdu-udv)-d(v^2)\cdot(vdu-udv)}{\left(v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{v^2\cdot(dvdu+vd^2u-dudv-ud^2v)-2vdv\cdot(vdu-udv)}{v^4}=$$

$$=\frac{v\cdot(vd^2u-ud^2v)-2dv\cdot(vdu-udv)}{v^3}\quad (v\neq 0).\quad \blacksquare$$

б) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left(u^2+v^2\right) \Rightarrow dy=\dfrac{d(u^2+v^2)}{2\left(u^2+v^2\right)}=\dfrac{udu+vdv}{u^2+v^2}$;

$$d^2y=\frac{\left(u^2+v^2\right)d(udu+vdv)-d\left(u^2+v^2\right)(udu+vdv)}{\left(u^2+v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(u^2+v^2\right)(dudu+ud^2u+dvdv+vd^2v)-(2udu+2vdv)(udu+vdv)}{\left(u^2+v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(v^2-u^2\right)(du)^2-4uvdudv+\left(u^2-v^2\right)(dv)^2+\left(u^2+v^2\right)(ud^2u+vd^2v)}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

$$(u^2+v^2\neq 0)\ .\ \blacksquare$$

Приклад 1.20. Знайти $y^{(50)}$, якщо $y=x^2\sin 2x$ (№Д1165).

Розв'язання. Для знаходження даної похідної застосуємо формулу Лейбніца. Нехай $u=x^2$, $v=\sin 2x$ (в якості u обрано многочлен!). Оскільки

$$u'=2x,\qquad u''=2,\qquad u'''=0\,,$$

то формула Лейбніца буде містити лише 3 доданки, а саме:

$$(uv)^{(50)}=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^{k}u^{(k)}v^{(50-k)}=C_{50}^{0}uv^{(50)}+C_{50}^{1}\cdot u'v^{(49)}+C_{50}^{2}u''v^{(48)}+0\ .$$

Обчислимо 50, 49 і 48 похідні від функції v, застосовуючи формулу із таблиці похідних вищих порядків $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$:

$$v^{(50)} = 2^{50}\sin\left(2x+\frac{50\pi}{2}\right) = -2^{50}\sin 2x;$$

$$v^{(49)} = 2^{49}\sin\left(2x+\frac{49\pi}{2}\right) = 2^{49}\cos 2x\ ;$$

$$v^{(48)} = 2^{48}\sin\left(2x+\frac{48\pi}{2}\right) = 2^{48}\sin 2x\ .$$

Отримані результати зведемо в таблицю 1.1.

Таблиця 1.1.

k	$n-k$	C_n^k	$u^{(k)}$	$v^{(n-k)}$
0	50	$C_{50}^0 = 1$	$u = x^2$	$v^{(50)} = -2^{50}\sin 2x$
1	49	$C_{50}^1 = 50$	$u' = 2x$	$v^{(49)} = 2^{49}\cos 2x$
2	48	$C_{50}^2 = \frac{50\cdot 49}{2} = 25\cdot 49$	$u'' = 2$	$v^{(48)} = 2^{48}\sin 2x$

Підставимо їх у формулу Лейбніца:

$$(uv)^{(50)} = C_{50}^0 uv^{(50)} + C_{50}^1\cdot u'v^{(49)} + C_{50}^2 u''v^{(48)} =$$

$$= 1\cdot x^2\cdot(-2^{50}\sin 2x) + 50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cos 2x + 25\cdot 49\cdot 2\cdot 2^{48}\sin 2x\ ;$$

$$(uv)^{(50)} = 2^{50}\cdot\left(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x\right).\ \blacksquare$$

Приклад 1.21. Знайти $y^{(n)}$, якщо

а) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (№Д1188); **б)** $y = \dfrac{x^{10}}{x^2+x-2}$ для $n > 10$;

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ (№Д1191); **г)** $y = \sin^3 x$ (№Д1195);

д) $y = \ln\dfrac{a-bx}{a+bx}$ (№Д1208); **е)** $y = x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

є) довести формулу $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right) = n!\cdot\left(\ln x + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)$ (№Д1232.1).

Розв'язання. а) Спочатку виділимо цілу частину:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \left(b-\frac{ad}{c}\right)\cdot\frac{1}{cx+d}\ .$$

Застосуємо формулу з таблиці похідних вищих порядків $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ для обчислення відповідної похідної від останнього дробу. Будемо мати: $\left(\frac{1}{cx+d}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(cx+d)^{n+1}} \cdot c^n$, звідки

$$y^{(n)} = \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot \frac{(-1)^n n!}{(cx+d)^{n+1}} \cdot c^n = \frac{(-1)^n n! c^{n-1}(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}. \quad \blacksquare$$

б) Раціональний дріб $y = \frac{x^{10}}{x^2+x-2}$ є неправильним, тому спочатку виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник стовпчиком:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^{10}+0x^9+0x^8+0x^7+0x^6+0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0 & x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
\quad x^{10}+x^9-2x^8 & x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+ \\
\quad -x^9+2x^8+0x^7 & \quad +43x^2-85x+171 \\
\quad -x^9-x^8+2x^7 & \\
\quad 3x^8-2x^7+0x^6 & \\
\quad 3x^8+3x^7-6x^6 & \\
\quad -5x^7+6x^6+0x^5 & \\
\quad -5x^7-5x^6+10x^5 & \\
\quad 11x^6-10x^5+0x^4 & \\
\quad 11x^6+11x^5-22x^4 & \\
\quad -21x^5+22x^4+0x^3 & \\
\quad -21x^5-21x^4+42x^3 & \\
\quad 43x^4-42x^3+0x^2 & \\
\quad 43x^4+43x^3-86x^2 & \\
\quad -85x^3+86x^2+0x & \\
\quad -85x^3-85x^2+170x & \\
\quad 171x^2-170x+0 & \\
\quad 171x^2+171x-342 & \\
\quad -341x+342 &
\end{array}$$

Звідки отримаємо

$$y = x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x+342}{x^2+x-2}.$$

Тепер розглянемо останній правильний раціональний дріб і розкладемо його на найпростіші:

$$\frac{-341x+342}{x^2+x-2} = \frac{-341x+342}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Обчислимо коефіцієнти A і B <u>*методом невизначених коефіцієнтів*</u>, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях першого та останнього дробів:

$$\begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array}\left|\begin{array}{l} A+B=-341 \\ 2A-B=342 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-341-B \\ -682-3B=342 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{1024}{3} \end{array}\right.$$

Звідки одержимо

$$y=x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1024}{3(x+2)}.$$

Оскільки обчислюється похідна більше, ніж 10 порядку, то вона буде нульовою для многочлена 8 степеня, тому шукана похідна відповідно до формули

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

набуде вигляду

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{3(x-1)^{n+1}}-\frac{1024\cdot(-1)^n n!}{3(x+2)^{n+1}}=(-1)^n n!\cdot\left(\frac{1}{3(x-1)^{n+1}}-\frac{1024}{3(x+2)^{n+1}}\right). \blacksquare$$

в) Область визначення функції $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$: $x<1/2$. Застосуємо формулу

$$\left(x^\alpha\right)^{(n)}=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n},$$

де $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, тоді

$$y^{(n)}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\cdot(1-2x)^{-\frac{1}{2}-n}\cdot(-2)^n=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot(-2)^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(1-2x)^n\cdot\sqrt{1-2x}}=\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^n\cdot\sqrt{1-2x}}\qquad(x<1/2)^{3}. \blacksquare$$

г) Спочатку застосуємо формулу, що знижує степінь синуса:

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x.$$

Також застосуємо формулу

---

[3] Тут і далі застосовано позначення для подвійних факторіалів:

$(2n-1)!!\overset{def}{=}1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$, $\quad(2n)!!\overset{def}{=}2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)$.

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \cdot \sin\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right).$$

В результаті будемо мати:

$$y^{(n)} = \left(\sin^3 x\right)^{(n)} = \left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)^{(n)} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot 3^n \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right). \ \blacksquare$$

д) ОДЗ: $\dfrac{a-bx}{a+bx} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\left|\dfrac{a}{b}\right|, \left|\dfrac{a}{b}\right|\right)$.

У випадку, коли $a > 0$ при $x \in \left(-\left|\dfrac{a}{b}\right|, \left|\dfrac{a}{b}\right|\right)$ маємо:

$$\ln\frac{a-bx}{a+bx} = \ln(a-bx) - \ln(a+bx).$$

Оскільки

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

то

$$y^{(n)} = \left(\ln(a-bx) - \ln(a+bx)\right)^{(n)} =$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a-bx)^n}\cdot(-b)^n - (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a+bx)^n}\cdot b^n =$$

$$= b^n (n-1)!\cdot\left(\frac{1}{(a-bx)^n} + \frac{(-1)^n}{(a+bx)^n}\right).$$

У випадку, коли $a < 0$ при $x \in \left(-\left|\dfrac{a}{b}\right|, \left|\dfrac{a}{b}\right|\right)$ виконується рівність

$$\ln\frac{a-bx}{a+bx} = \ln(bx-a) - \ln(-a-bx).$$

Тоді

$$y^{(n)} = \left(\ln(bx-a) - \ln(-a-bx)\right)^{(n)} =$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(bx-a)^n}\cdot b^n - (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(-a-bx)^n}\cdot(-b)^n =$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a-bx)^n}\cdot(-b)^n - (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a+bx)^n}\cdot b^n =$$

$$= b^n (n-1)! \cdot \left(\frac{1}{(a-bx)^n} + \frac{(-1)^n}{(a+bx)^n} \right).$$

В обох випадках маємо одну й ту ж форму похідної вищого порядку. ■

е) ОДЗ: $\frac{1-x}{1+x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1,1)$.

В межах інтервалу $(-1,1)$ має місце співвідношення:

$$x \ln \frac{1-x}{1+x} = x\left(\ln(1-x) - \ln(1+x)\right).$$

Знайдемо спочатку першу похідну:

$$y' = \left(x\left(\ln(1-x) - \ln(1+x)\right)\right)' = \ln(1-x) - \ln(1+x) + \frac{-x}{1-x} - \frac{x}{1+x} =$$

$$= \ln(1-x) - \ln(1+x) + \frac{1-x-1}{1-x} - \frac{1+x-1}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1-x} - 1 + \frac{1}{1+x} =$$

$$= \ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}.$$

Похідна порядку n від даної функції дорівнює похідній порядку $n-1$ від y', тому зважаючи на формули

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

отримаємо:

$$y^{(n)} = \left(\ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)^{(n-1)} =$$

$$= (-1)^{n-2} \cdot \frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1} - (-1)^{n-2} \cdot \frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1-x)^n} \cdot (-1)^n +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} = (n-2)! \cdot \left(\frac{x+n-2}{(1-x)^n} + \frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+n)}{(1+x)^n} \right). \quad ■$$

є) Для обчислення даної похідної застосуємо формулу Лейбніца

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Нехай $u = \ln x$, $v = x^n$. Складові доданків формули Лейбніца зведемо в таблицю 1.2:

Таблиця 1.2.

k	$n-k$	C_n^k	$u^{(k)}$	$v^{(n-k)}$
0	n	C_n^0	$u=\ln x$	$v^{(n)}=n!$
1	$n-1$	C_n^1	$u'=\dfrac{1}{x}$	$v^{(n-1)}=n!x$
2	$n-2$	C_n^2	$u''=-\dfrac{1}{x^2}$	$v^{(n-2)}=$ $=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3x^2=$ $=\dfrac{n!}{2!}x^2$
3	$n-3$	C_n^3	$u'''=\dfrac{2!}{x^3}$	$v^{(n-3)}=$ $=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 4x^3=$ $=\dfrac{n!}{3!}x^3$
…	…	…	…	…
k	$n-k$	C_n^k	$u^{(k)}=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$	$v^{(n-k)}=$ $=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)x^k=$ $=\dfrac{n!}{k!}x^k$
…	…	…	…	…
$n-2$	2	C_n^{n-2}	$u^{(n-2)}=(-1)^{n-3}\dfrac{(n-3)!}{x^{n-2}}$	$v''=n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}=$ $=\dfrac{n!}{(n-2)!}x^{n-2}$
$n-1$	1	C_n^{n-1}	$u^{(n-1)}=(-1)^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$	$v'=nx^{n-1}=\dfrac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}$
n	0	C_n^n	$u^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$	$v=x^n$

Звідки отримаємо:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right)=n!\cdot\left(C_n^0\ln x+C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{(-1)^{n-3}}{n-2}C_n^{n-2}+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}C_n^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n\right)=n!\cdot\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k\right).$$

Залишається довести за індукцією формулу

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Якщо $n=1$, то формула набуває вигляду: 1=1. Ця рівність є вірною. Зробимо індуктивне припущення. Нехай рівність $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k$ є вірною. Доведемо здійсненність рівності:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k .$$

Дійсно, застосовуючи індуктивне припущення, одержимо:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k+\frac{1}{n+1} .$$

Оскільки

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{n+1-k}\cdot\frac{n+1-k}{n+1}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\left(1-\frac{k}{n+1}\right)=C_{n+1}^k\cdot\left(1-\frac{k}{n+1}\right),$$

то

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}C_{n+1}^k+\frac{1}{n+1}=$$

$$=\underline{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k+\frac{(-1)^n}{n+1}C_{n+1}^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{n+1}C_{n+1}^{n+1}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_{n+1}^k+\frac{1}{n+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k+\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_{n+1}^k+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^kC_{n+1}^k .$$

Якщо у формулі бінома Ньютона $(a+b)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}$ обрати $a=-1, b=1$, то можна отримати:

$$0=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k .$$

Це означає, що другий доданок в останній сумі, що отримана після перетворень виразу $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$, дорівнює нулю. Тому

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k+0 .$$

Звідси приходимо до висновку про справедливість рівності, що доводиться для всіх натуральних значень n. Враховуючи доведену рівність, знаходимо значення шуканої похідної порядку n:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n \ln x\right) = n!\cdot\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k\right) = n!\cdot\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right). \quad \blacksquare$$

1.6. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші

Приклад 1.22 (№Д1235). Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Розв'язання. Дана функція є неперервною і диференційовною на $\mathbb{R}$ як добуток неперервних і диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Зокрема, вона неперервна на відрізках $[1;2]$ і $[2;3]$ і диференційовна на інтервалах $(1;2)$ і $(2;3)$. Крім того, на кінцях зазначених відрізків набуде рівних значень: $f(1) = f(2) = 0$ і $f(2) = f(3) = 0$. Всі умови теореми Ролля виконуються, тому дана функція всередині цих відрізків має точки, в яких її похідна дорівнює нулю:

$$\exists\alpha \in (1;2) : f'(\alpha) = 0 \text{ і } \exists\beta \in (2;3) : f'(\beta) = 0.$$

Безпосередньо знайдемо такі точки:

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = 3x^2 - 12x + 11;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 11 = 0;$$

$$\alpha = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \in (1;2); \quad \beta = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \in (2;3). \quad \blacksquare$$

Приклад 1.23 (№Д1236). Функція $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ має нуль у точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$, але тим не менше $f'(x) \neq 0$ при $-1 \le x \le 1$. Пояснити уявну суперечність з теоремою Ролля.

Розв'язання. Для того, щоб здійснювались висновки теореми, потрібно, щоб виконувались усі, без винятку, її припущення. Перевіримо, чи є вірним припущення про диференційовність функції на інтервалі (–1;1), зокрема, диференційовність у точці $x_0 = 0$ цього інтервалу:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1 - \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty.$$

Оскільки границя різницевого відношення в точці $x_0 = 0$ нескінченна, то дана функція не є диференційовною в цій точці.

Отже, припущення про диференційовність функції на інтервалі (-1;1) не виконується, тому теорему Ролля при $-1 \le x \le 1$ застосовувати не можна, і жодної суперечності з цієї теоремою не існує! $\blacksquare$

Приклад 1.24 (№Д1238). Нехай

1) функція $f(x)$ визначена і має неперервну похідну $(n-1)$-го порядку $f^{(n-1)}(x)$ на сегменті $[x_0;x_n]$;
2) функція $f(x)$ має похідну n-го порядку $f^{(n)}(x)$ на інтервалі $(x_0;x_n)$;
3) виконується рівність

$$f(x_0)=f(x_1)=...=f(x_n) \quad (x_0<x_1<...<x_n).$$

Довести, що в інтервалі $(x_0;x_n)$ існує, як мінімум, одна точка ξ така, що $f^{(n)}(\xi)=0$.

Доведення. За умовою для кожного $i=1,2,...,n$ функція $f(x)$

1) неперервна на кожному із відрізків $[x_{i-1};x_i]$,
2)диференційовна на кожному інтервалі $(x_{i-1};x_i)$,
3) на кінцях відрізків набуває рівних значень $f(x_{i-1})=f(x_i)$,

тому за теоремою Ролля

$$\forall i=1,2,...,n\ \exists c_{1,i-1}\in(x_{i-1};x_i): f'(c_{1,i-1})=0.$$

Функція $f'(x)$ $\forall i_1=1,2,...,n-1$

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \text{неперервна на } [c_{1,i_1-1};c_{1,i_1}],\\ 2)\ \text{диференційовна на } (c_{1,i_1-1};c_{1,i_1}),\\ 3)\ f'(c_{1,i_1-1})=f'(c_{1,i_1})=0,\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{за теоремою Ролля}\\ \exists c_{2,i_1-1}\in(c_{1,i_1-1};c_{1,i_1}): f''(c_{2,i_1-1})=0.\end{array}$$

Продовжуючи аналогічні міркування, матимемо що функція $f^{(n-2)}(x)$ для $i_{n-2}=1,n-(n-2)$, тобто для $i_{n-2}=1,2$

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \text{неперервна на } [c_{n-2,i_{n-2}-1};c_{n-2,i_{n-2}}],\\ 2)\ \text{диференційовна на } (c_{n-2,i_{n-2}-1};c_{n-2,i_{n-2}}),\\ 3)\ f^{(n-2)}(c_{n-2,i_{n-2}-1})=f^{(n-1)}(c_{n-2,i_{n-2}})=\\ \qquad\qquad =0,\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{за теоремою Ролля}\\ \exists c_{n-1,i_{n-2}-1}\in(c_{n-2,i_{n-2}-1};c_{n-2,i_{n-2}}):\\ f^{(n-1)}(c_{n-1,i_{n-2}-1})=0.\end{array}$$

Нарешті, функція $f^{(n-1)}(x)$ за умовою

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \text{неперервна на } [c_{n-1,0};c_{n-1,1}],\\ 2)\ \text{диференційовна на } (c_{n-1,0};c_{n-1,1}),\\ 3)\ f^{(n-1)}(c_{n-1,0})=f^{(n-1)}(c_{n-1,1})=0,\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{за теоремою Ролля}\\ \exists\xi=c_{n,0}\in(c_{n-1,0};c_{n-1,1}):\\ f^{(n)}(\xi)=0.\ \blacksquare\end{array}$$

Оскільки $(c_{n-1,0};c_{n-1,1}) \subset (x_0;x_n)$, то $\xi \in (x_0;x_n)$ і $f^{(n)}(\xi)=0$. ■

Приклад 1.25 (№Д1237). Довести, що якщо всі корені многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

з дійсними коефіцієнтами a_k $(k=0,1,2,...,n)$ дійсні, то його послідовні похідні $P_n'(x), P_n''(x),...,P_n^{(n-1)}(x)$ також мають лише дійсні корені.

Доведення. Многочлен степеня n має точно n коренів дійсних і комплексних з урахуванням їх кратності. Оскільки припускається, що даний многочлен із дійсними коефіцієнтами має тільки дійсні корені, то їх кількість дорівнює n. Нехай найменший серед них – x_1, а найбільший – x_n.

Нехай усі корені многочлена попарно відмінні. В прикладі 1.24 припускалося, що функція має рівні значення в $n+1$ точці. У даному прикладі таких точок n (корені многочлена). Двом першим припущенням прикладу 1.24 про неперервність похідної $(n-2)$-го порядку $P_n^{(n-1)}(x)$ на сегменті $[x_1;x_n]$ і існування похідної $(n-1)$-го порядку $P_n^{(n-1)}(x)$ на інтервалі $(x_1;x_n)$ дана функція-многочлен теж задовольняє. Із доведення прикладу 1.24 випливає, що похідні даного многочлена до $(n-1)$-го порядку включно $P_n'(x), P_n''(x),...,P_n^{(n-1)}(x)$ мають лише дійсні корені на інтервалі $(x_1;x_n)$.

У випадку, коли многочлен має кратний корінь, то цей корінь зобов'язаний бути коренем похідної такого многочлена, тобто дійсним. ■

Приклад 1.26 (№Д1238). Довести, що у многочлена Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$$

усі корені дійсні і розташовані в інтервалі $(-1;1)$.

Доведення. Многочлен $\left(x^2-1\right)^n$ має $2n$ коренів на $[-1;1]$: $x_0=x_1=...=x_n=-1$ і $x_{n+1}=x_{n+2}=...=x_{2n}=1$. Тому, згідно з прикладом 1.25, многочлен Лежандра як похідна порядку n від многочлена $\left(x^2-1\right)^n$ має лише дійсні корені. Оскільки корені -1 і 1 мають кратність n, то вони не можуть стати коренями похідної порядку n. Тому всі корені многочлена Лежандра лежать в інтервалі $(-1;1)$. ■

Приклад 1.27 (№Д1244). Знайти на кривій $y = x^3$ точку, дотична в якій паралельна хорді, що сполучає точки $A(-1;-1)$ і $B(2;8)$.

Розв'язання. Згідно з геометричним змістом формули Лагранжа, така точка $M(c, f(c))$ має абсцису, що задовольняє формулі Лагранжа.

Дана функція неперервна на відрізку $[-1;2] = [a;b]$, диференційовна на інтервалі $(-1;2) = (a;b)$, тому існує точка $c \in (-1;2)$ така, що

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

У даному випадку формула Лагранжа перепишеться у вигляді:

$$8-(-1) = 3c^2(2-(-1)).$$

Звідки $c_{1,2} = \pm 1$. Значення $c_2 = 1 \in (-1;2)$, тому воно відповідає можливості застосування формули Лагранжа, на відміну від $c_1 = -1$. Знайдемо тепер ординату точки на кривій: $y(1) = 1$. Точка $M(1;1)$ є шуканою.

Додатково перевіримо, чи буде дотична в точці $A(-1;-1)$ з абсцисою $c_1 = -1$ паралельна хорді AB. Кутовий коефіцієнт хорди AB: $k = \dfrac{8-(-1)}{2-(-1)} = 3$. Кутовий коефіцієнт дотичної в точці $A(-1;-1)$ дорівнює значенню похідної при $c_1 = -1$: $k_1 = 3(c_1)^2 = 3$. Отже, в точці $A(-1;-1)$ хорда й дотична паралельні, навіть хорда лежить на дотичній прямій.

Дотична в точці $B(2;8)$ не є паралельною хорді, що сполучає точки A і B. Перевірте це самостійно ✍!

Таким чином, шукані точки: $M(1;1)$ і $A(-1;-1)$.

Читачеві також пропонуємо самостійно розв'язати ✍ даний приклад із застосуванням лише геометричного змісту похідної! ■

Приклад 1.28 (№Д1246 а, в, г). Знайти функцію $\theta = \theta(x, \Delta x)$ таку, що

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0 < \theta < 1),$$

якщо

а) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$; **б)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$; **в)** $f(x) = e^x$.

Розв'язання. До функцій **а)** і **в)** можна застосовувати формулу Лагранжа скінченних приростів в околі будь-якої точки x із $\mathbb{R}$. Для

функції **б)** формулу можна застосовувати в таких околах точок $x \neq 0$, які не містять у собі точки 0.

а) Розглянемо $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c,$$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(x + \theta\Delta x) = 2a(x + \theta\Delta x) + b \quad (0 < \theta < 1).$$

За формулою Лагранжа скінченних приростів будемо мати:

$$a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - \left(ax^2 + bx + c\right) = \left(2a(x + \theta\Delta x) + b\right) \cdot \Delta x,$$

$$2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x = 2ax\Delta x + 2a\theta(\Delta x)^2 + b\Delta x,$$

$$\theta = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

б) Для функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ за формулою Лагранжа скінченних приростів отримаємо:

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{(x + \theta\Delta x)^2} \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1),$$

$$\theta^2 \cdot \Delta x + 2\theta \cdot x - x = 0,$$

$$\frac{D}{4} = x^2 + x \cdot \Delta x = x^2 \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \geq 0 \text{ при } 1 + \frac{\Delta x}{x} \geq 0,$$

$$\theta_{1,2} = \frac{-x \pm |x|\sqrt{1 + \dfrac{\Delta x}{x}}}{\Delta x} = -\frac{x}{\Delta x} \pm \left|\frac{x}{\Delta x}\right|\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}}, \quad 1 + \frac{\Delta x}{x} \geq 0,\ x \neq 0,\ \Delta x \neq 0$$

тобто

$$\theta_1 = -\frac{x}{\Delta x} - \left|\frac{x}{\Delta x}\right|\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}}, \quad \theta_2 = -\frac{x}{\Delta x} + \left|\frac{x}{\Delta x}\right|\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}},$$

$$\text{де } 1 + \frac{\Delta x}{x} \geq 0,\ x \neq 0,\ \Delta x \neq 0.$$

Оскільки $x \neq 0, \Delta x \neq 0$, то $\dfrac{\Delta x}{x} \neq 0$. Якщо $\dfrac{\Delta x}{x} = -1$, то $\theta_{1,2} = 1$, що неможливо, оскільки $0 < \theta < 1$, тому виникає потреба посилити обмеження:

$$1 + \frac{\Delta x}{x} > 0,\ x \neq 0,\ \Delta x \neq 0 \Leftrightarrow x(x + \Delta x) > 0,\ \Delta x \neq 0.$$

Якщо $\dfrac{\Delta x}{x} > 0$, то

✓ $\theta_1 = -\frac{x}{\Delta x}\left(1+\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}\right) < 0$, що не відповідає обмеженню $0 < \theta_1 < 1$;

✓ $\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}} < 1+\frac{\Delta x}{x} \Rightarrow \theta_2 = \frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right) < \frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{x} = 1$ і $\theta_2 > 0$;

Якщо $-1 < \frac{\Delta x}{x} < 0$, то

✓ $1 > \sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}} > 1+\frac{\Delta x}{x} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{x}{\Delta x}\left(1-\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}\right) \le -\frac{x}{\Delta x}\cdot\left(-\frac{\Delta x}{x}\right) = 1$ і $\theta_1 > 0$;

✓ $\theta_2 = \underbrace{-\frac{x}{\Delta x}}_{>1}\underbrace{\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\Delta x}}\right)}_{>1} > 1$, що не відповідає обмеженню $0 < \theta_2 < 1$.

Отже, нерівності $0 < \theta < 1$ задовольняє таке $\theta = \theta(x, \Delta x)$, що представлене у вигляді $\theta = \frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)$, де $x(x+\Delta x) > 0, \Delta x \ne 0$. ■

в) Для функції $f(x) = e^x$ за формулою Лагранжа скінченних приростів одержимо:

$$e^{x+\Delta x} - e^x = e^{x+\theta\Delta x}\cdot\Delta x \quad (0 < \theta < 1),$$

$$e^{\Delta x} - 1 = e^{\theta\Delta x}\cdot\Delta x,$$

$$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^{\theta\Delta x} \Rightarrow \quad \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \Delta x \ne 0,$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Перевіримо співвідношення $0 < \theta < 1$. Із прикладу 1.11 відомо, що $e^{\Delta x} > \Delta x + 1$ при $\Delta x \ne 0$, тобто

$$\begin{cases} \ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} > 0 & \text{при} \quad \Delta x > 0, \\ \ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} < 0 & \text{при} \quad \Delta x < 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} > 0 \quad \forall \Delta x \ne 0.$$

Доведемо нерівність $e^{\Delta x} - 1 < \Delta x e^{\Delta x}$. Для цього розглянемо функцію $f(\Delta x) = e^{\Delta x} - 1 - \Delta x e^{\Delta x}$, для якої матимемо (достатня умова монотонності функції на інтервалі):

$$f'(\Delta x) = -\Delta x e^{\Delta x},$$

✓ $\Delta x > 0 \Rightarrow f'(\Delta x) < 0 \Rightarrow f(\Delta x) \searrow$ при $\Delta x > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(\Delta x) < f(0) \text{ при } \Delta x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\Delta x} - 1 - \Delta x e^{\Delta x} < 0 \quad \text{при } \Delta x > 0,$$

✓ $\Delta x < 0 \Rightarrow f'(\Delta x) > 0 \Rightarrow f(\Delta x) \nearrow$ при $\Delta x < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(\Delta x) < f(0) \text{ при } \Delta x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\Delta x} - 1 - \Delta x e^{\Delta x} < 0 \quad \text{при } \Delta x < 0.$$

Із доведеної нерівності отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} < e^{\Delta x} & \text{при} \quad \Delta x > 0, \\ \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} > e^{\Delta x} & \text{при} \quad \Delta x < 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} < 1 \quad \forall \Delta x \neq 0.$$

Отже, $\theta = \dfrac{1}{\Delta x} \ln \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \in (0;1)$ при $\Delta x \neq 0$. ■

Приклад 1.29 (№Д1253). Нехай функція $f(x)$ диференційовна на сегменті $[x_1; x_2]$, причому $x_1 \cdot x_2 > 0$. Довести, що

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

де $x_1 < \xi < x_2$.

Доведення. Перетворимо ліву частину рівності, що доводимо:

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2} - \dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}}.$$

Розглянемо дві допоміжні функції $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ і $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$. Вони диференційовні, а тому й неперервні на $[x_1; x_2]$ за умови $x_1 \cdot x_2 > 0$, крім того, $\psi'(x) \neq 0 \quad \forall\, [x_1; x_2]$. Тому до них можна застосувати теорему Коші:

$$\exists \xi \in (x_1; x_2): \quad \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Оскільки $\varphi'(\xi) = \dfrac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}$; $\psi'(\xi) = \dfrac{-1}{\xi^2}$, то $\dfrac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$.

Отже, отримаємо: $\exists \xi \in (x_1; x_2)$:

$$\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2}-\dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

що й доводить задану рівність. ■

1.7 Монотонність функції на інтервалі. Локальний екстремум. Найбільше й найменше значення функції на відрізку

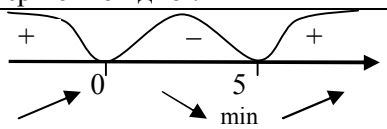
Приклад 1.30. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною: $y=\dfrac{(x-5)^2}{x^2}$.

Розв'язання. Область визначення даної функції $x\neq 0$. Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює 0 або не існує:

$$y'=\frac{\left((x-5)^2\right)'\cdot x^2-(x-5)^2\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x^2(x-5)-2x(x-5)^2}{x^4}=\frac{10(x-5)}{x^3},$$

$$y'=0\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x-5=0\end{cases},\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x=5\end{cases}.$$

Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму функції, використовуючи знак першої похідної:

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\nexists$ 0

Отже, на інтервалі $(-\infty;0)$ і на $(5;+\infty)$ функція зростає;

на інтервалі $(0;5)$ функція спадає;

точка $x=5$ є точкою мінімуму. ■

Приклад 1.31. Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному відрізку:

$$y=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції:

$$y' = \frac{1}{2}(\cos 2x)' + (\sin x)' = \frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 + \cos x = \cos x - \sin 2x,$$

$$y' = 0,$$

$$\cos x - \sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos x - 2\cos x \cdot \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos x \cdot (1 - 2\sin x) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 1 - 2\sin x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Інтервалу $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ належать тільки точки $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Знаходимо значення функції в критичних точках та на кінцях інтервалу:

$$y(0) = \frac{1}{2}, \qquad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Висновок: $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$. ■

Приклад 1.32 (№Д1558)**.** Визначити найбільше значення добутку m-ого та n-ого степенів ($m > 0$, $n > 0$) двох додатних чисел, сума яких дорівнює a.

Розв'язання. Нехай x – одне з даних додатних чисел, тоді інше дорівнює $a - x$. Добуток їх m-го та n-го степенів дорівнюватиме $x^m \cdot (a-x)^n$. Потрібно знайти найбільше значення функції $f(x) = x^m \cdot (a-x)^n$ при $x \in (0, a)$.

Для дослідження цієї функції знайдемо спочатку похідну:

$$f'(x) = mx^{m-1} \cdot (a-x)^n - n(a-x)^{n-1} \cdot x^m = x^{m-1} \cdot (a-x)^{n-1}(ma - mx - nx).$$

Далі знаходимо критичні точки функції:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = a, \\ x = \frac{ma}{m+n}. \end{array}\right.$$

В інтервалі $(0, a)$ лежить одна критична точка: $x = \frac{ma}{m+n}$.

Нарешті, знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0, \quad \lim_{x\to a} f(x)=0,$$

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\cdot\left(a-\frac{ma}{m+n}\right)^n=\frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}.$$

Висновок: найбільше значення функції дорівнює $\frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$. ■

Приклад 1.33 (№Д1565)**.** В еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписати прямокутник найбільшої площі з сторонами, що паралельні осям даного еліпса.

Розв'язання. Нехай x, y (одиниць довжини) – довжини сторін прямокутника, тоді точки з координатами $\left(\pm\frac{x}{2},\pm\frac{y}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{x}{2},\mp\frac{y}{2}\right)$ є вершинами цього прямокутника (див. рис. 1.6). Ці точки повинні лежати на еліпсі, а їх координати – задовольняти рівнянню еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

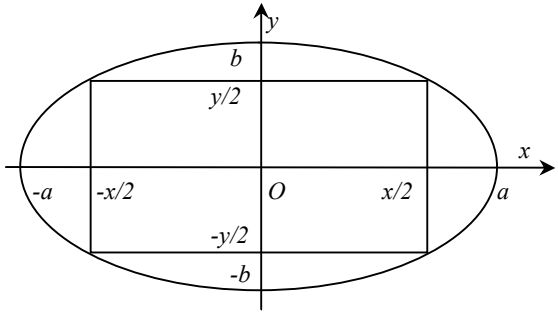


Рис. 1.6.

Звідки $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Площа побудованого прямокутника дорівнює $S(x)=x\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Знайдемо значення довжини $x\in(0,a)$ однієї із сторін прямокутника, при якому функція $S(x)$ набуває найбільшого значення.

Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$S'(x) = b\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \frac{x^2}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right) = \frac{b\left(a^2-2x^2\right)}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}};$$

$S'(x) = 0$ при $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$;

$\exists S'(x)$ при $x = \pm a$.

В інтервалі $(0,a)$ лежить одна критична точка: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Тепер знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{x\to 0} S(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} S(x) = 0,$$

$$S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{ab}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{ab}{2}.$$

Отже, найбільше значення функції досягається в точці $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, що відповідає значенню однієї із сторін прямокутника. Тоді друга сторона дорівнюватиме $y = b\sqrt{1-\frac{a^2}{2a^2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Висновок: довжини сторін шуканого прямокутника дорівнюють $\frac{a}{\sqrt{2}}$ і $\frac{b}{\sqrt{2}}$. ■

Приклад 1.34 (№Д1572)**.** Знайти найбільший об'єм конуса з довжиною твірної l.

Розв'язання. Нехай α – кут між твірною конуса та його висотою. Зобразимо осьовий переріз конуса (див. рис. 1.7). В $\Delta BKS, \angle K = 90^o$, $\angle KSB = \alpha$, $SB = l$, тоді радіус основи дорівнюватиме

$$R = KB = l\sin\alpha,$$

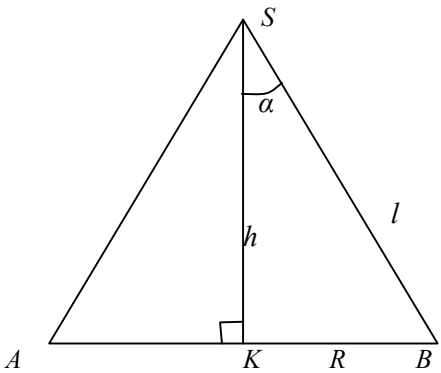


Рис. 1.7.

а висота конуса

$$h = SK = l\cos\alpha .$$

Тоді об'єм конуса складатиме

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{l^3\pi}{3}\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha .$$

Для пошуку найбільшого значення об'єму знайдемо найбільше значення функції

$$f(\alpha) = \cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$$

на інтервалі $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$f'(\alpha) = -\sin^3\alpha + 2\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\left(-\mathrm{tg}^2\alpha + 2\right);$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 0 \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi m,\ m \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pm\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. ;$$

$$\nexists f'(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi j,\ j \in \mathbb{Z} .$$

В інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ лежить одна критична точка: $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2}$. Знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} f(\alpha) = 0,$$

$$f\left(\mathrm{arctg}2\right) = \cos\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right)\cdot\sin^2\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right)}}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Висновок: найбільше значення об'єму дорівнює $V = \frac{l^3\pi}{3}\max\limits_{\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}l^3$. ■

Приклад 1.35 (№Д1579)**.** Поперечний переріз відкритого каналу має форму рівнобічної трапеції. При якому нахилі φ боків «мокрий периметр» перерізу буде найменшим, якщо площа «живого перерізу» води в каналі дорівнює S, а рівень води дорівнює h.

Розв'язання. На рис. 1.8 зображено поперечний переріз каналу. Нахилу боків відповідає кут $\angle CBB_1 = \varphi$, рівню води – довжина відрізків

$$MK = NB = h .$$

В $\Delta BNC, \angle N = 90^o$, $\angle NCB = \varphi$, тоді

$$BC = \frac{h}{\sin\varphi}, \; NC = h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi .$$

Звідси знайдемо «живий переріз» води в каналі:

$$S = \frac{2AB + 2NC}{2} \cdot h = \left(AB + h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi\right) \cdot h,$$

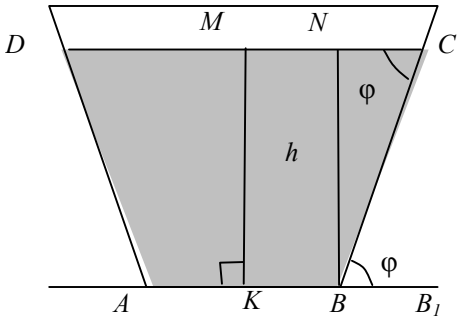


Рис. 1.8.

тому

$$AB = \frac{S}{h} - h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi .$$

Отже, «мокрий периметр» перерізу складатиме:

$$P = AD + AB + BC = \frac{S}{h} - h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi + \frac{2h}{\sin\varphi} .$$

Знайдемо значення кута $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при якому функція $P(\varphi)$ набуває найменшого значення.

Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$P'(\varphi) = \frac{h}{\sin^2\varphi} - \frac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{h(1 - 2\cos\varphi)}{\sin^2\varphi} ;$$

$$P'(\varphi) = 0 \text{ при } \varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z};$$

$$\exists P'(\varphi) \text{ при } \varphi = \pi m, \; m \in \mathbb{Z}.$$

В інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ лежить одна критична точка: $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{\varphi\to+0} P(\varphi) = \lim_{\varphi\to+0}\left(\frac{S}{h} - h\cdot\operatorname{ctg}\varphi + \frac{2h}{\sin\varphi}\right) = \lim_{\varphi\to+0}\left(\frac{S}{h} + \frac{h(-\cos\varphi+2)}{\sin\varphi}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0} P(\varphi) = \frac{S}{h} + 2h, \quad P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{S}{h} + h\sqrt{3}.$$

Отже, найменше значення «мокрого периметру» досягається для значення кута $\varphi = \frac{\pi}{3}$ нахилу боків каналу. ■

1.8. Знаходження сум за допомогою похідної

Розглянемо знаходження сум за допомогою похідних. Для цього будемо використовувати відомі формули:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}; \tag{1.1}$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\ x \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}; \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},\ x \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}; \tag{1.3}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},\ x \neq 2^n k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Формули для знаходження багатьох сум скінченної кількості однойменних функцій можна отримати, диференціюючи дані рівності необхідну кількість разів, при цьому добуток (1.4) попередньо логарифмують.

Приклад 1.36. Знайти формулу для суми

$$1 + 2\ln x + 3\ln^2 x + \ldots + n\ln^{n-1} x,\ x > 0.$$

Розв'язання. Виберемо в рівності (1.1) $\ln x$ замість x:

$$\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x = \frac{\ln x - \ln^{n+1} x}{1-\ln x}.$$

Знайдемо похідну від обох частин даної рівності. Після перетворень отримуємо:

$$\frac{1}{x}\left(1 + 2\ln x + 3\ln^2 x + \ldots + n\ln^{n-1} x\right) = \frac{1-(n+1)\ln^n x + n\ln^{n+1} x}{x(1-\ln x)^2}.$$

Звідси знаходимо:

$$1+2\ln x+3\ln^2 x+\ldots+n\ln^{n-1} x=\frac{1-(n+1)\ln^n x+n\ln^{n+1} x}{(1-\ln x)^2}. \quad \blacksquare$$

Приклад 1.37. Знайти суму:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{16\cos^2\frac{x}{4}}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}\cos^2\frac{x}{2^n}}.$$

Розв'язання. Логарифмуємо рівність (1.4) та отримуємо:

$$\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{4}+\ldots+\ln\cos\frac{x}{2^n}=\ln\sin x-n\ln 2-\ln\sin\frac{x}{2^n}.$$

Диференціюємо отриману тотожність та знаходимо:

$$-\left(\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}\right)=ctgx-\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}.$$

Після повторного диференціювання отримуємо шукану формулу:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{16\cos^2\frac{x}{4}}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}\cos^2\frac{x}{2^n}}=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{2^{2n}\sin^2\frac{x}{2^n}}. \quad \blacksquare$$

1.9. Доведення нерівностей

Зауваження. Зверніть увагу **(!)**, що декілька нерівностей було доведено в теоретичній частині. Зокрема, там було розглянуто такі класи задач:

I. Доведення нерівностей за допомогою теореми Лагранжа.

II. Доведення нерівностей з використанням монотонності функції.

Приклад 1.38. Довести нерівності

а) $tg\,x>x+\frac{x^3}{3}$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ (№Д1289г);

б) $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$ при $x>0,\ y>0,\ 0<\alpha<\beta$ (№Д1289д);

в) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ (№Д1290);

г) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ при $x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ n>1$ (№Д1314);

д) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ при $x\neq y$ (№Д1314б).

Розв'язання. Розглянемо *II клас нерівностей, що доводяться з використанням монотонності функцій (а–в).*

а) Для доведення нерівностей $tg\ x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ розглянемо функцію $f(x) = tg\ x - x - \frac{x^3}{3}$.

Знаходимо похідні до того порядку n, при якому можна буде визначити знак $f^{(n)}(x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2,$$

$$f''(x) = 2\cos^{-3} x \sin x - 2x,$$

$$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x - 2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^4 x}{\cos^4 x} = 2 \cdot \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^4 x} > 0.$$

Отже,

$f'''(x) > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f''(x) \nearrow$ $\Rightarrow$, якщо $x > 0$, то $f''(x) > f''(0)$.

Оскільки $f''(0) = \left(2\cos^{-3} x \sin x - 2x\right)\Big|_{x=0} = 0$, а $f''(x) > f''(0)$, то $f''(x) > 0$.

Тепер маємо:

$f''(x) > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f'(x) \nearrow$ $\Rightarrow$, якщо $x > 0$, то $f'(x) > f'(0)$.

Оскільки $f'(0) = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2\right)\Big|_{x=0} = 0$, а $f'(x) > f'(0)$, то $f'(x) > 0$.

Таким чином,

$f'(x) > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f(x) \nearrow$ $\Rightarrow$, якщо $x > 0$, то $f(x) > f(0)$.

Оскільки $f(0) = \left(tg\ x - x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0} = 0$, а $f(x) > f(0)$, то $f(x) > 0$,

тобто $tg\ x - x - \frac{x^3}{3} > 0$, що і треба було довести. ■

б) Перед доведенням нерівності $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \beta$ спочатку поділимо обидві частини даної нерівності на y (така дія коректна, оскільки $y > 0$):

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}+1\right)^{1/\alpha} > \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta}+1\right)^{1/\beta}.$$

Остання нерівність еквівалентна заданій, тому будемо доводити останню нерівність. Для цього розглянемо функцію $f(\gamma)=\left(t^{\gamma}+1\right)^{1/\gamma}$ при $\gamma>0$, де $t>0$ – стала. Щоб знайти похідну, застосуємо метод логарифмічного диференціювання:

$$\ln f(\gamma)=\frac{\ln\left(t^{\gamma}+1\right)}{\gamma};$$

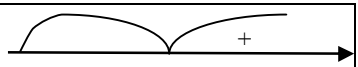
$$\frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)}=\frac{\frac{t^{\gamma}\ln t}{t^{\gamma}+1}\gamma-\ln\left(t^{\gamma}+1\right)}{\gamma^2}=\frac{\gamma t^{\gamma}\ln t-\left(t^{\gamma}+1\right)\ln\left(t^{\gamma}+1\right)}{\gamma^2\left(t^{\gamma}+1\right)}=\frac{1}{\gamma^2\left(t^{\gamma}+1\right)}\ln\frac{\left(t^{\gamma}\right)^{t^{\gamma}}}{\left(t^{\gamma}+1\right)^{\left(t^{\gamma}+1\right)}};$$

$$f'(\gamma)=\left(t^{\gamma}+1\right)^{1/\gamma}\frac{1}{\gamma^2\left(t^{\gamma}+1\right)}\ln\frac{\left(t^{\gamma}\right)^{t^{\gamma}}}{\left(t^{\gamma}+1\right)^{\left(t^{\gamma}+1\right)}}. \qquad (1.5)$$

Знайдемо знак похідної. Очевидно, що перші два множники є додатними при $\gamma>0$, $t>0$. Відкритим є питання про знак третього множника. Оцінимо вираз під знаком логарфму. Для цього введемо заміну $z=t^{\gamma}>0$ і дві допоміжні функції $h(z)=z^{z}$ і $g(z)=\frac{z^{z}}{(z+1)^{z+1}}$ при $z>0$.

Для першої із цих функцій

$$h'(z)=\left(z^{z}\right)'=\left(e^{z\ln z}\right)'=z^{z}\cdot(\ln z+1).$$

Знаки $h'(z)$	
Характерні точки	0 $z=1/e$
Напрямки монотонності, loc extr	↘ min ↗
Значення функції в точках loc extr	$(1/e)^{1/e}$

Також маємо: $\lim\limits_{z\to+0} z^{z}=1$ (див. приклад 1.43 г). У випадку, коли $0<z<1/e$, функція $h(z)=z^{z}$ спадає і тому $\lim\limits_{z\to+0} h(z)>h(z)>h(1/e)$, тобто $1>z^{z}>\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, окрім того, $(z+1)^{z+1}>1$, отже, здійснюється ланцюг нерівностей:

$$z^{z}<1<(z+1)^{z+1},$$

звідки випливає, що

$$g(z)=\frac{z^z}{(z+1)^{z+1}}<1.$$

У випадку, коли $z>1/e$, функція $h(z)=z^z$ зростає, тому має місце імплікація

$$\left(1<z<z+1\right)\Rightarrow\left(z^z<(z+1)^{z+1}\right),$$

тоді для таких значень z має місце оцінка

$$g(z)=\frac{z^z}{(z+1)^{z+1}}<1.$$

Отже, вираз під знаком логарифма в (1.5) менший за 1, тому $f'(\gamma)<0\ \forall\gamma>0 \quad \Rightarrow f(\gamma)\searrow$ на $(0;+\infty)$ $\Rightarrow$, якщо $0<\alpha<\beta$, то $f(\alpha)>f(\beta)\ \Rightarrow \left(t^\alpha+1\right)^{1/\alpha}>\left(t^\beta+1\right)^{1/\beta}$.

Підставивши $t=\dfrac{x}{y}$ в останню нерівність, отримаємо нерівність, що доводиться. ■

в) Для доведення нерівності $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ введемо функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, тоді

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-tg\,x)}{x^2}.$$

Розглянемо допоміжну функцію $g(x)=x-tg\,x$, отримаємо

$$g'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}<0 \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ g(x)\searrow \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2},$$

$$\Rightarrow, \text{ якщо } 0<x<\frac{\pi}{2}, \text{ то } g(x)<g(0)=0$$

$$\Rightarrow x-tg\,x<0 \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Оскільки $x-tg\,x<0$, то $f'(x)=\dfrac{\cos x(x-tg\,x)}{x^2}<0$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin x}{x}>\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x} \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 1>\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi} \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}x<\sin x<x \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Нагадаємо, що цю нерівність було доведено в теоретичній частині за допомогою опуклості вгору функції $\sin x$ при $0 < x < \pi/2$. ■

Розглянемо *III клас нерівностей, що доводяться за допомогою властивостей опуклості функції, – приклади (г, д).*

г) Для доведення нерівності $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ при $x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$ розглянемо функцію $f(t) = t^n$ при $t > 0, n > 1$:

$$f'(t) = nt^{n-1},$$

$$f''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0 \text{ при } t > 0, n > 1.$$

Тому $f(t) = t^n$ опукла вниз при $t > 0, n > 1$. Із означення опуклої вниз функції, зокрема, випливає, що вона задовольняє нерівності

$$\forall x > 0 \forall y > 0 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Звідки одержимо

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \text{ при } x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1,$$

що й треба було довести. ■

д) Щоб довести нерівність $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ при $x \neq y$, розглянемо функцію $f(t) = e^t$:

$$f'(t) = e^t, \qquad f''(t) = e^t > 0.$$

Тому $f(t) = e^t$ опукла вниз на $\mathbb{R}$. Звідки отримаємо

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \text{ на } \mathbb{R} \text{ при } x \neq y,$$

що й треба було довести. ■

1.10. Доведення тотожностей

Доведення тотожностей за допомогою похідної ґрунтується на ознаці сталості функції, згідно з якою, якщо в усіх точках деякого проміжку $f'(x) = 0$, то функція $f(x)$ зберігає на ньому стале значення.

Приклад 1.39. Довести тотожність $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x},$$

визначену на $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{2+2x^2}=0$$

на всій області визначення функції $f(x)$. Оскільки $f'(x)=0$, то $f(x)$ є сталою, $f(x)\equiv C$ для будь-якого x з області визначення даної функції. Нехай $x=1$. Отримуємо $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$. Звідси маємо $C=\frac{\pi}{4}$, тобто для всіх значень x з області визначення даної функції виконується тотожність

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

Приклад 1.40. Довести тотожність

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$$

Розв'язання. Знайдемо похідну функції

$$f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x:$$

$$f'(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-$$

$$-\sqrt{2}\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)-\sqrt{2}\cos 2x=$$

$$=\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\cos 2x=0.$$

Звідси $f(x)=C$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Оскільки $f(0)=0$, то $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, звідки випливає, що

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x. \quad \blacksquare$$

Приклад 1.41. Довести тотожність

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\cdot\operatorname{tg}x=1,$$

якщо $x+y+z=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. З додаткової умови знаходимо $z=\frac{\pi}{2}-x-y$. Введемо допоміжну функцію

$$f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{ctg}(x+y)+\operatorname{ctg}(x+y)\cdot\operatorname{tg}x,$$

яка співпадає з лівою частиною тотожності. Доведемо, що для будь-яких можливих x та y виконується $f(x)\equiv 1$. Знайдемо $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{\operatorname{tg}y}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg}y}{\sin^2(x+y)}-\frac{\operatorname{tg}x}{\sin^2(x+y)}+\frac{\operatorname{ctg}(x+y)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\operatorname{tg}y+\operatorname{ctg}(x+y)\right)-\frac{1}{\sin^2(x+y)}\cdot\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x\cos y\sin(x+y)}-\frac{1}{\cos x\cos y\sin(x+y)}=0.$$

Отже, $f(x)\equiv C$ при довільних можливих значеннях x. Для знаходження сталої C виберемо $x=0$, тоді $C=f(0)=1$, тобто тотожність виконується. ■

1.11. Правила Лопіталя

Правила Лопіталя застосовуються для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Нагадаємо, що із існування границі відношення похідних випливає існування границі відношення функцій. Тому спочатку бажано відповідну рівність границь записувати під знаком запитання, який після перевірки існування границі відношення похідних перекреслювати.

Приклад 1.42 (№Д1374б). Дослідити можливість застосування правила Лопіталя для границі $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Розв'язання. Позначимо $f(x)=x-\sin x,\quad g(x)=x+\sin x$, тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\infty}tg^2 2x \text{ – не існує,}$$

тому застосовувати правило Лопіталя не можна, однак дана границя існує, оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin x}=\left|\begin{array}{l}x\to\infty\Rightarrow\\ \frac{1}{x}\sin x=[\text{н.м.ф.}\times\text{обм.=н.м.ф.}]=0\end{array}\right|=\frac{1-0}{1+0}=1\,.\ \blacksquare$$

Приклад 1.43. Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{e^{x-1}-1}$; **б)** (№Д1327) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin x^2}$;

в) (№Д1341) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x\ (\varepsilon>0)$: **г)** (№Д1342) $\lim\limits_{x\to0}x^{x}$;

д) (№Д1348) $\lim\limits_{x\to0}\left(ctg\,x\right)^{\sin x}$; **е)** (№Д1365) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{e^{x-1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\text{ᴚ}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\left(\ln(2-x)\right)'}{\left(e^{x-1}-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{e^{x-1}\cdot1}=-1;\ \blacksquare$$

б) $$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin x^2}=\left|\begin{array}{l}x\to0\Rightarrow\\ \sin x^2\sim x^2\end{array}\right|=\ =\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\text{ᴚ}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2\underbrace{\sqrt{1-4x^2}}_{\to1}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to1}}=2\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\text{ᴚ}}{=}2\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{-8x}{\sqrt{1-4x^2}}}{6x}=-4\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{\sqrt{1-4x^2}}^{\to1}-4\overbrace{\sqrt{1-x^2}}^{\to1}}{6\underbrace{\sqrt{1-4x^2}}_{\to1}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to1}}=2;\ \blacksquare$$

в) $$\varepsilon>0\Rightarrow\lim_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\text{ᴚ}}{=}$$

$$\overset{\text{ᴚ}}{=}\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0;\ \blacksquare$$

г) $\lim\limits_{x\to0}x^{x}=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}$;

покладемо $\varepsilon=1$ у попередньому прикладі, отримаємо $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=0$, тоді для даної границі $\lim\limits_{x\to0}x^{x}=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}=e^{0}=1$; ■

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\cdot\ln\left(\operatorname{ctg} x\right)}=$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(ctg\,x\right)}{\sin^{-1}x}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\aleph}{=}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{ctg\,x}\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}}{(-1)\sin^{-2}x\cdot\cos x}\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{ctg} x\cdot\cos x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)=\exp\left(0\right)=1\,;\quad\blacksquare$$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}\right)=\left[\dfrac{0}{0}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\aleph}{=}$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\dfrac{2}{\pi}\arccos x}\cdot\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}}{1}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\right)=\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)=e^{-\frac{2}{\pi}}.\ \blacksquare$$

1.12.Формула Тейлора

Приклад 1.44 (№Д1376)**.** Многочлен $p(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ розвинути за цілими невід'ємними степенями двочлена $x+1$.

Розв'язання. Формула Тейлора для многочленів має вигляд

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{p''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n.$$

Цей многочлен потрібно розвинути за степенями $x+1$, тому $x_0=-1$. Для даного многочлена отримаємо

$p(x)=1+3x+5x^2-2x^3$, $\qquad p(-1)=5$;

$p'(x)=3+10x-6x^2$, $\qquad p'(-1)=-13$;

$p''(x)=10-12x$, $\qquad p''(-1)=22$;

$p'''(x)=-12$, $\qquad p'''(-1)=-12$;

$p^{IV}(x)=p^{V}(x)=\ldots=0$.

Звідси отримуємо

$$p(x)=5+\frac{-13}{1!}(x+1)+\frac{22}{2!}(x+1)^2+\frac{-12}{3!}(x+1)^3=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.\blacksquare$$

Приклад 1.45. Написати розвинення за цілими невід'ємними степенями змінної x до члена вказаного порядку включно для наступних функцій

а) e^{2x-x^2} до члена з x^5 (№Д1381);

б) $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до члена з x^6 (№Д1387).

Розв'язання. а) *<u>І спосіб</u>*. Оскільки потрібно знайти розвинення за степенями змінної x, то будемо застосовувати формулу Тейлора в точці $x_0 = 0$, тобто формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, що має вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Проміжні результати для функції $f(x) = e^{2x-x^2}$ зведемо в таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$f(x) = e^{2x-x^2}$	$f(0) = 1$
1	$f'(x) = e^{2x-x^2}(2-2x) = 2e^{2x-x^2}(1-x)$	$f'(0) = 2$
2	$f''(x) = 4e^{2x-x^2}(1-x)^2 - 2e^{2x-x^2}$	$f''(0) = 2$
3	$f'''(x) = 8e^{2x-x^2}(1-x)^3 - 8e^{2x-x^2}(1-x) - 4e^{2x-x^2}(1-x) =$ $= 8e^{2x-x^2}(1-x)^3 - 12e^{2x-x^2}(1-x)$	$f'''(0) = -4$
4	$f^{IV}(x) = 16e^{2x-x^2}(1-x)^4 - 24e^{2x-x^2}(1-x)^2 - 24e^{2x-x^2}(1-x)^2 + 12e^{2x-x^2} =$ $= 16e^{2x-x^2}(1-x)^4 - 48e^{2x-x^2}(1-x)^2 + 12e^{2x-x^2}$	$f^{IV}(0) = -20$
5	$f^{V}(x) = 32e^{2x-x^2}(1-x)^5 - 64e^{2x-x^2}(1-x)^3 - 96e^{2x-x^2}(1-x)^3 +$ $+96e^{2x-x^2}(1-x) + 24e^{2x-x^2}(1-x) =$ $= 32e^{2x-x^2}(1-x)^5 - 160e^{2x-x^2}(1-x)^3 + 120e^{2x-x^2}(1-x)$	$f^{V}(0) = -8$

Підставляючи в формулу Маклорена, отримаємо

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-4}{3!}x^3 + \frac{-20}{4!}x^4 + \frac{-8}{5!}x^5 + o(x^5) =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

ІІ спосіб. Застосовуємо стандартне розвинення

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + o\left(t^n\right).$$

Для функції $f(x) = e^{2x-x^2}$ маємо $t = 2x - x^2$, $n = 5$, тому

$$e^{2x-x^2}=1+\frac{2x-x^2}{1!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^4}{4!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^5}{5!}+o\left(2x-x^2\right)^5.$$

Маючи на увазі властивості функцій $o(\beta)$, де $\beta(x)$ нескінченно мала функція, отримаємо $o\left(2x-x^2\right)^5=o(x^5)$, а для многочленів $p_n(x)$ степеня $n>5$ сума $p_n(x)+o(x^5)=o(x^5)$. Тому розкриваємо дужки, враховуючи тільки доданки зі степенями, що не перевищують 5. Одержимо:

$$e^{2x-x^2}=$$

$$=1+\left(2x-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(4x^2-4x^3+x^4\right)+\frac{1}{6}\left(8x^3-12x^4+6x^5+\ldots\right)+\frac{1}{24}\left(16x^4-32x^5+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{120}\left(32x^5+\ldots\right)+o\left(x^5\right)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right).\ \blacksquare$$

б) Для розвинення функції $\ln\frac{\sin x}{x}$ до члена з x^6 застосуємо другий спосіб, в якому застосовуються розвинення функцій із таблиці розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано. У даному випадку – це два розвинення

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right),$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+o\left(t^n\right).$$

Для даної функції $2m=8\Leftrightarrow m=4$, тому маємо:

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o\left(x^8\right)}{x}=\ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right).$$

В розвиненні $\ln(1+t)$ покладемо $t=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)$, а найвищу степінь розвинення $\ln(1+t)$ візьмемо $n=3$, щоби після піднесення до цього степеня мати найменший степінь x^6, тоді отримаємо

$$\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)-\frac{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^3}{3}-$$

$$-o\left(\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^3\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o\left(x^7\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36}-\frac{x^6}{360}+\ldots\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{216}+\ldots\right)-o\left(x^6\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+\underbrace{o\left(x^7\right)+o\left(x^6\right)}_{=o\left(x^6\right)}=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o\left(x^6\right). \quad \blacksquare$$

Приклад 1.46. Застосовуючи таблицю розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано, знайти такі границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ (№Д1400);

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}$.

Розв'язання. а) Спочатку спростимо знаменник, застосувавши еквівалентне перетворення, а саме: $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3},$$

тому розвивати функції чисельника потрібно до члена з x^3. Застосуємо розвинення функцій e^x і $\sin x$ до членів з x^3, а саме:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right);$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right),$$

одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)-x(1+x)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{3x^3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3}.$$

При розв'язанні застосовано формулу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0$, що відповідає означенню «о-малого». ■

б) Спочатку зробимо такі перетворення

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=\left|\begin{matrix} t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t} \\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right).$$

Оскільки в знаменнику стоїть t^2, то застосовувати будемо таке розвинення до члена з другим степенем

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+o\left(z^2\right).$$

Для функції $\sqrt{1+t}$ візьмемо в цьому розвиненні $m=\frac{1}{2}, z=t$, а для функції $\sqrt{1-t}$ покладемо $m=\frac{1}{2}, z=-t$, тоді

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!}+o(t^2)+1-\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!}+o(t^2)-2\right)=$$

$$=\left|o(t^2)+o(t^2)=o(t^2)\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(t^2)}{t^2}\right)=-\frac{1}{4}. \ ■$$

в) Для обчислення границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}$ зазначеним умовою способом дізнаємося найменший степінь розвинення знаменника за формулою Маклорена, щоб потім до цього степеня розвивати чисельник. Маємо

$$6\sin x-6x+x^3=6\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)\right]-6x+x^3=$$

$$=6x-x^3+\frac{x^5}{20}-\frac{6x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)-6x+x^3=$$

$$=\frac{x^5}{20}\underbrace{-\frac{6x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)}_{=0(x^6)}=\frac{x^5}{20}+o(x^6).$$

Чисельник будемо розвивати до x^5, застосовуючи розвинення функцій $(1+t)^m$ для $m=\frac{1}{3}$, $t=-x^2$ і $\sin t$ спочатку для $t=x$, а потім для $t=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)$:

$$x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}=x\cdot\left[1+\frac{1}{3}(-x^2)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)(-x^2)^2}{2!}+o(x^4)\right]=x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{9}+o(x^5);$$

$$\sin(\sin x)=\sin\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)^5+o\left(x^6\right)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+\ldots\right)+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)=$$

$$=\left|o\left(x^6\right)+o\left(x^6\right)=o\left(x^6\right)\right|=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o\left(x^6\right).$$

В результаті отримаємо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o\left(x^6\right)-x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{9}+o(x^5)}{\frac{x^5}{20}+o(x^6)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{19x^5}{10}+o(x^5)}{\frac{x^5}{20}+o(x^6)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{19}{10}+\overbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}^{\to0}}{\frac{1}{20}+\underbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}_{\to0}\cdot\underbrace{x}_{\to0}}=38.\quad\blacksquare$$

1.13. Побудова графіків функцій за характерними точками

На рис. 1.9 зображено можливі типи локальних екстремумів: максимумів (рис. 1.9 а – г) і мінімумів (рис. 1.9 д – ж). Екстремуми на рис. 1.9 б – г і е – ж називають піковидними; в таких точках екстремуму функція не є диференційовною.

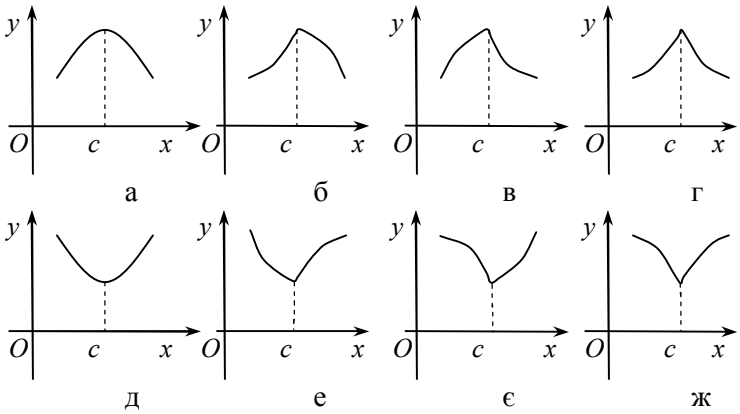


Рис. 1.9.

На рис. 1.10 зображено можливі типи перегинів функцій.

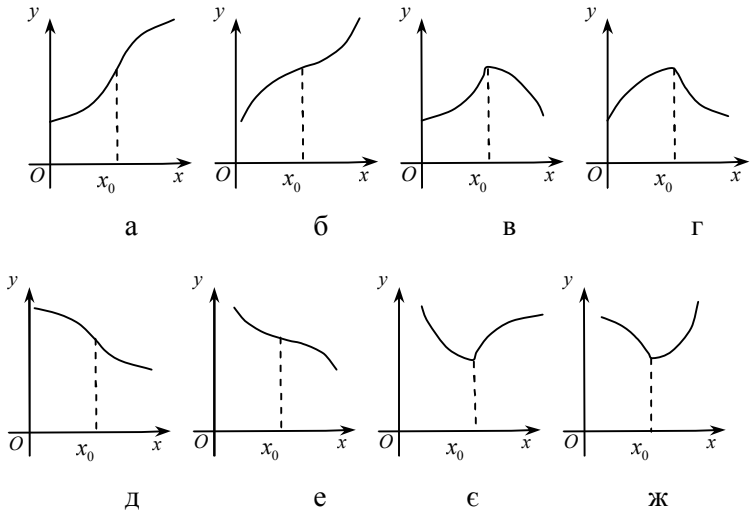


Рис.1.10.

Приклад 1.47. Побудувати графіки таких функцій

а) $y = x^{2/3}e^{-x}$ (№Д1509);

б) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - x$;

в) $y = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ (№Д1504.1);

г) $y = \dfrac{x}{2} - arctg\, x$ (№Д1517);

д) $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$ (№Д1538);

е) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ (№Д1532);

є) $\rho = a\sin 3\varphi$ $(a > 0)$ (№Д1547);

ж) $\rho = a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi\text{-}1}$, де $\varphi > 1$ $(a > 0)$ (№Д1549).

Розв'язання. а) Для функції $y = x^{2/3}e^{-x}$ маємо

1) ОДЗ: $D(y) = \mathbb{R}$.

2) $y(-x) = x^{2/3}e^{x} \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ функція ні парна, ні непарна.

3) Функція неперіодична.

4) Функції $g(x) = x^{2/3}$ і $h(x) = e^{-x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ є неперервними на $\mathbb{R}$, тому дана функція є неперервною на $\mathbb{R}$ як добуток двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то її графік не має вертикальних асимптот. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x x^{1/3}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{2/3}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя}) \overset{\text{R}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{e^x} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x x^{1/3}} = 0,$$

тому $y = 0$ – горизонтальна асимптота на $+\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2/3}e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^{1/3}} = \left[\frac{e^{+\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя}) \overset{\text{R}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} =$$

$$= -3\lim_{x\to-\infty} x^{2/3}e^{-x} = [\infty\cdot e^{+\infty}] = \infty,$$

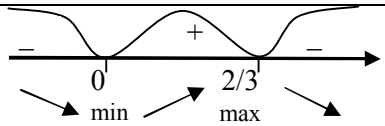
тому на $-\infty$ горизонтальних асимптот немає.

6) Для дослідження функції на монотонність і пошуку її точок екстремуму знайдемо першу похідну:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} - x^{2/3}e^{-x} = x^{-1/3}e^{-x}\left(\frac{2}{3} - x\right).$$

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2/3;$$
$$\nexists y'(x) \text{ при } x = 0.$$

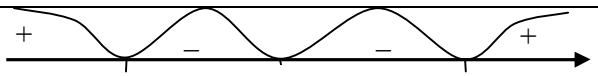
Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	0 $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-2/3} \approx 0{,}39$

7) Для дослідження функції на опуклість і пошуку її точок перегину знайдемо другу похідну:

$$y'' = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} - x^{2/3}e^{-x}\right)' = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^{-4/3}e^{-x} - \frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} - \frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} + x^{2/3}e^{-x} =$$
$$= \frac{e^{-x}}{9x^{4/3}}(-2 - 12x + 9x^2).$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{3};$$
$$\nexists y''(x) \text{ при } x = 0.$$

Знаки y''	
Характерні точки	$\frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx$ 0 $\frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx$
Напрямки опуклості, т. перегину	∪ $\approx -0{,}15$ ∩ ∩ $\approx 1{,}48$ ∪ перегин перегин
Значення функції в точках перегину	$\approx 0{,}34$ $\approx 0{,}30$

8) Точки перетину з осями: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

точка loc min $x = 0$ $(O(0;0))$ має тип, зображений на рис. 1.9 ж,

точка loc max $x=\frac{2}{3}$ $\left(A\left(\frac{2}{3};\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-2/3}\right)\right)$ має тип, зображений на рис. 1.9 а,

точка перегину $x=\frac{2-\sqrt{6}}{3}$ $\left(B\left(\frac{2-\sqrt{6}}{3};0,34\right)\right)$ має тип, зображений на рис. 1.10 е, точка перегину $x=\frac{2+\sqrt{6}}{3}$ $\left(C\left(\frac{2+\sqrt{6}}{3};0,30\right)\right)$ має тип, зображений на рис. 1.10 д.

Як правило, екстремуми, що відповідають точкам, в яких похідна не існує, є <u>*піковидними*</u>, як у даному випадку точка $\mathrm{O}(0;0)$.

9) Графік побудовано на рис. 1.11. ■

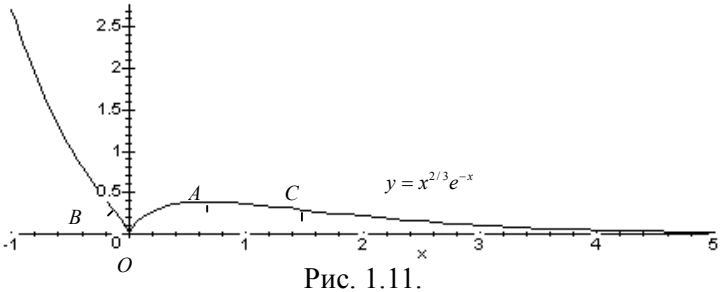


Рис. 1.11.

б) Розглянемо функцію $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x$.

1) $D(f)=\mathbb{R}$, оскільки

$$-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1\Leftrightarrow -(1+x^2)\le 2x\le 1+x^2\Leftrightarrow\begin{cases}2x\le 1+x^2\\-(1+x^2)\le 2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)^2\ge 0\\(1+x)^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

2) $$f(-x)=\arcsin\frac{-2x}{1+(-x)^2}-(-x)=-\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x\right)=-f(-x)\Rightarrow$$

функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція неперіодична.

4) Неперервність даної функції:

- $t=g(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ неперервна на $\mathbb{R}$ як частка двох многочленів зі знаменником, що не дорівнює нулю на $\mathbb{R}$, значення функції $g(x)$ – це $t\in[-1;1]$, як було зазначено в п. 1);
- $h(t)=\arcsin t$ неперервна при $t\in[-1;1]$,

- функція $f_1(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = h(g(x))$ є неперервною на $\mathbb{R}$ як складена функція;
- лінійна функція $f_2(x) = x$ – неперервна.

Висновок: дана функція $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - x = f_1(x) - f_2(x)$ є неперервною як сума двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то її графік не має вертикальних асимптот. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\arcsin\overbrace{\frac{2x}{1+x^2}}^{\to 0}}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to\infty}} - 1 = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2} - x - (-x)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

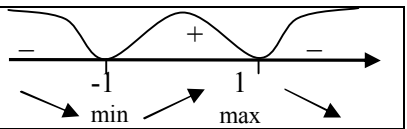
тому $y = -x$ – похила асимптота на $\pm\infty$.

6) Напрямки монотонності й точки екстремуму.

$$y' = \left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2} - x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} - 1 =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} - 1 = \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} - 1 = \begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} & \text{при } |x|<1;\\ -\dfrac{3+x^2}{1+x^2} & \text{при } |x|>1.\end{cases}.$$

Критичні точки: $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$; $\nexists y'(x) \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$-\dfrac{\pi}{2}+1$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{2}-1$

7) Опуклість і точки перегину функції:

$$y'' = \left(\frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} - 1\right)' = 2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = 2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\nexists y''(x) \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Знаки y''	$-$ $+$ $-$ $+$
Характерні точки	-1 0 1
Напрямки опуклості, точки перегину	$\cap$ перегин $\cup$ перегин $\cap$ перегин $\cup$
Значення функції в точках перегину	$-\frac{\pi}{2}+1$ 0 $\frac{\pi}{2}-1$

8) Точка перетину з осями: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; інші точки перетину з віссю абсцис можна знайти лише наближеними методами, а в даному випадку в цьому немає особливої потреби.

Характерні точки:

точка loc min $x=-1$ ($A\left(-1;-\frac{\pi}{2}+1\right)$) має тип, зображений на рис.1.9є,

точка loc max $x=1$ ($B\left(1;\frac{\pi}{2}-1\right)$) має тип, зображений на рис. 1.9 в,

точка перегину $x=0$ ($\mathrm{O}(0;0)$) має тип, зображений на рис. 1.10 а.

Точки екстремуму <u>піковидні.</u>

9) Графік зображено на рис. 1.12. ■

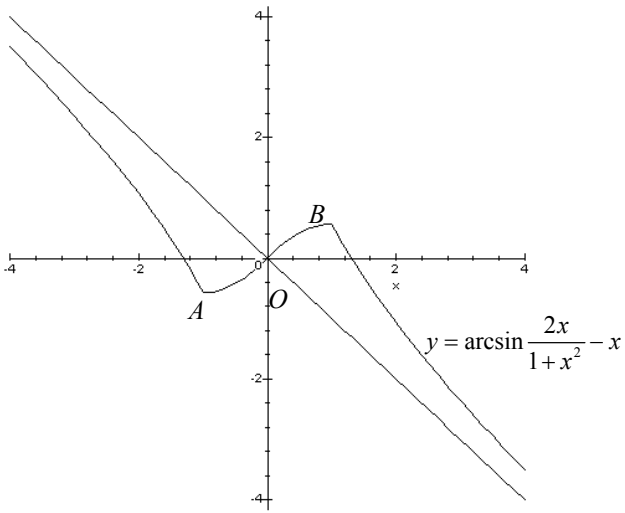


Рис. 1.12.

в) Для функції $y = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ маємо

1) $D(y) = \mathbb{R}$.

2) $y(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -y(x) \Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція періодична з періодом 2π, що відповідає найбільшому серед періодів тригонометричних функцій, через які виражена функція.

4) Функції $g(x) = \sin x$ і $h(x) = 2+\cos x$ є неперервними на $\mathbb{R}$, тому дана функція є неперервною на $D(y) = \mathbb{R}$ як частка двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то її графік не має вертикальних асимптот. Графіки періодичних функцій не мають похилих і горизонтальних асимптот.

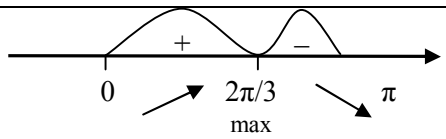
6) Інтервали монотонності й точки екстремуму функції.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)' = \frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}.$$

Критичні точки:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Знаки похідної достатньо визначати на будь-якому відрізку довжини періоду, а з урахуванням непарності функції, можна обмежитися лише відрізком $[0, \pi]$.

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\sqrt{3}/3 \approx 0{,}57$

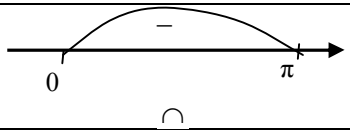
7) Опуклість і точки перегину функції.

$$y'' = \left(\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}\right)' = \frac{-2\sin x(2+\cos x)^2 + 2(2+\cos x)\sin x(2\cos x+1)}{(2+\cos x)^4} =$$

$$= \frac{2\sin x(2+\cos x)(-1+\cos x)}{(2+\cos x)^4} = \frac{2\sin x(-1+\cos x)}{(2+\cos x)^3}.$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n\\ x = 2\pi m\end{array}\right., n, m \in \mathbb{Z}.$$

Знаки y''	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	
Значення функції в точках перегину	0 0

Внаслідок непарностій періодичності функції точки $x = 0$ і $x = \pi$ будуть її перегинами.

8) Точки перетину з осями: $\begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$.

Точки loc max $x_n^* = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($A_n\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$) мають тип, зображений на рис. 1.9 а, тоді завдяки непарності $x_n^{**} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($B_n\left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$) – точки loc min, які мають тип, зображений на рис. 1.9 д.

Точки перегину $x_{2n}^{***} = 2\pi n$ ($C_{2n}(2\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$) мають тип, зображений на рис. 1.10 а, точки перегину $x_{2n+1}^{***} = \pi + 2\pi n$ ($C_{2n+1}(\pi + 2\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$) мають тип, зображений на рис. 1.10 д.

9) Графік функції спочатку будуємо на відрізку $[0, \pi]$ (рис. 1.13 а), потім продовжуємо його за непарністю симетрично відносно точки O(0,0) на відрізок $[-\pi, 0]$, отримуючи графік на відрізку $[-\pi, \pi]$ (рис. 1.13 б). Нарешті, продовжуємо отриманий графік за періодом на $\mathbb{R}$. Графік даної функції побудовано на рис. 1.13 в.

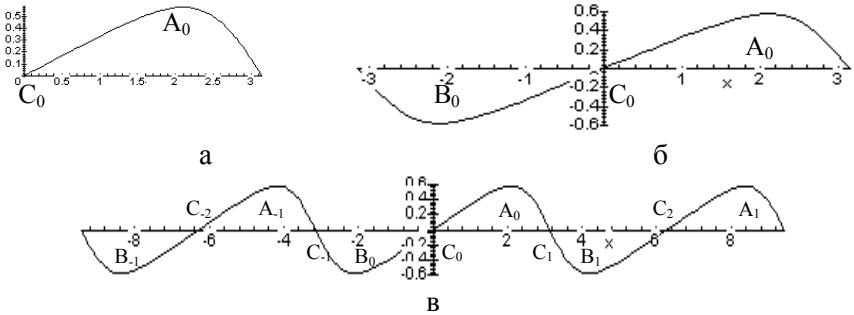


Рис. 1.13.

г) Розглянемо функцію $y = \frac{x}{2} - arctg\, x$.

1) $D(y) = \mathbb{R}$. 2) $y(-x) = \frac{-x}{2} + arctg\, x = -y(x) \Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція неперіодична.

4) Дана функція є неперервною на $\mathbb{R}$ як різниця двох неперервних на $\mathbb{R}$ функцій.

5) Графік функції не має вертикальних асимптот.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\overbrace{arctg\, x}^{\to\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} - arctg\, x - \frac{1}{2}x \right) = -\lim_{x\to+\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2},$$

тому $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ – горизонтальна асимптота на $+\infty$;

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\overbrace{arctg\, x}^{\to-\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2} - arctg\, x - \frac{1}{2}x \right) = -\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2},$$

тому $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$ – горизонтальна асимптота на $-\infty$.

6) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{2(1+x^2)}$; $\qquad y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Знаки y'	+ – +
Характерні точки	-1 1
Напрямки монотонності, loc extr	↗ max ↘ min ↗
Значення функції в точках loc extr	$-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$

7) Опуклість і точки перегину функції.

$$y'' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}; \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Знаки y''	− +
Характерні точки	0
Напрямки опуклості, точки перегину	∩ перегин ∪
Значення функції в точках перегину	0

8) Точка перетину з осями: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; інші точки перетину з віссю абсцис шукати не будемо.

Точка loc min $x = 1$ ($A\left(1; \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$) має тип, зображений на рис. 1.9 д, точка loc max $x = -1$ ($B\left(-1; -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$) має тип, зображений на рис. 1.9 а.

Точка перегину $O(0,0)$ має тип, зображений на рис. 1.10 д.

9) Графік зображено на рис. 1.14.■

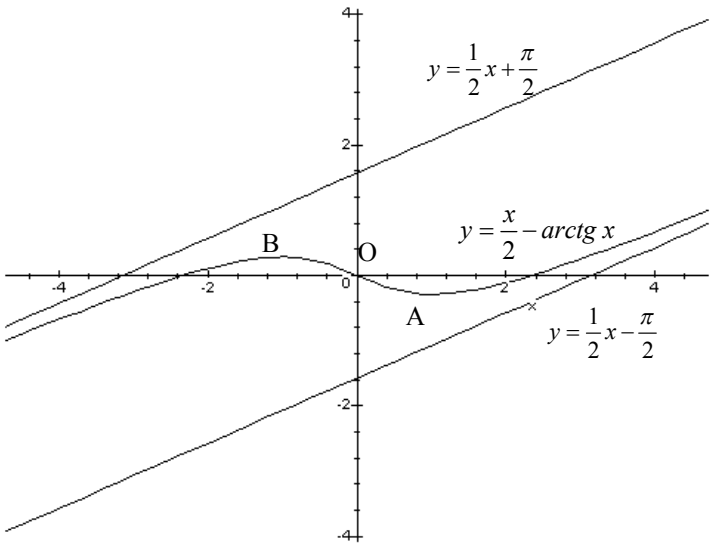


Рис. 1.14.

д) Розглянемо функцію, що задана параметрично: $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$.

1) $D(y) = \{t > 0\}$.

2) $t \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} x \to +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} y = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] (\text{пр.Лопіталя}) \overset{\text{ч}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1/t}{1} = +0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y = +0 \Rightarrow y = 0$ – горизонтальна асимптота на $+\infty$;

$t \to +0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to+0} x = \lim\limits_{t\to+0} t\ln t = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\ln t}{1/t} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] (\text{пр.Лопіталя}) \overset{\text{ч}}{=} \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{1/t}{-1/t^2} = -\lim\limits_{t\to+0} t = -0 \\ \lim\limits_{t\to+0} y = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\ln t}{t} = \left[\dfrac{-\infty}{+0} = -\infty\cdot\infty\right] = -\infty \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-0} y = -\infty$ ($\lim\limits_{y\to-\infty} x = -0$) $\Rightarrow$ $x = 0$ –вертикальна асимптота.

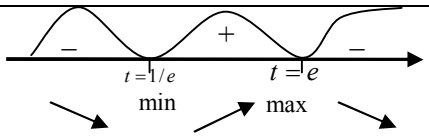
3) Інтервали монотонності й точки екстремуму функції.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)'}{(t\ln t)'} = \frac{\dfrac{\frac{1}{t}\cdot t - \ln t}{t^2}}{\ln t + t\cdot\frac{1}{t}} = \frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}.$$

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

$y'_x = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln t = 0 \Leftrightarrow t = e \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \approx 2,72 \\ y = 1/e \approx 0,37 \end{cases}$;

$\nexists y'_x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \ln t + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \notin D(y) \\ t = 1/e \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/e \approx -0,37 \\ y = -e \approx 2,72 \end{cases}$

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Точка loc extr на координатній площині	$\begin{cases} x = -1/e \\ y = -e \end{cases}$ $\begin{cases} x = e \\ y = 1/e \end{cases}$

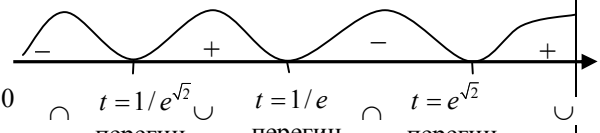
4) Опуклість і точки перегину функції.

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}\right)'}{(t\ln t)'} = \frac{-\frac{1}{t}\cdot t^2(\ln t+1) - (1-\ln t)\left(2t(\ln t+1) + t^2\cdot\frac{1}{t}\right)}{t^4(\ln t+1)^3} = \frac{2(\ln^2 t - 2)}{t^3(\ln t+1)^3}.$$

Точки, «підозрілі» на перегин:

$$y''_{xx}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=e^{\sqrt{2}} \\ t=1/e^{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx 5{,}82 \\ y=\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}} \approx 0{,}34 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}} \approx -0{,}34 \\ y=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx -5{,}82 \end{cases} \end{array}\right. .$$

$$\nexists y''_{xx} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ \ln t+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \notin D(y) \\ t=1/e \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/e \approx -0{,}37 \\ y=-e \approx 2{,}72 \end{cases}$$

Знаки y''	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	0 ∩ $t=1/e^{\sqrt{2}}$ ∪ перегин $t=1/e$ ∩ перегин $t=e^{\sqrt{2}}$ ∪ перегин
Точка перегину на координатній площині	$\begin{cases} x=-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}} \\ y=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1/e \\ y=-e \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \\ y=\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}} \end{cases}$

5) Точка перетину з осями: $\left[\begin{array}{l} t\neq 0 \\ \ln t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

6) Графік зображено на рис. 1.15.

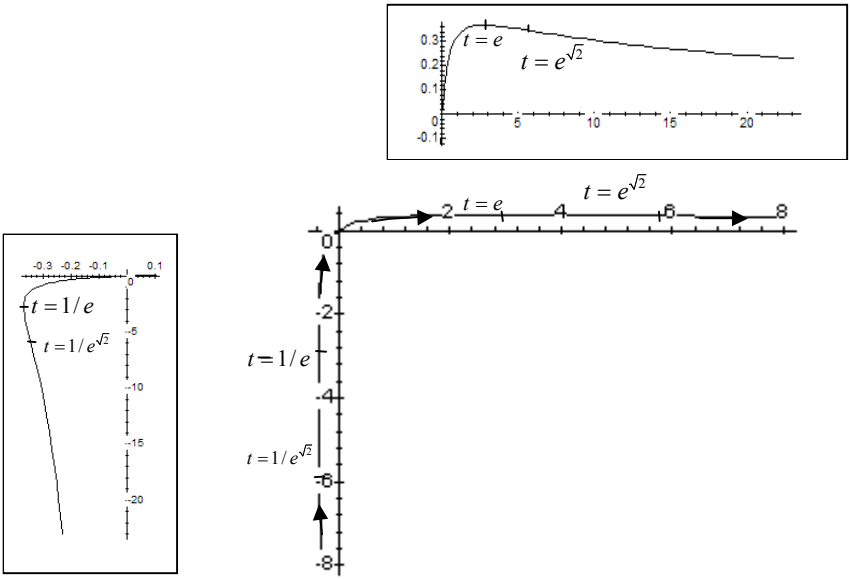


Рис. 1.15.

е) Розглянемо функцію, що задана параметрично: $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$.

1) $D(y) = \{t \in \mathbb{R}\}$.

2) $$t \to \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} x \to -\infty \\ y \to \pm\infty \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{3-t^2}{2-t} \to \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y = \infty \\ \lim\limits_{y\to\pm\infty} x = -\infty \\ k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \infty \end{cases}$$

Горизонтальних, вертикальних і похилих асимптот немає;

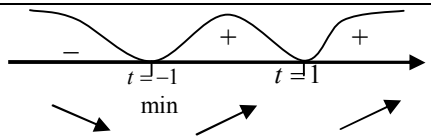
3) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t).$$

Критичні точки:

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow 1+t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases};$$

$$\nexists y'_x \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Точка loc extr на координатній площині	$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$

4) Опуклість і точки перегину функції.

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{3}{2}(1+t)\right)'}{(2t-t^2)'} = \frac{\frac{3}{2}}{2-2t};$$

$$\nexists y''_{xx} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Знаки y''	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	
Точка перегину на координатній площині	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

5) Точка перетину з осями:

$$x=0 \Leftrightarrow 2t-t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$y=0 \Leftrightarrow 3t-t^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{3} \\ t=-\sqrt{3} \\ t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2\sqrt{3}-3 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2\sqrt{3}-3 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right..$$

6) Графік зображено на рис. 1.16.

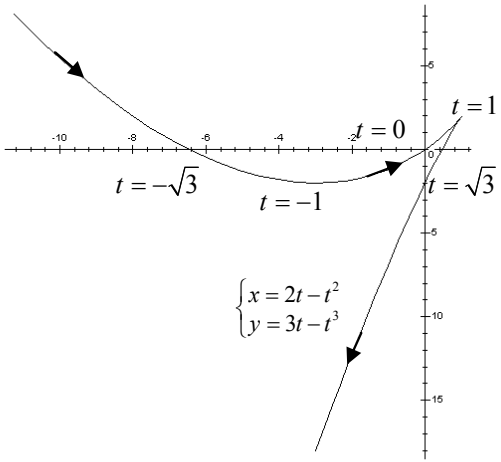


Рис. 1.16.

є) Розглянемо функцію, що задана в полярній системі координат: $\rho = a\sin 3\varphi \ \ (a>0)$.

1) ОДЗ: $\rho \ge 0 \Leftrightarrow \sin 3\varphi \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\pi n}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

2) Період: $T = \frac{2\pi}{3}$, дослідження будемо проводити з урахуванням області визначення на відрізку: $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

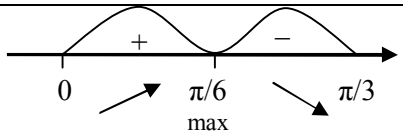
3) Для всіх значень $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ функція приймає скінченні значення, а при $\varphi \to \infty$ границя функції не існує, тому асимптот у графіка функції немає.

4) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

$$\rho'_\varphi = 3a\cos 3\varphi;$$

$$\rho'_\varphi = 3a\cos 3\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

В межах проміжку, на якому досліджується функція, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, знаходиться одна критична точка $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

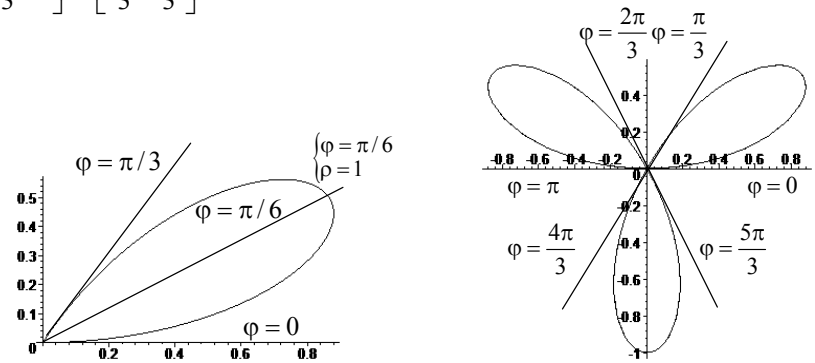
Знаки ρ'_φ	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\rho = a$

Точка $\varphi = \frac{\pi}{6}$ є точкою локального максимуму відносно полярного радіусу, тобто на промені $\varphi = \frac{\pi}{6}$ полярний радіус досягає свого найбільшого значення серед усіх значень на променях $\varphi = \varphi_0$, де $\varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{6} - \delta; \frac{\pi}{6} + \delta\right)$ для деякого $\delta > 0$.

6) значення функції на кінцях відрізка $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$:

$$\rho(0) = 0,\ \rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

7) Для випадку $a=1$ графік будуємо спочатку при $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ (див. рис. 1.17 а), а потім продовжуємо за періодом на проміжки $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ і $\left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$ (рис. 1.17 б). ■



а б

Рис. 1.17.

ж) Розглянемо функцію, що задана в полярній системі координат: $\rho = a\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi\text{-}1}$, де $\varphi > 1\,(a>0)$.

1) ОДЗ: $\begin{cases}\rho \ge 0\\ \varphi > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{th}\varphi \ge 0\\ \varphi > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi \ge 0\\ \varphi > 1\end{cases} \Leftrightarrow \varphi > 1$.

2) Функція не є періодичною.

3) Оскільки $\lim\limits_{\varphi\to 1+0}\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1}=+\infty$, то $\varphi=1$ – асимптота.

Оскільки $\lim\limits_{\varphi\to+\infty}\frac{\overbrace{\operatorname{th}\varphi}^{\to 1}}{\underbrace{\varphi-1}_{\to+\infty}}=0$, то при $\varphi\to\infty$ графік функції буде прямувати до точки $\rho=0$.

4) Інтервали монотонності й точки екстремуму функції.

$$\rho'_\varphi = a\frac{\frac{\varphi-1}{\operatorname{ch}^2\varphi}-\operatorname{th}\varphi}{(\varphi-1)^2} = a\frac{\varphi-1-\operatorname{sh}\varphi\cdot\operatorname{ch}\varphi}{(\varphi-1)^2\operatorname{ch}^2\varphi} = a\frac{\varphi-1-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\varphi}{(\varphi-1)^2\operatorname{ch}^2\varphi}.$$

З'ясуємо знак чисельника. Для цього введемо допоміжну функцію $g(\varphi) = \varphi - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\varphi$. Оскільки для неї $g'(\varphi) = 1 - \operatorname{ch} 2\varphi < 0$ при $\varphi > 1$, то вона при $\varphi > 1$ спадає, тому $g(\varphi) < g(1)$, тобто

$$\varphi - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\varphi < -\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2 < 0 .$$

Отже чисельник дробу, що відповідає похідній, є від'ємним при $\varphi > 1$, тому дана функція спадає. Це означає, що при збільшені полярного кута φ від 1 до $+\infty$ полярна відстань зменшується від $+\infty$ при $\varphi \to 1 + 0$ до нуля при $\varphi \to \infty$. Графік даної функції при $a = 1$ зображено на рис. 1.18. ■

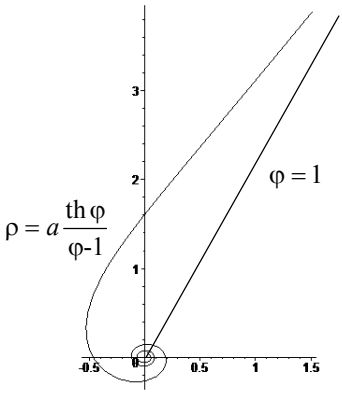


Рис. 1.18.

Розділ 3. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ

2.1. Варіанти індивідуальних типових завдань

1. Знайти похідну функції.
2. Знайти за означенням $f'(a)$, (a задано) або довести, що похідна не існує.
3. Довести, що….
4. Знайти похідну функції, що задана параметрично.
5. Знайти похідну функції, що задана неявно.
6. Знайти диференціал функції. Якщо задана точка, обчислити в точці.
7. Знайти похідну вказаного порядку n.
8. Знайти похідну n-го порядку.
9. Знайти диференціал вказаного порядку.
10. Вивести формулу для суми за допомогою похідної.
11. Довести нерівність за допомогою похідної.
12. Довести тотожність за допомогою похідної.
13. Обчислити границі за правилом Лопіталя.
14. Розвинути функцію за формулою Маклорена.
15. Знайти границі за допомогою формули Маклорена.
16. Побудувати графіки функцій.

ВАРІАНТ 1

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(1+\left(\cos x\right)^{\sin x}\right)$.

2. $f(x)=(x-2)^2(x-3)(x-4),\ a=4$.

3. Похідна періодичної функції з періодом T є періодичною функцією з періодом T.

4. $\begin{cases} x=\ln\sin t/2 \\ y=\ln\sin t \end{cases}$ $(0<t<\pi)$.

5. $5x^2+5y^2-30x+10y+9=0;$ $y<-1.$

6. $\ln\left(\sqrt{1+2\sin x}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$.

7. $y=\sqrt[x]{x^3},\ n=3$.

8. $y=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+4}$.

9. $y=\arcsin x;\ n=9;\ x=0$.

ВАРІАНТ 2

1. $f(x)=\cos 2^x\cdot\ln\left(1+\left(\operatorname{arctg} x\right)^{\sin x}\right)$.

2. $f(x)=x^3(x-2)(x-3)...(x-10),\ a=0$.

3. Похідна парної функції – непарна, а непарної – парна.

4. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(-\infty<t<\infty)$.

5. $x^2-4xy+4y^2+3x-4y-7=0;$ $x<2y-1.$

6. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

7. $y=x\sin^2 x,\ n=4$.

8. $y=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

9. $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x;\ n=10;\ x=\pi/6$

10. $1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n-1)x^{2n-2}$.

11. $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x};\ x>0$.

12. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$,

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}arctg\ x\right)$,

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

14. $\sin(\sin x)$ до x^5.

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sh}2x-2\operatorname{sh}x}{(e^x-1-x)x}$.

16. а) $y=\dfrac{x^5}{\left(x^2-1\right)^2}$,

б) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

ВАРІАНТ 3

1. $f(x)=\sqrt[\sin x]{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot e^{\arcsin\ln\sqrt{3}}$.

2. $f(x)=2^{10}+e^{\operatorname{arctg}x^4},\ a=\pi/4$.

3. $f'(0)=0$ для

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq0\\ 0, x=0\end{cases}.$$

10. $1-5x^4+9x^8+\ldots+(-1)^{n-1}(4n-3)x^{4n-4}$

11. $arctg\ x\le x;\ x\ge0$.

12. $\dfrac{1+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\dfrac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}\alpha\right)^2$.

13. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$,

б) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin a}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\ln^{\beta}\left(\dfrac{1}{x}\right),\alpha,\beta>0$,

д) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}$.

14. $\ln(3\cos x)$ до x^6.

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1+x^2/2}{\operatorname{ch}3x+\cos3x-2}$.

16. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$,

б) $y=\sqrt[3]{x(3-x)^2}-x$.

ВАРІАНТ 4

1. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}}\cdot\left(\operatorname{arctg}x\right)^{1+x^2}$.

2. $f(x)=x\cdot\sin\left(x^2+\dfrac{\pi}{4}\right),\ a=0$.

3. Існують такі числа a і b, при яких функція $f(x)=\begin{cases}x^2; & x\le1\\ ax+b; & x>1\end{cases}$ неперервна і диференційовна в точці x=1.

4. $\begin{cases} x = r\sin t + \sin rt \\ y = r\cos t + \cos rt \end{cases}$.

5. $5xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0;\ y < 2;$ $x_0 = 11/12.$

6. $\dfrac{x^2 2^x}{x^x};\ x_1 = 2;\ x_2 = 1$.

7. $y = \dfrac{x^3}{x-1},\ n = 3$.

8. $y = \ln\left(1 - 4x^2\right)$.

9. $y = \left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}\right)^2;\ n = 16;\ x = 0$

10. $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$.

11. $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$, $x > 0$.

12. $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \dfrac{1}{4}(3\cos 2\alpha + \cos^3 2\alpha)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to \pi/2-0}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100^x + 99}$.

14. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до x^6.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}\right)x}{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}$.

4. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^4}{1+2t^2+t^4} \\ y = \dfrac{2t^2}{1+2t^2+t^4} \end{cases}$.

5. $xy + \ln y = 1;\ y > 0;\ x_0 = 0$.

6. $arctg\,\dfrac{\ln x}{x};\quad x_1 = \dfrac{1}{e};\ x_2 = e$.

7. $y = e^x \sin x,\ n = 4$.

8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$.

9. $y = \dfrac{7x+1}{(3x-2)^2};\ n = 10;\ x = 1$.

10. $1^2 + 3^2x^2 + 5^2x^4 + \ldots + (2n-1)^2 x^{2n-4}$.

11. $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2};\ x \in \mathbb{R}$.

12. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha\left(1 - x^\beta\right) - \beta\left(1 - x^\alpha\right)}{\left(1 - x^\beta\right)\left(1 - x^\alpha\right)};\ \alpha\cdot\beta \ne 0$,

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^{7/6} - x^{6/7}\ln^2 x\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln(\operatorname{sh} x)}}$,

г) $\lim\limits_{x\to +0}\sin x \ln(\operatorname{ctg} x)$,

д) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$.

14. $\ln\dfrac{e^x - 1}{x}$ до x^4.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$.

16. а) $y=\dfrac{20x^2}{(x-1)^3}$,

б) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

ВАРІАНТ 5

1. $f(x)=e^x\cdot\operatorname{arctg}\left(x\cdot\sin\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right)$.

2. $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{1+e^x}$, $a=0$.

3. Існує неперервна функція, що не має похідних в даних точках $a_1;a_2;...;a_n$.

4. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=r\cos t+\cos rt \end{cases}$ $(-1<t<1)$.

5. $e^y+xy=e;\ y>0;\ x_0=0$

6. x^{x^2}

7. $y=3xa^{3x}$, $n=3$.

8. $y=\left(3x^2+8x+1\right)\ln(x+1)$.

9. $y=\operatorname{arctg}^2 x;\ n=10;\ x=0$.

10. $\sin x+2\sin 2x+...+n\sin nx$.

11. $e^x\ge 1+\ln(1+x),\ x>-1$.

12. $\sin\alpha-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)$; $\alpha\cdot\beta\ne 0$,

16. а) $y=32x^2(x^2-1)^3$,

б) $y=\dfrac{x}{2}-\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

ВАРІАНТ 6

1. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\arcsin\left(x^{x+1}\right)$.

2. $f(x)=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$, $a=1$.

3. Якщо $f(0)=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$.

4. $\begin{cases} x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$.

5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

6. $5sh^7\dfrac{x}{35}+7sh^5\dfrac{x}{35}$

7. $y=x\ln x,\ n=5$.

8. $y=x^2\sin 2x$.

9. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x}};\ n=20;\ x=0$.

10. $\sin x+2^2\sin 2x+...+n^2\sin nx$.

11. $\sin x+\operatorname{tg} x>2x;\ 0<x<\pi/2$.

12. $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 4\alpha$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$,

г) $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$,

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$.

14. $\ln(4\cos^2 x)$ до x^4.

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

16. а) $y=\dfrac{x^5-8}{x^4}$,

б) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

ВАРІАНТ 7

1. $f(x)=\sqrt[4]{1+x^4}\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\left(x^{4^x}\right)\right)$.

2. $f(x)=x(x-1)^{10}(x-2)(x-3)(x-5);\ a=1$

3. Функція $y(x)=\ln\dfrac{1}{1+x}$ задовольняє співвідношенню $x\cdot y'+1=e^y$.

4. $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t.\end{cases}$

5. $x^2+y^2-6x+10y-2=0;\ y>-5;\ x_0=0$

6. $\dfrac{(2x-1)^2\cdot\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}};\ x=0$.

7. $y=e^{-x^2},\ n=5$.

8. $y=\dfrac{x}{x^2-4x-12}$.

9. $y=(2x^2+1)\operatorname{sh}^2 x;\ n=10;\ x=0$.

10. $\cos x+2^2\cos 2x+\ldots+n^2\cos nx$.

11. $1-2\ln x\le 1/x^2;\ x>0$.

в) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\sin x}{x+\sin x}$,

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a^{\ln x}-1}{\ln x}$.

14. $\ln(5\cos^3 x)$ до x^4.

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

16. а) $y=\dfrac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$,

б) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

ВАРІАНТ 8

1. $f(x)=\sqrt{\ln(1+x^2)}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^x}{2+\cos^2 x}\right)$.

2. $f(x)=\left(2x^3-3x+\sqrt{x}-1\right)/x;\ a=1/4$.

3. Функція $y(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ задовольняє співвідношенню $\left(1-x^2\right)\cdot y'-xy=1$.

4. $\begin{cases}x=1+\sin t\cdot\cos 2t;\\ y=1-\sin 2t\cdot\operatorname{ctg} t.\end{cases}$

5. $y^5+y^2+y-x=0$.

6. $\ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2arctg\sqrt{\sin x}$.

7. $y=x\sqrt{1+x^2},\ n=2$.

8. $y=\ln(x-1)^{2x}$.

9. $y=\sin^2 x;\ n=10;\ x=\pi/6$.

10. $3\cdot2x+5\cdot4x^3+7\cdot6x^6+\ldots+$
$+(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}$.

11. $e^x\ge e\cdot x;\ x\in\mathbb{R}$.

12. $1+2\cos 7\alpha = \dfrac{\sin 10{,}5\alpha}{\sin 3{,}5\alpha}$.

13. а) $\lim\limits_{\varphi\to\pi/4} \dfrac{\sin^2\varphi - 0{,}5tg\,\varphi}{1+\cos 4\varphi}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$,

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi - 2arctg\,x)\ln x$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$.

14. $\exp\left(3x+x^2\right)$ до x^5.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$.

16. а) $y = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x}$,

б) $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

ВАРІАНТ 9

1. $f(x) = \dfrac{\sin\left(x^{\sqrt{x}}\right)}{\ln(1+\mathrm{tg}^2 x)}$.

2. $f(x) = |\sin x|;\ a_1 = \pi;\ a_2 = -\pi$.

3. З того, що $f(x) \ge g(x)$, не завжди витікає, що $f'(x) \ge g'(x)$.

4. $\begin{cases} x = 1-\ln^2 t, \\ y = 3e^t. \end{cases}$

5. $\sin\dfrac{x}{y} + \cos\dfrac{y}{x} = 1$.

6. $y^2 - y = 6x^2;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2$.

7. $y = x\cos^2 x,\ n = 4$.

12. $3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right) - 2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right) = 1$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-3x}}$,

б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\mathrm{ctg}\,x} - \dfrac{\pi}{\cos x}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos ax\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

г) $\lim\limits_{x\to +0}(-\ln x)^x$,

д) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sqrt[5]{3\mathrm{tg}^2 x - 1}}{2\sin^2 x + 5\sin x - 3}$.

14. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до x^{13}.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$.

16. а) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$,

б) $y = (x^2-2)e^{-2x}$.

ВАРІАНТ 10

1. $f(x) = \dfrac{1}{\cos\left(x - \mathrm{arctg}\left(x^{\ln x}\right)\right)}$.

2. $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^{3/4};\ a = 1$.

3. Якщо $f(x)$ має похідну на $\mathbb{R}$, то функція $|f(x)|$ має похідну в тих точках x, для яких $f(x) \ne 0$.

4. $\begin{cases} x = a(\ln\mathrm{ctg}(t/2) - \cos t), \\ y = a\sin t. \end{cases}$

5. $x^2 - y^2 + 5x - 7y + 5 = 0;\ y > -3{,}5$.

6. $4xy + \dfrac{x}{x+y} = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

7. $y = x^2 e^{2x},\ n = 4$.

8. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

9. $y=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$; $n=10$; $x=0$.

10. $1\cdot 2+2\cdot 3x+\ldots+n(n+1)x^{n-1}$.

11. $\operatorname{ch} x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}$; $x\in\mathbb{R}$.

12. $\dfrac{\cos 4\alpha\cdot tg\ 2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\cdot ctg\ 2\alpha+\sin 4\alpha}=-tg^2 2\alpha$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2^x+1}$,

в) $\lim\limits_{x\to +0}\left(-\ln x\right)^{2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a a^x$; $a>0$; $a\ne 1$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$.

14. $\cos^2(\sin x)$ до x^4.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$.

16. а) $y=\dfrac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$,

б) $y=\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|+\dfrac{6}{x+1}$.

ВАРІАНТ 11

1. $f(x)=ctg^2\left(\sin x\cdot\sqrt{\ln\left(1+(e+x)^x\right)}\right)$

2. $f(x)=\sin(\sin x)$; $a=0$.

3. Похідна функції

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}; & x\ne 0\\ 0; & x=0\end{cases}$$

в точці 0 не існує.

8. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

9. $y=\sin^3 x$; $n=15$; $x=\pi/4$.

10. $3x^3+7x^7+\ldots+(4n-1)x^{4n-1}$.

11. $\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x$; $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

12. $\dfrac{tg^2\alpha+ctg^2\alpha-6}{tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2}=\cos 4\alpha$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2+3^x\right)^{1/x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}$; $n,m\in\mathbb{N}$.

14. $\sqrt[3]{\cos x^3}$ до x^{12}.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\operatorname{ctg} x}{x\sin x}$.

16. а) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}-e^{1/x}$,

б) $y=\dfrac{x}{2}+2\operatorname{arctg} x$.

ВАРІАНТ 12

1. $f(x)=(e\cdot x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(1+x^2)}}$.

2. $f(x)=\sin^2 x\cdot\sin x^2$; $a=0$.

3. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ мають похідні в точці a, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}=$$
$$=f'(a)g(a)-f(a)g'(a).$$

4. $\begin{cases} x = a(\sin(t/2) + 0,5\sin t\cos^2 t), \\ y = -\pi/2\cos^3 t. \end{cases}$

5. $(2a - x)y^2 = x^2;\ y < 0$.

6. $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0;$
$x_1 = 1;\ x_2 = 3$.

7 $y = x^2\cos 3x,\ n = 3$.

8. $y = x\ln\dfrac{3+x}{3-x}$.

9. $y = \operatorname{arctg} x;\ n = 5;\ x = 0$.

10. $1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 4x + 3\cdot 4\cdot 5x^2 + \ldots$
$+ n(n+1)(n+2)x^{n-1}$.

11. $\operatorname{tg} x < x + \dfrac{x^3}{3};\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

12. $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \dfrac{1}{8}(5 + 3\cos 4\alpha)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg} 3x - 6\operatorname{tg} x}{3\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$,

в) $\lim\limits_{x\to +0}\left(x^x - 1\right)\ln x$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e - (1+x)^{1/x}}{x^2}$.

14. $\cos(\sin x)$ до x^4.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln(1+x) - x\right)x}{\operatorname{sh} 2x - 2\operatorname{sh} x}$.

16. а) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$,

б) $y = \sin x - \ln\sin x$.

4. $\begin{cases} x = a/3\,(2\cos t + \cos 2t), \\ y = a/3\,(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$

5. $arctg\, y/x = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

6. $x = (t-1)^2(t-2);\ y = (t-1)^2(t-3);$
$t_1 = 4;\ t_2 = 0$.

7 $y = e^x\sin x;\ n = 4$.

8. $y = \dfrac{3 - 2x^2}{2x^2 + 3x - 2}$.

9. $y = \ln\dfrac{3+2x}{3-2x};\ n = 10;\ x = 0$.

10. $e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \ldots + ne^{nx}$.

11. $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x;\ x > 0$.

12. $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha = \dfrac{1}{4}\cos 2\alpha\cdot(3 + \cos 4\alpha)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}(x-a)$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(tg\, x/x)^{1/x^2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$.

14. $tg\, x$ до x^5.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos x - \cos x}{\sin x - \arcsin x}$.

16. а) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$,

б) $y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}$.

Формальні вимоги щодо виконання індивідуального завдання. Індивідуальне завдання оформлюється в зошиті обсягом 12 – 18 аркушів і здається не пізніше 6-7 тижня навчального семест-

ру, протягом якого вивчається тема «Диференціальне числення функцій однієї змінної». Розв'язки повинні містити усі необхідні обґрунтування з посиланням на відповідні формули, теореми і властивості. У разі не зарахування індивідуального завдання студент повинен його доопрацювати до 8 навчального тижня. Захист індивідуального завдання проводиться на 8 тижні. Студент, у якого індивідуальне завдання не зараховано, не допускається до другого модуля, а потім і до екзамену.

2.2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 2.1. Знайти похідну функції $y = \sin(\ln x)\cdot(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Розв'язання. Нехай $u = \sin(\ln x),\ v = (\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}$, $y = u\cdot v$,

$$y' = u'v + uv'.$$

Знайдемо u' та v'.

$$u' = \frac{\cos(\ln x)}{x};$$

$$\ln v = \sqrt[3]{1+x^2}\cdot\ln(\operatorname{arctg}4x);$$

$$(\ln v)' = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}4x\right) + \sqrt[3]{1+x^2}\cdot\frac{4}{\left(1+16x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}4x} = \frac{v'}{v}.$$

З останньої рівності знаходимо:

$$v' = \left(\operatorname{arctg}4x\right)^{\sqrt[3]{1+x^2}}\left[\frac{2x\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}4x\right)}{3\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}} + \frac{4\sqrt[3]{1+x^2}}{\left(1+16x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}4x}\right].$$

Остаточно отримуємо:

$$y' = \left(\operatorname{arctg}4x\right)^{\sqrt[3]{1+x^2}}\left[\frac{\cos\left(\ln x\right)}{x} + \frac{2x\cdot\sin\left(\ln x\right)\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}4x\right)}{3\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}} + \frac{4\sin\left(\ln x\right)\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}{\left(1+16x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}4x}\right].$$

■

Приклад 2.2. Знайти за означенням $f'(a)$ для заданого a, якщо $f(x) = (x-5)^2(x-6)(x-7)(x-8)$, $a = 7$.

Розв'язання. За означенням похідної маємо:

$$f'(7)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(7+\Delta x)-f(7)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2(1+\Delta x)\Delta x(\Delta x-1)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)^2(1+\Delta x)(\Delta x-1)=4\cdot 1\cdot(-1)=-4. \ \blacksquare$$

Приклад 2.3. Довести, що існують такі значення a та b, що функція

$$y=\begin{cases}2^x, x\le 0;\\ x^2+ax+b, x>0.\end{cases}$$

є диференційовною на всій числовій прямій.

Розв'язання. Задана функція $y(x)$ є диференційовною на проміжках $(-\infty;0)$, де $y'(x)=2^x\cdot\ln 2$, та $(0;\infty)$, де $y'(x)=2x+a$.

Визначимо, якими повинні бути a та b, щоб $y(x)$ була диференційовною при $x=0$. З диференційовності $y(x)$ у даній точці випливає її неперервність при $x=0$, тобто виконана рівність

$$\lim_{x\to 0+}y(x)=\lim_{x\to 0-}y(x)=y(0).$$

Звідси отримуємо, що

$$\lim_{x\to 0-}2^x=\lim_{x\to 0+}\left(x^2+ax+b\right)=2^0=1,$$

тому $b=1$.

Знайдемо ліву та праву похідні функції $y(x)$ при $x=0$:

$$y'_+(0)=(2x+a)\big|_{x=0}=a,\quad y'_-(0)=2^x\big|_{x=0}=1.$$

Оскільки функція $y(x)$ є диференційовною при $x=0$, то $y'_+(0)=y'_-(0)$ і $a=1$.

Отже, при $a=b=1$ функція $y(x)$ є диференційовною на всій числовій прямій. $\blacksquare$

Приклад 2.4. Знайти похідну функції, що задана параметрично:

$$\begin{cases}x=2\ln\operatorname{ctg}t,\\ y=\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t.\end{cases}$$

Розв'язання. Використаємо формулу для знаходження похідної функції, що задана в параметричній формі:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Отримаємо:

$$x'_t = \frac{2}{\operatorname{ctg} t}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -\frac{4}{\sin 2t}, \quad y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = -\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t}.$$

Підставивши у вираз для $\frac{dy}{dx}$, знаходимо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t}\cdot\left(-\frac{\sin 2t}{4}\right) = \operatorname{ctg} 2t. \quad \blacksquare$$

Приклад 2.5. Знайти похідну функції $f(x,y)=0$, заданої неявно, у точці M_0, якщо $f(x,y) = x^3 + 5x^2y + y^2 - 2x^2 + y - 6, \quad M_0(1;1)$.

Розв'язання. Продиференціюємо рівність,

$$x^3 + 5x^2y + y^2 - 2x^2 + y - 6 = 0,$$

вважаючи y функцією від x. Отримуємо:

$$3x^2 + 10xy + 5x^2y' + 2yy' - 4x + y' = 0.$$

Звідси

$$\left(5x^2 + 2y + 1\right)y' = 4x - 3x^2 - 10xy; \quad y' = \frac{4x - 3x^2 - 10xy}{5x^2 + 2y + 1}.$$

У точці M_0 маємо $y'(1) = \frac{4\cdot 1 - 3\cdot 1^2 - 10\cdot 1\cdot 1}{5\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 1} = -\frac{9}{8}$. $\blacksquare$

Приклад 2.6. Знайти диференціал функції $f(x)$, якщо $f(x) = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{x}{1-x^4}$.

Розв'язання. Областю визначення функції є проміжок $x \in (-1;1)$.

Оскільки для x з області визначення функції виконується рівність $\ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)$, то при диференціюванні отримуємо:

$$f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1 - x^4 + 4x^4}{\left(1-x^4\right)^2} = \frac{4x^5 + 3x^4 - 4x + 1}{\left(1-x^4\right)^2}.$$

Диференціал функції:

$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{4x^5 + 3x^4 - 4x + 1}{\left(1-x^4\right)^2}dx. \quad \blacksquare$$

Приклад 2.7. Знайти похідну функції $y = y(x)$ вказаного порядку n, якщо

$$y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x,\ \ n=4\,.$$

Розв'язання.

$$y'=2x\cdot\operatorname{arctg}x+\frac{1+x^2}{1+x^2}=2x\cdot\operatorname{arctg}x+1,\quad y''=2\operatorname{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2},$$

$$y'''=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{4}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$$y^{(4)}=-\frac{16x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=-\frac{16x}{\left(1+x^2\right)^3}.\quad\blacksquare$$

Приклад 2.8. Знайти n-у похідну функції $y=e^{2x}\left(3x^2-4\right)$.

Розв'язання. Використаємо формулу Лейбніца

$$\left(u\cdot v\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot u^{(k)}\cdot v^{(n-k)}\ .$$

Позначимо $v=e^{2x}$, $u=3x^2-4$, тоді $v^{(m)}=2^m\cdot e^{2x}$, $m=0,1,...,n.$ Для функції u маємо $u'=6x,\ u''=6,\ u'''=u^{(4)}=...=u^{(n)}=0,\ n\geq 3$. Отримані результати зведемо в таблицю 2.1.

Таблиця 2.1.

k	$n-k$	C_n^k	$u^{(k)}$	$v^{(n-k)}$
0	n	$C_n^0=1$	$u=3x^2-4$	$v^{(n)}=2^n e^{2x}$
1	$n-1$	$C_n^1=n$	$u'=6x$	$v^{(n-1)}=2^{n-1}e^{2x}$
2	$n-2$	$C_n^2=\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$	$u''=6$	$v^{(n-2)}=2^{n-2}e^{2x}$

За формулою Лейбніца маємо:

$$y^{(n)}=C_n^0\cdot u\cdot v^{(n)}+C_n^1\cdot u'\cdot v^{(n-1)}+C_n^2\cdot u''\cdot v^{(n-2)}=2^n\cdot e^{2x}\left(3x^2-4\right)+$$

$$+n\cdot 2^{n-1}\cdot e^{2x}\cdot 6x+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\cdot 2^{n-2}\cdot e^{2x}\cdot 6=2^n\cdot e^{2x}\cdot\left(3x^2+3nx+\frac{3n\left(n-1\right)}{4}-4\right).\quad\blacksquare$$

Приклад 2.9. Знайти диференціал функції $y\left(x\right)$ вказаного порядку у точці x_0, якщо $y\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $n=9,\ x_0=1{,}5$.

Розв'язання. Представимо $y\left(x\right)$ у вигляді комбінації елементарних дробів:

$$y(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$$

Оскільки

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{(n)}\cdot n!}{(x-2)^{n+1}};\qquad \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{(n)}\cdot n!}{(x-1)^{n+1}},$$

то для n-ої похідної функції $y(x)$ маємо:

$$y^{(n)}(x)=(-1)^n\,n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right);$$

$$y^{(n)}(1,5)=y^{(9)}(1,5)=-9!\left(2^{10}-2^{10}\right)=0.$$

Звідси для диференціала 9-го порядку отримуємо:

$$d^9y(1,5)=y^{(9)}(1,5)\cdot dx^9=0.\quad\blacksquare$$

Приклад 2.10. За допомогою похідної отримати формулу для суми

$$\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x,\ x\neq k\pi.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо таку суму:

$$S(x)=\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=:$$

$$=\frac{2\sin x\cdot\left(\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x\right)}{2\sin x}=$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+\ldots+\sin 2nx-\sin(2n-2)x}{2\sin x}=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

Шукана сума може бути отримана диференціюванням $S(x)$:

$$S_1(x)=\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x=-S'(x)=$$

$$=-\left(\frac{\sin 2nx}{2\sin x}\right)'=\frac{-2n\cos 2nx\cdot\sin x+\sin 2nx\cdot\cos x}{2\sin^2 x}.\quad\blacksquare$$

Приклад 2.11. Довести за допомогою похідної нерівність:

$$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x},\qquad x>1.$$

Розв'язання. $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3>0$. Розглянемо допоміжну функцію $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3$. Диференціюємо її та отримуємо:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}.$$

Маємо: $f'(x)>0$ при $x>1$, оскільки при цих значеннях x $\sqrt{x}<x^2$, $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{x^2}$. Таким чином, $f(x)$ монотонно зростає на проміжку $(1;+\infty)$, тому на даному проміжку $f(x)>f(1)\Rightarrow 2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3>0,\ x\in(1;+\infty)$. Звідси випливає нерівність, яку потрібно було довести. ■

Приклад 2.12. Використовуючи похідну, довести тотожність:

$$\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{3}{4}.$$

Розв'язання. Розглянемо допоміжну функцію

$$f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right).$$

Тоді

$$f'(x)=-2\cos x\cdot\sin x-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin x\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-\sin 2x-\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+$$

$$+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=0\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Оскільки $f'(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, то, за ознакою сталості функції, $f(x)=C\ \forall x\in\mathbb{R}$. Знайдемо сталу C:

$$f(0)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Таким чином, вихідна тотожність виконується $\forall x\in\mathbb{R}$. ■

Приклад 2.13. Обчислити границі за допомогою похідної:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-3x^3+x^2+x+2}{2x^4-x^3-2x^2-10x+4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$; **д)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-3x^3+x^2+x+2}{2x^4-x^3-2x^2-10x+4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$(пр.Лопіталя)$\overset{\text{ІІ}}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^3-9x^2+2x+1}{8x^3-3x^2-4x-10}=\dfrac{1}{34}$.

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$(пр.Лопіталя)$\overset{\text{ІІ}}{=}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{-\sin x}\right)=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$.

Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\text{(пр.Лопіталя)}\overset{\text{ІІ}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Звідси отримуємо

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{1/x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$(пр.Лопіталя)$\overset{\text{ІІ}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}\cdot2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln2}{-1/x^2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln2=\ln2.$$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$(пр.Лопіталя)$\overset{\text{ІІ}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1/(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x(x+1)=+\infty.$ ■

Приклад 2.14. Розвинути функцію $y(x)$ за формулою Маклорена до x^4, якщо $y(x)=\ln(1+\sin x)$.

Розв'язання. Використовуючи розвинення за формулою Маклорена

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+o\left(t^4\right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),$$

знаходимо:

$$\ln\left(1+\sin x\right) = \ln\left(1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)\right)\right) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^4 +$$

$$+o\left(x^4\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right). \quad \blacksquare$$

Приклад 2.15. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$ за допомогою формули Маклорена.

Розв'язання. Представимо чисельник та знаменник дробу за допомогою формули Маклорена до x^4:

$$\operatorname{tg}^4 x = \left(x+o\left(x\right)\right)^4 = x^4 + o\left(x^4\right);$$

$$1-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos x = 1-\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^4+o\left(x^4\right)\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right) = \frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right).$$

Підставляємо ці вирази у границю та отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2.16. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \dfrac{x^2+4}{x}$, **б)** $y = x^3 e^{-x}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції $D\left(y\right) = \left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty;\right)$.

2. $y\left(-x\right) = \dfrac{\left(-x\right)^2+4}{-x} = -\dfrac{x^2+4}{x} = -y\left(x\right)$, тому функція є непарною.

3. Функція неперіодична.

4. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x^2+4}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^2+4}{x}=+\infty$, тому точка $x=0$ є точкою розриву 2-го типу.

5. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0\pm} y(x)=\pm\infty$, то пряма $x=0$ (вісь Oy) є вертикальною асимптотою графіка даної функції; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=\pm\infty$, тому горизонтальні асимптоти відсутні. Шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0.$$

Пряма $y=x$ є похилою асимптотою.

6. Точки перетину з координатними осями відсутні, оскільки $y\neq 0$, а точка $x=0\notin D(y)$. При $x<0$ $y(x)<0$, при $x>0$ $y(x)>0$.

7. Дослідимо $y(x)$ на монотонність та знайдемо точки екстремуму. Знаходимо похідну $y'(x)$:

$$y'(x)=\left(\frac{x^2+4}{x}\right)'=\frac{2x^2-x^2-4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}.$$

Знаходимо критичні точки: $y'=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$.

На проміжках $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$ $y'>0$, тому тут функція зростає, на $(-2;0)$ і на $(0;2)$, $y'<0$, функція спадає. Точка $x=0\notin D(y)$, $x=-2$ – точка локального максимуму, $y(-2)=-4$, $A(-2;-4)$, $x=2$ – локального мінімуму, $y(2)=4$, $B(-2;-4)$.

Знаки y'	+ – – +
Характерні точки	-2 0 2
Напрямки монотонності, loc extr	↗ max ↘ ↘ min ↗
Значення функції в точках loc extr	–4 ∄ 4

8. Визначимо характер опуклості та точки перегину функції. Для цього знайдемо другу похідну:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)' = \left(1-\frac{4}{x^2}\right)' = \frac{8}{x^3}.$$

$y'' \neq 0$, тому точки перегину функції відсутні. Друга похідна $y''(x) < 0$ на проміжку $(-\infty;0)$, тому тут функція опукла вгору, $y''(x) > 0$ на інтервалі $(0;+\infty)$, тому на цьому проміжку функція є опуклою вниз.

Знаки y''	$-$ $+$
Характерні точки	0
Напрямки опуклості, точки перегину	$\cap$ $\cup$
Значення функції в точках перегину	$\nexists$

9. На основі виконаного дослідження будуємо графік функції (див. рис.2.1). ■

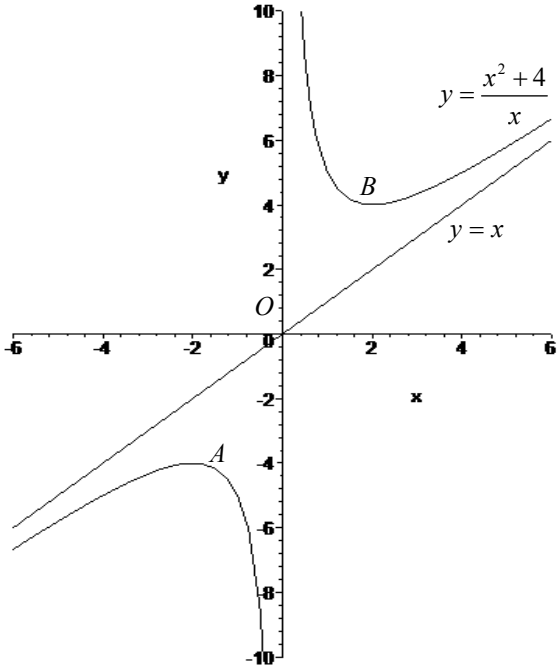


Рис. 2.1.

б) $y = x^3 e^{-x}$.

1. Область визначення функції $D(y) = \mathbb{R}$.

2. $y(-x) = -x^3 e^x$, $y(-x) \neq y(x) \wedge y(-x) \neq -y(x)$, тому функція ні парна, ні непарна.

3. Функція неперіодична.

4. Функція є неперервною на всій числовій прямій.

5. Оскільки $y(x)$ неперервна на всій числовій прямій, то вертикальні асимптоти відсутні;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = 0$, тому $y = 0$ – горизонтальна асимптота при $x \to +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{-x} = -\infty$, тому при $x \to -\infty$ горизонтальних асимптот немає;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$, звідси випливає, що похилі асимптоти у графіка даної функції відсутні.

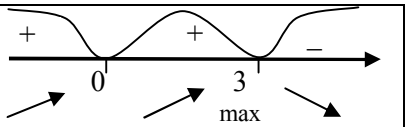
6. При $x = 0$ $y = 0$, графік функції проходить через початок координат.

7. Дослідимо функцію на монотонність.

$$y' = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3 - x),$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3.$$

На проміжку $(-\infty; 3)$ похідна невід'ємна, тут функція зростає, на $(3; +\infty)$ похідна від'ємна, на цьому проміжку функція спадає. Точка $x = 3$ є точкою максимуму, $y_{\max} = y(3) = \dfrac{27}{e^3} \approx 1{,}344$, $A\left(3; \dfrac{27}{e^3}\right)$. Точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, оскільки при переході через неї похідна не змінює знак.

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\dfrac{27}{e^3} \approx 1{,}344$

8. Визначимо тип опуклості функції.

$$y'' = \left(y'\right)' = 2xe^{-x}\left(3-x\right) - x^2e^{-x}\left(3-x\right) - x^2e^{-x} = xe^{-x}\left(x^2-6x+6\right)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x^2-6x+6=0,\ x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3}.$$

На $\left(-\infty;0\right)$ і на $\left(3-\sqrt{3};3+\sqrt{3}\right)$ $y''<0$, тут функція опукла вгору.

На $\left(0;3-\sqrt{3}\right)$ і на $\left(3+\sqrt{3};+\infty\right)$ $y''>0$, тому на цих проміжках функція опукла вниз. Точки x_1, x_2, x_3 є точками перегину, $y\left(0\right)=0, O(0;0)$; $y\left(3-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}574, C\left(3-\sqrt{3};0{,}574\right)$; $y\left(3+\sqrt{3}\right)\approx 0{,}933, D\left(3+\sqrt{3};0{,}933\right)$.

Знаки y''	$-$	$+$	$-$	$+$
Характерні точки		$x_1=0$	$x_2=3-\sqrt{3}$	$x_3=3+\sqrt{3}$
Напрямки опуклості, точки перегину	$\cap$	перегин $\cup$	перегин $\cap$	перегин $\cup$
Значення функції в точках перегину		0	$\approx 0{,}574$	$\approx 0{,}933$

9. На основі виконаного дослідження будуємо графік, наведений на рис. 2.2. ■

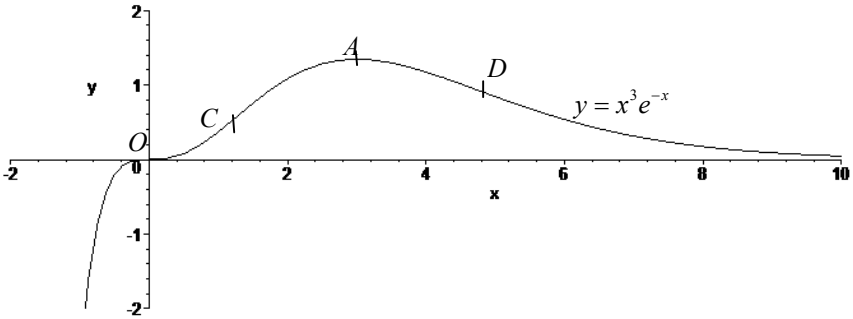


Рис. 2.2.

Розділ 3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

3.1. Знайти похідні функцій за означенням:

а) $y = 2x^2 - 4$; б) $y = \dfrac{1}{x+1}$; в) $y = x^3$;

г) $y = \sqrt{x+2}$; д) $y = \sqrt[3]{x-1}$; е) $y = \operatorname{arctg} x$;

є) ; ж) $y = \arcsin 2x$; з) $y = \arccos x$.

3.2. Знайти за означенням похідну функції у точці x_0 або довести, що похідна не існує.

а) $y = x^2 \sin(x-2)$, $x_0 = 2$: б) $y = e^{x^2}$, $x_0 = 1$;

в) $y = x^3(x-1)^2(x+1)$, $x_0 = 1$; г) $y = (x+1)\sin x^2$, $x_0 = 0$;

д) $y = x \cdot 2^{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$; е) $y = |\cos x|$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

є) $y = \cos^2 x \cdot \cos x^2$, $x_0 = 0$; ж) $y = \cos(\cos x)$, $x_0 = 0$.

3.3.–3.41. Знайти похідні функцій.

3.3. $y = x^2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **3.4.** $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)\sin x$.

3.5. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$. **3.6.** $y = 7^x \cdot x^7$.

3.7. $y = \left(x^2 + 1\right)^{10}$. **3.8.** $y = \sin^5 x - 3\sin^2 x$.

3.9. $y = e^{\operatorname{tg} x}$. **3.10.** $y = \sqrt{\ln x}$.

3.11. $y = 5^{2x - \sqrt{x}}$. **3.12.** $y = \left(x^2 + 4\right)^{\operatorname{tg} x}$.

3.13. $y = x^2 \sin^2 x + \dfrac{\sqrt{\cos x}}{\ln x}$. **3.14.** $y = \sin^3 5x \cdot \cos^2 \dfrac{x}{3}$.

3.15. $y = \dfrac{x^5}{8\left(1 - x^2\right)^4}$. **3.16.** $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$.

3.17. $y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. **3.18.** $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3.19. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}$. **3.20.** $y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

3.21. $y = -\dfrac{1}{2\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} x$. **3.22.** $y = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

3.23. $y = 3b^2 \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

3.24. $y = 2^{\arcsin 3x} + (1-\arccos 3x)^2$.

3.25. $y = \ln\arcsin x + \dfrac{1}{2}\ln^2 x + \arcsin\ln x$.

3.26. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

3.27. $y = \dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

3.28. $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$ (№Д861).

3.29. $y = \sin(\sin(\sin x))$ (№Д866).

3.30. $y = \ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$ (№Д899).

3.31. $y = x + x^x + x^{x^x}$.

3.32. $x^{\sin x} + (\sin x)^x$.

3.33. $y = \sqrt[x]{x}$ (№Д963).

3.34. $y = \sqrt[x]{\sin x}$.

3.35. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ (№Д964).

3.36. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ (№Д962).

3.37. $y = \dfrac{\ln^x x}{x^{\ln x}}$ (№Д965).

3.38. $y = \left(\dfrac{\arcsin\left(\sin^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}\right)^{arctg^2 x}$ (№Д965.1).

3.39. $y = (\arccos x)^2\left(\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + 0{,}5\right)$ (№Д970).

3.40. $y = \dfrac{e^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \dfrac{1}{2}\ln\left(1-e^{-2x^2}\right)$ (№Д975).

3.41. а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ (№Д985 б);

б) $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x) \neq 0,\ \psi(x) > 0)$ (№Д985 в),

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовні функції;

в) $y = f(x^2)$ (№Д986 а);

г) $y = f\left(\sin^2 x\right) + f\left(\cos^2 x\right)$ (№Д986 б),

де $f(u)$ – диференційовна функція.

3.42. (№Д984) Знайти логарифмічну похідну від функції y, якщо

а) $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y = \dfrac{x^2}{1-x} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{\alpha_n}$;

г) $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$.

3.43. Визначити області існування обернених функцій $x = x(y)$ та знайти їх похідні, якщо

а) $y = x^5 + \log_2 x$; б) $y = x^3 + 2^x$; в) $y = \operatorname{ch} x$; г) $y = \operatorname{cth} x$.

3.44 Виділити однозначні неперервні гілки обернених функцій $x = x(y)$, знайти її похідні, побудувати графіки, якщо

а) $y = 2x^2 + x^4$; б) (№Д,1037 в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

3.45. (№Д978) Знайти похідні функцій, якщо

а) $y = \left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$; б) $y = \arccos\dfrac{1}{|x|}$; г) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

3.46. Знайти похідні і побудувати графіки функцій та їх похідних:

а) $y = |x| \cdot x$ (№Д977 б); б) $y = \log_2 |x|$;

в) (№Д979) $y = \begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1 \le < x \le 2; \\ -(2-x) & \text{при } 2 < x < +\infty; \end{cases}$

г) (№Д980) $y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a \le x \le b; \\ 0 & \text{поза сегментом } [a,b]; \end{cases}$

д) (№Д981) $y = \begin{cases} x & \text{при } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$

3.47. (№Д964) Знайти $f'(a)$, якщо

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

де функція $\varphi(x)$ – неперервна в точці a.

3.48. (№Д965) Показати, що функція

$$f(x) = |x-a|\varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ – неперервна функція в точці a і $\varphi(a) \ne 0$ не має похідної в точці a. Знайти односторонні похідні $f'_-(a)$ і $f'_+(a)$.

3.49. Дослідити функцію

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, \quad \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

на диференційованість.

3.50. (№Д1010) Нехай

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \le x_0; \\ ax+b, \text{ якщо } x > x_0. \end{cases}$$

Як слід підібрати коефіцієнти a і b, щоб функція $f(x)$ була неперервною і диференційовною в точці $x = x_0$.

3.51. (№Д1011) Нехай

$$F(x)=\begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \le x_0; \\ ax+b, \text{ якщо } x > x_0, \end{cases}$$

де $f(x)$ диференційовна зліва при $x = x_0$. При якому наборі коефіцієнтів a і b функція $F(x)$ буде неперервною і диференційовною в точці x_0.

3.52. (№Д999) Дослідити на диференційованість функції:

а) $y=\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$; б) $y=|\cos x|$;

в) $y=\left|\pi^2-x^2\right|\cdot\sin^2 x$; г) $y=\arcsin(\cos x)$;

д) $y=\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2 & \text{при } |x|\le 1; \\ |x|-1 & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

3.53. Для функції $f(x)$ визначити ліву похідну $f'_-(x)$ і праву похідну $f'_+(x)$, якщо

а) $f(x)=\left[x-\frac{1}{2}\right]\cdot\cos\pi x$, де $[x]$ – ціла частина числа x;

б) (№Д1002) $f(x)=x\cdot\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$; в) (№Д1003) $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$;

г) (№1004) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{при } x\ne 0; \\ 0 & \text{при x=0.} \end{cases}$

3.54 (№Д997)**.** Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & \text{при } x\ne 0; \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

має точки недиференційовності в будь-якому околі точки $x = 0$, але диференційовна в цій точці.

3.55. Знайти диференціали функцій для довільних аргументу і приросту:

а) $y = x\ln x - x$; б) $y = e^{-x^2}$; в) $y=\frac{x}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

3.56. Знайти

а) (№Д1090 а) $d\left(xe^{x}\right)$; б) (№Д1090 г) $d\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

в) (№Д1090 ж) $d\left(\ln\left(1-x^{2}\right)\right)$; г) (№Д1090 з) $d\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$;

д) (№Д1091) $d(uvw)$; е) (№Д1092) $d\left(\dfrac{u}{v^{2}}\right)$;

є) (№Д1095) $d\left(\ln\sqrt{u^{2}+v^{2}}\right)$; ж) (№Д1096 в) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$;

з) (№Д1096а) $\dfrac{d}{d(x^{3})}\left(x^{3}-2x^{6}-x^{9}\right)$; і) (№Д1096 г) $\dfrac{d\left(\operatorname{tg}x\right)}{d\left(\operatorname{ctg}x\right)}$,

де $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ диференційовні функції, x – незалежна змінна.

3.57. Для функції $y=2x^{2}-x$ обчислити приріст функції і диференціал при $x=1$, $\Delta x=0{,}01$.

3.58. Обчислити наближено:

а) $\sqrt{16{,}5}$; б) $\sqrt[3]{9}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[7]{129}$;

д) $e^{0{,}1}$; є) $\operatorname{arctg}0{,}9$; ж) $\sin 31^{\circ}$; з) $\lg 11$.

3.59. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої

а) $y=\dfrac{8a^{3}}{4a^{2}+x^{2}}$ у точці з абсцисою $x=2a$ (№Б832)[1];

б) $\begin{cases} x=\dfrac{2t+t^{2}}{1+t^{3}}; \\ y=\dfrac{2t-t^{2}}{1+t^{3}} \end{cases}$ в точках $t=0, t=1, t=\infty$ (№Д1078);

в) $y^{2}=\dfrac{x^{3}}{2a-x}$ (цисоїда) в точці $M(x_{0},y_{0})$ (№Б833);

г) $x^{2}(x+y)=a^{2}(x-y)$ в точці $M(0;0)$ (№Б846).

3.60. Знайти кути, під якими перетинаються лінії

а) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ і $y=\dfrac{x^{2}+4x++81}{16}$ (№Б859, 1);

б) $x^{2}+y^{2}-4x=1$ і $x^{2}+y^{2}+2y=9$ (№Б860, 2);

[1] Посилання на номери, в яких фігурує літера «Б», означатимуть, що цей приклад відповідає збірнику задач Бермана Г.М. [12].

в) $x^2 = 4ay$ і $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ (№Б863).

3.61. (№Б869) Показати, що для будь-якої точки $M(x_0, y_0)$ рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ відрізок нормалі від точки M до точки перетину з віссю абсцис дорівнює полярному радіусу точки М.

3.62. (№Б871) Показати, що ордината будь-якої точки лінії стала) є середня пропорційна між абсцисою і різницею абсцисі и під нормалі, що проведена до лінії в тій же точці.

3.63. (№Б873) Показати, що лінія $y = e^{kx} \sin mx$ дотикається до кожної з ліній $y = e^{kx}$, $y = -e^{kx}$ у всіх спільних з ними точках.

3.64. (№Б842) В точках перетину прямої $x - y + 1$ і параболи $y = x^2 - 4x + 5$ проведено нормалі до параболи. Знайти площу трикутника, що утворено нормалями і хордою, що сполучає указані точки перетину.

3.65. Знайти похідні другого порядку для функцій:

а) $y = e^x \cos x$; б) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$; в) $y = 2^{x^2}$;

г) $y = x^x$; д) (№Д1115) $y = \left(x^2 + 1\right) \operatorname{arctg}\left(x^2 + 1\right)$;

е) $y = \ln u(x)$; є) (№Д1122) $y = \ln \dfrac{u}{v}$; ж) (№Д1124) $y = u^v$,

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ двічі диференційовні функції, x – незалежна змінна.

3.66. (№Д1125–1128) Знайти похідні $y'_x . y''_{x^2}, y'''_{x^3}$, якщо $f(x)$ - тричі диференційовна функція:

а) $y = f(x^2)$; б) $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; в) $y = f(e^x)$; г) $y = f(\ln x)$.

3.67. Знайти $d^2 y$, якщо

а) (№Д1133) $y = x^x$; б) (№Д1139) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$;

а) (№Д1137) $y = a^u$;; в) (№Д1136) $y = u^m v^n$ (m і n – сталі),

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ двічі диференційовні функції, x – незалежна змінна.

3.68 Знайти похідні $y'_x . y''_{x^2}, y'''_{x^3}$ від функцій, що задані параметрично:

а) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ (№Д1141); б) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ (№Б1074, 1);

в) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = bt\sin t \end{cases}$ (№Б1075); е) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$ (№Б1074, 2)

є) $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$ (№Д1046).

3.69 Знайти похідні y'_x. y''_{xx} від функцій, що задані в неявному вигляді:

а) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 3$; б) (№Б794) $x^3 + y^3 = 3axy$;

в) (№Б804) $x^y = y^x$; г) (№Б795) $y^2\cos x = a^2\sin 3x$;

д) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$; е) $xe^y - y^2 = 0$; є) $\sin(xy) = y$;

ж) $x^2 y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; з) (№Б809) $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$;

і) (№Б811) $y\sin x - \cos(x-y)$.

3.70. Знайти диференціал указаного порядку:

а) $y = x^7$, $d^7 y$; б) $y = x\sin 5x$, $d^{10} y$; в) $y = \sin x \cdot \operatorname{sh} x$, $d^7 y$.

3.71. Знайти похідну вказаного порядку:

а) $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$ (№Д1289);

б) $y = \sqrt{x}$, $y^{(10)}$ (№Д1158); в) $y = \dfrac{e^x}{x}$, $y^{(10)}$ (№Д1162);

г) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$, $y^{(n)}$ (№Д1189); д) $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$, $y^{(n)}$;

ж) $y = \sin^2 x$, $y^{(n)}$ (№Д1193); з) $y = x^3\sin 3x$, $y^{(50)}$;

є) $y = \dfrac{e^x}{x}$, $y^{(n)}$ (№Д1205); і) $y = e^x\sin x$, $y^{(n)}$ (№Д1206);

к) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$, $y^{(n)}$; л) $y = (x^3+2x+5)e^{3x}$;

м) $y = \ln\left(x^2-3x+2\right)$, $y^{(n)}$; н) $y = \ln\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}$, $y^{(n)}$;

о) $y = x\ln\left(x^2 - 9\right)$, $y^{(n)}$; п) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}}$, $y^{(n)}$;

р) $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)\ln(x-1)$, $y^{(n)}$.

3.72. (№Б1118) Перевірити здійсненність теореми Ролля для функції $y = 4^{\sin x}$ на відрізку $[0, \pi]$.

3.73. (№Б1121) Функція $y = |x|$ приймає рівні значення на кінцях відрізка $[-a; a]$. Запевнитися в тому, що похідна від цієї функції ніде на цьому відрізку не обертається в нуль. Пояснити уявну суперечність з теоремою Ролля.

3.74. (№Б1125) Не обчислюючи похідну функції

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

з'ясувати, скільки дійсних коренів має рівняння $f'(x) = 0$, і вказати інтервали, в яких вони лежать.

3.75. Написати формулу Лагранжа для функцій

а) (№Б1127) $y = \sin 3x$ на відрізку $[x_1; x_2]$;

б) (№Б1128) $y = x(1 - \ln x)$ на відрізку $[a; b]$;

в) (№Б1129) $y = \arcsin 2x$ на відрізку $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

3.76. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною:

а) $y = \dfrac{1}{\ln(x^4 + 4x^2 + 10)}$; б) $y = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$; в) $y = \dfrac{1 + 2x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$;

г) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; д) $y = x - \ln(1 + x)$; е) $y = x^2 e^{-x}$.

3.77. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:

а) (№Б1188) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1; 1]$;

б) (№Б1189) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$;

в) (№Б1193) $y = \sin x - x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

г) (№Б1190) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $[0; 1]$;

д) (№Б1197) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - x}{1 + x}$, $[0; 1]$.

3.78. (№Б1210) Число 36 розкласти на два такі множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

3.79. (№Б1211) Потрібно виготовити шухляду з кришкою, об'єм якої дорівнює 72 см^3, причому сторони основи повинні відноситись як 1:2. Які повинні бути розміри всіх сторін, щоб повна поверхня була найменшою?

3.80. (№Б1215). Вібкритий чан має форму циліндра. При даному об'ємі V якими повинні бути радіус основи та висота циліндра, щоб його поверхня була найменшою.

3.81. (№Б1222) Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіусу R.

3.82. (№Б1231) Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, який описано навколо кулі радіусу R.

3.82. (№Б1232) Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса найменшої бічної поверхні, який описано навколо даної кулі.

3.83. (№Б1237) Через дану точку $P(1;4)$ провести пряму так, щоб сума довжин додатних відрізків, що відтинаються нею на координатних осях, була найменшою.

3.84. (№Б1241) на еліпсі $2x^2+y^2=18$ дані дві точки $A(1;4)$ і $B(3,0)$. Знайти на даному еліпсі третю точку C таку, щоб площа трикутника ABC була найбільшою.

3.85. Знайти формули для сум:

а) $2x+4x^3+6x^5+...+2nx^{2n-1}$;

б) $1+2\cdot 2^x+3\cdot 2^{2x}+...+n\cdot 2^{(n-1)x}$;

в) $1+2\cdot\sin x+3\cdot\sin^2 x+...+n\cdot\sin^{n-1} x$;

г) $1+2x^2+3x^4+..+nx^{2n-2}$;

д) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+..+n(n-1)x^{n-2}$;

е) $2x+5x^4+8x^7+...+(3n-1)x^{3n-2}$;

є) $\sin 2x+2\sin 4x+...+n\sin(2nx),\ x\neq k\pi$;

ж) $\mathrm{ch}2x+2\mathrm{ch}4x+...+n\mathrm{ch}(2nx),\ x\neq 0$;

з) $\sin 2x+2^2\sin 4x+...+n^2\sin(2n)x,\ x\neq k\pi$;

і) (№Д1026) $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+...+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n},\ x\neq 2^n k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

3.86. Довести нерівності:

а) (№Б1132) $\frac{a-b}{a}\le\ln\frac{a}{b}\le\frac{a-b}{b},\ 0<b<a$;

б)(№Б1133) $\frac{a-b}{\cos^2 a}\le\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}\,\mathrm{b}\le\frac{a-b}{\cos^2 b},\ 0<b<a<\frac{\pi}{2}$;

в) (№Б1134) $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$ при $b<a$, $n>1$ і $na^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<nb^{n-1}(a-b)$ при $b<a$, $n<1$;

г) (№Б1201) $\ln x\le\frac{2(x-1)}{x+1},\quad x>1$;

д) (№Б1202) $2x\cdot\mathrm{arctg}\,x\ge\ln(1+x^2)$;

е) (№Б1204) $\ln(1+x)\le\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x+1},\quad x>0$;

є) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$, $x>0$ (№Д1289 в);

ж) $1+2\ln x\le x^2$, $x>0$;

з) (№Б1205) $\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$, $x>0$;

і) (№Б1206) $\sin x+\operatorname{tg}x>2x$, $0<x<\pi/2$;

к) (№Б1207) $\operatorname{ch}x>1+\dfrac{x^2 2}{}$, $x\ne 0$;

л) (№Д1314 в) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$, $x>0$, $y>0$;

м) $2\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{2}<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$, $x>0$, $y>0$.

3.87. (№Д1264) Довести тотожності:

а) $2arctgx+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$, $|x|\ge 1$;

б) $3\arccos x-\arccos\left(3x-4x^3\right)=\pi$, $|x|\le\dfrac{1}{2}$;

3.87. Довести тригонометричні тотожності:

а) $\operatorname{cosec}x+\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}(x/2)$;

б) $\cos 4x-\sin 4x\cdot\operatorname{ctg}2x=-1$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}x-\sec x}{\cos x-\operatorname{ctg}x}+=\operatorname{tg}x\cdot\sec x$;

г) $\dfrac{1-2\sin^2 x}{1-\sin 4x}=\dfrac{1+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}2x}$.

3.88–3.113. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя.

3.88. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

3.89. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

3.90. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

3.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{1-\cos x}$.

3.92. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$.

3.93. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$.

3.94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}$.

3.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{sh}x}\right)$

3.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. **3.97.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{e^x}$.

3.98. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$. **3.99.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ (№Б1349).

3.100. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. **3.101.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$ (№Д1338).

3.102. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$ (№Д1361). **3.103.** $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$ (№Д1343).

3. 104. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{x^x}-1\right)$ (№Д1344). **3. 105.** $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$ (№Д1346).

3. 106. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ (№Д1347). **3. 107.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (№Д1349).

3. 108. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ (№Д1349). **3.109.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

3.110. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\sin x}\right)$ (№Б1358). **3.111.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

3.112. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$. **3.113.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3.114. (№Д1374 б) Дослідити можливість застосування правила Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}.$$

3.115. (№Б1498) Написати розвинення многочлена $x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степеням двочлена $(x-4)$.

3.116. (№Б1502) $f(x)$ – многочлен четвертого степеня. Знаючи, що $f(2)=-2,\ f'(2)=0, f''(2)=2, f'''(2)=-12, f^{IV}(2)=24$ обчислити $f(-1),\ f'(0),\ f''(1)$.

3.117. Написати розвинення функції $f(x)=x^x$ за цілими невід'ємним степеням двочлена $x-1$ до члену з $(x-1)^3$.

3.118. Написати розвинення за цілими невід'ємним степеням змінної x до членів указаного порядку включно наступних функцій:

а) $f(x)=\sin^2 x$ до x^{2n}; б) $f(x)=\sin^3 x$ до x^{2n+1};

в) $f(x)=x\sin x$ до x^{2n}; г) $f(x)=x^3\sin 3x$ до x^{2n};

д) $f(x)=\sqrt{1-2x}$ до x^n; е) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ до x^n;

є) $f(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$ до x^n; ж) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-5}$ до x^n;

з) $y=x\ln\left(1-x^2\right)$ до x^{2n+1}; і) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}}$ до x^n;

к) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ до x^4 (№Д1381);

л) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1-x)}$ до x^4;

м) $f(x)=\ln\cos x$ до x^6 (№Д1384);

н) $f(x)=\sin(\sin x)$ до x^3 (№Д1385);

о) $f(x)=\operatorname{tg}x$ до x^5.

3.119. Використовуючи формулу Тейлора, обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-0,5x^2}}{x^4}$ (№Д1398);

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$ (№Д1403);

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ (№Д1405);

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$ (№Д1406);

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$ (№Д1401);

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\cdot e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$ (№Д1402);

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ (№Д1404);

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ (№Д1406.1).

3.120. Використовуючи формулу Тейлора, наближено обчислити з точністю $0,0001$:

а) $\sqrt{16,5}$; б) $\sqrt[3]{9}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[7]{129}$;

д) e; є) $\cos 9^o$; ж) $\sin 18^\circ$; з) $\lg 1,1$.

3.121–3.123. Знайти проміжки опуклості, вгнутості і точки перегину графіка функції.

3.121. $y=x^3-5x^2+3x-5$. **3.122.** $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

3.123. $y=\operatorname{arctg}x-x$.

3.124–3.126. Знайти асимптоти графіків функцій.

3.124. $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$. **3.125.** $y=e^{\frac{1}{x}}$. **3.126.** $y=\dfrac{2x^2+x+3}{x+6}$.

3.127. Дослідити функції і побудувати їхні графіки:

а) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$ (№Д1479); б) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

в) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$ (№Д1477); г) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

д) $y=\dfrac{e^x}{1+x}$ (№Д1510); е) $y=x^2e^{-x}$;

є) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; ж) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (№Д1512);

з) $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ (№Д1497); і) $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ (№Д1503);

к) $y=x+\operatorname{arctg} x$ (№Д1516); л) $y=x\cdot\operatorname{arctg} x$ (№Д1518);

м) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ (№Д1519); н) $y=x-\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

о) $y=x^x$ (№Д1526); п) $y=(1+x)^{1/x}$ (№Д1528).

3.128. Побудувати криві, що задані в параметричній формі:

а) $\begin{cases} x=t+e^{-t}, \\ y=2t+e^{-2t} \end{cases}$ (№Д1535). б) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{1-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$ (№Д1534)

3.129. Побудувати графіки функцій, що задані в полярній системі координат (ρ,φ) $(\rho\ge 0)$:

а) $\rho=a\sin 2\varphi$ (лемніската); б) $\rho=a+b\cos\varphi$ (№Д1546);

в) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна:

1. *Ильин В.А.* Математический анализ / *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* – М.:Наука,1979.–720 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.*[1] Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Фихтенгольц Г.М.* –Т.1. – М.:Физматлит, 2006. – 680 с.
3. *Демидович Б.П.*[1] Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Демидович Б.П.* – М.:Наука,1990. – 624 с.
4. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / *И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; под общ. ред. В.А. Садовничего.*– М.: Факториал, 1996.–477 с.

Додаткова:

5. *Коши Г.А.Л.*[1] Дифференциальное и интегральное исчисление / *Коши Г.А.Л.*. – СПб: Императорская Академия Наук, 1831. – 245 с.
6. *Лопиталь Г.Ф.*[1] Анализ бесконечно малых / *Лопиталь Г.Ф.*. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1935. – 431 с.
7. *Эйлер Л.*[1] Дифференциальное исчисление / *Эйлер Л.* – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. -580 с.
8. *Trench W.F.*[1] Introduction to Real Analysis / *Trench W.F.* – Pearson Education, 2003. – 574 p. /
9. Задачи и упражнения по математическому анализу: учеб. пособие: В 2 кн. / *И. А. Виноградова* [и др.]. – Кн. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – М.: Высшая школа, 2002 - 724 с.
10. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / *Никольский С.М.* –Т.1.– М.:Наука.–1990.–528с.
11. *Давидов М.О.* Курс математичного аналізу / *Давидов М.О.* –Ч.1. Функції однієї змінної.– К.:Вища шк.–1990.–380 с.
12. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / *Берман Г.Н.* – М.:Наука,1985.–383 с.
13. *Шунда Н.М.* Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення / *Шунда Н.М., Томусяк А.А.* – К.:Вища шк.,1993.–375 с.
14. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 2 т. / *Кудрявцев Л.Д.* – Т.1.– М.:Высш.шк.,1988.–712с.

[1] http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm

15. *Кудрявцев Л. Д*[1]. Краткий курс математического анализа. В. 2 т. / *Л. Д. Кудрявцев*. – Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – М.: Физматлит, 2005. - 400 с.
16. *Кудрявцев Л.Д.*[1] Сборник задач по математическому аналізу. – Т.1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехов В.И., Щабунин М.И.*; ред.. Кутасова Л.Д.. – М.: Физматлит, 2003. -496 с.
17. *Каплан И.А.*[1] Практические занятия по высшей математике: В 5 ч. / *И.А. Каплан.* – Ч. 1.– Харьков: Изд-во Харьковского гос. университета, 1967. – 946 с.
18. Математический анализ: учебник для студ. вузов, обучающихся по спец. "Математика", "Прикладная математика" и "Информатика": В 2 ч. / *В. А. Ильин* [и др.]; ред. А. Н. Тихонов. – Ч. 1. – М.: Издательство Проспект, 2007. - 660 с.
19. *Ильин В.А*[1]. Основы математического анализа: В 2 ч. / *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* –М.: Физматлит.–Ч.1.–2005.–648 с.
20. *Зорич В.А.*[1] Математический анализ: В 2 ч. / *Зорич В.А.* – Ч.1.–М.: Фазис. – 1997. – 554 с.
21. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз: У 2 ч. / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. –Ч.1.– К.:Вища шк.–1992.–494 с.
22. *Ляшко И.И.*[1] Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по математическому анализу: В 5 т. / *И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головчак.* – Т.1 – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 360 с.
23. *Райхмист Р.Б.* Графики функций / *Райхмист Р.Б.* – М.:Высш.шк.,1991.–160 с.
24. *Запорожец Г.И.*[1] Руководство к решению задач по математическому анализу / *Запорожец Г.И.* – М.:Высш.шк.,1966.–460 с.

[1] http://techlibrary.ru/

Додаток А

Дві істотні границі й наслідки з них	Еквівалентні нескінченно малі функції
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;	$\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x}=1$;	$\arcsin x\sim x$, $\operatorname{arctg} x\sim x$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$;	$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$;	
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;	$e^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.	$a^x-1\sim x\ln a$ $(x\to 0)$.

Таблиця похідних

$\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$;	$C'=0$, $(x)'=1$, $\left(x^2\right)'=2x$, $\left(x^3\right)'=3x^2$;
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$;	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$; $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq 0$;
$(a^x)'=a^x\ln a$, $0<a\neq 1$;	$(e^x)'=e^x$;
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$;	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $x>0, 0<a\neq 1$;
$(\sin x)'=\cos x$;	$(\cos x)'=-\sin x$;
$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$;	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;
$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;	$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	$(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x\neq 0$;
$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$;	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$;
$\left(\lvert x\rvert\right)'=\operatorname{sgn} x$ при $x\neq 0$;	$[x]'=0$ при $x\notin\mathbb{Z}$.

Таблиця похідних вищих порядків

$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \Rightarrow \quad \left(P_m(x)\right)^{(n)} = \begin{cases} a_m m!, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases}$;	
$\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha - n}$, $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$;	$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $x \neq 0$;
$\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$, $0 < a \neq 1$;	$\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$;
$\left(\log_a x\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln^n a}$, $0 < a \neq 1$, $x > 0$;	$\left(\ln x\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$, $x > 0$;
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.	$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

Таблиця розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$;
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o\left(x^{2m}\right)$;
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o\left(x^{2m+1}\right)$;
$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$;
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$;
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$.

Деякі скінченні суми і добутки

$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$;
$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{x}{2}}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$, $x \neq 2^n k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ
(українською мовою)

Гребенюк Сергій Миколайович
Д'яченко Наталія Миколаївна
Клименко Михайло Іванович
Красікова Ірина Володимирівна
Тітова Ольга Олександрівна
Леонтьєва Вікторія Володимирівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ І:
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практикум з розв'язання задач
для студентів напрямів підготовки «Математика»,
«Прикладна математика», «Інформатика»,
«Програмна інженерія»

Рецензент Стєганцева П.Г.

Відповідальний за випуск Гребенюк С.М.

Коректор Д'яченко Н.М.